

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES



## MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

## MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique Computationnelle

Présentée Par l'étudiant

**Antri hafidha**

Sur le thème

*L'étude du lagrangien d'un champ scalaire  
complexe*

Soutenu le 22/06/2022 devant le jury composé de :

Mr. LASRI Boumediene	Président	Pr	U. Saida
Mr Kouidri Ismail	Rapporteur	M.C.	U. Saida
Mr Abada Ahmed	Examineur	M.C.	U. Saida

Année Universitaire : 2021-2022

# *Dédicace*

*Je dédie cet humble travail à l'homme qui m'a apporté un soutien moral et matériel et la source de ma joie et de mon bonheur*

*La personne qui s'est toujours sacrifiée pour me voir la villa la plus réussie de ma carrière académique, ma chère maman qui Dieu la protège*

*La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, et à tous mes frères et ma chère tante et ma sœur wahiba, et à mon chère père, qui dieu lui fasse miséricorde*

*Aux personnes que j'ai aimées et à mes amis bouzid houria et Fatah nour ikramet à mon professeur smail Kouidri*

*Je dédie ce travail, qui leur fait grand plaisir d'abord de les conseiller, de les aider et de les encourager.*

*Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, qui m'accompagnaient durant ma carrière senior, mes gentils amis, mes camarades de classe*

# Remerciements

*Avant de présenter ce travail, je remercie Dieu tout puissant, de m'avoir permis d'arriver à ce niveau d'étude.*

*A travers ce modeste mémoire je tiens à présenter mes sincères remerciements et mon profonde reconnaissance à mon encadreur **Smail Kouidri** de l'orientation est de son soutien tout au long de ce travail.*

*Mes remerciements s'étendent également au Chef de département ainsi qu'à tous nos professeurs et examinateurs de **département de physique et plus particulier en physique computationnelle** et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.*

*je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes amis, qui ma ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de cette mémoire.*

*A tous ceux et celles qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire, qu'ils trouvent ici mes haute considération.*

*Merci à tous et à toutes.*

**Hafidha antri**

## Sommaire

Introduction générale :.....	6
Référence: .....	8
Chapitre I : Les origines de la théorie quantique .....	9
I-1 Qu'est-ce qu'une théorie quantique ? .....	9
I .2 Présentation de $h$ : .....	9
I .3 Corps noirs : .....	10
I .4 Rendre la lumière quanta réelle : .....	13
I .5 Au-delà de la lumière : .....	15
I .6 Le modèle Bohr de l'atome : .....	16
I .7L'ancienne théorie quantique : .....	17
I .8 Mécanique quantique : .....	19
Référence : .....	22
Chapitre II : lagrangien d'un champ scalaire complexe .....	23
II .1. Introduction et théorie classique des champs :.....	23
II. 1.1. Introduction :.....	23
II .1.2. Systèmes mécaniques discrets et continus : .....	27
II .1 .4 Formulation covariante :.....	30
II. 1.6 Exemples de champs classiques .....	39
II.1.7 Symétries et lois de conservation :.....	43
II. 1 .8 Formalisme de Hamilton : .....	45
II.2 .1 L'équation de Klein-Gordon : démarche historique .....	46
Références:.....	48
Chapitre III : résultants et discussion .....	49
III-1. Introduction : .....	49

III-2. Méthode de calcul : .....	50
III.3 Méthode des différences finies :.....	53
III.4 Organigramme de calcul : .....	54
III.4.1 résultant et des cussies :.....	55
<b>Conclusion générale : .....</b>	<b>63</b>

## Liste des figures

Fig I. 01. Un spectre de corps noir idéal ( <i>SchwarzerKörper</i> ) et son approximation du monde réel ( <i>Quartz</i> ). (De <i>Clemens Schaefer, Einführung in die TheoretischePhysik, 1932</i> ).....	11
Fig I. 02. Installation expérimentale pour mesurer le rayonnement du corps noir. (Le corps noir est le tube étiqueté C). Cette conception était un produit de l'Institut impérial allemand de physique et de technologie à Berlin, où les études sur les corps noirs ont été poursuivies en tenant compte des normes industrielles d'intensité lumineuse. (De Müller-Pouillet's <i>Lehrbuch der Physik, 1929</i> ).....	12
Fig I. 03. Résultats expérimentaux et théoriques sur le spectre du corps noir. Les points de données sont des valeurs expérimentales ; La formule de Planck est la ligne continue. (Réimprimé de H. Rubens et F. Kurlbaum, <i>Annalender Physik, 1901</i> .).....	13
Fig I. 04. Le spectre des raies de l'hydrogène. (Extrait de G. Herzberg, <i>Annalen der Physik, 1927</i> ).....	16
Figure III.1-a : Présentation du champ en x et t de $\phi_1$ .....	57
Figure III.1-b : Présentation du champ en x et t de $\phi_2$ .....	58
Figure III-2 : Présentation du champ scalaire complexe.....	59
La Figure III-3 montre l'évolution de la partie réelle de notre champ complexe une forme Gaussienne est observée ce qui nous permet de dire que notre partie réelle est symétrique par rapport a l'origine. ....	60
La Figure III-4 : montre l'évolution de la partie imaginaire de notre champ complexe une forme avec trois lobes symétrique par rapport a l'origine. ....	61
La Figure III-5 : montre Présentation de la partie imaginaire d'un champ scalaire complexe via un potentiel harmonique .....	62
La figure III-6 : Presentation de ma partie réelle du champ scalaire complexe en ligne continue La ligne en pointille donne la variation du potentiel harmonique.....	63

## Résumé :

Dans ce travail, nous avons étudiés un lagrangien de type champ scalaire complexe. Ce type de lagrangien est compatible pour nous décrire beaucoup plus de phénomène physique qui se passe à l'échelle relativiste notamment les protons et plus précisément les particules chargés. Ce type de lagrangien entre dans le cadre de la théorie quantique des champs, un contexte qui constitue un des plus grandes réalisations de la physique théorique moderne. Cette théorie des tentatives effectuées à la fois compatible avec la théorie de la relativité restreinte et la mécanique quantique constitue les deux piliers de la physique moderne. Alors nous avons calculés numériquement la variation d'un champ scalaire complexe via les équations d'Euler-Lagrange inspirés par un principe de moindre action qui stipule une minimisation du chemin physique. Avec un choix d'un potentiel donné exemple : harmonique nous avons pu déterminés l'évolution de la partie réelle et la partie imaginaire de tels champs.

## Abstract

In this work, we have studied a Lagrangian of the complex scalar field type. This type of Lagrangian is compatible to describe to us much more physical phenomenon which occurs on the relativistic scale in particular the protons and more precisely the charged particles. This type of Lagrangian falls within the framework of quantum field theory, a context which constitutes one of the greatest achievements of modern theoretical physics. These theoretical attempts made at the same time compatible with the theory of special relativity and quantum mechanics constitute the two pillars of modern physics. So we numerically calculated the variation of a complex scalar field via the Euler-Lagrange equations inspired by a principle of least action which stipulates a minimization of the physical path. With a choice of a potential given example: harmonic we were able to determine the evolution of the real part and the imaginary part of such fields

## الملخص

في هذا العمل، درسنا لاغرانج من نوع المجال القياسي المعقد. هذا النوع من لاغرانج متوافق ليصف لنا المزيد من الظواهر الفيزيائية التي تحدث على المقياس النسبي على وجه الخصوص البروتونات وبشكل أكثر دقة الجسيمات المشحونة. يقع هذا النوع من لاغرانج ضمن إطار نظرية المجال الكمي، وهو سياق يشكل أحد أعظم إنجازات الفيزياء النظرية الحديثة. هذه المحاولات النظرية التي تمت في نفس الوقت متوافقة مع نظرية النسبية الخاصة وميكانيكا الكم تشكل الركيزتين الأساسيتين للفيزياء الحديثة. لذلك قمنا بحساب التباين في حقل رقمي معقد من خلال معادلات أويلر-لاغرانج المستوحاة من مبدأ أقل إجراء والذي ينص على تصغير المسار المادي. من خلال اختيار مثال معين محتمل: التوافقي، تمكنا من تحديد تطور الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من هذه الحقول.

## Introduction générale :



Hendricks Casimir (1909-2000), physicien hollandais, directeur des laboratoires Philips à Eindhoven, professeur à l'université de La Haye. Il travaille dans le domaine de la supraconductivité, des diélectriques et prédit l'effet qui porte son nom : deux plaques métalliques parallèles situées dans le vide s'attirent. Son nom est aussi associé à l'opérateur qui commute avec tous les générateurs d'un groupe [1].

Ce travail de mémoire de master en physique computationnelle entre dans le cadre de la préparation d'un diplôme de fin d'étude Master physique computationnelle. Notre objectif est d'étudier un lagrangien de type champ scalaire complexe.

En effet, la définition d'un champ en général est décrite par le physicien Michael Faraday qui réalise l'importance du concept de champ, forme d'existence de la matière, capable d'emmagasiner de l'énergie ou de l'impulsion.

Le concept de champ paraît abstrait au premier abord, mais il est bien plus simple qu'on ne le pense. Imaginons que pour connaître la température de chaque point d'une pièce nous utilisions une fonction mathématique qui nous donne la température pour chaque point de la pièce (identifié par trois coordonnées : longueur, largeur et hauteur) : c'est le champ des températures de la pièce. De même, la fonction mathématique de la vitesse d'écoulement de l'eau dans une rivière à chacun de ses points représente le champ des vitesses de la rivière [2].

Dans la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, Faraday effectue de nombreuses expériences et montre que les champs électriques et magnétiques sont étroitement liés. Mais c'est James Clark Maxwell qui pose les bases mathématiques de la théorie électromagnétique : par les équations qui portent son nom, il montre comment les champs électriques et magnétiques sont générés. Un champ électrique est engendré par une charge électrique ou par une variation de champ magnétique. Un champ magnétique est engendré par un courant électrique ou par une variation de champ électrique. Selon cette dernière possibilité, introduite par Maxwell à partir de considérations théoriques, les champs électriques et magnétiques peuvent exister en l'absence des charges ou des courants électriques : la variation du champ électrique produit un champ magnétique, la variation de ce dernier produit à son tour un champ électrique, et ainsi de suite. Ces champs qui s'auto-entretiennent décrivent donc la propagation d'une onde électromagnétique. C'est par exemple le cas lors d'une communication par téléphone sans fil (une fois générée par l'antenne, l'onde électromagnétique se propage pour arriver au récepteur du correspondant) ou encore quand la lumière se propage depuis la source qui l'a engendrée jusqu'à nos yeux [3].



Élaborée en 1873, la théorie électromagnétique de Maxwell a connu un grand succès. Aujourd'hui, on l'utilise toujours pour construire des systèmes de télécommunication terrestre ou par satellite, concevoir des téléphones portables et des avions invisibles au radar [4].

C'est une théorie classique des champs, dans laquelle les lois quantiques n'interviennent pas. En effet, alors que la mécanique quantique décrit un nombre constant et fini de particules, la théorie de Maxwell décrit un système qui a une infinité de degrés de liberté car un champ a un nombre infini de variables, la valeur d'un champ variant pour chaque point de l'espace et à chaque instant. Les physiciens ont cherché à introduire les lois quantiques dans la théorie de Maxwell et développé ainsi une nouvelle théorie : l'électrodynamique quantique [5 QED].

L'étude du rayonnement du corps noir, grâce auquel Max Planck émet en 1900 l'hypothèse des quanta, fait intervenir l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière, mais les physiciens n'ont pas cherché immédiatement à traiter le champ électromagnétique mathématiquement, d'un point de vue quantique, cette voie était alors pratiquement inaccessible à cause de son infinité de degrés de liberté. Ils ont donc commencé par traiter des systèmes plus simples, ayant un nombre fini de degrés de liberté, et sont ainsi parvenus à poser les bases mathématiques de la mécanique quantique. C'est Dirac qui en 1928 explique comment rendre quantique un système qui a une infinité de degrés de liberté. On savait déjà décrire selon les lois de la physique classique un système qui a une infinité de degrés de liberté, par exemple une corde qui vibre : elle a des modes d'oscillation, à savoir une fréquence de base (dite fréquence fondamentale) et ses multiples (les harmoniques). La corde est un objet unidimensionnel mais le concept de mode d'oscillation est valable aussi pour les objets tridimensionnels, comme par exemple le champ électromagnétique contenu dans une grande boîte parallélépipédique. On savait dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle calculer ces modes d'oscillation. [6]

Les modes d'oscillation d'une corde qui vibre : la fréquence de base (fréquence fondamentale) et les harmoniques (multiples de la fréquence fondamentale). Si la longueur de la corde tend vers l'infini, les fréquences des modes d'oscillation prennent des valeurs continues, ce qui signifie que l'espacement entre les fréquences de deux harmoniques successives tend vers zéro. Comment introduire les lois quantiques ? Chaque mode d'oscillation oscille avec une fréquence déterminée, les lois quantiques impliquent que l'énergie de cet oscillateur (qui est égale à la fréquence multipliée par la constante de Planck) ne puisse prendre que des valeurs discrètes, proportionnelles au numéro du niveau d'énergie (les valeurs de l'énergie sont équidistantes). S'il y a dans la boîte  $n$  photons de même fréquence, alors le mode d'oscillation du champ électromagnétique dont la fréquence est égale à celle des photons est excité dans le  $n$ -ème niveau. Voilà le principe fondamental de la théorie quantique des champs, il est valable pour toute particule.

**Référence:**

- [1]. J. P. Derendingen, Théorie quantique des champs, PPUR, 2001
- [2]. D. Girths, Introduction to Elementary Particles, John Wiley & Sons, 1987
- [3]. S. Weinberg, the Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press, 1995
- [4]. M. E. Perkin ET D. V. Schroder, an Introduction to Quantum Field Theory, West view Press, Peruses Books Publishing, 1995
- [5]. N. N. Bogoliubov, D. V. Shirked, Introduction to the Theory of Quantized Fields (Interscience Monographs in Physics and Astronomy), John Wiley & Sons, 1959
- [6]. J. D. Drell, S. D. Bjorken, Relativistic Quantum Mechanics (International Series in Pure & Applied Physics), McGraw-Hill College, 1965

## Chapitre I: Les origines de la théorie quantique

### I -1 Qu'est-ce qu'une théorie quantique ?

Cette question a été posée il y a longtemps depuis que le célèbre article de Heisenberg a introduit l'élément de la discontinuité que nous appelons le Quantum il y a un siècle. Depuis lors, le gros morceau de la Nature (ou du moins de nos théories à ce sujet) a été intégré dans notre conception de base du monde. Cela a incité à repenser fondamentalement la théorie physique. En même temps, cela a aidé à comprendre toute une gamme de comportements particuliers qui se manifestent principalement à des niveaux microscopiques.

Dès son début, le nouveau régime était symbolisé par la constante de Planck  $h$ , introduite dans son célèbre article de 1900. Mesurant l'écart du monde par rapport à un comportement continu et régulier,  $h$  s'est avéré être un très petit nombre, mais différent de zéro. Partout où il est apparu, d'étranges phénomènes l'ont accompagné. Ce que cela signifie vraiment était bien sûr mystérieux. Tandis que l'ère quantique a été inaugurée en 1900, une théorie quantique prendrait beaucoup plus de temps à se concrétiser. L'introduction de la discontinuité n'était qu'une tentative, et seulement une première. Et même par la suite, la refonte de la théorie physique a été hésitante et lente. Les physiciens ont réfléchi pendant des années à ce que pourrait être une théorie quantique. Se demandant comment l'intégrer au puissant appareil de la physique du XIXe siècle, ils se demandent également quel rapport il entretient avec les théories « classiques » existantes. Pour certains, les réponses se sont cristallisées avec la mécanique quantique, résultat d'un quart de siècle de travail. D'autres ont tenu à repenser davantage. Si le résultat n'a pas été à la satisfaction de tous, la théorie quantique s'est néanmoins avérée remarquablement fructueuse, et la perplexité en cours de route, malgré ses frustrations, ne peut être qualifiée que d'extraordinairement productive. [1]

### I -2 constant de Planck de $h$ :

L'histoire a commencé assez discrètement le 14 décembre 1900. Max Planck donnait une conférence à la Société allemande de physique sur le spectre continu des fréquences de la

lumière émise par un corps chauffé idéal. Quelque deux mois plus tôt, ce théoricien de 42 ans avait présenté une formule capturant de nouveaux résultats expérimentaux. Maintenant, avec le loisir de réfléchir et plus de temps à sa disposition, il cherchait à fournir une justification physique à sa formule. Planck a imaginé un morceau de matière, l'idéalisant quelque peu, comme équivalent à une collection de charges électriques oscillantes. Il a alors imaginé distribuer son énergie en morceaux discrets proportionnels aux fréquences d'oscillation. La constante de proportionnalité qu'il a choisi d'appeler  $h$  ; on écrirait maintenant  $\varepsilon = hf$ . Les fréquences d'oscillation déterminaient les fréquences de la lumière émise. Une chaîne de raisonnement tordue a ensuite reproduit la formule postulée de Planck, qui impliquait désormais la même constante naturelle  $h$ .

En regardant en arrière sur l'événement, on pourrait s'attendre à une fanfare révolutionnaire. Mais comme souvent dans l'histoire, les choses étaient plus ambiguës. Planck n'appelait pas ses éléments énergétiques des quanta et n'était pas enclin à souligner leur caractère discret, ce qui n'avait guère de sens en termes familiers. Ainsi, le sens de sa démarche n'est apparu que progressivement. Bien que le problème qu'il traitait ait été central à son époque, ses implications ont d'abord été considérées comme limitées. [2]

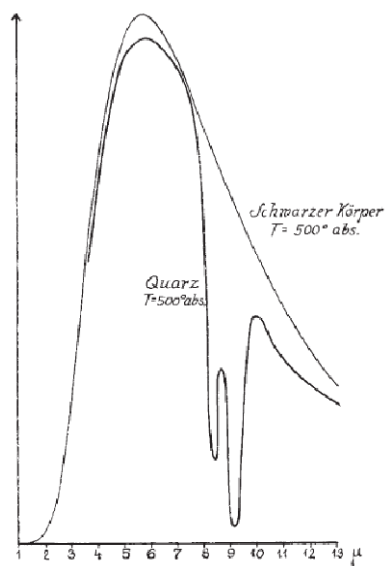
### I -3 Corps noirs :

Le comportement de la lumière dans son interaction avec la matière était en effet un problème clé de la physique du XIXe siècle. Planck s'est intéressé aux deux théories qui se chevauchaient dans ce domaine. Le premier était l'électrodynamique, la théorie de l'électricité, du magnétisme et des ondes lumineuses, mise au point par James Clark Maxwell dans les années 1870. La seconde, datant à peu près de la même période, était la thermodynamique et la mécanique statistique, régissant les transformations de l'énergie et son comportement dans le temps. Une question pressante était de savoir si ces deux grandes théories pouvaient être fusionnées en une seule, puisqu'elles portaient de notions fondamentales différentes.

À partir du milieu des années 1890, Planck s'est attaqué à un problème apparemment étroit, l'interaction d'une charge oscillante avec son champ électromagnétique. Ces études le mettent cependant en contact avec une longue tradition de travaux sur l'émission de lumière. Des décennies plus tôt, il avait été reconnu que les corps parfaitement absorbants «noirs»

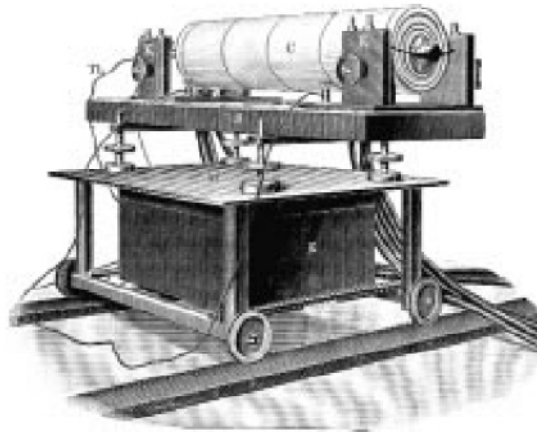
## Les origines de la théorie quantique

fournissaient également une norme d'émission. Puis, au fil des ans, une petite industrie s'est développée autour de l'étude de tels objets (et de leurs substituts dans le monde réel, comme la suie). Un petit groupe des théoriciens s'est occupé de la thermodynamique du rayonnement, tandis qu'une multitude d'expérimentateurs travaillaient sur des corps chauffés pour fixer la température, déterminer l'intensité et caractériser les écarts par rapport à l'idéalité du corps noir (Voir la **Fig.01**). Après que les scientifiques ont poussé la réalisation pratique d'une vieille idée - qu'un tube fermé avec un petit trou constituait un corps noir presque idéal-ce « rayonnement de cavité » a permis des mesures de plus en plus fiables. (Voir la **Fig.02**).[2]



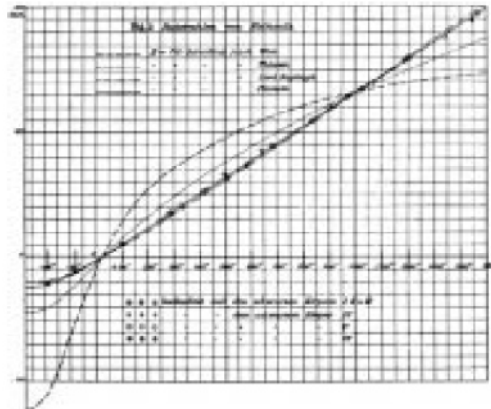
**Fig. I. 01.** Un spectre de corps noir idéal (*Schwarzer Körper*) et son approximation du monde réel (*Quarz*). (De Clemens Schaefer, *Einführung in die Theoretische Physik*, 1932)

## Les origines de la théorie quantique



**Fig. I. 02.** Installation expérimentale pour mesurer le rayonnement du corps noir. (Le corps noir est le tube étiqueté C). Cette conception était un produit de l'Institut impérial allemand de physique et de technologie à Berlin, où les études sur les corps noirs ont été poursuivies en tenant compte des normes industrielles d'intensité lumineuse. (De Müller-Pouillet Lehrbuch der Physik, 1929)

Maintenant, les charges oscillantes de Planck émettaient et absorbaient des radiations, elles pourraient donc être utilisées pour modéliser un corps noir. Ainsi, tout sembla se mettre en place en 1899 lorsqu'il reproduisit une formule qu'un collègue avait dérivée par des moyens moins sûrs. C'était pratique ; tout le monde était d'accord pour dire que la formule de Willy Wien correspondait aux observations. Le problème était qu'immédiatement après, les expérimentateurs ont commencé à trouver des écarts. Aux basses fréquences, l'expression de Wien devenait de plus en plus intenable, alors qu'ailleurs elle continuait à fonctionner assez bien. Informé des résultats à l'automne 1900, Planck proposa à bref délai une interpolation raisonnable. Avec ses constantes ajustables, sa formule semblait correspondre aux expériences (Voir la **Fig. 03**). Maintenant, la question est devenue : d'où cela peut-il venir ? Quelle était sa signification physique?



**Fig. I. 03.** Résultats expérimentaux et théoriques sur le spectre du corps noir. Les points de données sont des valeurs expérimentales ; La formule de Planck est la ligne continue. (Réimprimé de H. Rubens et F. Kurlbaum, *Annalender Physik*, 1901.)

Comme nous l'avons vu, Planck a réussi à produire une dérivation. Pour obtenir les bons résultats statistiques, cependant, il a dû agir comme si l'énergie impliquée était divisée en éléments  $\varepsilon = hf$ . La dérivation a été un succès et a magnifiquement reproduit les données expérimentales. Sa signification était moins claire. Après tout, la théorie de Maxwell donnait déjà une belle description de la lumière et la traitait comme une onde voyageant dans un milieu continu. Planck n'a pas pris la constante  $h$  pour indiquer une discontinuité physique, une véritable atomicité de l'énergie dans un sens substantiel. Aucun de ses collègues n'a fait grand cas de cette possibilité non plus, jusqu'à ce qu'Albert Einstein l'ait reprise cinq ans plus tard.[3]

### I -4 Rendre la lumière quanta réelle :

Des trois grands articles d'Einstein de 1905, celui "*On a Heuristic Point of View Concerning the Production and Transformation of Light*" était celui que le commis aux brevets de 26 ans qualifiait de révolutionnaire. Il a noté qu'il était étrange que la théorie électromagnétique de la lumière suppose la continuité, alors que les comptes rendus actuels de la matière portaient d'atomes discrets. La discontinuité pourrait-elle aussi être productive pour la lumière ? Aussi indispensables que puissent paraître les équations de Maxwell, elles se sont révélées insuffisantes pour certains phénomènes intéressants. Un exemple clé était le rayonnement du corps noir, qu'Einstein regardait maintenant d'une manière différente de Planck.

## Les origines de la théorie quantique

Ici, un traitement rigoureusement classique, montra-t-il, produisit un résultat non seulement faux mais aussi absurde. Même là où la loi de Wien était approximativement correcte (et la modification de Planck inutile), la thermodynamique élémentaire forçait la lumière à se comporter comme si elle était localisée en morceaux discrets. Le rayonnement devait être divisé en ce qu'Einstein appelait « quanta d'énergie ». Aujourd'hui, nous écrivons  $E = hf$ .

La discontinuité était donc endémique au monde électromagnétique. Fait intéressant, Einstein n'a pas fait référence au  $h$  constant de Planck, estimant que son approche était différente dans son esprit. Là où Planck avait examiné les charges oscillantes, Einstein a appliqué la thermodynamique à la lumière elle-même. Ce n'est que plus tard qu'Einstein est revenu et a montré comment le travail de Planck impliquait de véritables quanta. En attendant, il a proposé une nouvelle extension radicale. Si la lumière se comporte d'elle-même comme si elle était composée de tels quanta, alors peut-être qu'elle est également émise et absorbée de cette manière. Quelques considérations simples ont ensuite abouti à une loi de l'effet photoélectrique, dans laquelle la lumière éjecte des électrons de la surface d'un métal. Einstein a fourni non seulement une hypothèse vérifiable mais aussi une nouvelle façon de mesurer la constante  $h$  (Voir le **Tableau 01**)

**Tableau 01 :**

BERGE'S CALCULATION OF PLANCK'S UNIVERSAL  
CONSTANT  $h$  BY VARIOUS METHODS

Value of $h$ .	Method.	Remarks.
$6.551 \pm 0.009$	$c = 5.72$	Total radiation
$6.557 \pm 0.013$	$C_1 = 14320$	Spectral radiation
$6.542 \pm 0.011$	Rydberg constant	Bohr's theory of atomic structure
$6.578 \pm 0.026$	Photo-electric equations	Einstein's equation
$6.555 \pm 0.009$	X-rays	Quantum relation
$6.569 \pm 0.014$	Ultimate rational units	Theory of Lewis and Adams
$6.578 \pm 0.021$	Ionisation potential	..

Mean value,  $h = (6.5540 \pm 0.0025) 10^{-27}$  erg sec.

Aujourd'hui, l'effet photoélectrique peut être vérifié dans un laboratoire universitaire. En 1905, cependant, c'était loin d'être anodin. Il le restera donc pendant plus d'une décennie. Même après



que Robert Millikan ait confirmé la prédiction d'Einstein, lui et d'autres ont rechigné face à l'hypothèse quantique sous-jacente. Il violait toujours tout ce qui était connu sur le comportement ondulatoire de la lumière (notamment les interférences) et semblait difficilement conciliable avec les équations de Maxwell. Quand Einstein a reçu le prix Nobel, il a dû cet honneur en grande partie à l'effet photoélectrique. Mais la citation notait spécifiquement sa découverte de la loi, et non l'explication qu'il proposait.

La relation du quantum à la théorie ondulatoire de la lumière resterait un point de perplexité. Au cours des années suivantes, Einstein ne fera qu'accentuer la contradiction. Comme il l'a montré, la thermodynamique nécessitait inéluctablement à la fois les ondes classiques et la quantification. Les deux aspects étaient couplés : les deux étaient nécessaires, et en même temps. Ce faisant, Einstein s'est encore rapproché de l'attribution à la lumière de toute une panoplie de propriétés particulières. Le quantum semblable à une particule, appelé plus tard le photon, s'avérerait évocateur pour expliquer des choses comme la diffusion des rayons X. Pour cette découverte de 1923, Arthur Compton remportera le prix Nobel. Mais là, on prend de l'avance sur l'histoire. Avant que les notions de dualité onde-particule puissent être prises au sérieux, la discontinuité devait démontrer sa valeur ailleurs.

### **I -5 Au-delà de la lumière :**

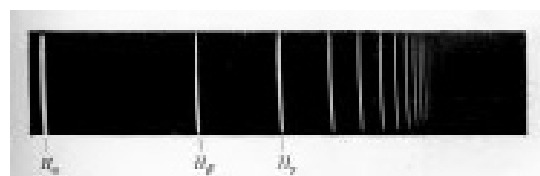
Il s'est avéré que le premier accueil réservé aux nouveaux concepts quantiques est venu dans des domaines très éloignés des théories troublées du rayonnement. Le premier de ces domaines, bien que loin d'être le plus évident, était la théorie des chaleurs spécifiques. La chaleur spécifique d'une substance détermine dans quelle mesure son énergie change lorsque sa température augmente. À basse température, les solides présentent un comportement particulier. Ici, Einstein soupçonnait - encore une fois, nous rencontrons Einstein - que la déviance pourrait être explicable sur des bases quantiques. Il a donc reformulé le problème de Planck pour gérer un réseau d'atomes vibrant indépendamment. A partir de ce modèle très simpliste, il a obtenu des prédictions tout à fait raisonnables qui impliquaient la même quantité  $hf$ , maintenant traduite dans le contexte du solide.

Là, les choses ont duré encore trois ans. Il a fallu l'attention soudaine du physico-chimiste Walther Nernst pour amener les théories quantiques des chaleurs spécifiques à une signification

## Les origines de la théorie quantique

générale. Sentant son chemin vers une nouvelle loi de la thermodynamique, Nernst a non seulement renforcé les idées d'Einstein avec des résultats expérimentaux, mais les a également mis à l'ordre du jour d'une large discussion. Ce n'est pas par hasard, et dans une large mesure l'œuvre de Nernst, que le premier Congrès Solvay en 1911 traitait précisément de la théorie des rayonnements et des quanta. Einstein a parlé de chaleurs spécifiques, offrant des commentaires supplémentaires sur le rayonnement électromagnétique. Si le quantum est né en 1900, le rendez-vous Solvay était, pour ainsi dire, son début social.

Ce qui commençait à peine à apparaître dans le colloque Solvay était l'autre domaine principal dans lequel la discontinuité prouverait sa valeur. La technique de quantification des oscillations s'appliquait, bien entendu, également aux spectres de raies. Contrairement à l'universalité du rayonnement du corps noir, les lignes discrètes d'émission et d'absorption de la lumière variaient énormément d'une substance à l'autre. Mais les régularités évidentes jusque dans la masse des lignes ont fourni une matière fertile pour les conjectures quantiques. Les spectres moléculaires sont devenus un site de recherche très important au cours de la deuxième décennie du quantum. Plus lente à décoller, mais finalement encore plus productive, était la quantification des mouvements au sein de l'atome lui-même. Comme personne n'avait une grande idée de la constitution de l'atome, l'aventure dans les spectres atomiques était alliée à la construction de modèles spéculatifs. Sans surprise, la plupart des suppositions du début des années 1910 se sont avérées fausses. Ils ont néanmoins sondé les possibilités. L'énergie orbitale des électrons, leur moment cinétique (quelque chose comme l'inertie de rotation) ou la fréquence de leurs petites oscillations autour de l'équilibre : tout cela était un jeu équitable pour la quantification. Les raies observées du spectre discret pourraient alors être directement lues à partir des mouvements des électrons.[4]



**Fig. I. 04.** Le spectre des raies de l'hydrogène. (Extrait de G. Herzberg, *Annalen der Physik*, 1927)

## I -6 Le modèle Bohr de l'atome :

Il peut sembler ironique que Niels Bohr ne s'intéressait initialement pas aux spectres. Il est venu indirectement à la structure atomique. En rédigeant sa thèse de doctorat sur la théorie électronique des métaux, Bohr était devenu fasciné par ses échecs et ses instabilités. Il pensait qu'ils suggéraient un nouveau type de force stabilisatrice, fondamentalement différent de ceux familiers en physique classique. Soupçonnant que le quantum était d'une manière ou d'une autre impliqué, il ne pouvait pas comprendre comment l'intégrer dans la théorie.

L'intuition est restée avec lui, cependant, alors qu'il transférait son attention postdoctorale des métaux à l'atome de Rutherford. À ses débuts, l'atome nucléaire (son centre positif dense entouré d'électrons) n'était qu'un des nombreux modèles proposés. Bohr a commencé à travailler dessus pendant les temps d'arrêt dans le laboratoire de Rutherford, pensant qu'il pourrait améliorer son traitement de la diffusion. Quand il a remarqué qu'il devrait être instable, cependant, son attention a été capturée pour de bon. Pour stabiliser le modèle par fiat, il s'est mis à imposer une condition quantique, selon la pratique courante de l'époque. Ce n'est qu'après qu'un collègue a attiré son attention sur les spectres qu'il a commencé à réfléchir à leur signification.

La célèbre série Balmer de l'hydrogène était manifestement une nouveauté pour Bohr. Cependant, il s'est vite rendu compte qu'il pouvait l'adapter à son modèle, s'il changeait un peu son modèle. Il a reconceptualisé l'émission de lumière comme une transition entre des orbites discontinues, avec la fréquence émise déterminée par  $\Delta E = hf$ . Pour obtenir les bonnes énergies des orbites, Bohr a dû introduire des règles plutôt ad hoc. Il les a finalement justifiés par la quantification du moment cinétique, qui était désormais exprimée en unités de la constante de Planck  $h$ . (Il a également utilisé un argument asymptotique intéressant qui reviendra plus tard). Publié en 1913, l'image résultante de l'atome était plutôt étrange. Non seulement une condition quantique décrivait les transitions entre les niveaux, mais les « états stationnaires » étaient également fixés par un décret non classique. Les électrons tournaient certes sur des orbites, mais leur fréquence de révolution n'avait rien à voir avec la lumière émise. En effet, leurs oscillations étaient supposées ne pas produire de rayonnement. Il n'y avait aucune prédiction

quand ils pourraient sauter entre les niveaux. Et les transitions généraient des fréquences selon une relation quantique, mais Bohr s'est montré hésitant à accepter quoi que ce soit comme un photon.

Le modèle, naturellement, n'était pas très convaincant, c'est-à-dire jusqu'à ce que de nouveaux résultats expérimentaux commencent à arriver sur les rayons X, les niveaux d'énergie et les spectres. Ce qui a vraiment convaincu les sceptiques, c'est une petite modification apportée par Bohr. Parce que le noyau n'est pas maintenu fixe dans l'espace, sa masse entre faiblement dans les fréquences spectrales. Les calculs ont produit une prédiction qui correspondait à 3 parties sur 100 000 - plutôt bonne, même pour les jours où tant de coïncidences numériques se sont avérées trompeuses.

La roue a effectué son dernier tour lorsqu'Einstein a relié l'atome de Bohr au rayonnement du corps noir. Ses articles célèbres sur les transitions radiatives, si importantes pour le laser (voir l'article suivant de Charles Townes), ont montré le lien entre la loi du corps noir de Planck, les niveaux d'énergie discrets et l'émission et l'absorption quantifiées de rayonnement. Einstein a en outre souligné que les transitions ne pouvaient être prédites que dans un sens probabiliste. C'est d'ailleurs dans ces mêmes articles qu'il a formalisé la notion de quanta particulière.[4]

### **I -7 L'ancienne théorie quantique :**

Ce que le modèle de Bohr a fourni, comme le compte rendu d'Einstein des chaleurs spécifiques, était un moyen d'intégrer le quantum dans une théorie plus générale. En fait, l'étude de la structure atomique engendrerait ce que l'on appelle plausiblement une théorie quantique, qui commencerait à tendre vers un remplacement à grande échelle de la physique classique. La relation entre l'ancien et le nouveau est devenue une question clé. Car certaines caractéristiques du modèle de Bohr préservaient les théories classiques, tandis que d'autres présupposaient leur rupture. Était-ce cohérent ou non ? Et pourquoi ça a marché ?

À la fin des années 1910, les physiciens avaient affiné le modèle de Bohr, fournissant un traitement relativiste des électrons et introduisant des « nombres quantiques » supplémentaires. La condition de quantification simple sur le moment cinétique pourrait être largement généralisée. Ensuite, les techniques de la mécanique céleste du XIXe siècle ont fourni de puissants outils théoriques. Poussées par des expérimentateurs ingénieux, les études

spectroscopiques ont fourni des données toujours plus nombreuses et plus fines, non seulement sur les spectres de raies de base, mais sur leur modulation par les champs électriques et magnétiques. Et encouragés par leurs aînés, Bohr, Arnold Sommerfeld et Max Born, une génération de jeunes théoriciens atomiques a fait ses armes sur de tels problèmes. Les élèves, dont Hendrik Kramers, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg et Pascual Jordan, pratiquaient une sorte de théorie sur la corde raide. Face à des données expérimentales résistantes, ils ont mis en balance les preuves empiriques des spectres avec les ambiguïtés des prescriptions pour l'application des règles quantiques.

Au sein de ce corpus de plus en plus dense, une stratégie intéressante a commencé à se dessiner. En traitant n'importe quel système physique, la première tâche était d'identifier les mouvements classiques possibles. Ensuite, au-dessus de ces mouvements classiques, des conditions quantiques seraient imposées. La quantification est devenue une procédure régulière, faisant continuellement référence aux résultats classiques. D'une autre manière aussi, la physique classique a servi de pierre de touche. Le célèbre "principe de correspondance" de Bohr a trouvé une première application dans ses premiers articles, où il a fourni une justification plus profonde de sa condition de quantification. Dans la « limite classique », pour les grandes orbites avec des nombres quantiques élevés et de petites différences d'énergie, le rayonnement des transitions entre des orbites adjacentes devrait correspondre à la fréquence de rayonnement classique. Les résultats quantiques et classiques doivent correspondre. Employé avec une certaine discrimination Bohrienne, le principe de correspondance a fourni des informations détaillées sur les spectres. Cela a également permis de répondre à la question : comment construire une véritable théorie quantique?

Non pas que la solution soit encore en vue. La sophistication croissante de l'ancienne théorie quantique rendait ses échecs de plus en plus évidents. Au début des années 1920, les théoriciens se trouvèrent de plus en plus en difficulté.

Aucun problème n'était fatal, mais leur accumulation était intimidante. Ce sentiment de crise n'était pas totalement anodin. Un groupe de théoriciens atomiques, centré sur Bohr, Born, Pauli et Heisenberg, en était venu à soupçonner que les problèmes remontaient aux trajectoires des électrons. Peut-être était-il possible de faire abstraction des orbites ? Au lieu de cela, ils se sont concentrés sur les probabilités de transition et les rayonnements émis, car ceux-ci pourraient

être connus de manière plus fiable. « En ce moment, remarquait encore Pauli au printemps 1925, la physique est à nouveau très confuse ; en tout cas, c'est beaucoup trop difficile pour moi, et j'aimerais être un comédien de cinéma ou quelque chose du genre et n'avoir jamais entendu parler de la physique.

### **I -8 Mécanique quantique :**

La mécanique quantique repose sur le célèbre article de Heisenberg de 1925, célébré pour avoir lancé les transformations à venir, portait le titre « Sur la réinterprétation quantique et théorique des relations cinématiques et mécaniques ». Le point de départ était la tradition de Bohr de la structure atomique : les états discrets restaient fondamentaux, mais désormais dissociés de la représentation intuitive. L'intention de transformation était encore plus large dès le départ. Heisenberg a traduit les notions classiques en notions quantiques dans le meilleur style de principe de correspondance. Dans sa nouvelle mécanique quantique, les quantités familières se comportaient étrangement ; la multiplication dépend de l'ordre des termes. Les écarts, cependant, ont été calibrés par la constante de Planck, mesurant ainsi l'écart par rapport à la normalité classique.

Certains ont accueilli la nouvelle théorie avec exaltation ; d'autres la trouvaient insatisfaisante et désagréable. Car aussi élégante que soit la traduction d'Heisenberg, elle prenait une vue très partielle des problèmes du quantum. Au lieu de la théorie quantique de la structure atomique, on pourrait aussi partir de la dualité onde-particule. Ici, un autre jeune théoricien, Louis de Broglie, avait avancé en 1923 une proposition spéculative dont Heisenberg et ses collègues avaient peu fait. En pensant aux aspects discontinus et particuliers de la lumière, de Broglie a suggéré de rechercher les aspects continus et ondulatoires des électrons. Sa notion, bien qu'elle ne soit pas encore fondée sur des preuves expérimentales, a fourni un aperçu surprenant des conditions quantiques des orbites de Bohr. C'est aussi, par un chemin de traverse, qu'Erwin Schrödinger a eu l'idée de ses brillants papiers de 1926.

En imaginant les états autorisés discrets de tout système de particules comme de simples formes stables d'ondes de matière continues, Schrödinger a cherché des connexions avec une branche bien développée de la physique classique. Les techniques de la mécanique des milieux continus lui ont permis de formuler une équation pour ses ondes. Elle aussi a été construite

autour de la constante  $h$ . Mais maintenant, les concepts de base étaient différents, et donc aussi le sens fondamental. Schrödinger avait un dégoût pour la discontinuité des modèles atomiques de Bohr et le manque de représentation intuitive de la mécanique quantique de Heisenberg. À son avis, le quantum n'impliquait aucune de ces choses. En fait, cela montrait le contraire : que l'atomicité apparente de la matière masquait un continuum sous-jacent.

Ainsi un modèle familier lié à l'intuition physique, mais constituant la matière d'une sorte d'onde mal comprise, confrontait une mathématique abstraite aux variables apparemment bizarres, insistant sur la discontinuité et suspendant les images spatio-temporelles. Sans surprise, la coexistence de théories alternatives a suscité un débat. Le fait, bientôt démontré, de leur équivalence mathématique n'a pas résolu le différend interprétatif. Car des images physiques fondamentalement différentes étaient proposées.

En fait, à la place des ondes de matière de Schrödinger et de la discrétion sans compromis de Heisenberg, une compréhension conventionnelle s'est installée en ce sens qui a quelque peu divisé la différence. Cependant, la pensée de l'ancienne école de la théorie quantique dominait toujours. Born a dématérialisé les ondes de Schrödinger, les transformant en pures densités de probabilité pour trouver des particules discrètes. Heisenberg a ajouté son principe d'incertitude, limitant la possibilité même de mesure et sapant la loi de causalité. Le tableau était couronné par la notion de complémentarité de Bohr, qui cherchait à réconcilier des concepts contradictoires comme les ondes et les particules.

Appelé l'interprétation de Copenhague après l'influence décisive de Bohr, son succès (à son avis) a conduit le théoricien danois à caractériser la mécanique quantique comme une généralisation rationnelle de la physique classique. Tout le monde n'était pas d'accord pour dire que c'était le point final. En effet, Einstein, Schrödinger et d'autres ne se sont jamais réconciliés. Même Bohr, Heisenberg et Pauli s'attendaient à d'autres changements, bien que dans un nouveau domaine, la théorie quantique des champs, qui a amené la mécanique quantique à un degré de complexité plus élevé. Mais leurs attentes de transformation fondamentale dans les années 1930 et au-delà, caractérisées par des analogies avec l'ancienne théorie quantique, ont trouvé peu de résonance en dehors de leur cercle.

Assez ironiquement, tout comme pour leurs collègues anti-Copenhague, leur demande de repenser davantage n'a pas fait beaucoup de progrès. Si la signification physique du quantum

## Les origines de la théorie quantique

---

restait, pour certains, assez obscure, son utilité pratique ne pouvait être niée. Quelles que soient les leçons de la mécanique quantique, cela semblait fonctionner. Il a non seulement incorporé avec grâce les phénomènes quantiques précédents, mais a ouvert la porte à toutes sortes de nouvelles applications. Peut-être que ce genre de succès était tout ce que l'on pouvait demander ? En ce sens donc, un quart de siècle après Planck, le quantum avait été intégré aux fondements de la théorie physique.[5]



**Référence :**

[1]. Olivierdarrigol, de c- nombres à q-nombres : l'analogie classique dans l'histoire de la quantique théorie (Berkeley : us presse, 1992).

[2]. Helgekragh, quantum générations : une histoire de la physique au XXe siècle (Princeton, Princeton université press, 1999).

[3].Abraham pais, « le subtil est le seigneur ... » : le science de vie d'alberteinstein (université d'oxford presse ,1982).

[4]. Helmut rechenberg, « quanta et la mécanique quantique », dans laurie M Brown, abraham pais et mensieurbrainpippard, éd, XXe siècle physique, vol 1 (bristol et new york, institut de editionb de physique et institut américain de presse physique ,1995), p.143-248

[5]. L'aout 11,2000, question de science (vol.289) contient un article de danielklepner et Roman jackiw sur « cent ans de physique quantique »

Voir le texte intégral de cet article, allez à

<https://www.sciencemag.org/cgi/content/full/289/5481/893>.

## Chapitre II : lagrangien d'un champ scalaire complexe

### II. 1.1. Introduction :

La théorie quantique des champs (TQC) relativiste est un formalisme général permettant d'étudier des systèmes avec un nombre arbitraire de particules (quantiques) en interaction. Développée à partir de la fin des années 20, elle a pour objectif l'unification :

- de l'électromagnétisme (Maxwell 1860),
- de la relativité restreinte (Einstein 1905),
- de la mécanique quantique (Heisenberg 1925, Schrödinger 1926).

Les premières applications ont concerné la physique atomique, la physique des particules et plus généralement la physique des hautes énergies ( $\sim 10^{12}\text{eV}=1\text{Tev}$  dans les grands collisionneurs comme le LHC au CERN). Par la suite (années 70), les applications se sont étendues à la physique statistique et à la physique de la matière condensée.

#### II .1.1.1 Point de vue particule :

L'unification de l'électromagnétisme, de la relativité restreinte et de la mécanique quantique a eu pour motivation les limitations de ces théories prises à part. Par exemple, dans le cas de la mécanique quantique : l'impossibilité de rendre compte de la structure fine de l'atome d'hydrogène observée expérimentalement, de "démontrer" l'existence du spin (ajouté à la main dans l'Hamiltonien de Pauli), de comprendre l'émission spontanée (retour d'un atome à son état fondamental par émission d'un photon) ou encore la radioactivité (désintégration spontanée de certains noyaux instables en d'autres avec émission de particules de matière, e.g., électrons, neutrons, noyaux d'hélium, et d'énergie, e.g., photons, énergie cinétique), ... Historiquement, la première TQC est née de l'unification de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique, e.g., la création d'une théorie quantique du champ électromagnétique (EM) en l'absence de toute particule chargée (champs libres). Ce problème a été résolu dès 1925 par Heisenberg, Born et Jordan qui ont modélisé.

#### II .1.1.2 Point de vue champ :

Les degrés de liberté du système (les champs électrique et magnétique) par une infinité d'oscillateurs harmoniques puis ont procédé à la quantification canonique de ces oscillateurs (photons).

En 1927, Dirac a complété cette construction en incluant des particules quantiques (non-relativistes) chargées en interaction avec le champ EM quantifié. Ceci a conduit à la théorie quantique du rayonnement ou électrodynamique quantique non relativiste qui permet de comprendre et décrire des phénomènes à un photon qui échappent à la mécanique quantique ordinaire, e.g. l'émission spontanée. Ces phénomènes sont caractérisés par des processus où le nombre de particules n'est pas conservé, e.g. un atome dans l'état initial et un atome et un photon dans l'état final dans le cas de l'émission spontanée.

Une étape cruciale a été franchie par Enrico Fermi en 1934 avec sa théorie de la désintégration  $\beta$  qui permet d'expliquer la radioactivité  $\beta$ . [1]

Dans ce cas, il s'agit de processus d'annihilation et de création pour les particules de matière elles-mêmes.

Une seconde motivation importante à l'origine de la TQC (et sur laquelle ce cours est basé) a été de tenter d'unifier la relativité d'Einstein et la mécanique quantique.

C'est encore Dirac, en 1928, qui a incorporé la relativité restreinte en découvrant l'équation qui porte son nom : l'équation de Dirac. Cette équation conduit naturellement à une particule de spin-1/2 permettant ainsi de décrire le moment magnétique intrinsèque de l'électron et d'expliquer la structure fine de l'atome d'hydrogène.

Notons que l'équation de Klein-Gordon est l'analogue relativiste sensé décrire une particule de spin-0. Cependant, l'interprétation de ces équations en tant que généralisations relativistes de l'équation de Schrödinger conduit à d'importantes difficultés conceptuelles : probabilités négatives, états d'énergies négatives... Le point important, réalisé dans le tournant des années 30 par Paul Dirac et d'autres physiciens tel que Vladimir Fock, est qu'une mécanique quantique relativiste est une théorie à une particule : elle ne permet donc pas de décrire les phénomènes de création et d'annihilation. Or le régime ultra-relativiste est caractérisé par des processus de création de paires...

Pour mieux apprécier ce point important, il est utile d'estimer les échelles de distance caractéristiques qui interviennent. Dans le cadre de la mécanique quantique non-relativiste, rappelons l'inégalité d'Heisenberg :

$$\Delta_x \Delta_p \gtrsim \hbar, \quad \lambda_{dB} = \frac{\hbar}{p}, \quad (\text{II-1})$$

Qui fait apparaître la longueur d'onde de Broglie  $\lambda_{dB}$ . A des distances,  $L$ , grandes par rapport à la longueur d'onde de Broglie :  $L \gg \lambda_{dB}$ , les fluctuations quantiques sont négligeables et la physique est classique. La nature ondulatoire des particules de matière ne se manifeste qu'à des distances inférieures à la longueur d'onde de Broglie :  $L \lesssim \lambda_{dB}$ , i.e.,  $\Delta p \gtrsim \hbar / L$ . En mécanique relativiste, l'impulsion.

Et l'énergie est à pied d'égalité ce qui implique :

$$\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta E \gtrsim \frac{\hbar c}{L}. \quad (\text{II-2})$$

Lorsque  $\Delta E$  devient supérieur à  $2mc^2$ , le seuil de production de paires particule-antiparticule est dépassé et les effets relativistes deviennent importants. [2]

On peut en déduire une deuxième longueur caractéristique, la longueur d'onde de Compton.

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}, \quad (\text{II-3})$$

Qui est telle qu'à des distances  $L \gg \lambda_c$  il n'y a pas de production de paires et les effets relativistes sont négligeables tandis que pour  $L \lesssim \lambda_c$  il y a production de paires. Notons par ailleurs que l'on a toujours.

$$\lambda_C < \lambda_{dB}. \tag{II-4}$$

Ainsi, on comprend au moins conceptuellement qu'à des distances  $L \lesssim \lambda_C < \lambda_{dB}$  les effets quantiques et relativistes sont importants. Et que ce régime, qui est sujet à la création et l'annihilation de particules, ne peut en aucun cas être décrit par une théorie à une particule ! La mécanique quantique relativiste est donc une impasse. C'est une théorie quantique (relativiste) des champs qui va pouvoir correctement décrire le régime quantique relativiste dominé par les processus de création de paires. Historiquement, c'est Dirac qui a prédit l'existence des antiparticules en attribuant les solutions positives de son équation aux particules ordinaires et les solutions négatives à d'hypothétiques particules de charge opposée (théorie des trous [3] de Dirac). Peu après, en 1933, Anderson observe la première antiparticule, le positron, produit par collision de rayons cosmiques dans l'atmosphère. Des expériences de radioactivité ont ensuite confirmé cette prédiction pour d'autres particules.

### **II .1.1.2 Point de vue champ :**

point de vue moderne consiste à interpréter les équations de Dirac, Klein Gordon, Maxwell, ... comme des équations décrivant des champs classiques. Rappelons que la notion de champ est apparue en physique classique pour décrire l'“action à distance” entre deux corps. C'est le cas des champs de Maxwell mais aussi du champ de gravitation de Newton. Notons d'emblée que ces champs, qui jouent le rôle de médiateurs des interactions, implémentent ainsi le principe de localité.

Ce sont ces champs classiques qui doivent être quantifiés (procédure appelée à tort : seconde quantification). En théorie quantique, le concept de champ prend alors une nouvelle dimension puisque l'idée de la TQC est d'associer des particules aux champs. De manière plus précise et comme nous le verrons par la suite, ce sont les excitations (quantiques) d'un champ qui correspondent à des particules avec une charge, une masse et un spin bien définis, e.g., le photon, particule neutre, de masse nulle et de spin 1 provient de la quantification du champ EM. Notons que tous les photons de l'univers proviennent de la quantification de ce même champ EM. Il en est de même des électrons qui proviennent tous de la quantification du champ de Dirac, etc... Ceci vient de l'indiscernabilité des particules identiques en théorie quantique : tous les photons, électrons, protons, ... de l'univers sont identiques et donc indiscernables. Tous proviennent de la quantification du même champ dont ils sont fabriqués. Notons par ailleurs que, contrairement au cas de la mécanique quantique, en TQC le lien entre spin et statistique n'est pas un postulat mais une conséquence naturelle du formalisme (“théorèmespin-statistique”).

Dans ce cours, nous introduirons le formalisme de base de la TQC à partir de la théorie classique correspondante : par quantification (canonique) d'un champ classique. [4] Rappelons qu'en mécanique quantique, les variables dynamiques classiques  $x$  et  $p$  deviennent des opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ . En théorie classique des champs, les variables dynamiques sont des champs,  $\phi(\vec{x}, t)$  e.g., un champ classique scalaire  $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ . Après quantification, ce dernier devient un opérateur champ, i.e., une fonction à valeur opératorielle (“opérateur value fonction” en anglais), où la coordonnée  $\vec{x}$  ne joue le rôle que d'un simple paramètre. Puisque ces opérateurs sont définis en tout point de l'espace, nous avons à faire à une infinité de

degrés de liberté. Nous verrons aussi que la construction d'un modèle en TQC, incluant les formes que peuvent prendre les interactions entre divers champs, est gouvernée par de grands principes fondamentaux provenant de la localité et des symétries. Notons que la TQC permet d'effectuer des prédictions quantitatives vis-à-vis des expériences. Citons en particulier l'électrodynamique quantique (QED) comme l'une des théories les plus précises qui existe du point de vue de l'accord avec l'expérience. L'étude de la QED sort du cadre de ce cours introductif. D'un point de vue historique et sans rentrer dans les détails, la QED a été développée dans les années 30 et 40 par des physiciens tels que Bethe, Schwinger, Feynman, Tomonaga, Dyson, ... Son élaboration s'est heurtée au "problème des divergences" qui a nécessité l'introduction du groupe de renormalisation (un découplage des phénomènes physiques entre courtes et longues distances) dont les premiers développements sont dus à Stueckelberg, Petermann, Gell-Mann, Löw, Bogolyoubov, Shiroki... Sa formulation moderne ne sera donnée que dans les années 70 par Wilson dont les travaux ont fortement contribué à étendre le domaine d'application de la théorie des champs à la physique statistique et la physique de la matière condensée. De nos jours, la TQC est omniprésente en physique fondamentale que ce soit en physique de basses ou de hautes énergies, en rapport avec la phénoménologie ou des développements plus formels de physique-mathématique

### II .1.2. Systèmes mécaniques discrets et continus :

#### II 1.2.1. Rappels dans le cas d'une particule :

On se place d'emblée dans le formalisme Lagrangien de la mécanique analytique où espace et temps sont à pied d'égalité ce qui s'avèrera particulièrement utile dans le cadre relativiste. Rappelons que, dans ce cadre, la dynamique d'un système mécanique est décrite par la donnée d'un Lagrangien,  $L(q, \dot{q}, t)$ , qui dépend des variables dynamiques (ici la coordonnée généralisée)  $q \equiv q(t)$ ,  $\dot{q} \equiv \dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  et éventuellement du temps  $t$ . Dans le cas d'un système à  $n$  degrés de liberté, la coordonnée  $q$  sera considérée comme un vecteur à  $n$  composantes :

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)). \quad (\text{II -5a})$$

La donnée de  $L$  est équivalente à celle des équations du mouvement ou équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n). \quad (\text{II -5b})$$

Ces équations s'obtiennent au moyen du principe de moindre action qui stipule que la trajectoire (classique) effectivement suivie par le système, compte tenu des conditions aux limites, est celle qui minimise l'action  $S$  :

$$S(q(t)) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t). \quad (\text{II -6})$$

Notons que le passage du formalisme de Lagrange au formalisme de Hamilton se fait au moyen d'une transformation de Legendre :

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L \equiv H(q, p, t), \quad p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}, \quad (\text{II -7})$$

où  $p_{\alpha}$  est le moment conjugué à  $q_{\alpha}$ . Le formalisme de Hamilton introduit naturellement une dissymétrie entre le temps et l'espace.

### II 1.2.2 Généralisation à N particules :

Considérons maintenant la généralisation de ce qui précède au cas de N particules. On prendra comme exemple le cas d'un système unidimensionnel constitué de N particules reliées entre elles par des ressorts identiques de constante de rappel k et de longueur au repos a. Soit  $\eta_i \equiv \eta_i(t)$  le déplacement de la particule  $i = 1, \dots, N$  par rapport à sa position d'équilibre. Le Lagrangien du système est alors donné par :

$$L = \sum_{i=1}^N \left( \frac{m}{2} \dot{\eta}_i^2(t) - \frac{k}{2} (\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t))^2 \right) \quad (\text{II -8a})$$

$$= \sum_{i=1}^N a \left( \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2(t) - \frac{1}{2} ka \left( \frac{\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)}{a} \right)^2 \right) \quad (\text{II -8b})$$

$$= \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i, \quad (\text{II -8c})$$

Où la notation L désigne une densité de Lagrangien, i.e., le Lagrangien par unité de volume (dans le cas 1D le volume se réduit à une longueur). Notons que, par abus de langage, nous appellerons fréquemment par la suite Lagrangien ce qui en fait correspond à la densité de Lagrangien.

La forme (1.8b) est commode pour un passage à la limite continue correspondant à  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$  et  $Na = l$  où l est la longueur totale du système. Cette limite permet de se focaliser sur l'étude de phénomènes physiques à des distances grandes devant la longueur (microscopique) a. Comme nous le verrons par la suite, dans cette limite, l'invariance de Lorentz de (1.8) émergera naturellement. [5]

Nous pouvons l'implémenter au moyen des transformations suivantes :

$$\sum_{i=1}^N \rightarrow \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}, \quad a \rightarrow dx, \quad \frac{m}{a} \rightarrow \sigma, \quad ka \rightarrow Y, \quad (\text{II -9a})$$

$$\eta_i(t) \rightarrow \eta(x, t), \quad \frac{\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)}{a} \rightarrow \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}, \quad (\text{II -9b})$$

où  $\sigma$  désigne la densité de masse, Y le module d'Young (ou d'élasticité) et l'on a choisi un intervalle d'intégration symétrique autour de l'origine. On obtient donc :

$$L \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{\sigma}{2} \left( \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left( \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2, \quad (\text{II-10})$$

Où  $\eta(x, t)$  est une fonction continue de la coordonnée  $x$ . Aux variables dynamiques  $\eta_i$  du cas discret correspond donc un champ dans le cas continu. Notons que dans (1.10), la densité de Lagrangien est la somme de deux termes : le premier fait intervenir une dérivée par rapport au temps et correspond à une énergie cinétique ; le second fait intervenir une dérivée par rapport à la coordonnée  $x$  et correspond à une énergie potentielle. Le modèle (1.10) est celui d'une corde vibrante (classique).

Comme on le verra par la suite pour d'autres modèles, l'énergie potentielle peut éventuellement aussi faire intervenir des termes proportionnels à  $\eta$ . Dans le cas général on notera donc :  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\eta, \partial_t \eta, \partial_x \eta)$ .

L'action correspondante est donnée par :

$$S(\eta) = \int_{t_i}^{t_f} dt L = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \mathcal{L}(\eta, \partial_t \eta, \partial_x \eta), \quad (\text{II -11})$$

Qui généralise (1.6) au cas d'un système continu décrit par un champ  $\eta(x, t)$ . A ce point, on souhaite déterminer les équations du mouvement associées à (1.11), i.e., la généralisation de (1.5) au cas continu. Pour cela nous allons procéder à une légère reformulation du principe de moindre action. Considérons donc une configuration  $\eta(x, t) + \delta\eta(x, t)$  qui est telle que  $\eta(x, t)$  "minimise" l'action  $S(\eta)$  et  $\delta\eta(x, t)$  représente une petite déviation par rapport à cette configuration. Nous supposons que les configurations initiale et finale sont fixées pour tout  $x$  et qu'il en est de même des configurations aux extrémités de la corde, i.e.,

$$\delta\eta(x, t) = \delta\eta(x, t_f) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm \frac{1}{2}} \delta\eta(x, t) = 0. \quad (\text{II -12})$$

On définit alors :

$$\delta S[\eta] = S[\eta + \delta\eta] - S[\eta]. \quad (\text{II -13})$$

Par un développement au premier ordre en  $\eta$ , il vient :

$$\delta S[\eta] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \partial_t \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta (\partial_x \eta) \right] + O(\eta^2). \quad (\text{II -14})$$

Les deuxième et troisième termes sous l'intégrale peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \partial_t \eta = \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \eta \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \right) \delta \eta, \quad (\text{II -15a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \partial_x \eta = \partial_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \eta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \right) \delta \eta, \quad (\text{II -15b})$$

Équivalents à des intégrations par parties. Ceci conduit à :

$$\delta S[\eta] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \right) \right] \delta \eta \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \eta \Big|_{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \eta \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + O(\eta^2), \quad (\text{II -16})$$

Dans (1.16), les termes partiellement intégrés sont nuls du fait des conditions aux limites (1.12) et ne contribuent donc pas aux équations du mouvement. Par ailleurs, puisque  $\eta$  "minimise" l'action, le terme en facteur de  $\delta \eta$  dans le premier intégrand de (1.16) doit aussi être nul. C'est ce terme qui conduit aux équations d'Euler LaGrange généralisées à un système continu :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}. \quad (\text{II -17})$$

Appliquons les équations (1.17) à (1.10). En considérant  $\eta$ ,  $\partial_t \eta$  et  $\partial_x \eta$  comme des variables indépendantes par rapport auxquelles on dérive  $\mathcal{L}$ , on obtient :

$$\sigma \ddot{\eta}(x, t) - Y \partial_{xx} \eta(x, t) = 0, \quad (\text{II -18})$$

qui correspond à l'équation d'une onde 1D (la vibration de la corde) se propageant à une vitesse  $\sqrt{Y/\sigma}$ .

Pour conclure, il est instructif d'obtenir l'Hamiltonien associé à (1.11). Par analogie avec le cas discret, (1.7), il est donné par :

$$H = \int dx \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}, \quad \pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \quad (\text{II -19})$$

Où  $H \equiv H(\pi, \eta, \partial_x \eta, t)$  est la densité de Hamiltonien et  $\pi(x, t)$  le moment canoniquement conjugué au champ  $\eta(x, t)$ . La densité d'Hamiltonien  $H$  correspond donc à la transformée de Legendre de la densité de Lagrangien  $L$  par rapport à  $\dot{\eta}$ . Appliquée à (1.10), l'équation (1.19) conduit au moment conjugué :

$$\pi(x, t) = \sigma \dot{\eta}(x, t), \quad (\text{II -20})$$

Et à la densité d'Hamiltonien :

$$H = \frac{\pi^2(x, t)}{2\sigma} + \frac{Y}{2} (\partial_x \eta(x, t))^2, \quad (\text{II -21})$$

Où, dans le second membre, le premier terme correspond à l'énergie cinétique de la corde vibrante et le second à son énergie potentielle.

## II.1.4 Formulation covariante :

Le champ  $\eta(x, t)$  que nous venons de présenter est l'exemple le plus simple d'un champ. C'est une fonction scalaire et réelle. Son existence traduit le fait que la corde vibrante possède une infinité de degrés de liberté : la valeur du champ en tout point de l'espace unidimensionnel que nous avons considéré. Dans la continuité, nous considérons maintenant un champ scalaire réel  $\phi(x, t)$  défini en tout point d'un espace à 3 dimensions avec  $\vec{x} = (x^1 x^2 x^3)$ . La densité de Lagrangien dépend de manière générale du champ, de ses dérivées spatio-temporelles et



éventuellement explicitement de  $\vec{x}$  et  $\det, \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_t \phi, \vec{\nabla} \phi, \vec{x}, t)$  ou  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ .

On pourra aussi noter  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ . Les équations d'Euler-Lagrange sont alors données par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (\text{II -22})$$

et généralisent simplement (1.17) au cas d'un système tridimensionnel. Nous souhaitons maintenant réécrire ces équations sous une forme plus symétrique et adaptée à la physique relativiste qui nous intéresse, i.e., au moyen de 4-vecteurs ou vecteurs de Lorentz.

### II .1.4.1 Notations et conventions :

Nous rappelons ici les notations et conventions d'usage en relativité restreinte. On distingue tout d'abord deux types de 4-vecteurs : [6]

$$b^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3) \text{ contravariant,} \quad (\text{II -23a})$$

$$b_\mu = (b_0, b_1, b_2, b_3) \text{ Covariant,} \quad (\text{II -23b})$$

Où la composante 0 est dite temporelle. Dans toute la suite, les indices grecs :  $\mu, \nu, \dots$  iront de 0 à 3 tandis que les indices latins :  $i, j, \dots$  iront de 1 à 3.

#### Exemples :

— le 4-vecteur position :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}). \quad (\text{II -24})$$

— le 4-vecteur impulsion

$$: p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right). \quad (\text{II -25})$$

— le 4-potentiel du champ électromagnétique : [7]

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, A_x, A_y, A_z) = (\phi, \vec{A}), \quad (\text{II -26})$$

Où  $\phi \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$  est le potentiel scalaire et  $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{x}, t) \equiv \vec{A}(x)$  le potentiel vecteur.

Important : toujours dans un souci de simplification des notations, nous noterons plus généralement  $f(x) \equiv f(\vec{x}, t)$  toute fonction (ou champ) d'arguments spatio-temporels  $\vec{x}$  etc.

— le 4-vecteur courant

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (cp, j_x, j_y, j_z) = (cp, \vec{j}), \quad (\text{II -27})$$

Où  $p \equiv p(\vec{x}, t) \equiv p(x)$  sont la densité et  $\vec{j} \equiv \vec{j}(x, t) \equiv \vec{j}(x)$  le courant.

On définit un produit scalaire entre 4-vecteurs :

## Lagrangien d'un champ scalaire complexe

$$b \cdot c = b^\mu c_\mu = b_\mu c^\mu = g_{\mu\nu} b^\mu c^\nu = g^{\mu\nu} b_\mu c_\nu \quad (\text{II -28a})$$

$$= b^0 c^0 - b^1 c^1 - b^2 c^2 - b^3 c^3 \quad (\text{II -28b})$$

$$= b^0 c^0 - \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad (\text{II -28c})$$

Où nous avons adopté à la première ligne la convention de sommation sur les indices répétés et où  $g_{\mu\nu}$  est le tenseur métrique de signature majoritairement négative : [8]

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II - 29})$$

C'est une métrique dite pseudo-euclidienne ou de Minkowski. Comme noté dans (II -29) le tenseur métrique coïncide avec son inverse et ils sont reliés par :

$$g^{\alpha\mu} g_{\alpha\nu} = g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad (\text{II -30})$$

Où  $\delta^\mu_\nu$  est le symbole de Kronecker :

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{II -31})$$

Le tenseur métrique ci-dessus permet de passer d'un 4-vecteur contra variant à un 4-vecteur covariant, i.e., d'élever ou d'abaisser un indice. Par exemple (attention aux signes) :

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left( \frac{E}{c}, -P_x, -P_y, P_z \right) = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right). \quad (\text{II -32})$$

Il permet aussi d'évaluer la norme d'un 4-vecteur. On peut ainsi montrer que le 4-vecteur impulsion est de longueur invariante :

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2, \quad (\text{II -33})$$

Où  $m$  est la masse au repos de la particule et  $c$  la vitesse de la lumière. Cette égalité est en accord avec le fait que :  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ . Notons aussi que :

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (\text{II -34})$$

Qui sera utile pour la transformée de Fourier.

On définit de même le 4-vecteur gradient (attention aux signes et à la position des indices) :

$$\nabla^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad (\text{II -35a})$$

$$\nabla_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla} \right). \quad (\text{II -35b})$$

Ainsi, pour un 4-vecteur  $\gamma^{\mu}$ , on a (attention au signe) :

$$\gamma^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{1}{c} \gamma^0 \partial_t + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}. \quad (\text{II -36})$$

On peut aussi réexprimer la 4-vecteur impulsion comme :

$$p^{\mu} = +i\hbar \nabla^{\mu} = \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right) \quad (\text{II -37})$$

Ceci conduit à :

$$p^{\mu} p_{\mu} = -\hbar^2 \partial^{\mu} \partial_{\mu} = -\hbar^2 \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \equiv -\hbar^2 \square, \quad (\text{II -38})$$

Où  $\square$  est le d'Alembertien :

$$\square \equiv \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (\text{II -39})$$

Et  $\Delta$  le Laplacien.

### II. 1. 4.2 Cas d'un champ scalaire réel :

Revenons maintenant aux équations de Lagrange (II -22). A l'aide des notations et conventions présentées ci-dessus, elles peuvent s'écrire sous une forme plus compacte donnée par :

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (\text{II -40})$$

Nous verrons par la suite qu'il est possible de considérer des systèmes décrits par un ensemble discret de champs,  $\phi_a(x)$ , où  $a = 1, 2, \dots, N$ . Il existe alors une équation du mouvement pour chaque composante du champ

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \quad (a = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{II -41})$$

Dans le cas où  $N = 1$ , on prend  $\phi_1 \equiv \phi$  et on retrouve (1.40). Un Lagrangien donné pourra aussi s'exprimer de manière compacte au moyen de 4-vecteurs. Revenons au Lagrangien de la corde vibrante unidimensionnelle (1.10). En redéfinissant  $\eta = \phi/\sqrt{Y}$  et en généralisant à un espace 3D, il vient :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2 \right), \quad (\text{II -42})$$

Où  $c = \sqrt{Y/\sigma}$  a bien les dimensions d'une vitesse. Sous forme "relativiste", ce Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \quad (\text{II -43})$$

Le Lagrangien (II -43) est l'exemple le plus simple de Lagrangien relativiste d'un champ scalaire réel (libre). Notons que c'est le choix de la métrique majoritairement positive qui permet de l'écrire avec un signe global positif (avec une métrique majoritairement négative un signe global négatif apparaîtrait).

L'application de (II -40) à (II -43) permet de déterminer l'équation du mouvement du champ :

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi \equiv \square \phi = 0, \quad (\text{II -44})$$

Qui correspond bien à une simple équation des ondes. L'action correspondant à  $\mathcal{L}$  s'écrira :

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x), \quad (\text{II -45})$$

Où les mesures d'intégration du temps et de l'espace ont été ramassées dans le  $d^4x$ . Pour bien marquer la présence du temps, on dira que le système est à  $(3 + 1)$ - dimensions (1 pour le temps). Plus généralement, un système relativiste à  $D$  dimensions d'espace vit dans un espace-temps à  $d = D + 1$  dimensions. Dans ce cas, l'indice  $\mu$  des 4-vecteurs et tenseurs prend les valeurs  $0, 1, \dots, D$  où 0 correspond toujours à la composante temporelle. L'action est donnée par :

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x). \quad (\text{II -46})$$

Donnons deux exemples importants :

— la corde vibrante (II -10) correspond à une théorie à  $(1 + 1)$ -dimensions. Son Lagrangien est donné par (II -43) avec  $\mu = 0, 1$  et son action par (II -46) où  $d = 2$ . Comme anticipé dans le dernier cours, nous constatons que dans la limite continue une forme relativiste a émergé pour la corde vibrante où la vitesse de phase  $c = \sqrt{Y/\sigma}$  correspond effectivement à une vitesse de la lumière.

— le cas d'une théorie à  $(0 + 1)$ -dimensions correspond en fait à la mécanique classique (et donc à la mécanique quantique après quantification).

— l'électromagnétisme est une théorie à  $(3 + 1)$ - dimensions (et conduit à l'électrodynamique quantique après quantification).

Dans toute la suite (sauf mention explicite du contraire) nous nous concentrerons sur des systèmes à  $(3 + 1)$ -dimensions. [9]

L'introduction des 4-vecteurs n'est pas simplement cosmétique. Elle permet d'implémenter le principe de relativité restreinte d'Einstein et donc l'invariance (ou plutôt la covariance) de Lorentz. C'est ce que l'on entend par forme "relativiste".

### II. 1.4.3 Transformations de Lorentz :

Rappelons le principe de relativité de Galilée qui s'applique aux systèmes non relativistes : les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. Le passage d'un référentiel à un autre se fait au moyen d'une transformation de Galilée :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t, \quad t \rightarrow t' = t, \quad (\text{II -47})$$

Où  $\vec{V}$  est la vitesse relative des deux référentiels et le temps est absolu. Le principe de relativité restreinte (Einstein) stipule quant à lui que la vitesse de la lumière est constante dans tous les référentiels inertiels. Il généralise ainsi celui de Galilée en incluant le régime relativiste. Son expression mathématique est contenue dans le fait que l'intervalle :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2, \quad (\text{II -48})$$

Est invariant par changement de référentiel inertiel. Les transformations ainsi obtenues sont les transformations de Lorentz qui généralisent les transformations de Galilée. Les transformations de Lorentz laissent  $ds^2$  invariant et peuvent être interprétées comme des "rotations" dans un espace à 4 dimensions  $(ct, x, y, z)$ . Il en existe 6 : 3 rotations ordinaires d'espace (par rapport aux axes  $x, y$  et  $z$ ) ainsi que 3 transformations spéciales (ou boosts) faisant intervenir le temps (dans les directions  $x, y$  et  $z$ ). Considérons par exemple le cas d'un boost dans la direction  $x$ . Cette transformation préserve la longueur d'espace-temps, i.e., la forme quadratique  $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$  et laisse les coordonnées  $y$  et  $z$  invariantes. Sous forme matricielle, elle peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{II -49})$$

Où les paramètres de la transformation sont donnés par  $\beta = V/c$  et  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  (facteur de Lorentz) et  $\vec{V} = V \vec{e}_x$  est la vitesse du boost dans la direction  $x$ . La transformation inverse est donnée par  $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$ , i.e.,  $\beta \rightarrow -\beta$ . Cette transformation peut aussi s'écrire sous la forme d'une rotation hyperbolique en posant

$\cosh(\phi) = \gamma$  et  $\sinh(\phi) = \beta\gamma$  Ou encore = Ceci conduit alors à :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{II -50})$$

A titre de comparaison, une rotation ordinaire autour de l'axe z est une transformation orthogonale préservant la longueur d'espace, i.e., la forme quadratique  $\vec{x}^2 = \bar{x}^2$  et laissant le temps invariant  $t = t$ . Sous forme matricielle, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{II -51})$$

Où  $\theta$  est l'angle de rotation autour de l'axe z. Il sera commode dans toute la suite de mettre ces transformations sous une forme compacte en utilisant les notations 4-vecteurs appropriées au cas relativiste. On écrira ainsi :

$$(\dot{x})^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (\dot{x})_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \quad (\text{II -52})$$

Où  $\Lambda$  est une matrice  $4 \times 4$  associée à la transformation (qui peut être une rotation ordinaire ou un boost). La notation  $\Lambda_\mu^\nu$  implique que  $\mu$  est un indice de ligne et  $\nu$  un indice de colonne. Dans le cas d'un boost le long de x on a ainsi :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II -53})$$

Remarquons que les transformations inverses de (II -52) sont données par :

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})_\nu^\mu (\dot{x})^\nu, \quad x_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu (\dot{x})_\nu, \quad (\text{II -54})$$

Ou encore

$$x^\mu = \Lambda_\nu^\mu (\dot{x})^\nu, \quad x_\mu = \Lambda_\mu^\nu (\dot{x})_\nu, \quad (\text{II -55})$$

Le principe de relativité restreinte contraint les coefficients  $\Lambda_\nu^\mu$  et  $\Lambda_\mu^\nu$  de la transformation de Lorentz. En effet, le produit scalaire laisse invariant la forme quadratique  $x^2 = (\dot{x})^2$  ou, plus explicitement :  $x^\mu x_\mu = \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$ . Or  $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = \Lambda_\sigma^\mu x^\sigma \Lambda_\mu^\rho x_\rho$  Et  $x^\mu x_\mu = \delta_\sigma^\rho x^\sigma x_\rho$  où  $\delta_\sigma^\rho$  est le symbole de Kronecker (1.31). On obtient donc :

$$\Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\mu^\rho = \delta_\sigma^\rho. \quad (\text{II -56})$$

Cette relation est l'analogie de  $\mathbf{R}^T = \mathbf{1} \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$  qui exprime l'orthogonalité des matrices de rotation R dans l'espace ordinaire (même si la transposée n'apparaît pas explicitement dans (II -56)). On peut écrire cette relation sous une autre forme qui peut s'avérer utile en pratique. Pour cela, on écrit :  $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu x^\sigma x^\rho$  qui doit être égal à :  $x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ . On obtient alors :

$$\Lambda_{\sigma}^{\mu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\nu} = g_{\sigma\rho}. \quad (\text{II -57})$$

Notons que le tenseur  $g_{\mu\nu}$  est invariant sous la transformation de Lorentz. Il exprime l'orthogonalité d'une base qui doit être valable quelque soit la base utilisée. Les matrices  $4 \times 4 \Lambda$  apparaissant dans (II -52) forment une représentation des transformations de Lorentz. L'ensemble de ces matrices forme un groupe orthogonal noté  $O(3,1)$ , le groupe de Lorentz. Tout comme  $O(3)$ , ce groupe est non-commutatif. Remarquons que, de la relation (II -56), on obtient :

$$\Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = \delta_{\sigma}^{\rho} \Rightarrow (\det(\Lambda))^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1. \quad (\text{II -58})$$

On distingue alors les transformations de Lorentz propres dont le déterminant est positif :  $\det(\Lambda) = +1$ . Elles forment un sous-groupe de  $O(3,1)$  noté  $SO(3,1)$  incluant les rotations et les boosts. Il existe aussi des transformations de Lorentz impropres dont le déterminant est négatif :  $\det(\Lambda) = -1$ . Ces transformations correspondent à la parité et au renversement du temps. Notons que seules les transformations propres sont continûment connectées à l'identité et admettent donc un développement infinitésimal. Les transformations impropres sont discrètes. Notons aussi que les transformations qui préservent la flèche du temps sont telles que :

$$\Lambda_0^0 \geq 0. \quad (\text{II -59})$$

De telles transformations sont dites orthochrones. Le groupe de Lorentz restreint, noté  $SO^+(3,1)$  est un sous-groupe du groupe de Lorentz comprenant les transformations propres et orthochrones. Par abus de langage, le groupe de Lorentz restreint est parfois appelé groupe de Lorentz. Pour conclure cette sous-section, notons que le groupe de Lorentz  $O(3,1)$  est un sous-groupe du groupe de Poincaré. Ce dernier inclut aussi des translations d'espace et de temps (le groupe des translations d'espace-temps est commutatif). Sous le groupe de Poincaré, les transformations (II -52) se généralisent en :

$$(\hat{x})^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (\hat{x})_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} + a_{\mu}, \quad (\text{II -60})$$

Où le 4-vecteur  $a$  paramétrise la translation. Le groupe de Poincaré est parfois qualifié de groupe de Lorentz inhomogène. Pour insister sur l'absence de translation, les transformations (II -52) sont quant à elles parfois qualifiées de transformations de Lorentz homogènes.

### **II. 1.4.4 Covariance de Lorentz :**

Les scalaires, vecteurs et plus généralement tenseurs sont définis par l'action du groupe des rotation  $SO(3)$  sur ces objets. [10]

Dans l'espace de Minkowski, c'est l'action de  $SO(3,1)$  qui permet de définir la nature des objets que l'on manipule. Dans ce cadre, on peut définir un 4-vecteur comme étant un objet dont les quatre composantes se transforment comme celle du 4-vecteur position,  $x^{\mu}$ , sous l'action d'une transformation de Lorentz homogène. Ainsi :

$$\acute{b}^\mu = \Lambda_\nu^\mu b^\nu, \quad \acute{c}^\mu = \Lambda_\nu^\mu c^\nu, \quad (\text{II -61})$$

Impliquent que  $b^\mu$  et  $c^\mu$  sont des 4-vecteurs. A l'aide de (II -56) on peut alors montrer que :

$$\acute{b}^\mu \acute{c}_\mu = \underbrace{\Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\mu^\rho}_{=\delta_\sigma^\rho} b^\sigma c_\rho = b^\mu c_\mu, \quad (\text{II -62})$$

Ce qui permet de vérifier explicitement la covariance de Lorentz du produit scalaire :

$$\acute{b} \cdot \acute{c} = b \cdot c. \quad (\text{II -63})$$

En utilisant (1.55) on peut aussi montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial \acute{x}_\mu} = \Lambda_\nu^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial \acute{x}^\mu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (\text{II -64})$$

I.e.,  $\partial^\mu$  se transforme comme un 4-vecteur contra variant et  $\partial_\mu$  comme un 4-vecteur covariant. On peut de même définir des tenseurs de rang plus élevé via leur transformation de Lorentz. Ainsi, un 4-tenseur de rang 2 est défini comme :

$$\acute{T}^{\mu\nu} = \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu T^{\sigma\rho}. \quad (\text{II -65})$$

Les transformations de Lorentz admettent aussi des représentations sur les champs qui permettent d'en définir la nature. Dans le cas d'un champ scalaire, une transformation de Lorentz,  $x \rightarrow \acute{x} = \Lambda x$ , implique que :

$$\phi(x) \rightarrow \acute{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x), \quad (\text{II -66})$$

Où nous avons utilisé la notation  $\phi(x) \equiv \phi(\vec{x}, t)$  et l'apparition de  $\Lambda^{-1}$  dans l'argument du champ vient du fait que nous utilisons le point de vue actif. Notons que (1.66) peut aussi s'écrire :  $\acute{\phi}(\acute{x}) = \phi(x)$ , i.e., la valeur du champ transformé en la coordonnée transformée est égale à la valeur du champ d'origine en la coordonnée d'origine. De même, dans le cas d'un champ vectoriel, e.g. pour le 4-vecteur potentiel, la représentation suivante s'applique naturellement :

$$A^\mu(x) \rightarrow \acute{A}^\mu(x) = \Lambda_\nu^\mu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (\text{II -67})$$

Une théorie (ou un modèle) est dite covariante de Lorentz (ou invariante de Lorentz ou encore invariante relativiste) si lorsque  $\phi(x)$  satisfait les équations du mouvement alors  $\phi(\Lambda^{-1}x)$  satisfait les mêmes équations du mouvement. On peut s'assurer de cette covariance de manière très simple : en construisant un Lagrangien qui est lui-même covariant de Lorentz, c'est-à-dire un scalaire. Le point crucial est que l'invariance relativiste de  $\mathcal{L}$  est tellement restrictive que l'on peut s'en servir pour construire  $\mathcal{L}$ .

D'un point de vue pratique, le formalisme présenté permet de repérer d'un seul coup d'œil la nature des objets manipulés. Il suffit tout simplement pour cela de compter le nombre



d'indices non contractés :

- scalaire : tous les indices sont contractés. C'est le cas par exemple de  $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$ .
- vecteur : un seul indice non contracté. C'est le cas par exemple de  $\partial^\mu \phi \gamma^\alpha \partial_\mu \phi \sim V^\alpha$  où  $\gamma^\mu$  est un 4-vecteur.
- tenseur de rang 2 : deux indices non contractés. C'est le cas par exemple de  $\partial^\mu \phi \gamma^\alpha \gamma^\beta \partial_\mu \phi \sim T^{\alpha\beta}$ .

Sans faire aucun calcul, on peut alors immédiatement s'assurer que le Lagrangien libre d'un champ scalaire réel, (II -43), est bien covariant de Lorentz et que l'équation du mouvement correspondante, (II -44), l'est aussi. On comprend ainsi mieux ce que l'on entendait au premier cours par "émergence d'une invariance de Lorentz" pour la corde vibrante.

## II. 1.5 Exemples de champs classiques

### II. 1 .5.1 Champs scalaires

#### II. 1 .5.1.3 Champ scalaire complexe :

Considérons le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi, \quad (\text{II -68})$$

Où  $\phi^*$  est le complexe conjugué de  $\phi$ . Notons qu'un champ complexe peut être vu comme la combinaison linéaire de deux champs réels  $\phi_1$  et  $\phi_2$  :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (\text{II -69})$$

La nature complexe de ce champ traduit l'existence d'un degré de liberté interne telle qu'une charge. Nous y reviendrons en Sec II. 1.5.3.

#### II.1 .5.1.4 Champ scalaire complexe non-relativiste :

Considérons le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2c}(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{1}{2\mu} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi - \mu \psi^* \psi, \quad (\text{II -70})$$

Où  $\psi$  est un champ complexe. Clairement, le temps et l'espace ne sont pas à pied d'égalité (premier ordre en  $\partial_t$ , deuxième ordre en  $\partial_x$ ) : ce modèle n'est donc pas invariant de Lorentz. L'équation du mouvement associée est donnée par :

$$\frac{i}{c} \dot{\psi} = -\frac{1}{2\mu} \Delta \psi + \mu \psi. \quad (\text{II -71})$$

Notons que si l'on prend pour  $\mu$  l'inverse de la longueur de Compton (voir (II -74) et que l'on multiplie les deux membres de la dernière équation par  $\hbar c$ , il vient :

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + mc^2\psi, \quad (\text{II -72})$$

Qui est très similaire à une équation de Schrödinger. Cette équation n'a cependant rien de quantique et  $\psi$  est un champ classique qui ne correspond en aucun cas à une fonction d'onde. Il faut donc encore une fois prendre garde à la forme prise par une équation classique pour certaines valeurs des paramètres. Ces derniers sont arbitraires au niveau actuel et ce n'est qu'après quantification qu'un sens physique, e.g., lien avec la masse d'une particule, leur sera donné.

## II.1 .5.2 Champs vectoriels : l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell correspondent aux équations du mouvement du champ électromagnétique. Elles sont à la base de l'électrodynamique classique. Il en existe quatre que l'on regroupe par deux selon qu'elles possèdent ou non des sources :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{II -73a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{II -73b})$$

Où  $\vec{E}$  sont le champ électrique,  $\vec{B}$  le champ magnétique,  $\rho$  la densité de charge et  $\vec{j}$  la densité de courant.

Les champs physiques sont les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Cependant, une formulation lagrangienne de l'électrodynamique nécessite l'introduction du potentiel scalaire,  $\phi$ , et du potentiel vectoriel,  $\vec{A}$ , qui sont tels que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (\text{II -74})$$

A l'aide de (II -83) les équations sans source, (II -82b), sont automatiquement satisfaites. Les champs  $\phi$  et  $\vec{A}$  peuvent se combiner pour former le 4- potentiel :

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, A_x, A_y, A_z) = (\phi, \vec{A}), \quad (\text{II -75}).$$

On peut alors définir le 4-tenseur du champ électromagnétique comme :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (\text{II -76})$$

Ce tenseur est totalement antisymétrique. Il est physique ce qui se traduit par le fait qu'il est invariant par transformation de jauge :

$$A^\mu(x) \rightarrow \hat{A}^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x). \quad (\text{II -77})$$

Notons que fixer la jauge correspond à choisir la fonction  $\lambda(x)$ . Dans le cas relativiste, il est courant d'utiliser la jauge de Lorentz :

$$\partial_{\mu} A^{\mu}(x) = 0 \leftrightarrow \square \lambda(x) = 0, \quad (\text{II -78})$$

Qui est covariante de Lorentz. Ceci n'est pas le cas de la jauge de Coulomb :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  qui brise explicitement la symétrie entre l'espace et le temps et qui est davantage utilisée en physique atomique.

A ce stade, il est possible de présenter la formulation covariante de l'électrodynamique classique, i.e., d'exprimer les équations du mouvement et le Lagrangien au moyen de 4-vecteurs. Les équations de Maxwell avec source prennent la forme :

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J^{\nu}, \quad (\text{II -79})$$

Où  $J^{\mu}$  est le 4-vecteur courant (1.27). Notons que l'antisymétrie de  $F^{\mu\nu}$  implique que  $\partial_{\mu} \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = 0$  ce qui conduit à :

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (\text{II -80})$$

Et permet de retrouver l'équation de continuité. Cette dernière exprime la conservation du courant. La forme covariante (II -88), particulièrement élégante et compacte, permet de trouver cette conservation de manière simple et rapide

. En ce qui concerne le Lagrangien, il est composé de deux termes :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (\text{II -81})$$

Où  $\mathcal{L}_0$  est le Lagrangien du champ de Maxwell libre et  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  le Lagrangien d'interaction avec la matière. Pour ce qui est de la partie libre, avec  $F^{\mu\nu}$  à notre disposition, on peut construire un scalaire de Lorentz physique donné par :  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ . On a donc :

$$F = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (\text{II -82})$$

Avec un facteur conventionnel de 1/4. Pour ce qui est du terme d'interaction, le scalaire de Lorentz correspondant est donné par :  $J^{\mu} A_{\mu}$  ce qui conduit à :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} j^{\mu} A_{\mu}. \quad (\text{II -83})$$

Par application des équations d'Euler-Lagrange, ce Lagrangien permet de retrouver l'équation du mouvement (II -88).

## II.1.6 Symétries et lois de conservation :

Au cours des dernières sections, nous avons eu un aperçu de l'importance des symétries en TQC pour construire le Lagrangien. Nous en avons donné quelques exemples essentiellement en ce qui concerne l'invariance de Lorentz. Cette section a pour but de présenter le lien fondamental entre symétries et lois de conservation.

### II. 1.6.1 Théorème de Noether :

Ce théorème est une formulation mathématique du lien entre symétries et lois de conservation dans le cadre de la mécanique de Lagrange adaptée à la TQC.

Théorème de Noether : pour chaque symétrie continue, il existe un courant conservé  $j^\mu(\mathbf{x})$  qui est tel que :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 . \quad (\text{II -84})$$

Notons que la conservation du courant implique la conservation d'une charge qui est liée à la composante temporelle du courant :

$$Q = \frac{1}{c} \int d^3x j^0(\mathbf{x}) = \int_V d^3x \rho(\mathbf{x}), \quad (\text{II -85})$$

Où l'intégrale s'étend sur un certain volume  $v$ . En effet :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \int_{\partial v} d\vec{S} \cdot \vec{j}, \quad (\text{II -86})$$

Où  $\partial v$  est le bord de  $v$ . Si l'on suppose, comme il est d'usage de le faire, qu'il n'y a pas de courant au bord, alors on a  $\frac{dQ}{dt} = 0$  et  $Q$  est bien conservée.

L'efficacité du théorème de Noether vient du fait qu'il permet de trouver la forme du courant  $j^\mu$ . Pour le montrer, revenons au cas d'un champ scalaire réel  $\phi(\mathbf{x})$  de Lagrangien  $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ . Puisque nous nous intéressons à des transformations continues, il est possible de se restreindre à la forme infinitésimale d'une transformation de  $\phi$ . Pour une transformation quelconque (nous aborderons les exemples plus bas) cette dernière peut s'écrire :

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \delta\phi(\mathbf{x}). \quad (\text{II -87})$$

Dans le cadre de la mécanique de Lagrange, cette transformation est une symétrie si elle laisse  $\mathcal{L}$  invariant à une dérivée totale près : [13]

$$\mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}, \quad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu, \quad (\text{II -88})$$

Où  $F^\mu \equiv F^\mu(\phi)$  est une fonction du champ  $\phi$ . De manière générale et au premier ordre en  $\delta\phi$ , la transformation conduit à :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) + O(\delta\phi^2)$$

$$= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) + O(\delta \phi^2). \quad (\text{II -89})$$

Si l'on suppose que l'équation du mouvement est satisfaite, le premier terme en facteur de  $\delta \phi$  dans (1.97) est nul. Il vient alors :

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) + O(\delta \phi^2) = \partial_\mu F^\mu, \quad (\text{II -90})$$

D'où l'on peut déduire la forme explicite du courant conservé :

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - F^\mu \phi. \quad (\text{II -91})$$

Insistons une nouvelle fois sur le fait que cette expression n'est valable que lorsque l'équation du mouvement est satisfaite (on dit aussi : sur la couche de masse ou "on-Shell" en anglais). L'équation (II -100) peut par ailleurs se généraliser au cas d'un champ scalaire réel,  $\phi_a(x)$  à N composantes, i.e., a est un indice discret dont les valeurs vont de 1 à N :

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - F^\mu \phi \quad (a = 1, \dots, N). \quad (\text{II -92})$$

## II. 1.6.2 Tenseur énergie-impulsion

Comme première application du théorème de Noether, nous souhaitons déterminer le courant conservé associée à une translation spatio-temporelle. De la mécanique classique, nous savons qu'à l'invariance par translation dans l'espace est associée la conservation de l'impulsion totale du système. Et à l'invariance par translation dans le temps est associée la conservation de l'énergie totale. Comme nous nous proposons de le montrer ici, dans le formalisme covariant où l'on traite espace et temps au même niveau, il est possible d'unifier les deux invariants. Dans la suite, le cas d'un champ scalaire réel de Lagrangien  $\mathcal{L}$  sera considéré. Comme précédemment, on supposera que le Lagrangien ne dépend pas explicitement de  $x$  (auquel cas il n'y aurait pas d'invariance possible). Par abus de langage nous noterons toutefois :

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial \phi(x)). \quad (\text{II -93})$$

Considérons une translation spatio-temporelle homogène infinitésimale :

$$x^\nu \rightarrow (\hat{x})^\nu = x^\nu - \varepsilon^\nu, \quad (\text{II -94})$$

Où  $\varepsilon^\mu \rightarrow 0$ . Dans le point de vue actif, le champ scalaire se transforme comme :

$$\phi(x) \rightarrow \hat{\phi}(x) = \phi(x + \varepsilon) = \phi(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi(x) + O(\varepsilon^2), \quad (\text{II -95})$$

Le Lagrangien est affecté par la transformation de la même manière puisqu'il ne dépend pas explicitement de  $x$ . En effet :

$$\hat{\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(\phi(x + \varepsilon), \partial\phi(x + \varepsilon)) \equiv \mathcal{L}(x + \varepsilon) = \mathcal{L}(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x), \quad (\text{II -96})$$

Donc :

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \delta_\nu^\mu \varepsilon^\nu \partial_\mu \mathcal{L} \Rightarrow F^\mu = \delta_\nu^\mu \varepsilon^\nu \mathcal{L}. \quad (\text{II -97})$$

Nous pouvons maintenant utiliser (II -100) (ou (II -101) avec  $a = 1$ ) pour en déduire le courant conservé :

$$j^\mu = \varepsilon^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi(x) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right), \quad (\text{II -98})$$

Où l'on a factorisé  $\varepsilon^\nu$ . Il est commode d'exprimer ce courant sous la forme  $j^\mu = \varepsilon^\nu (j^\mu)_\nu$  avec :

$$(j^\mu)_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi(x) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \equiv T_\nu^\mu, \quad (\text{II -99})$$

Qui fait apparaître le tenseur énergie-impulsion  $T_\nu^\mu$ . Notons que les quatre valeurs prises par  $\nu$  correspondent aux quatre quantités conservées : l'énergie totale du champ,  $E$ , et les trois composantes de l'impulsion totale du champ,  $P^i (i = 1,2,3)$ . En effet, on a bien :

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (\text{II -100})$$

et les quatre "charges" conservées sont :

$$E = \int d^3x T^{00}, \quad P^i = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i} \quad (i = 1,2,3). \quad (\text{II -101})$$

Appliquons les résultats ci-dessus au cas d'un champ de Klein-Gordon (1.68). Le tenseur énergie-impulsion est donné par :

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{II -102})$$

et prend d'emblée une forme symétrique (ce qui n'est pas toujours le cas) :  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ . On en déduit alors que :

$$E = \int d^3x \left( \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \right), \quad (\text{II -103a})$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \vec{\nabla}\phi. \quad (\text{II -103b})$$

### **II. 1 .6.3 Symétries internes :**

D'importance cruciale en physique est la notion de symétrie interne. Contrairement aux cas abordés dans les paragraphes précédents, ces symétries ne sont pas liées à des transformations de l'espace et du temps.

Elles ont donc une nature non géométrique.

C'est ce type de symétrie qui conduit par exemple à la conservation de la charge électrique.

Notons aussi que ces symétries sont liées à des transformations globales (on parle aussi de

symétrie globale) où les paramètres de la transformation ne dépendent pas des coordonnées de l'espace-temps. [14]

Afin d'illustrer la notion de symétrie interne, nous allons reconsidérer l'exemple du champ scalaire complexe de Lagrangien (II -78). Il existe une symétrie supplémentaire de (II -78) par rapport à son analogue réel (II -68). Considérons la transformation :

$$\phi \rightarrow \hat{\phi} = e^{i\alpha}\phi, \quad \phi^* \rightarrow \hat{\phi}^* = e^{-i\alpha}\phi^* \quad (\text{II -104})$$

Qui est une transformation continue caractérisée par une simple phase globale (transformation dite  $U(1)$ ). Le Lagrangien (II -78) est invariant sous cette transformation qui n'est pas de nature géométrique. Pour mieux l'apprécier, il est instructif de la réécrire en termes de champs réels. On voit alors que la transformation correspondante mélange les composantes réelles :

$$\hat{\phi}_1 = \cos(\alpha)\phi_1 - \sin(\alpha)\phi_2, \quad \hat{\phi}_2 = \sin(\alpha)\phi_1 + \cos(\alpha)\phi_2. \quad (\text{II -105})$$

Cette transformation est donc une rotation à 2 dimensions, non pas dans l'espace ordinaire, mais dans l'espace des composantes  $(\phi_1, \phi_2)$  qui correspond à l'espace des degrés de liberté internes du champ. Etant orthogonale et de déterminant 1, on peut la noter  $SO(2)$ . A l'invariance de  $\mathcal{L}$  sous cette transformation particulière est associée une loi de conservation dont le courant est donné par :

$$j^\mu = -i(\phi^*(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi^*)\phi). \quad (\text{II -106})$$

Comme on le verra plus tard, la quantité conservée est la charge électrique. Notons par ailleurs que si le champ  $\phi$  est associé à une charge  $e$ , on peut montrer que le champ  $\phi^*$  est associé à une charge  $-e$ . Un champ réel est associé à une charge nulle, i.e., il ne possède pas ce degré de liberté interne.

Nous pouvons nous placer dans le cadre plus général d'un champ scalaire réel  $\phi_a(x)$  à  $N$  composantes ( $a = 1, \dots, N$ ). L'espace des degrés de liberté interne est alors de dimension  $N$  et l'on peut considérer des transformations orthogonales qui mélangent les  $N$  composantes :

$$\phi_a = R_a^b \phi_b, \quad (\text{II -107})$$

Où  $R$  est une matrice de rotation de dimension  $N \times N$ . Un Lagrangien invariant sous une telle transformation aurait une symétrie  $SO(N)$ . Notons que pour  $N \geq 3$ , cette transformation est non-abélienne.

### **II.1.7 Formalisme de Hamilton :**

Pour conclure ce Chapitre, le passage du Lagrangien au Hamiltonien dans le cas d'un champ  $\phi$  en  $(3 + 1)$ -dimensions s'obtient aisément par analogie à (1.19) :

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad \pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (\text{II -108})$$

Où  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\pi, \phi, \partial\phi, x)$  est la densité d'Hamiltonien et  $\pi(x)$  le moment canonique conjugué au champ  $\phi(x, t)$ . Remarquons qu'il est possible de définir une grandeur plus générale :

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}. \quad (\text{II -109})$$

Le moment conjugué est donc lié à la composante temporelle de  $\pi^\mu$  :

$$\pi(x) = \frac{1}{c} \pi^0(x). \quad (\text{II -110})$$

C'est précisément cette définition du moment conjugué qui introduit une dissymétrie entre l'espace et le temps dans le formalisme de Hamilton.

Pour un champ scalaire à N composantes, les formules ci-dessus se généralise simplement en :

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \sum_{a=1}^N \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}, \quad \pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}. \quad (\text{II -111})$$

On a aussi :

$$\pi_a^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}, \quad \pi_a(x) = \frac{1}{c} \pi_a^0(x). \quad (\text{II -112})$$

## II.1 .8 L'équation de Klein-Gordon : démarche historique

Nous avons déjà évoqué dans l'Introduction qu'historiquement l'unification de la mécanique quantique et de la relativité restreinte avait débuté par la recherche d'une équation d'onde quantique relativiste. Nous avons aussi indiqué que cette équation à une particule ne permet pas de décrire le régime quantique relativiste caractérisé par la création de paires. Et donc qu'une mécanique quantique relativiste est une impasse. Il est toutefois instructif de reprendre les arguments historiques afin de mettre en valeur les difficultés conceptuelles auxquels ils conduisent. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette section. Considérons tout d'abord le cas non-relativiste d'une particule libre de masse m. Son Hamiltonien classique est donné par :  $H_{NR} = p^2/(2m)$ . Le principe de correspondance (première quantification) stipule alors que le passage à la mécanique quantique se fait en élevant les variables dynamiques au rang d'opérateurs agissant dans un espace des états. Dans le point de vue position, on a ainsi :

$$H \rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (\text{II -113})$$

L'équation aux valeurs propres de H:  $H\psi = E\psi$  prend alors la forme de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \psi(\vec{x}, t), \quad (\text{II -114})$$



## Lagrangien d'un champ scalaire complexe

---

Où l'on reconnaît la fonction d'onde  $\psi(\vec{x}, t)$  décrivant l'état du système quantique. Cette dernière admet une interprétation probabiliste. On peut ainsi définir :

$$\rho(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t), \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{i\hbar}{m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \quad (\text{II -115})$$

Qui correspondent respectivement à une densité de probabilité et à un courant de probabilité.

## Références:

- [1] James D. Bjorken, Sidney David Drell, Relativistic quantum mechanics, International series in pure and applied physics, McGraw-Hill (1964).
- [2] James D. Bjorken, Sidney David Drell, Relativistic quantum fields, International series in pure and applied physics, McGraw-Hill (1965).
- [3] N. N. Bogolyubov and D. V. Shirkov, "Introduction To The Theory Of Quantized Fields," Intersci. Monogr. Phys. Astron. 3 (1959) 1.
- [4] Sidney Coleman, Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Foreword by David Kaiser, B. G. Chen, D. Derbes, D. Griffiths, B. Hill, R. Sohn and Y. S. Ting, World Scientific Publishing (2018).
- [5] Claude Itzykson et Jean-Bernard Zuber, Quantum Field Theory, Dover Books on Physics, Courier Corporation (2012).
- [6] John D. Jackson, Classical electrodynamics, Wiley India Pvt. Limited (2007).
- [7] Lev Landau et Evguéni Lifchitz, Vol. 2, Théorie des Champs, Editions Mir (1989).
- [8] Lev Landau et Evguéni Lifchitz, Vol. 4, Electrodynamique Quantique, Editions Mir (1989). [11] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, An Introduction To Quantum Field Theory, Frontiers in Physics, Avalon Publishing (1995).
- [9] Lewis Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press (1996).
- [10] Jun John Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Pearson (1967).
- [11] David Tong, Lectures on Quantum Field Theory, Université de Cambridge (2006). Notes de cours + vidéos disponibles sur : <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>
- [12] Steven Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Volume 1, Cambridge University Press (1995).
- [13] Anthony Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, Princeton University Press (2010).

## Chapitre 03: résultants et discussion

### III-1. Introduction :

Nous arrivons à la partie la plus laborieuse de notre travail, ou nous convertissons tout ce que nous avons vu dans les chapitres I et II d'un point de vue théorique à des équations numériques accessibles aux calculs. Pour cela nous réécrivons notre lagrangien tout en formant nos équations d'Euler Lagrange ainsi obtenus par le principe de minimisation qui stipule que notre chemin soit minimal d'où équations du mouvement [1-10].

Résoudre ces équations numériquement revient à construire un organigramme de calcul inspirés par un programme écrit en fortran 77 qui repose sur la méthode d'Euler. Nous en donnerons ici un bref :

### III-2. Méthode de calcul :

Mon objectif est l'étudier un lagrangien de type champ scalaire complexe

Ça veut dire :

$$\varphi^*(x, t) \neq \varphi(x, t) \quad (\text{III} - 1)$$

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(x, t) + i\varphi_2(x, t) \quad (\text{III} - 2a)$$

$$\varphi^*(x, t) = \varphi_1(x, t) - i\varphi_2(x, t) \quad (\text{III} - 2b)$$

Alors en partant de l'expression du lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \quad (\text{III} - 3a)$$

$$\text{Avec } V(\varphi) = \frac{1}{2} (m\varphi)^2 \quad (\text{III} - 3b)$$

Et nous insérons l'expression du champ scalaire complexe décrit comme :

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad (\text{III} - 4)$$

Nous essayons de séparer notre lagrangien en deux parties une partie qui décrit la partie réelle et une deuxième partie qui décrit la partie imaginaire :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \quad (\text{III} - 5a)$$

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2} (m\varphi_1)^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 - \frac{1}{2} (m\varphi_2)^2 \right] \quad (\text{III} - 5b)$$

Et avec toujours l'application du principe d'action qui stipule que notre chemin Soit minimal

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^4x \quad (\text{III} - 6a)$$

$$\mathcal{S} = \int (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) d^4x \quad (\text{III} - 6b)$$

:

Donc en minimisant  $\mathcal{S}$

C'est-à-dire  $\delta\mathcal{S} = 0$

que  $\delta^2\mathcal{S} > 0$

Et en pesant

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{III} - 7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial (\partial_\mu \varphi_1)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \varphi_1} = 0 \\ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial (\partial_\mu \varphi_2)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \varphi_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{III} - 8)$$

En utilisant les équations d'Euler Lagrange on obtient l'équation de Klein-Gordon relatif à des champs scalaires complexes libres :

De l'équation (III - 7) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi \quad (\text{III-9a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \quad (\text{III-9b})$$

$$\Rightarrow (\square + m^2)\varphi(t, x) \quad (\text{III} - 10)$$

$$(\square + m^2)\varphi_1(t, \vec{x}) = 0 \quad (\text{III} - 11a)$$

$$(\square + m^2)\varphi_2(t, \vec{x}) = 0 \quad (\text{III} - 11b)$$

Dans un premier temps nous allons concentrer notre étude à résoudre les deux équations vues au-dessus d'une manière analytique pour cela nous allons utiliser la méthode de séparation des variables une méthode très fréquentée par les mathématiciens.

Ou nous séparons la partie temporelle de la partie spatiale :

$$\varphi_{1,2} = \psi(x)X(t) \quad (\text{III} - 12)$$

Nous insérant cette expression dans l'équation (III-11a) (III-11b) nous obtenons :

$$\psi(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) + m^2 \psi(x)X(t) \quad (\text{III} - 13a)$$

$$= X(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) \quad (\text{III} - 13b)$$

Multipliant les deux membres de l'équation par :  $\frac{1}{X(t)\psi(x)}$

On obtient :

$$\frac{1}{X(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) + m^2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{III} - 14)$$

Arrivé à cette étape nous remarquons qu'il ya une égalité entre deux membres dont l'un dépend totalement de  $t$  et l'autre dépend totalement de  $x$

Ces deux membres soient égaux que si chacun de ces membres soit égal à une constant

$$\begin{cases} \frac{1}{X(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) + m^2 = C & \dots \dots (\text{III} - 15a) \\ \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = C & \dots \dots (\text{III} - 15b) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = C\psi(x) \quad (\text{III} - 16)$$

$$\psi''(x) - C\psi(x) = 0 \quad (\text{III} - 17)$$

$$\psi''(x) + i^2 C\psi(x) = 0 \quad (\text{III} - 18)$$

Avec  $k^2 = i^2 C$

$$\psi(x) = Ae^{ikx_\mu} + Be^{-ikx_\mu} \quad (\text{III} - 19)$$

$$k = \pm\sqrt{c}$$

$$\psi(x) = Ae^{-\sqrt{c}x_\mu} + Be^{+\sqrt{c}x_\mu} \quad (\text{III} - 20)$$

$$(\text{III} - 15a) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) + (w^2 - c)X(t) = 0 \quad (\text{III} - 21)$$

Posons

$$w^2 = m^2 - c$$

$$\alpha(t) = A_1 e^{iwt} + B_1 e^{-iwt} \quad (\text{III} - 22)$$

Après ce développement théorique nous allons passer à la résolution numérique qui se base principalement sur la méthode des différences finies toute en exposant notre organigramme de calcul

### III.3 Méthode des différences finies :

Pour résoudre numériquement l'équation de Klein-Gordon second terme, il semble pertinent d'appliquer la méthode de discrétisation de l'espace et des opérateurs. Sous les hypothèses  $\varphi(x)$  qu'est au moins de classe  $C^2$ , un développement de Taylor nous permet d'écrire les deux égalités suivantes [1]:

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^3) \quad (\text{III} - 23a)$$

$$\varphi(x - h) - \varphi(x) = -h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^3) \quad (\text{III} - 23b)$$

Le somme de ces deux égalités :

$$\frac{\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x)}{h^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^2) \quad (\text{III} - 24)$$

Apparait alors équivalent discret de l'opérateur  $\Delta$  (à une dimension, mais le cas à trois dimensions s'en déduit aisément). La précision de cette expression est en  $O(h^2)$ .

En discrétisant l'espace d'un pas "h" et en injectant le résultat précédent dans l'équation de Klein-Gordon, il vient :

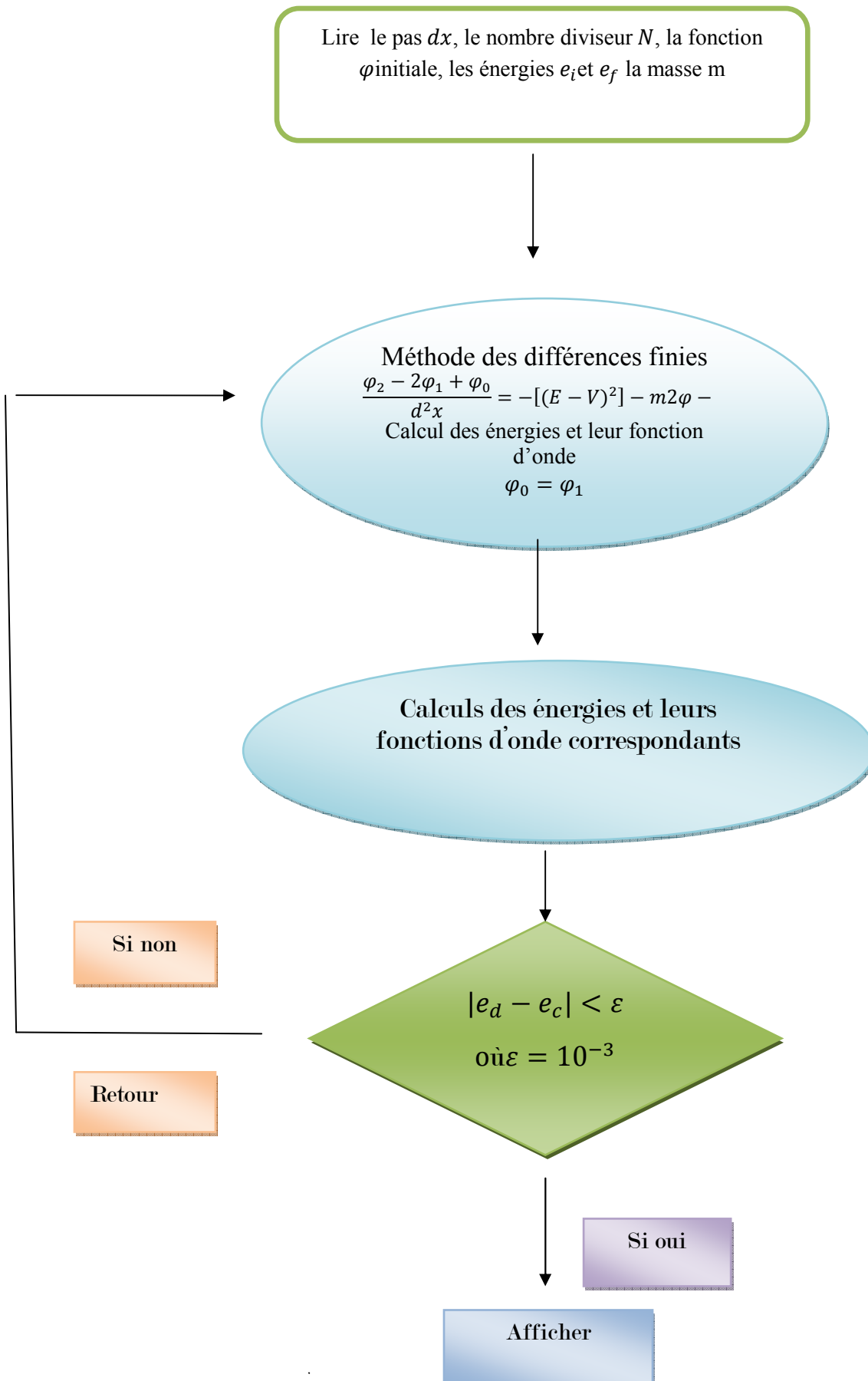
$$\frac{\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x)}{h^2} + f(x)\varphi(x) + O(h^2) = 0 \quad (\text{III} - 25a)$$

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x) + h^2 f(x)\varphi(x) + O(h^4) = 0 \quad (\text{III} - 25b)$$

Cette équation peut être réécrite de façon à faire apparaitre une relation de récurrence entre les valeurs de  $\varphi$  aux nœuds du maillage. Le pas de la discrétisation est fixé à  $h$  et l'origine est définie par le point O.

Lors de la résolution numérique, l'algorithme débute à  $x = -2h$ . La connaissance des deux premières valeurs de  $\varphi_n$  (il s'agit de l'onde plane écrite précédemment) permet d'initier la récurrence qui donne accès à tous les  $\varphi_n$ .

### **III.4 Organigramme de calcul :**





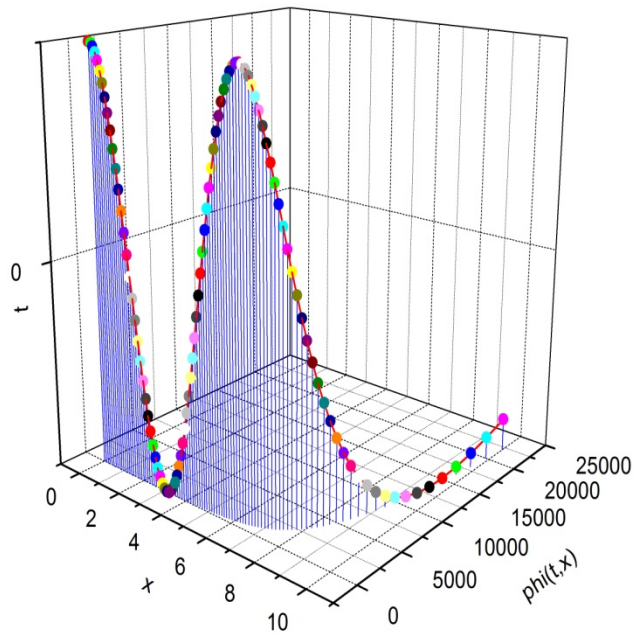
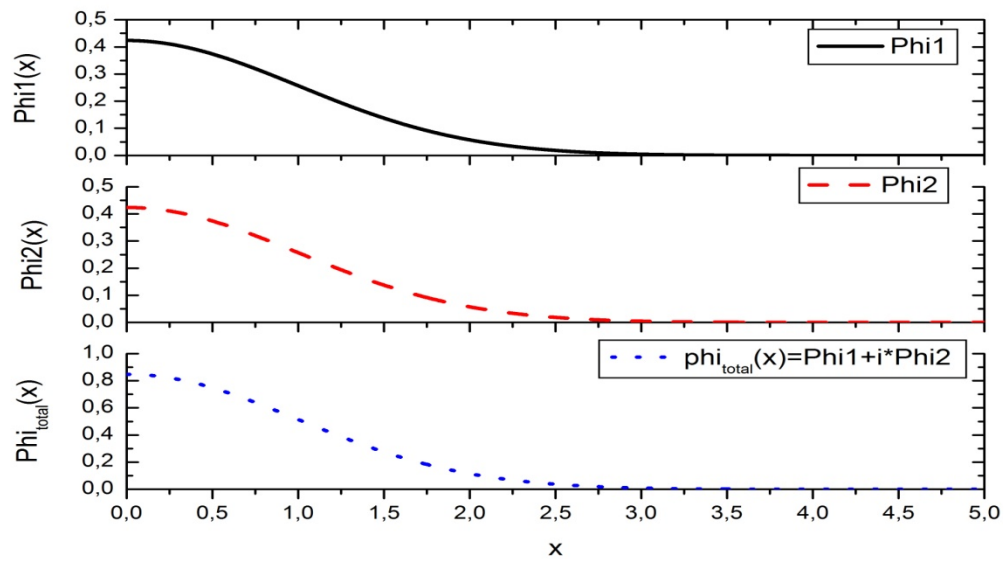


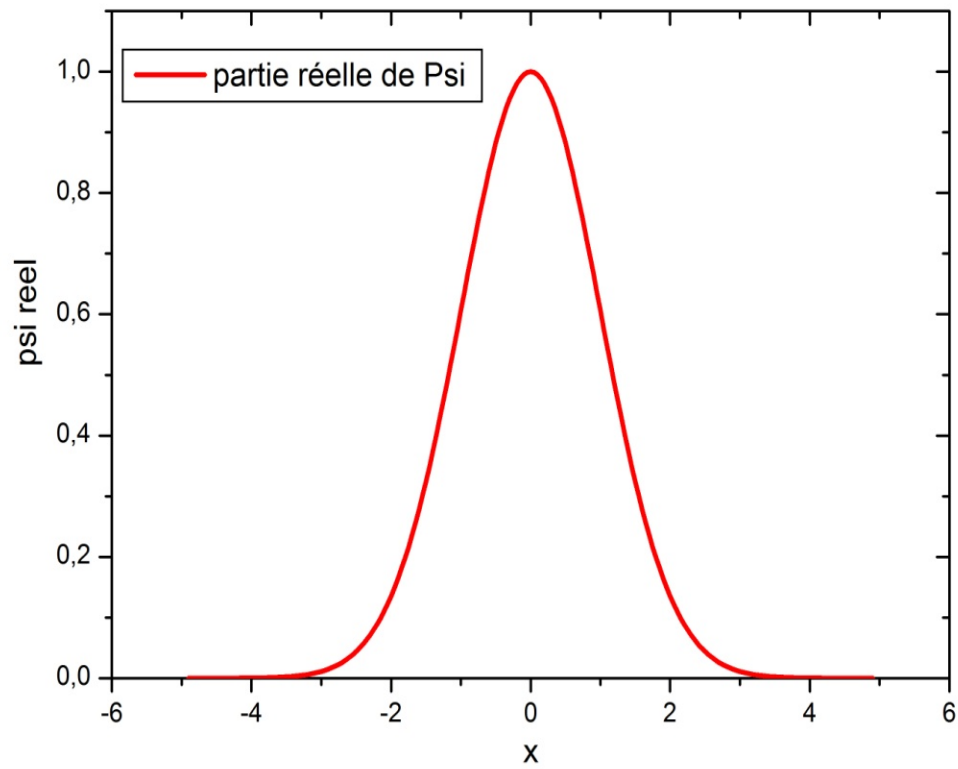
Figure III.1- : Présentation du champ en  $x$  et  $t$  de  $\phi_2$

Nous présentons dans les figures (III-1a) et (III-1b) la variation de notre champ scalaire complexe en  $x$  et  $t$  via ces deux parties réelle et imaginaire. Les figures montrent bien l'apparition d'un lobe qui varie simultanément en  $x$  et  $t$ .

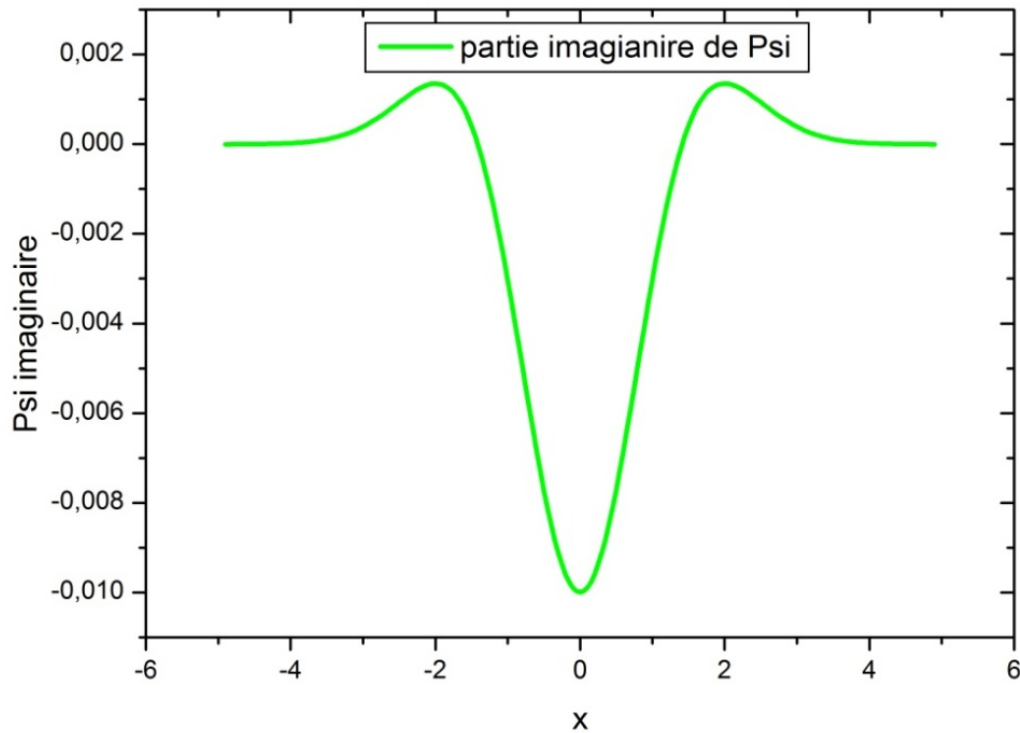


**Figure III-2 : Présentation du champ scalaire complexe**

Pour mieux interpréter les figures (III-1a) et (III-2b) nous avons tracé nos deux parties suivant  $x$  ou nous montrons avec précision la nouvelle variation des ces deux composantes via sa partie réelle et sa partie complexe qui ont une forme Gaussienne la figure (III-2) nous montre ce que nous avons obtenus.



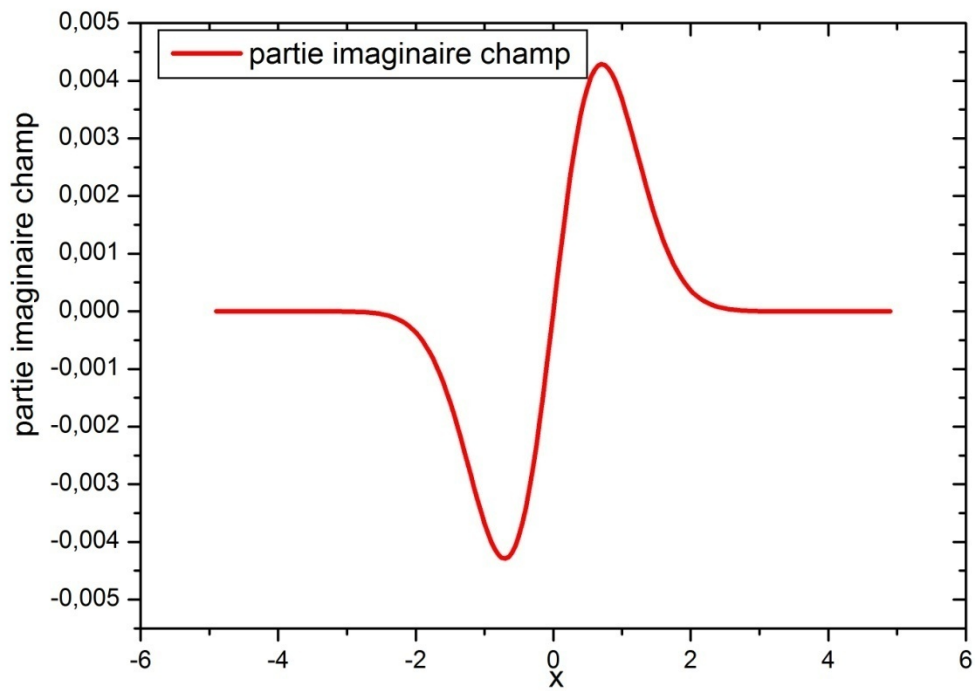
**La Figure III-3** montre l'évolution de la partie réelle de notre champ complexe une forme Gaussienne est observée ce qui nous permet de dire que notre partie réelle est symétrique par rapport a l'origine.



**La Figure III-4 :** montre l'évolution de la partie imaginaire de notre champ complexe une forme avec trois lobes symétrique par rapport a l'origine.

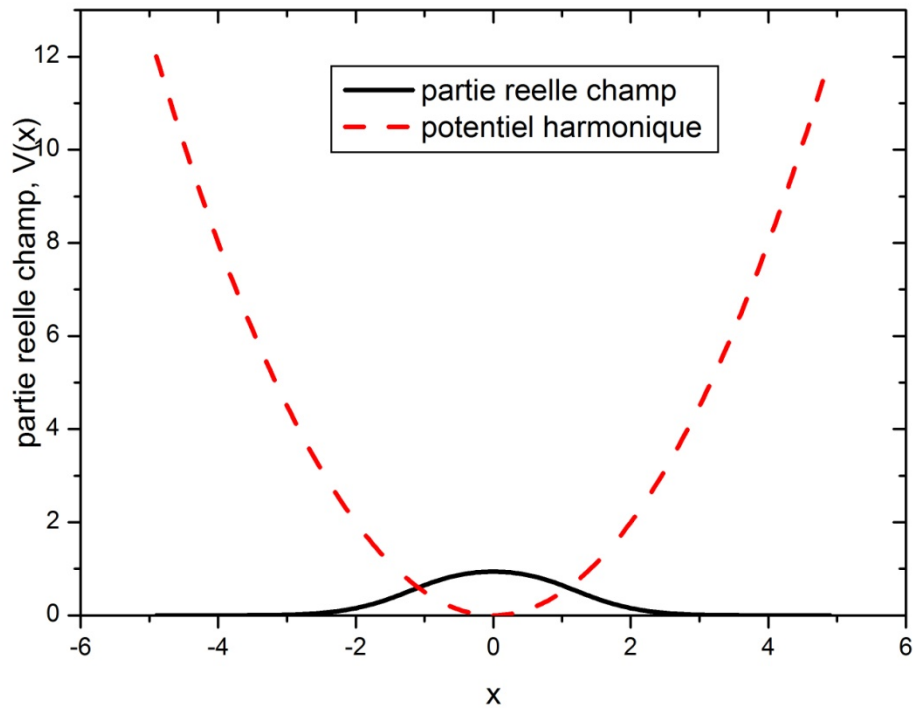
Au délai de  $x = 3,5$  et  $x = 3,5$

La partie imaginer commence à s'attenaient ce que nous per mettra de dire que le champ liber commence à perdre son effet



**La Figure III-5 :** montre Présentation de la partie imaginaire d'un champ scalaire complexe via un potentiel harmonique

La partie imaginaire est périodique du fait du potentiel harmonique au délai de  $x = 2$  et  $x = -2$  l'effet s'annule



**La Figure III-6** : Présentation de ma partie réelle du champ scalaire complexe en ligne continue La ligne en pointille donne la variation du potentiel harmonique.

La pic de notre champ crier sa partie réelle et macule lorsque  $v(x = 0) = 0$

Puis commence à s'atténue au fur à mesure que le potentiel harmonique

## **Conclusion générale :**

Ce travail de mémoire a été pour moi l'occasion d'aborder un certain nombre de solutions de l'équation de Klein Gordon via des calculs numériques assez clair toute en minimisant l'action qui porte un lagrangien de type champ scalaire complexe.

Nous avons en effet proposé de simplifier autant que possible la fonction Lagrangienne d'un champ scalaire complexe libre et lié via les équations d'Euler Lagrange relatif à la partie réelle et à la partie imaginaire.

L'équation de Klein Gordon pour les parties était notre premier pas d'aborder ce travail d'une manière rigoureuse.

Notre étape de calcul était basée sur la programmation où on écrit des programmes inspirés par le langage fortran 77 et à ce stade nous avons pu résoudre cette fameuse équation d'une manière numérique toute en se basant sur la méthode des différences finies. Nous avons calcul dans un premier temps le champ scalaire réel libre puis nous avons plongés notre champ dans un potentiel de type harmonique ou nous vons mis l'action sur l'effet de ce potentiel sur un tel champ.