

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES



MEMOIRE

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique Computationnelle

Présentée par l'étudiante :

BOUZID HOURIA

Sur le thème :

Etude du lagrangien d'un champ scalaire réel

Soutenu le 22/06/2022 devant le jury composé de :

M ^r lasri Boumediene	Président	Pr	U. Saida
M ^r Kouidri Smail	Rapporteur	M.C.A	U. Saida
M ^r Zemouli Mustapha	Examineur	M.C.A	U. Saida

Année Universitaire 2021 - 2022

Dédicace

Grâce à mon Dieu

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents que j'aime plus que tout le monde

Mon cher mari Omar el Farouk

Ma grand -mère « Dieu le protège »

Mon cher oncle Mohammed Toufik

Mes frères Mohamed, Houari, Akram, Hamani

Mes sœurs Djihad et Achoik, Hadil, Kaouther

Toute la famille de mon mari ; chacun par son nom

Mon cher fils Chaker Isslem

Mes chers enseignants

Tous ce qui aime le bonheur pour tout le monde

Souzid Houria

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je remercie Mon encadreur **Dr. Kouidri Ismail** leur précieux conseil et les aides durant toute la période du travail.

Mes plus sincères remerciements aux membres de jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail. Ma profonde gratitude à monsieur **Dr. Zemouli Mustapha, Dr. Abada Ahmed**

Je remercie également **Dr. akil zoheir et Dr. Lasri Boumediene** pour tous leurs conseils et leurs soutiens courageux et pour leurs aides et les précieuses informations qu'il a pu me fournir.

Je remercie sincèrement nos chers professeurs **Dr. RACHDI A, Dr. HACHEMAOUI M, Dr. BENKHALED N, Dr. BENHLIMA N, Dr. DJAAFRI A, Dr. ZEMOULI et Dr. BOUTALEB**, parmi les meilleurs enseignants en l'université de Saida.

J'associe mes remerciements à l'ensemble des permanents du département de physique, *pour* son soutien morale et pour leur sympathie et d'avoir s'occuper de mes demandes administratives avec un grand plaisir.

De plus, je remercie tous les professionnels de la bibliothèque pour le temps accordé et les informations obtenues et leur attention.

Je remercie également tous mes anciens professeurs chacun par son nom.

Finalement, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table de matières

Introduction générale	01
-----------------------------	----

Chapitre I : les origines de la théorie quantique

I.1. Introduction.....	06
I.2. Présentation de la constante de Planck h	06
I.3. Corps noirs	07
I.4. Rendre la lumière quanta réelle	09
I.4. a. Au-delà de la lumière.....	11
I.5. Le modèle Bohr de l'atome	12
I.6. L'ancienne théorie quantique	13
I.7. Mécanique quantique	15
I-8-Références.....	18

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

II.1. Introduction.....	18
II.1.1. Point de vue particule.....	18
II.1.2. Point de vue champ.....	20
II.2. Systèmes mécaniques discrets et continus	21
II.2.1. Rappels dans le cas d'une particule	21
II.2.2. Généralisation à N particules.....	22
II.2.3. Formulation covariante	25
II.3.1. Notation et convention	25
II.3.2. Cas d'un champ scalaire réel.....	27
II.3.3. Transformation de Lorentz.....	28
II.3.4. Covariance de Lorentz	31
II.4. Exemples de champ classique	32
II.4.1. Champs scalaires	32
II.4.1.1. Champ scalaire réel	32
II.4.1.2. Champ scalaire réel et interaction de yukawa.....	34
II.5. Références	35

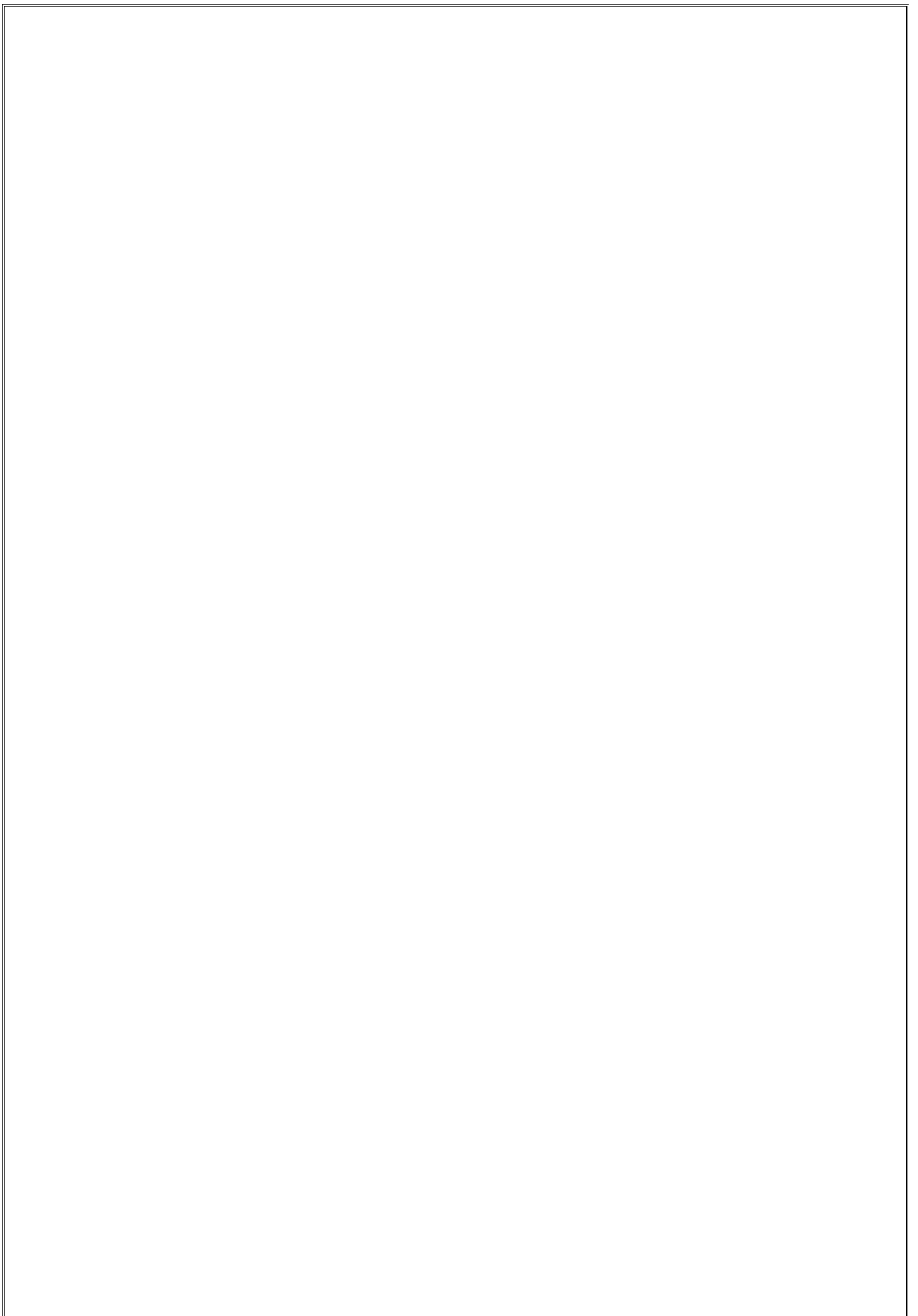
Chapitre III : Résultats & interprétations

III.1. Introduction.....	37
III.2. Méthode de calcul	37
III.3. Solution analytique	38

III.4. Solution numérique	39
III.5. Méthode des différences finies.....	39
III.6. Organigramme de calcul.....	41
III.7. Système lie	43
Conclusion générale.....	48

Listes des figures

Figure I-1 : Un spectre de corps noir idéal (<i>Schwarzer Körper</i>) et son approximation du monde réel (<i>Quartz</i>).....	08
Figure I-2 : Installation expérimentale pour mesurer le rayonnement du corps noir	08
Figure I-3 : Résultats expérimentaux et théoriques sur le spectre du corps noir.....	09
Figure I-4 : Le spectre des raies de l'hydrogène.....	12
Figure III-1 : Organigramme de calcul.....	41
Figure III-2 : Présentation du champ en x et t	42
Figure III-3 : Evolution du champ scalaire réel libre en fonction de x	43
Figure III-4 : Evolution du champ scalaire réel en fonction de x	44
Figure III-5 : Evolution du potentiel harmonique en fonction de x une forme Parabolique est observée.....	45
Figure III-6 : Evolution du champ scalaire réel via un potentiel mathématique en fonction de x	46
Figure III-7 : Variation des trois potentiels utilisés.....	47



*Introduction
générale*

Ce travail de mémoire de master en physique computationnelle entre dans le cadre de la préparation d'un diplôme de fin d'étude. Notre sujet est d'étudier le lagrangien d'un champ scalaire réel.

C'est Michael Faraday qui réalise l'importance du concept de champ, forme d'existence de la matière, capable d'emmagasiner de l'énergie ou de l'impulsion.

Le concept de champ paraît abstrait au premier abord, mais il est bien plus simple qu'on ne le pense. Imaginons que pour connaître la température de chaque point d'une pièce nous utilisions une fonction mathématique qui nous donne la température pour chaque point de la pièce (identifié par trois coordonnées : longueur, largeur et hauteur) : c'est le champ des températures de la pièce. De même, la fonction mathématique de la vitesse d'écoulement de l'eau dans une rivière à chacun de ses points représente le champ des vitesses de la rivière.

Dans la première moitié du XIX^e siècle, Faraday effectue de nombreuses expériences et montre que les champs électriques et magnétiques sont étroitement liés [1]. Mais c'est James Clark Maxwell qui pose les bases mathématiques de la théorie électromagnétique : par les équations qui portent son nom, il montre comment les champs électriques et magnétiques sont générés. Un champ électrique est engendré par une charge électrique ou par une variation de champ magnétique. Un champ magnétique est engendré par un courant électrique ou par une variation de champ électrique. Selon cette dernière possibilité, introduite par Maxwell à partir de considérations théoriques, les champs électriques et magnétiques peuvent exister en l'absence des charges ou des courants électriques : la variation du champ électrique produit un champ magnétique, la variation de ce dernier produit à son tour un champ électrique, et ainsi de suite. Ces champs qui s'auto-entretiennent décrivent donc la propagation d'une onde électromagnétique. C'est par exemple le cas lors d'une communication par téléphone sans fil (une fois générée par l'antenne, l'onde électromagnétique se propage pour arriver au récepteur du correspondant) ou encore quand la lumière se propage depuis la source qui l'a engendrée jusqu'à nos yeux.

Introduction générale

Élaborée en 1873, la théorie électromagnétique de Maxwell a connu un grand succès. Aujourd'hui, on l'utilise toujours pour construire des systèmes de télécommunication terrestre ou par satellite, concevoir des téléphones portables et des avions invisibles au radar.

C'est une théorie classique des champs, dans laquelle les lois quantiques n'interviennent pas. En effet, alors que la mécanique quantique décrit un nombre constant et fini de particules, la théorie de Maxwell décrit un système qui a une infinité de degrés de liberté car un champ a un nombre infini de variables, la valeur d'un champ variant pour chaque point de l'espace et à chaque instant. Les physiciens ont cherché à introduire les lois quantiques dans la théorie de Maxwell et développé ainsi une nouvelle théorie : l'électrodynamique quantique.[2]

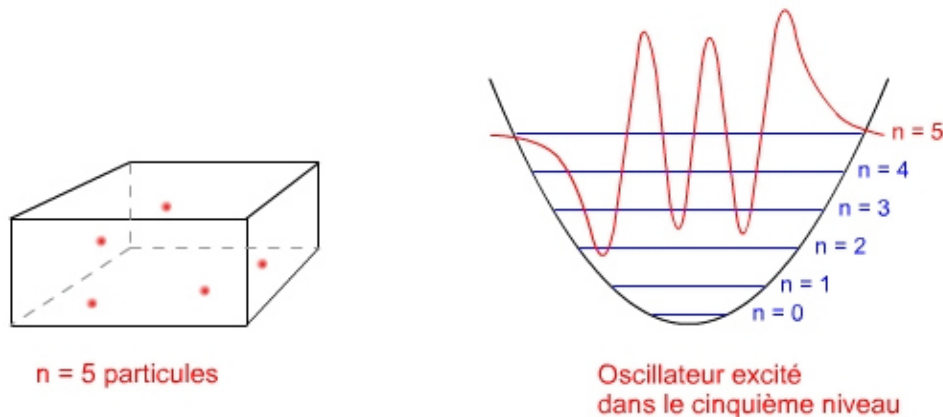
L'étude du rayonnement du corps noir, grâce auquel Max Planck émet en 1900 l'hypothèse des quanta, fait intervenir l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière, mais les physiciens n'ont pas cherché immédiatement à traiter le champ électromagnétique mathématiquement, d'un point de vue quantique, cette voie était alors pratiquement inaccessible à cause de son infinité de degrés de liberté. Ils ont donc commencé par traiter des systèmes plus simples, ayant un nombre fini de degrés de liberté, et sont ainsi parvenus à poser les bases mathématiques de la mécanique quantique. C'est Dirac qui en 1928 explique comment rendre quantique un système qui a une infinité de degrés de liberté. On savait déjà décrire selon les lois de la physique classique un système qui a une infinité de degrés de liberté, par exemple une corde qui vibre : elle a des modes d'oscillation, à savoir une fréquence de base (dite fréquence fondamentale) et ses multiples (les harmoniques). La corde est un objet unidimensionnel mais le concept de mode d'oscillation est valable aussi pour les objets tridimensionnels, comme par exemple le champ électromagnétique contenu dans une grande boîte parallélépipédique. On savait dès la fin du XIX^e siècle calculer ces modes d'oscillation.[3]

Les modes d'oscillation d'une corde qui vibre : la fréquence de base (fréquence fondamentale) et les harmoniques (multiples de la fréquence fondamentale). Si la longueur de la corde tend vers l'infini, les fréquences des modes d'oscillation prennent des valeurs continues, ce qui signifie que l'espacement entre les fréquences de deux harmoniques successives tend vers zéro.[4]

Comment introduire les lois quantiques ? Chaque mode d'oscillation oscille avec une fréquence déterminée, les lois quantiques impliquent que l'énergie de cet oscillateur (qui est

Introduction générale

égale à la fréquence multipliée par la constante de Planck) ne puisse prendre que des valeurs discrètes, proportionnelles au numéro du niveau d'énergie (les valeurs de l'énergie sont équidistantes). S'il y a dans la boîte n photons de même fréquence, alors le mode d'oscillation du champ électromagnétique dont la fréquence est égale à celle des photons est excité dans le n 'ème niveau. Voilà le principe fondamental de la théorie quantique des champs, il est valable pour toute particule.[5]



Description de la théorie quantique des champs. S'il y a dans la boîte 5 photons de même fréquence, le mode d'oscillation du champ électromagnétique dont la fréquence est égale à celle des photons est alors excité dans le 5^e niveau. Si les dimensions de la boîte tendent vers l'infini, les fréquences des modes d'oscillation prennent des valeurs continues : on peut ainsi prendre en compte les particules quelle que soit la valeur de leur énergie.

On peut l'appliquer par exemple pour décrire la réaction d'annihilation $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$. Il y a dans cet exemple trois champs quantifiés : un qui décrit les électrons, un qui décrit les positrons et un qui décrit les photons. L'électron à une énergie donnée, la fréquence du mode d'oscillation du champ qui lui correspond est égale à cette énergie divisée par la constante de Planck [6]. Il en est de même pour le positron et pour les photons. Initialement, le mode d'oscillation des électrons et celui des positrons sont tous deux sur le premier état excité, celui des photons se trouve dans l'état fondamental. Il y a donc initialement un électron, un positron et zéro photon. Quand l'électron et le positron s'annihilent, le mode d'oscillation de l'électron et celui du positron passent du premier état excité à l'état fondamental, celui du photon passe alors de l'état fondamental au deuxième état excité. Il y a donc zéro électron, zéro positron et deux

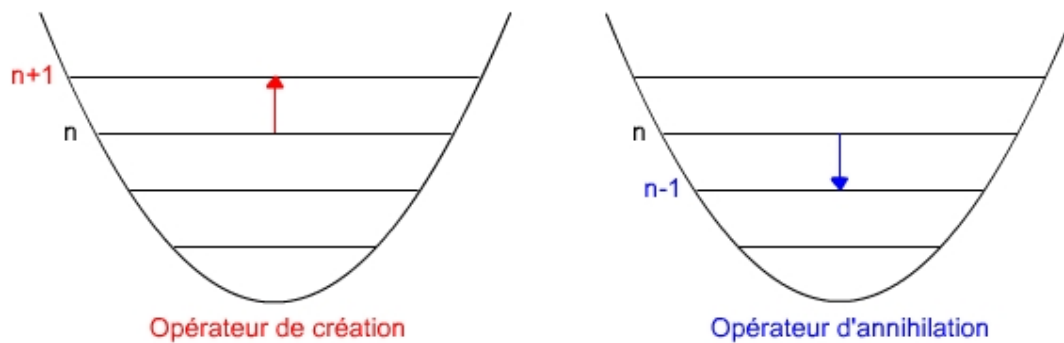
Introduction générale

photons. L'énergie est conservée : l'énergie des photons émis est égale à la somme des énergies de l'électron et du positron.

On peut généraliser cette description à l'ensemble des processus dans lesquels le nombre des particules n'est pas fixe.

La réaction d'annihilation $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$ décrite par la théorie quantique des champs. Initialement, le mode d'oscillation des électrons et celui des positrons sont tous deux dans le premier état excité, celui des photons se trouve dans l'état fondamental, il y a donc initialement un électron, un positron et zéro photon. Quand l'électron et le positron s'annihilent, le mode d'oscillation de l'électron et celui du positron passent du premier état excité à l'état fondamental, celui du photon passe alors de l'état fondamental au deuxième état excité. Il y a donc zéro électron, zéro positron et deux photons.

Mathématiquement, la variation du nombre de particules s'effectue à l'aide d'opérateurs : l'opérateur de création permet de passer d'un niveau énergétique n donné au niveau supérieur $n+1$, l'opérateur d'annihilation d'un niveau énergétique n au niveau inférieur $n-1$.



L'opérateur de création permet de passer d'un niveau énergétique n donné au niveau supérieur $n+1$, l'opérateur d'annihilation d'un niveau énergétique n au niveau inférieur $n-1$.

Quelle est l'énergie totale du système quand il ne contient aucune particule ? C'est simple : il suffit d'additionner, sur tous les modes d'oscillation possibles du champ, l'énergie de l'état fondamental de chaque oscillateur harmonique correspondant. Or l'énergie de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique quantique n'est pas nulle (elle est égale à la moitié de la fréquence multipliée par la constante de Planck) et le nombre de modes est infini. L'énergie

Introduction générale

totale du système est donc infinie ! Mais ce n'est pas l'énergie totale de l'état fondamental qui compte, c'est plutôt les différences d'énergie entre les différents niveaux d'énergie des modes d'oscillation. On peut donc soustraire cet infini et fixer l'état fondamental de l'ensemble des oscillateurs comme étant le zéro de l'énergie.

L'état fondamental des modes d'oscillation a des effets mesurables, notamment l'effet Casimir : deux plaques de métal parallèles, disposées dans le vide à une distance donnée, s'attirent. En effet, des oscillations du champ électromagnétique se forment entre ces deux plaques, à la manière d'une corde qui vibre entre deux extrémités fixes. Il n'y a aucun photon entre les plaques, les modes d'oscillation du champ électromagnétique se trouvent donc dans l'état fondamental. L'énergie de l'état fondamental du système est infinie, mais la différence d'énergie entre deux configurations du système, qui correspondent à deux distances différentes entre les plaques, est finie, elle dépend d'une quantité négative inversement proportionnelle au cube de la distance. Le système tend à évoluer vers l'état d'énergie le plus bas, qui correspond à la plus courte distance entre les plaques.

Référence :

[1]-Hendrick Casimir (1909-2000), physicien hollandais, directeur des laboratoires Philips à Eindhoven, professeur à l'université de La Haye. Il travaille dans le domaine de la supraconductivité, des diélectriques et prédit l'effet qui porte son nom : deux plaques métalliques parallèles situées dans le vide s'attirent. Son nom est aussi associé à l'opérateur qui commute avec tous les générateurs d'un groupe.*

[2]-olivier darrigol, de c-nombres : l'analogie classique dans l'histoire de la quantique théorie (Berkeley : uc presse, 1992)

[3]-Helge kragh, quantum générations : une histoire de la physique au XXe siècle (Princeton, Princeton université ,1999)

[4]-Helmut rechenberg, « quanta et la mécanique quantique », dans Laurie M Brown, Abraham pais et monsieur brain pippard ,éd ,XXe siècle physique , vol 1 (bristol et new York, institut et Edition de physique et institut américain de presse physique ,1995),p.143-248

Introduction générale

[5]-Helmut rechenberg , « le subtil est le seigneur ... » : la science de vie d'Albert Einstein (université d'oxford presse, 1982)

[6]-le aout 11 ,2000, question de science (vol.289) contient un article de Daniel Klepner et Roman jackiw sur « cent ans de physique quantique

[2]-olivier darrigol , de c-nombres : l'analogie classique dans l'histoire de la quantique théorie (berkeley :uc presse, 1992)

Chapitre I

*Les origines de la théorie
quantique*

I.1. Introduction :

Qu'est-ce qu'une théorie quantique ?

Nous avons posé cette question il y a longtemps, depuis que Max Planck a introduit l'élément de la discontinuité que nous appelons le Quantum il y a un siècle. Depuis lors, le gros morceau de la Nature (ou du moins de nos théories à ce sujet) a été intégré dans notre conception de base du monde. Cela a incité à repenser fondamentalement la théorie physique. En même temps, cela a aidé à comprendre toute une gamme de comportements particuliers qui se manifestent principalement à des niveaux microscopiques.[1]

Dès son début, le nouveau régime était symbolisé par la constante de Planck h , introduite dans son célèbre article de 1900. Mesurant l'écart du monde par rapport à un comportement continu et régulier, h s'est avéré être un très petit nombre, mais différent de zéro. Partout où il est apparu, d'étranges phénomènes l'ont accompagné. Ce que cela signifie vraiment était bien sûr mystérieux. Tandis que l'ère quantique a été inaugurée en 1900, une théorie quantique prendrait beaucoup plus de temps à se concrétiser. L'introduction de la discontinuité n'était qu'une tentative, et seulement une première. Et même par la suite, la refonte de la théorie physique a été hésitante et lente. Les physiciens ont réfléchi pendant des années à ce que pourrait être une théorie quantique. Se demandant comment l'intégrer au puissant appareil de la physique du XIXe siècle, ils se demandent également quel rapport il entretient avec les théories « classiques » existantes. Pour certains, les réponses se sont cristallisées avec la mécanique quantique, résultat d'un quart de siècle de travail. D'autres ont tenu à repenser davantage. Si le résultat n'a pas été à la satisfaction de tous, la théorie quantique s'est néanmoins avérée remarquablement fructueuse, et la perplexité en cours de route, malgré ses frustrations, ne peut être qualifiée que d'extraordinairement productive.

I-1. Présentation de la constante de planck h

L'histoire a commencé assez discrètement le 14 décembre 1900. Max Planck donnait une conférence à la Société allemande de physique sur le spectre continu des fréquences de la lumière émise par un corps chauffé idéal. Quelque deux mois plus tôt[2], ce théoricien de 42 ans avait présenté une formule capturant de nouveaux résultats expérimentaux. Maintenant, avec le loisir de réfléchir et plus de temps à sa disposition, il cherchait à fournir une justification physique à sa formule. Planck a imaginé un morceau de matière, l'idéalisant quelque peu, comme équivalent à une collection de charges électriques oscillantes. Il a alors imaginé

distribuer son énergie en morceaux discrets proportionnels aux fréquences d'oscillation. La constante de proportionnalité qu'il a choisi d'appeler h ; on écrirait maintenant $\varepsilon = hf$. Les fréquences d'oscillation déterminaient les fréquences de la lumière émise. Une chaîne de raisonnement tordue a ensuite reproduit la formule postulée de Planck, qui impliquait désormais la même constante naturelle h .

En regardant en arrière sur l'événement, on pourrait s'attendre à une fanfare révolutionnaire. Mais comme souvent dans l'histoire, les choses étaient plus ambiguës. Planck n'appelait pas ses éléments énergétiques des quanta et n'était pas enclin à souligner leur caractère discret, ce qui n'avait guère de sens en termes familiers. Ainsi, le sens de sa démarche n'est apparu que progressivement. Bien que le problème qu'il traitait ait été central à son époque, ses implications ont d'abord été considérées comme limitées.

I-2. Corps noirs

Le comportement de la lumière dans son interaction avec la matière était en effet un problème clé de la physique du XIXe siècle [2]. Planck s'est intéressé aux deux théories qui se chevauchaient dans ce domaine. Le premier était l'électrodynamique, la théorie de l'électricité, du magnétisme et des ondes lumineuses, mise au point par James Clark Maxwell dans les années 1870. La seconde, datant à peu près de la même période, était la thermodynamique et la mécanique statistique, régissant les transformations de l'énergie et son comportement dans le temps. Une question pressante était de savoir si ces deux grandes théories pouvaient être fusionnées en une seule, puisqu'elles portaient de notions fondamentales différentes.

À partir du milieu des années 1890, Planck s'est attaqué à un problème apparemment étroit, l'interaction d'une charge oscillante avec son champ électromagnétique. Ces études le mettent cependant en contact avec une longue tradition de travaux sur l'émission de lumière. Des décennies plus tôt, il avait été reconnu que les corps parfaitement absorbants « noirs » fournissaient également une norme d'émission. Puis, au fil des ans, une petite industrie s'est développée autour de l'étude de tels objets (et de leurs substituts dans le monde réel, comme la suie). Un petit groupe des théoriciens s'est occupé de la thermodynamique du rayonnement, tandis qu'une multitude d'expérimentateurs travaillaient sur des corps chauffés pour fixer la température, déterminer l'intensité et caractériser les écarts par rapport à l'idéalité du corps noir (Voir la **Fig. 01**). Après que les scientifiques ont poussé la réalisation pratique d'une vieille idée - qu'un tube fermé avec un petit trou constituait un corps noir presque idéal-ce « rayonnement de cavité » a permis des mesures de plus en plus fiables. (Voir la **Fig. 02**).

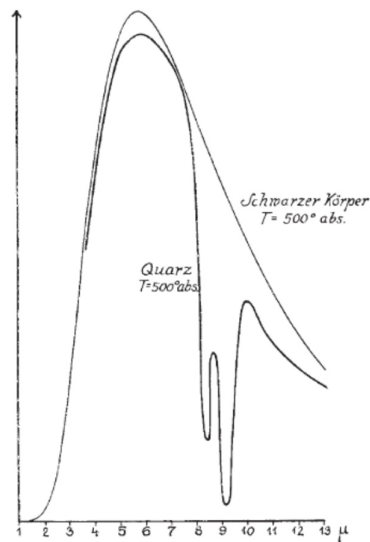


Figure I-1 : Un spectre de corps noir idéal (*Schwarzer Körper*) et son approximation du monde réel (*Quartz*).
(De Clemens Schaefer, *Einführung in die Theoretische Physique*, 1932)

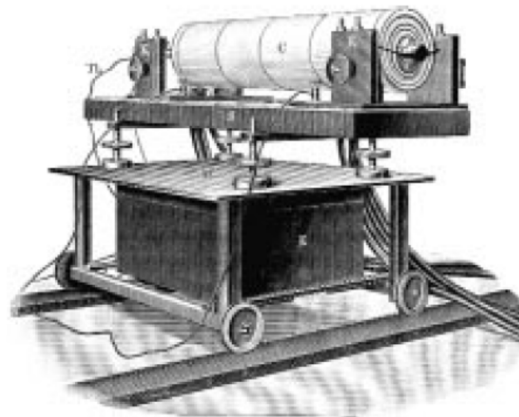


Figure I-2 : Installation expérimentale pour mesurer le rayonnement du corps noir. (Le corps noir est le tube étiqueté C). Cette conception était un produit de l'Institut impérial allemand de physique et de technologie à Berlin, où les études sur les corps noirs ont été poursuivies en tenant compte des normes industrielles d'intensité lumineuse.
(De Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physique, 1929)

Maintenant, les charges oscillantes de Planck émettaient et absorbaient des radiations, elles pourraient donc être utilisées pour modéliser un corps noir. Ainsi, tout sembla se mettre en place en 1899 lorsqu'il reproduisit une formule qu'un collègue avait dérivée par des moyens

moins sûrs. C'était pratique ; tout le monde était d'accord pour dire que la formule de Willy Wien correspondait aux observations. Le problème était qu'immédiatement après, les expérimentateurs ont commencé à trouver des écarts. Aux basses fréquences, l'expression de Wien devenait de plus en plus intenable, alors qu'ailleurs elle continuait à fonctionner assez bien. Informé des résultats à l'automne 1900, Planck proposa à bref délai une interpolation raisonnable. Avec ses constantes ajustables, sa formule semblait correspondre aux expériences (Voir la **Figure I-3**). Maintenant, la question est devenue : d'où cela peut-il venir ? Quelle était sa signification physique ?

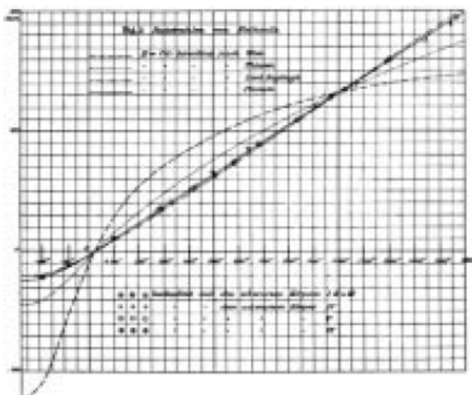


Figure I-3 : Résultats expérimentaux et théoriques sur le spectre du corps noir. Les points de données sont des valeurs expérimentales ; La formule de Planck est la ligne continue. (Réimprimé de H. Rubens et F. Kurlbaum, *Annalen der Physique*, 1901.)

Comme nous l'avons vu, Planck a réussi à produire une dérivation. Pour obtenir les bons résultats statistiques, cependant, il a dû agir comme si l'énergie impliquée était divisée en éléments $\varepsilon = hf$. La dérivation a été un succès et a magnifiquement reproduit les données expérimentales. Sa signification était moins claire. Après tout, la théorie de Maxwell donnait déjà une belle description de la lumière et la traitait comme une onde voyageant dans un milieu continu. Planck n'a pas pris la constante h pour indiquer une discontinuité physique, une véritable atomicité de l'énergie dans un sens substantiel. Aucun de ses collègues n'a fait grand cas de cette possibilité non plus, jusqu'à ce qu'Albert Einstein l'ait reprise cinq ans plus tard.

I-3-Rendre la lumière quanta réelle

Des trois grands articles d'Einstein de 1905, celui "*On a Heuristic Point of View Concerning the Production and Transformation of Light*" était celui que le commis aux brevets de 26 ans qualifiait de révolutionnaire. Il a noté qu'il était étrange que la théorie

électromagnétique de la lumière suppose la continuité, alors que les comptes rendus actuels de la matière partaient d'atomes discrets. La discontinuité pourrait-elle aussi être productive pour la lumière ? Aussi indispensables que puissent paraître les équations de Maxwell, elles se sont révélées insuffisantes pour certains phénomènes intéressants. Un exemple clé était le rayonnement du corps noir, qu'Einstein regardait maintenant d'une manière différente de Planck. Ici, un traitement rigoureusement classique, montra-t-il, produisit un résultat non seulement faux mais aussi absurde. Même là où la loi de Wien était approximativement correcte (et la modification de Planck inutile), la thermodynamique élémentaire forçait la lumière à se comporter comme si elle était localisée en morceaux discrets. Le rayonnement devait être divisé en ce qu'Einstein appelait « quanta d'énergie ». Aujourd'hui, nous écrivons $E = hf$.

La discontinuité était donc endémique au monde électromagnétique. Fait intéressant, Einstein n'a pas fait référence au h constant de Planck, estimant que son approche était différente dans son esprit. Là où Planck avait examiné les charges oscillantes, Einstein a appliqué la thermodynamique à la lumière elle-même [3]. Ce n'est que plus tard qu'Einstein est revenu et a montré comment le travail de Planck impliquait de véritables quanta. En attendant, il a proposé une nouvelle extension radicale. Si la lumière se comporte d'elle-même comme si elle était composée de tels quanta, alors peut-être qu'elle est également émise et absorbée de cette manière. Quelques considérations simples ont ensuite abouti à une loi de l'effet photoélectrique, dans laquelle la lumière éjecte des électrons de la surface d'un métal.

Aujourd'hui, l'effet photoélectrique peut être vérifié dans un laboratoire universitaire. En 1905, cependant, c'était loin d'être anodin. Il le restera donc pendant plus d'une décennie. Même après que Robert Millikan ait confirmé la prédiction d'Einstein, lui et d'autres ont rechigné face à l'hypothèse quantique sous-jacente. Il violait toujours tout ce qui était connu sur le comportement ondulatoire de la lumière (notamment les interférences) et semblait difficilement conciliable avec les équations de Maxwell. Quand Einstein a reçu le prix Nobel, il a dû cet honneur en grande partie à l'effet photoélectrique. Mais la citation notait spécifiquement sa découverte de la loi, et non l'explication qu'il proposait.

La relation du quantum à la théorie ondulatoire de la lumière resterait un point de perplexité [4]. Au cours des années suivantes, Einstein ne fera qu'accentuer la contradiction. Comme il l'a montré, la thermodynamique nécessitait inéluctablement à la fois les ondes classiques et la quantification. Les deux aspects étaient couplés : les deux étaient nécessaires, et en même temps. Ce faisant, Einstein s'est encore rapproché de l'attribution à la lumière de

toute une panoplie de propriétés particulières. Le quantum semblable à une particule, appelé plus tard le photon, s'avérerait évocateur pour expliquer des choses comme la diffusion des rayons X. Pour cette découverte de 1923, Arthur Compton remportera le prix Nobel. Mais là, on prend de l'avance sur l'histoire. Avant que les notions de dualité onde-particule puissent être prises au sérieux, la discontinuité devait démontrer sa valeur ailleurs.

I-4-Au-delà de la lumière

Il s'est avéré que le premier accueil réservé aux nouveaux concepts quantiques est venu dans des domaines très éloignés des théories troublées du rayonnement. Le premier de ces domaines, bien que loin d'être le plus évident, était la théorie des chaleurs spécifiques [5]. La chaleur spécifique d'une substance détermine dans quelle mesure son énergie change lorsque sa température augmente. À basse température, les solides présentent un comportement particulier. Ici, Einstein soupçonnait - encore une fois, nous rencontrons Einstein - que la déviance pourrait être explicable sur des bases quantiques. Il a donc reformulé le problème de Planck pour gérer un réseau d'atomes vibrant indépendamment. A partir de ce modèle très simpliste, il a obtenu des prédictions tout à fait raisonnables qui impliquaient la même quantité hf , maintenant traduite dans le contexte du solide.

Là, les choses ont duré encore trois ans. Il a fallu l'attention soudaine du physico-chimiste Walther Nernst pour amener les théories quantiques des chaleurs spécifiques à une signification générale. Sentant son chemin vers une nouvelle loi de la thermodynamique, Nernst a non seulement renforcé les idées d'Einstein avec des résultats expérimentaux, mais les a également mis à l'ordre du jour d'une large discussion. Ce n'est pas par hasard, et dans une large mesure l'œuvre de Nernst, que le premier Congrès Solvay en 1911 traitait précisément de la théorie des rayonnements et des quanta. Einstein a parlé de chaleurs spécifiques, offrant des commentaires supplémentaires sur le rayonnement électromagnétique. Si le quantum est né en 1900, le rendez-vous Solvay était, pour ainsi dire, son début social.

Ce qui commençait à peine à apparaître dans le colloque Solvay était l'autre domaine principal dans lequel la discontinuité prouverait sa valeur. La technique de quantification des oscillations s'appliquait, bien entendu, également aux spectres de raies. Contrairement à l'universalité du rayonnement du corps noir, les lignes discrètes d'émission et d'absorption de la lumière variaient énormément d'une substance à l'autre. Mais les régularités évidentes jusque dans la masse des lignes ont fourni une matière fertile pour les conjectures quantiques. Les spectres moléculaires sont devenus un site de recherche très important au cours de la deuxième

décennie du quantum. Plus lente à décoller, mais finalement encore plus productive, était la quantification des mouvements au sein de l'atome lui-même. Comme personne n'avait une grande idée de la constitution de l'atome, l'aventure dans les spectres atomiques était alliée à la construction de modèles spéculatifs. Sans surprise, la plupart des suppositions du début des années 1910 se sont avérées fausses. Ils ont néanmoins sondé les possibilités. L'énergie orbitale des électrons, leur moment cinétique (quelque chose comme l'inertie de rotation) ou la fréquence de leurs petites oscillations autour de l'équilibre : tout cela était un jeu équitable pour la quantification. Les raies observées du spectre discret pourraient alors être directement lues à partir des mouvements des électrons.

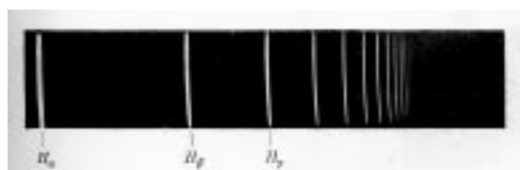


Figure I-4 : Le spectre des raies de l'hydrogène. (Extrait de G. Herzberg, *Annalen der Physik*, 1927)

I-5-Le modèle Bohr de l'atome

Il peut sembler ironique que Niels Bohr ne s'intéressait initialement pas aux spectres. Il est venu indirectement à la structure atomique. En rédigeant sa thèse de doctorat sur la théorie électronique des métaux, Bohr était devenu fasciné par ses échecs et ses instabilités. Il pensait qu'ils suggéraient un nouveau type de force stabilisatrice, fondamentalement différent de ceux familiers en physique classique. Soupçonnant que le quantum était d'une manière ou d'une autre impliqué, il ne pouvait pas comprendre comment l'intégrer dans la théorie [6].

L'intuition est restée avec lui, cependant, alors qu'il transférait son attention postdoctorale des métaux à l'atome de Rutherford. À ses débuts, l'atome nucléaire (son centre positif dense entouré d'électrons) n'était qu'un des nombreux modèles proposés. Bohr a commencé à travailler dessus pendant les temps d'arrêt dans le laboratoire de Rutherford, pensant qu'il pourrait améliorer son traitement de la diffusion. Quand il a remarqué qu'il devrait être instable, cependant, son attention a été capturée pour de bon. Pour stabiliser le modèle par fiat, il s'est mis à imposer une condition quantique, selon la pratique courante de l'époque. Ce n'est qu'après qu'un collègue a attiré son attention sur les spectres qu'il a commencé à réfléchir à leur signification.

La célèbre série Balmer de l'hydrogène était manifestement une nouveauté pour Bohr. Cependant, il s'est vite rendu compte qu'il pouvait l'adapter à son modèle, s'il changeait un peu son modèle. Il a conceptualisé l'émission de lumière comme une transition entre des orbites discontinues, avec la fréquence émise déterminée par $\Delta E = hf$. Pour obtenir les bonnes énergies des orbites, Bohr a dû introduire des règles plutôt ad hoc. Il les a finalement justifiés par la quantification du moment cinétique, qui était désormais exprimée en unités de la constante de Planck h . (Il a également utilisé un argument asymptotique intéressant qui reviendra plus tard). Publié en 1913, l'image résultante de l'atome était plutôt étrange. Non seulement une condition quantique décrivait les transitions entre les niveaux, mais les « états stationnaires » étaient également fixés par un décret non classique. Les électrons tournaient certes sur des orbites, mais leur fréquence de révolution n'avait rien à voir avec la lumière émise. En effet, leurs oscillations étaient supposées ne pas produire de rayonnement. Il n'y avait aucune prédiction quand ils pourraient sauter entre les niveaux. Et les transitions généraient des fréquences selon une relation quantique, mais Bohr s'est montré hésitant à accepter quoi que ce soit comme un photon.

Le modèle, naturellement, n'était pas très convaincant, c'est-à-dire jusqu'à ce que de nouveaux résultats expérimentaux commencent à arriver sur les rayons X, les niveaux d'énergie et les spectres. Ce qui a vraiment convaincu les sceptiques, c'est une petite modification apportée par Bohr. Parce que le noyau n'est pas maintenu fixe dans l'espace, sa masse entre faiblement dans les fréquences spectrales. Les calculs ont produit une prédiction qui correspondait à 3 parties sur 100 000 - plutôt bonne, même pour les jours où tant de coïncidences numériques se sont avérées trompeuses.

La roue a effectué son dernier tour lorsqu'Einstein a relié l'atome de Bohr au rayonnement du corps noir. Ses articles célèbres sur les transitions radiatives, si importantes pour le laser (voir l'article suivant de Charles Townes), ont montré le lien entre la loi du corps noir de Planck, les niveaux d'énergie discrets et l'émission et l'absorption quantifiée de rayonnement. Einstein a en outre souligné que les transitions ne pouvaient être prédites que dans un sens probabiliste. C'est d'ailleurs dans ces mêmes articles qu'il a formalisé la notion de quanta particulaire.

I-6-L'ancienne théorie quantique

Ce que le modèle de Bohr a fourni, comme le compte rendu d'Einstein des chaleurs spécifiques, était un moyen d'intégrer le quantum dans une théorie plus générale. En fait, l'étude

de la structure atomique engendrerait ce que l'on appelle plausiblement une théorie quantique, qui commencerait à tendre vers un remplacement à grande échelle de la physique classique. La relation entre l'ancien et le nouveau est devenue une question clé. Car certaines caractéristiques du modèle de Bohr préservaient les théories classiques, tandis que d'autres présupposaient leur rupture. Était-ce cohérent ou non ? Et pourquoi ça a marché ?

À la fin des années 1910, les physiciens avaient affiné le modèle de Bohr, fournissant un traitement relativiste des électrons et introduisant des « nombres quantiques » supplémentaires. La condition de quantification simple sur le moment cinétique pourrait être largement généralisée. Ensuite, les techniques de la mécanique céleste du XIXe siècle ont fourni de puissants outils théoriques. Poussées par des expérimentateurs ingénieux, les études spectroscopiques ont fourni des données toujours plus nombreuses et plus fines, non seulement sur les spectres de raies de base, mais sur leur modulation par les champs électriques et magnétiques. Et encouragés par leurs aînés, Bohr, Arnold Sommerfeld et Max Born, une génération de jeunes théoriciens atomiques a fait ses armes sur de tels problèmes. Les élèves, dont Hendrik Kramers, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg et Pascual Jordan, pratiquaient une sorte de théorie sur la corde raide. Face à des données expérimentales résistantes, ils ont mis en balance les preuves empiriques des spectres avec les ambiguïtés des prescriptions pour l'application des règles quantiques.

Au sein de ce corpus de plus en plus dense, une stratégie intéressante a commencé à se dessiner. En traitant n'importe quel système physique, la première tâche était d'identifier les mouvements classiques possibles. Ensuite, au-dessus de ces mouvements classiques, des conditions quantiques seraient imposées. La quantification est devenue une procédure régulière, faisant continuellement référence aux résultats classiques. D'une autre manière aussi, la physique classique a servi de pierre de touche. Le célèbre "principe de correspondance" de Bohr a trouvé une première application dans ses premiers articles, où il a fourni une justification plus profonde de sa condition de quantification. Dans la « limite classique », pour les grandes orbites avec des nombres quantiques élevés et de petites différences d'énergie, le rayonnement des transitions entre des orbites adjacentes devrait correspondre à la fréquence de rayonnement classique. Les résultats quantiques et classiques doivent correspondre. Employé avec une certaine discrimination Bohrienne, le principe de correspondance a fourni des informations détaillées sur les spectres. Cela a également permis de répondre à la question : comment construire une véritable théorie quantique ?

Non pas que la solution soit encore en vue. La sophistication croissante de l'ancienne théorie quantique rendait ses échecs de plus en plus évidents. Au début des années 1920, les théoriciens se trouvèrent de plus en plus en difficulté.

Aucun problème n'était fatal, mais leur accumulation était intimidante. Ce sentiment de crise n'était pas totalement anodin. Un groupe de théoriciens atomiques, centré sur Bohr, Born, Pauli et Heisenberg, en était venu à soupçonner que les problèmes remontaient aux trajectoires des électrons. Peut-être était-il possible de faire abstraction des orbites ? Au lieu de cela, ils se sont concentrés sur les probabilités de transition et les rayonnements émis, car ceux-ci pourraient être connus de manière plus fiable. « En ce moment, remarquait encore Pauli au printemps 1925, la physique est à nouveau très confuse ; en tout cas, c'est beaucoup trop difficile pour moi, et j'aimerais être un comédien de cinéma ou quelque chose du genre et n'avoir jamais entendu parler de la physique.

I-7-l'apport de la mécanique quantique :

L'apport de la mécanique quantique se base généralement sur les fameux résultats des expériences tel que :

L'effet photoélectrique, les fentes de Young, l'effet Compton [4].

Cependant avec Le célèbre article de Heisenberg de 1925, célébré pour avoir lancé les transformations à venir, portait le titre « Sur la réinterprétation quantique et théorique des relations cinématiques et mécaniques ». Le point de départ était la tradition de Bohr de la structure atomique : les états discrets restaient fondamentaux, mais désormais dissociés de la représentation intuitive. L'intention de transformation était encore plus large dès le départ. Heisenberg a traduit les notions classiques en notions quantiques dans le meilleur style de principe de correspondance. Dans sa nouvelle mécanique quantique, les quantités familières se comportaient étrangement ; la multiplication dépend de l'ordre des termes. Les écarts, cependant, ont été calibrés par la constante de Planck, mesurant ainsi l'écart par rapport à la normalité classique.

Certains ont accueilli la nouvelle théorie avec exaltation ; d'autres la trouvaient insatisfaisante et désagréable. Car aussi élégante que soit la traduction d'Heisenberg, elle prenait une vue très partielle des problèmes du quantum. Au lieu de la théorie quantique de la structure atomique, on pourrait aussi partir de la dualité onde-particule. Ici, un autre jeune théoricien, Louis de Broglie, avait avancé en 1923 une proposition spéculative dont Heisenberg et ses

collègues avaient peu fait. En pensant aux aspects discontinus et particuliers de la lumière, de Broglie a suggéré de rechercher les aspects continus et ondulatoires des électrons. Sa notion, bien qu'elle ne soit pas encore fondée sur des preuves expérimentales, a fourni un aperçu surprenant des conditions quantiques des orbites de Bohr. C'est aussi, par un chemin de traverse, qu'Erwin Schrödinger a eu l'idée de ses brillants papiers de 1926.

En imaginant les états autorisés discrets de tout système de particules comme de simples formes stables d'ondes de matière continues, Schrödinger a cherché des connexions avec une branche bien développée de la physique classique. Les techniques de la mécanique des milieux continus lui ont permis de formuler une équation pour ses ondes. Elle aussi a été construite autour de la constante h . Mais maintenant, les concepts de base étaient différents, et donc aussi le sens fondamental. Schrödinger avait un dégoût pour la discontinuité des modèles atomiques de Bohr et le manque de représentation intuitive de la mécanique quantique de Heisenberg. À son avis, le quantum n'impliquait aucune de ces choses. En fait, cela montrait le contraire : que l'atomicité apparente de la matière masquait un continuum sous-jacent.

Ainsi un modèle familier lié à l'intuition physique, mais constituant la matière d'une sorte d'onde mal comprise, confrontait une mathématique abstraite aux variables apparemment bizarres, insistant sur la discontinuité et suspendant les images spatio-temporelles. Sans surprise, la coexistence de théories alternatives a suscité un débat. Le fait, bientôt démontré, de leur équivalence mathématique n'a pas résolu le différend interprétatif. Car des images physiques fondamentalement différentes étaient proposées.

En fait, à la place des ondes de matière de Schrödinger et de la discrétion sans compromis de Heisenberg, une compréhension conventionnelle s'est installée en ce sens qui a quelque peu divisé la différence. Cependant, la pensée de l'ancienne école de la théorie quantique dominait toujours. Born a dématérialisé les ondes de Schrödinger, les transformant en pures densités de probabilité pour trouver des particules discrètes. Heisenberg a ajouté son principe d'incertitude, limitant la possibilité même de mesure et sapant la loi de causalité. Le tableau était couronné par la notion de complémentarité de Bohr, qui cherchait à réconcilier des concepts contradictoires comme les ondes et les particules.

Appelé l'interprétation de Copenhague après l'influence décisive de Bohr, son succès (à son avis) a conduit le théoricien danois à caractériser la mécanique quantique comme une généralisation rationnelle de la physique classique. Tout le monde n'était pas d'accord pour dire que c'était le point final. En effet, Einstein, Schrödinger et d'autres ne se sont jamais réconciliés.

Même Bohr, Heisenberg et Pauli s'attendaient à d'autres changements, bien que dans un nouveau domaine, la théorie quantique des champs, qui a amené la mécanique quantique à un degré de complexité plus élevé. Mais leurs attentes de transformation fondamentale dans les années 1930 et au-delà, caractérisées par des analogies avec l'ancienne théorie quantique, ont trouvé peu de résonance en dehors de leur cercle.

Assez ironiquement, tout comme pour leurs collègues anti-Copenhague, leur demande de repenser davantage n'a pas fait beaucoup de progrès. Si la signification physique du quantum restait, pour certains, assez obscure, son utilité pratique ne pouvait être niée. Quelles que soient les leçons de la mécanique quantique, cela semblait fonctionner. Il a non seulement incorporé avec grâce les phénomènes quantiques précédents, mais a ouvert la porte à toutes sortes de nouvelles applications. Peut-être que ce genre de succès était tout ce que l'on pouvait demander ? En ce sens donc, un quart de siècle après Planck, le quantum avait été intégré aux fondements de la théorie physique [5].

I-8-Références

[1]-Olivier darrigol, de c- nombres à q-nombres : l'analogie classique dans l'histoire de la quantique théorie (Berkeley : uc presse, 1992).

[2]-Helge kragh, quantum générations : une histoire de la physique au XXe siècle (Princeton, Princeton université presse, 1999).

[3]-Abraham pais, « le subtil est le seigneur ... » : la science de vie d'Albert Einstein (université d'oxford presse ,1982).

[4]-Helmut rechenberg, « quanta et la mécanique quantique », dans Laurie M Brown, Abraham pais et monsieur brain pippard, éd, XXe siècle physique, vol 1 (bristol et new York, institut de Edition de physique et institut américain de presse physique ,1995), p.143-248.

[5]-Le aout 11,2000, question de science (vol.289) contient un article de Daniel klepner et Roman jackiw sur « cent ans de physique quantique »

Chapitre II

*Le lagrangien d'un
champ scalaire réel*

II.1 Introduction

La théorie quantique des champs (TQC) relativiste est un formalisme général permettant d'étudier des systèmes avec un nombre arbitraire de particules (quantiques) en interaction. Développée à partir de la fin des années 20, elle a pour objectif l'unification :

- De l'électromagnétisme (Maxwell 1860),
- De la relativité restreinte (Einstein 1905),
- De la mécanique quantique (Heisenberg 1925, Schrödinger 1926).

Les premières applications ont concerné la physique atomique, la physique des particules et plus généralement la physique des hautes énergies ($\sim 10^{12}$ eV = 1 TeV) dans les grands collisionneurs comme le LHC au CERN). Par la suite (années 70), les applications se sont étendues à la physique statistique et à la physique de la matière condensée [1].

II.1.1 Point de vue particule

L'unification de l'électromagnétisme, de la relativité restreinte et de la mécanique quantique a eu pour motivation les limitations de ces théories prises à part [2]. Par exemple, dans le cas de la mécanique quantique : l'impossibilité de rendre compte de la structure fine de l'atome d'hydrogène observée expérimentalement, de "démontrer" l'existence du spin (ajouté à la main dans l'Hamiltonien de Pauli), de comprendre l'émission spontanée (retour d'un atome à son état fondamental par émission d'un photon) ou encore la radioactivité (désintégration spontanée de certains noyaux instables en d'autres avec émission de particules de matière, *e.g.*, électrons, neutrons, noyaux d'hélium, et d'énergie, *e.g.*, photons, énergie cinétique), ...

Historiquement, la première TQC est née de l'unification de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique, *e.g.* la création d'une théorie quantique du champ électromagnétique (EM) en l'absence de toute particule chargée (**champs libres**). Ce problème a été résolu dès 1925 par Heisenberg, Born et Jordan qui ont modélisé les degrés de liberté du système (les champs électrique et magnétique) par une infinité d'oscillateurs harmoniques puis ont procédé à la quantification canonique de ces oscillateurs (**photons**) [3].

En 1927, Dirac a complété cette construction en incluant des particules quantiques non-relativistes) chargées en interaction avec le champ EM quantifié. Ceci a conduit à la *théorie quantique du rayonnement* ou *électrodynamique quantique non relativiste* qui permet de comprendre et décrire des phénomènes à un photon qui échappent à la mécanique quantique ordinaire, *e.g.* l'émission spontanée. Ces phénomènes sont caractérisés par des processus où le

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

nombre de particules n'est pas conservé, *e.g.* un atome dans l'état initial et un atome et un photon dans l'état final dans le cas de l'émission spontanée [4].

Une étape cruciale a été franchie par Enrico Fermi en 1934 avec sa théorie de la désintégration β qui permet d'expliquer la radioactivité β . Dans ce cas, il s'agit de processus d'**annihilation** et de **création** pour les particules de matière elles-mêmes.

Une seconde motivation importante à l'origine de la TQC (et sur laquelle ce cours est basé) a été de tenter d'unifier la relativité d'Einstein et la mécanique quantique. C'est encore Dirac, en 1928, qui a incorporé la relativité restreinte en découvrant l'équation qui porte son nom : l'**équation de Dirac**. Cette équation conduit naturellement à une particule de spin-1/2 permettant ainsi de décrire le moment magnétique intrinsèque de l'électron et d'expliquer la structure fine de l'atome d'hydrogène [4]. Notons que l'**équation de Klein-Gordon** est l'analogue relativiste sensé décrire une particule de spin-0. Cependant, l'interprétation de ces équations en tant que généralisations relativistes de l'équation de Schrödinger conduit à d'importantes difficultés conceptuelles : probabilités négatives, états d'énergies négatives... Le point important, réalisé dans le tournant des années 30 par Paul Dirac et d'autres physiciens tel que Vladimir Fock, est qu'une mécanique quantique relativiste est une théorie à une particule : elle ne permet donc pas de décrire les phénomènes de création et d'annihilation. Or le régime ultra-relativiste est caractérisé par des processus de création de paires...

Pour mieux apprécier ce point important, il est utile d'estimer les échelles de distance caractéristiques qui interviennent. Dans le cadre de la mécanique quantique non-relativiste, rappelons l'inégalité d'Heisenberg :

$$\Delta_x \Delta_p \geq \hbar \quad \lambda_{dB} = \frac{\hbar}{p} \quad (\text{II-1})$$

Qui fait apparaître la **longueur d'onde de Broglie** λ_{dB} . A des distances, L , grandes par rapport à la longueur d'onde de de Broglie : $L \gg \lambda_{dB}$, les fluctuations quantiques sont négligeables et la physique est classique. La nature ondulatoire des particules de matière ne se manifeste qu'à des distances inférieures à la longueur d'onde de Broglie [3] : $L \leq \lambda_{dB}$, *i.e.*, $\Delta_p \geq \hbar/L$. En mécanique relativiste, l'impulsion et l'énergie sont à pied d'égalité ce qui implique :

$$\Delta_p \geq \frac{\hbar}{L} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar c}{L} \quad (\text{II-2})$$

Lorsque ΔE devient supérieur à $2mc^2$, le seuil de **production de pair particule Antiparticule** est dépassé et les effets relativistes deviennent importants. On peut en déduire une deuxième longueur caractéristique, la **longueur d'onde de Compton**

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \quad (\text{II-3})$$

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

Qui est telle qu'à des distances $L \gg \lambda_c$ il n'y a pas de production de paires et les effets relativistes sont négligeables tandis que pour $L \leq \lambda_c$ il y a production de paires. Notons par ailleurs que l'on a toujours :

$$\lambda_c < \lambda_{dB} \quad (\text{II.4})$$

Ainsi, on comprend au moins conceptuellement qu'à des distances $L \leq \lambda_c < \lambda_{dB}$ les effets quantiques et relativistes sont importants. Et que ce régime, qui est sujet à la création et l'annihilation de particules, ne peut en aucun cas être décrit par une théorie à une particule ! La mécanique quantique relativiste est donc une impasse.

C'est une théorie quantique (relativiste) des champs qui va pouvoir correctement décrire le régime quantique relativiste dominé par les processus de création de paires. Historiquement, c'est Dirac qui a prédit l'existence des antiparticules en attribuant les solutions positives de son équation aux particules ordinaires et les solutions négatives à d'hypothétiques particules de charge opposée (théorie des **trous** de Dirac). Peu après, en 1933, Anderson observe la première **antiparticule**, le positron, Produite par collision de rayons cosmiques dans l'atmosphère. Des expériences De radioactivité ont ensuite confirmé cette prédiction pour d'autres particules [5].

II.1.2 Point de vue champ

Le point de vue moderne consiste à interpréter les équations de Dirac, Klein-Gordon, Maxwell, ... comme des équations décrivant des champs classiques. Rappelons que la notion de champ est apparue en physique classique pour décrire l'"action à distance" entre deux corps. C'est le cas des champs de Maxwell mais aussi du Champ de gravitation de Newton [6]. Notons d'emblée que ces champs, qui jouent le Rôle de médiateurs des interactions, implémentent ainsi le **principe de localité**.

Ce sont ces champs classiques qui doivent être quantifiés (procédure appelée à tort : **seconde quantification**). En théorie quantique, le concept de champ prend alors une nouvelle dimension puisque l'idée de la TQC est d'**associer des particules aux champs** [7]. De manière plus précise et comme nous le verrons par la suite, ce sont les excitations (quantiques) d'un champ qui correspondent à des particules avec une charge, une masse et un spin bien définis, *e.g.*, le photon, particule neutre, de masse nulle et de spin 1 provient de la quantification du champ EM. Notons que tous les photons de l'univers proviennent de la quantification de ce même champ EM. Il en est de même des électrons qui proviennent tous de la quantification du champ de Dirac, etc... Ceci vient de l'indiscernabilité des particules identiques en théorie quantique : tous les photons, électrons, protons, ... de l'univers sont identiques et donc indiscernables. Tous proviennent de la quantification du même champ dont ils sont fabriqués.

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

Notons par ailleurs que, contrairement au cas de la mécanique quantique, en TQC le lien entre spin et statistique n'est pas un postulat mais une conséquence naturelle du formalisme ("théorème spin-statistique").

Dans ce cours, nous introduirons le formalisme de base de la TQC à partir de la théorie classique correspondante : par quantification (canonique) d'un champ classique. Rappelons qu'en mécanique quantique, les variables dynamiques classiques x et p deviennent des opérateurs \hat{x} et \hat{p} . En théorie classique des champs, les variables dynamiques sont des champs, e.g. un champ scalaire classique $\phi(\vec{x}, t)$. Après quantification, ce dernier devient un opérateur champ $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ i.e., une **fonction à valeur opératorielle** ("operator valued function" en anglais), où la coordonnée \vec{x} ne joue le rôle que d'un simple paramètre. Puisque ces opérateurs sont définis en tout point de l'espace, nous avons à faire à une infinité de degrés de liberté. Nous verrons aussi que la construction d'un modèle en TQC, incluant les formes que peuvent prendre les interactions entre divers champs, est gouvernée par de grands **principes fondamentaux** provenant de la localité et des symétries [7].

Notons que la TQC permet d'effectuer des prédictions quantitatives vis-à-vis des expériences. Citons en particulier l'**électrodynamique quantique** (QED) comme l'une des théories les plus précises qui existe du point de vue de l'accord avec l'expérience [8]. L'étude de la QED sort du cadre de ce cours introductif. D'un point de vue historique et sans rentrer dans les détails, la QED a été développée dans les années 30 et 40 par des physiciens tels que Bethe, Schwinger, Feynman, Tomonaga, Dyson, ... Son élaboration s'est heurtée au "problème des divergences" qui a nécessité l'introduction du **groupe de renormalisation** (un découplage des phénomènes physiques entre courtes et longues distances) dont les premiers développements sont dûs à Stueckelberg, Petermann, Gell-Mann, Low, Bogolyubov, Shirkov... Sa formulation moderne ne sera donnée que dans les années 70 par Wilson dont les travaux ont fortement contribué à étendre le domaine d'application de la théorie des champs à la physique statistique et la physique de la matière condensée [9]. De nos jours, la TQC est omniprésente en physique fondamentale que ce soit en physique de basses ou de hautes énergies, en rapport avec la phénoménologie ou des développements plus formels de physique-mathématique.

II.1. Systèmes mécaniques discrets et continus

II.2.1 Rappels dans le cas d'une particule

On se place d'emblée dans le formalisme Lagrangien de la mécanique analytique où espace et temps sont à pied d'égalité ce qui s'avèrera particulièrement utile dans le cadre relativiste [10].

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

Rappelons que, dans ce cadre, la dynamique d'un système mécanique est décrite par la donnée d'un **Lagrangien**, $L(q, \dot{q}, t)$, qui dépend des variables dynamiques (ici la coordonnée généralisée) $q \equiv q(t)$, $\dot{q} \equiv \dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ et éventuellement du temps t . Dans le cas d'un système à n degrés de libertés, la coordonnée q sera considérée comme un vecteur à n composantes : $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$.

La donnée de L est équivalente à celle des équations du mouvement ou **équations d'Euler-Lagrange** :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (\text{II.5})$$

Ces équations s'obtiennent au moyen du principe de moindre action qui stipule que la trajectoire (classique) effectivement suivie par le système [11], compte tenu des conditions aux limites, est celle qui minimise l'action S :

$$s[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (\text{II.6})$$

Notons que le passage du formalisme de Lagrange au formalisme de Hamilton se fait au moyen d'une transformation de Legendre :

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \equiv H(q, p, t), \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\text{II.7})$$

Où P_α est le moment conjugué à q_α . Le formalisme de Hamilton introduit naturellement une dissymétrie entre le temps et l'espace.

II.2.2 Généralisation à N particules

Considérons maintenant la généralisation de ce qui précède au cas de N particules [12]. On prendra comme exemple le cas d'un système unidimensionnel constitué de N particules reliées entre elles par des ressorts identiques de constante de rappel k et de longueur au repos a . Soit $\eta_i \equiv \eta_i(t)$ le déplacement de la particule $i = 1, \dots, N$ par rapport à sa position d'équilibre. Le Lagrangien du système est alors donné par :

$$L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m}{2} \dot{\eta}_i^2(t) - \frac{k}{2} (\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t))^2 \right) \quad (\text{II.8a})$$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha \left(\frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2(t) - \frac{1}{2} k a \left(\frac{\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)}{a} \right)^2 \right) \quad (\text{II.8b})$$

$$= \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i \quad (\text{II.8c})$$

Où la notation L désigne une **densité de Lagrangien**, *i.e.*, le Lagrangien par unité de volume (dans le cas 1D le volume se réduit à une longueur). Notons que, par abus de langage, nous appellerons fréquemment par la suite Lagrangien ce qui en fait correspond à la densité de Lagrangien.

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

La forme (1.8b) est commode pour un passage à la limite continue correspondant à $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ et $Na = L$ où L est la longueur totale du système. Cette limite permet de se focaliser sur l'étude de phénomènes physiques à des distances grandes devant la longueur (microscopique) a . Comme nous le verrons par la suite, dans cette limite, l'invariance de Lorentz de (1.8) **émergera** naturellement. Nous pouvons l'implémenter au moyen des transformations suivantes :

$$\sum_{i=1}^N \rightarrow \int_{-l/2}^{l/2} \quad a \rightarrow dx, \quad \frac{m}{a} \rightarrow \sigma, \quad ka \rightarrow y \quad (\text{II.9a})$$

$$\eta_i(t) \rightarrow \eta(x, t), \quad \frac{\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)}{a} \rightarrow \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II.9b})$$

Où σ désigne la densité de masse, Y le module d'Young (ou d'élasticité) et l'on a choisi un intervalle d'intégration symétrique autour de l'origine. On obtient donc :

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} dx \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{II.10})$$

Où $\eta(x, t)$ est une fonction continue de la coordonnée x . Aux variables dynamiques η_i du cas discret correspond donc un champ dans le cas continu. Notons que dans (II.10), la densité de Lagrangien est la somme de deux termes : le premier fait intervenir une dérivée par rapport au temps et correspond à une **énergie cinétique** ; le second fait intervenir une dérivée par rapport à la coordonnée x et correspond à une **énergie potentielle** [13]. Le modèle (II.10) est celui d'une **corde vibrante** (classique).

Comme on le verra par la suite pour d'autres modèles, l'énergie potentielle peut éventuellement aussi faire intervenir des termes proportionnels à η . Dans le cas général on notera donc : $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\eta, \partial_t \eta, \partial_x \eta)$ L'action correspondante est donnée par :

$$S[\eta] = \int_{t_i}^{t_f} dt L = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-l/2}^{l/2} dx \mathcal{L}(\eta, \partial_t \eta, \partial_x \eta) \quad (\text{II.11})$$

qui généralise (1.6) au cas d'un système continu décrit par un champ $\eta(x, t)$. A ce point, on souhaite déterminer les équations du mouvement associées à (I.11), *i.e.*, la généralisation de (1.5) au cas continu. Pour cela nous allons procéder à une légère reformulation du principe de moindre action. Considérons donc une configuration $\eta(x, t) + \delta\eta(x, t)$ qui est telle que $\eta(x, t)$ "minimise" l'action $S[\eta]$ et $\delta\eta(x, t)$ représente une petite déviation par rapport à cette configuration. Nous supposons que les configurations initiale et finale sont fixées pour tout x et qu'il en est de même des configurations aux extrémités de la corde, *i.e.*, [14]

$$\delta\eta(x, t_i) = \delta\eta(x, t_f) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm l/2} \delta\eta(x, t) = 0 \quad (\text{II.12})$$

On définit alors :

$$S[\eta] = S[\eta + \delta\eta] - S[\eta] \quad (\text{II.13})$$

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

Par un développement au premier ordre en η il vient :

$$\delta S[\eta] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-l/2}^{l/2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \partial_t \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} (\partial_x \eta) \right] + O(\eta^2) \quad (\text{II.14})$$

Les deuxièmes et troisièmes termes sous l'intégrale peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \partial_t \eta = \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \eta \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \right) \delta \eta \quad (\text{II.15a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \partial_x \eta = \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \eta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \right) \delta \eta \quad (\text{II.15b})$$

Équivalents à des intégrations par parties. Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} \delta S[\eta] = & \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-l/2}^{l/2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \right) \right] \delta \eta \\ & + \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} \delta \eta \Big| + \int_{t_f}^{t_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} \delta \eta \Big| + o(\eta^2) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Dans (1.16), les termes partiellement intégrés sont nuls du fait des conditions aux limites (II.12) et ne contribuent donc pas aux équations du mouvement. Par ailleurs, puisque _ "minimise" l'action, le terme en facteur de σ_η dans le premier intégrant de (II.16) doit aussi être nul. C'est ce terme qui conduit aux **équations d'Euler-Lagrange généralisées à un système continu [15]** :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \quad (\text{II.17})$$

Appliquons les équations (I.17) à (I.10). En considérant η , $\partial_t \eta$ et $\partial_x \eta$ comme des variables indépendantes par rapport auxquelles on dérive L, on obtient :

$$\sigma \ddot{\eta}(x, t) - Y \partial_{xx} \eta(x, t) = 0 \quad (\text{II.18})$$

Qui correspond à l'équation d'une onde 1D (la vibration de la corde) se propageant à une vitesse

$$\sqrt{Y/\sigma} .$$

Pour conclure, il est instructif d'obtenir l'Hamiltonien associé à (II.11). Par analogie avec le cas discret, (II.7), il est donné par :

$$H = \int dx \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}, \quad \pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \quad (\text{II.19})$$

Où $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi, \eta, \partial_x \eta, t)$ est la **densité de Hamiltonien** et $\pi(x, t)$ le **moment canoniquement conjugué** au champ $\eta(x, t)$. La densité d'Hamiltonien \mathcal{H} correspond donc à la transformée de Legendre de la densité de Lagrangien \mathcal{L} par rapport à $\dot{\eta}$. Appliquée à (II.10), l'équation (II.19) conduit au moment conjugué :

$$\pi(x, t) = \sigma \dot{\eta}(x, t) \quad (\text{II.20})$$

Et à la densité d'Hamiltonien :

$$H = \frac{\pi^2(x,t)}{2\sigma} + \frac{Y}{2} (\partial_x \eta(x,t))^2 \quad (\text{II.21})$$

Où, dans le second membre, le premier terme correspond à l'énergie cinétique de la corde vibrante et le second à son énergie potentielle.

II.2.3 Formulation covariante

Le champ $\eta(x, t)$ que nous venons de présenter est l'exemple le plus simple d'un Champ. C'est une fonction scalaire et réelle. Son existence traduit le fait que la corde vibrante possède une infinité de degrés de liberté : la valeur du champ en tout point de l'espace unidimensionnel que nous avons considéré [16].

Dans la continuité, nous considérons maintenant un **champ scalaire réel** $\phi(\vec{x}, t)$ Défini en tout point d'un espace à 3 dimensions avec $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. La densité de Lagrangien dépend de manière générale du champ, de ses dérivées spatio-temporelles et éventuellement explicitement de \vec{x} et de t , $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_t \phi, \vec{\nabla} \phi, \vec{x}, t)$ où $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ On pourra aussi noter $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ Les équations d'Euler-Lagrange sont alors données par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (\text{II.22})$$

Et généralisent simplement (II.17) au cas d'un système tridimensionnel. Nous souhaitons maintenant réécrire ces équations sous une forme plus symétrique et adaptée à la physique relativiste qui nous intéresse, *i.e.*, au moyen de **4-vecteurs** ou **vecteurs de Lorentz**.

II.3.1 Notations et conventions

Nous rappelons ici les notations et conventions d'usage en relativité restreinte. On distingue tout d'abord deux types de 4-vecteurs :

$$b^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3) \quad \text{Contra variant} \quad (\text{II.23.a})$$

$$b_\mu = (b_0, b_1, b_2, b_3) \quad \text{Covariant} \quad (\text{II.23.b})$$

Où la composante 0 est dite temporelle. Dans toute la suite, les indices grecs : μ, ν, \dots iront de 0 à 3 tandis que les indices latins : i, j, \dots iront de 1 à 3.

Exemples :

- Le 4-vecteur position :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}) \quad (\text{II.24})$$

- Le 4-vecteur impulsion :

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (\text{II.25})$$

- Le 4-potential du champ électromagnétique :

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, A_x, A_y, A_z) = (\phi, \vec{A}) \quad (\text{II.26})$$

Où $\phi \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$ est le potentiel scalaire et $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{x}, t) \equiv \vec{A}(x)$, le potentiel vecteur.

Important : toujours dans un souci de simplification des notations, nous noterons plus généralement $f(x) \equiv f(\vec{x}, t)$ toute fonction (ou champ) d'arguments spatio-temporels \vec{x} et t .

- Le 4-vecteur courant :

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \vec{j}) \quad (\text{II.27})$$

Où $\rho \equiv \rho(\vec{x}, t) \equiv \rho(x)$ est la densité et $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{x}, t) \equiv \vec{j}(x)$ le courant.

On définit un **produit scalaire** entre 4-vecteurs :

$$b \cdot c = b^\mu c_\mu = b_\mu c^\mu = g_{\mu\nu} b^\mu c^\nu = g^{\mu\nu} b_\mu c_\nu \quad (\text{II.28a})$$

$$= b^0 c^0 - b^1 c^1 - b^2 c^2 - b^3 c^3 \quad (\text{II.28b})$$

$$= b^0 c^0 - \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{II.28c})$$

Où nous avons adopté à la première ligne la **convention de sommation sur les indices répétés** et où $g_{\mu\nu}$ est le **tenseur métrique** de signature majoritairement négative :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.29})$$

C'est une métrique dite **pseudo-euclidienne** ou de **Minkowski**. Comme noté dans (II.29) le tenseur métrique coïncide avec son inverse et ils sont reliés par :

$$g^{\alpha\mu} g_{\alpha\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \quad (\text{II.30})$$

Où $\delta^\mu{}_\nu$ est le **symbole de Kronecker** :

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Le tenseur métrique ci-dessus permet de passer d'un 4-vecteur contravariant à un 4-vecteur covariant, *i.e.*, d'élever ou d'abaisser un indice. Par exemple (attention aux signes) :

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \quad (\text{II.32})$$

Il permet aussi d'évaluer la norme d'un 4-vecteur. On peut ainsi montrer que le 4-vecteur impulsion est de longueur invariante :

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (\text{II.33})$$

Où m est la masse au repos de la particule et c la vitesse de la lumière. Cette égalité est en accord avec le fait que $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^2$ Notons aussi que :

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (\text{II.34})$$

Qui sera utile pour la transformée de Fourier.

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

On définit de même le 4-vecteur gradient (attention aux signes et à la position des indices) :

$$\nabla^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (II.35a)$$

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla} \right) \quad (II.35b)$$

Ainsi, pour un 4-vecteur γ^μ on a (attention au signe) :

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c} \gamma^0 \partial_t + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \quad (II.36)$$

On peut aussi réexprimer le 4-vecteur impulsion comme :

$$p^\mu = +i\hbar \nabla^\mu = \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right) \quad (II.37)$$

Ceci conduit à :

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \equiv -\hbar^2 \square \quad (II.38)$$

Où \square est le **d'Alembertien**

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (II.39)$$

Et Δ le Laplacien.

II.3.2 Cas d'un champ scalaire réel

Revenons maintenant aux équations de Lagrange. A l'aide des notations et conventions présentées ci-dessus [18], elles peuvent s'écrire sous une forme plus compacte donnée par :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (II.40)$$

Nous verrons par la suite qu'il est possible de considérer des systèmes décrits par un ensemble discret de champs $\phi_a(x)$, $a = 1, 2, \dots, N$. Il existe alors une équation du mouvement pour chaque composante du champ :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \quad (a=1, 2 \dots N) \quad (II.41)$$

Dans le cas où $N = 1$, on prend $\phi_1 \equiv \phi$ et on retrouve

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

Un Lagrangien donné pourra aussi s'exprimer de manière compacte au moyen de 4-vecteurs. Revenons au Lagrangien de la corde vibrante unidimensionnelle. En redéfinissant $c = \phi / \sqrt{Y}$ en généralisant à un espace 3D, il vient :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2 \right) \quad (II.42)$$

Où $c = \sqrt{Y/\sigma}$ a bien les dimensions d'une vitesse. Sous forme "relativiste", ce Lagrangien s'écrit

$$: \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \quad (II.43)$$

Le Lagrangien (II.43) est l'exemple le plus simple de Lagrangien relativiste d'un champ scalaire réel (libre). Notons que c'est le choix de la métrique majoritairement positive qui permet de l'écrire avec un signe global positif (avec une métrique majoritairement négative un signe global négatif apparaîtrait).

L'application de (II.40) à (II.43) permet de déterminer l'équation du mouvement du champ :

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \square \phi = 0 \quad (II.44)$$

Qui correspond bien à une simple équation des ondes.

L'action correspondant à \mathcal{L} s'écrira :

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\phi, x) \quad (II.45)$$

Où les mesures d'intégration du temps et de l'espace ont été ramassées dans le d^4x .

Pour bien marquer la présence du temps, on dira que le système est à $(3 + 1)$ -dimensions (1 pour le temps). Plus généralement, **un système relativiste à D dimensions d'espace vit dans un espace-temps à $d = D + 1$ dimension**. Dans ce cas, l'indice μ des 4-vecteurs et tenseurs prend les valeurs $0, 1, \dots, D$ où 0 correspond toujours à la composante temporelle. L'action est donnée par :

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\phi, x) \quad (II.46)$$

II.3.3 Transformations de Lorentz

Rappelons le **principe de relativité de Galilée** qui s'applique aux systèmes

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

Non relativistes [18] : les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.

Le passage d'un référentiel à un autre se fait au moyen d'une **transformation de Galilée** :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t, \quad t \rightarrow t' = t, \quad (II.47)$$

Où \vec{v} est la vitesse relative des deux référentiels et le temps est absolu.

Le **principe de relativité restreinte** (Einstein) stipule quant à lui que la vitesse de la lumière est constante dans tous les référentiels inertiels. Il généralise ainsi celui de Galilée en incluant le régime relativiste. Son expression mathématique est contenue dans le fait que l'intervalle :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (II.48)$$

Est **invariant** par changement de référentiel inertiels. Les transformations ainsi obtenues sont les **transformations de Lorentz** qui généralisent les transformations de Galilée. Les transformations de Lorentz laissent ds^2 invariant et peuvent être interprétées comme des "rotations" dans un espace à 4 dimensions (ct, x, y, z). Il en existe 6 : 3 rotations ordinaires d'espace (par rapport aux axes x, y et z) ainsi que 3 transformations spéciales (ou *boost*) faisant intervenir le temps (dans les directions x, y et z).

Considérons par exemple le cas d'un boost dans la direction x . Cette transformation préserve la longueur d'espace-temps, *i.e.*, la forme quadratique $ct^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$ et laisse les coordonnées y et z invariantes. Sous forme matricielle, elle peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (II.49)$$

Où les paramètres de la transformation sont donnés par $\beta = V/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} > 0$ (facteur

de Lorentz) et $\vec{v} = v\vec{e}_x$ est la vitesse du boost dans la direction x . La transformation inverse est donnée par $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ *i.e.*, $\beta \rightarrow -\beta$. Cette transformation $\cosh(\phi) = \gamma$ et $\sinh(\phi) = \beta\gamma$ ou encore $\phi = \operatorname{arctanh}(\beta)$. Ceci conduit alors à :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (II.50)$$

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

A titre de comparaison, une rotation ordinaire autour de l'axe z est une transformation orthogonale préservant la longueur d'espace, *i.e.*, la forme quadratique $\overline{x'^2} = \vec{x}$ et laissant le temps invariant $t' = t$. Sous forme matricielle, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (II.51)$$

Où θ est l'angle de rotation autour de l'axe z .

Il sera commode dans toute la suite de mettre ces transformations sous une forme compacte en utilisant les notations 4-vecteurs appropriées au cas relativiste. On écrira ainsi :

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (x')_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu x_\nu \quad (II.52)$$

Où Λ est une matrice 4×4 associée à la transformation (qui peut être une rotation ordinaire ou un boost). La notation $\Lambda^\mu{}_\nu$ implique que μ est un indice de ligne et ν un indice de colonne. Dans le cas d'un boost le long de x on a ainsi :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (II.53)$$

Remarquons que les transformations inverses de (II.52) sont données par :

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu (x')^\nu, \quad x_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (x')_\nu \quad (II.54)$$

Ou encore

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (x')^\nu \quad x_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu (x')_\nu \quad (II.55)$$

Le principe de relativité restreinte contraint les coefficients $\Lambda^\mu{}_\nu$ et $\Lambda^\nu{}_\mu$ de la transformation de Lorentz. En effet, le produit scalaire laisse invariant la forme quadratique $x^2 = (x')^2$ ou, plus explicitement : $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$ Or $x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\sigma x^\sigma \Lambda_\mu{}^\rho x_\rho$ et $x^\mu x_\mu = \delta_\sigma{}^\rho x^\sigma x_\rho$ où $\delta_\sigma{}^\rho$ est le symbole de Kronecker On obtient donc :

$$\Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda_\mu{}^\rho = \delta_\sigma{}^\rho \quad (II.56)$$

Cette relation est l'analogie de $RR^T = 1$ qui exprime l'orthogonalité des matrices de rotation R dans l'espace ordinaire (même si la transposée n'apparaît pas explicitement (II.56)). On peut

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

écrire cette relation sous une autre forme qui peut s'avérer utile en pratique. Pour cela, on écrit : $x'^{\mu}x'_{\mu} = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\sigma}\Lambda^{\nu}_{\rho}x^{\sigma}x^{\rho}$ qui doit être égal à : $x^{\mu}x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$ On obtient alors :

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\rho} = g_{\sigma\rho} \quad (II.57)$$

Notons que le tenseur $g_{\mu\nu}$ est invariant sous la transformation de Lorentz. Il exprime l'orthogonalité d'une base qui doit être valable quel que soit la base utilisée.

Les matrices 4×4 Λ apparaissant dans (II.52) forment une **représentation** des transformations de Lorentz. L'ensemble de ces matrices forme un **groupe** orthogonal noté $O(3,1)$, le **groupe de Lorentz**. Tout comme $O(3)$, ce groupe est **non-commutatif**. Remarquons que, de la relation (II.56), on obtient :

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma}\Lambda_{\mu}^{\rho} = \delta_{\sigma}^{\rho} \Rightarrow (\det(\Lambda))^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \quad (II.58)$$

On distingue alors les **transformations de Lorentz propres** dont le déterminant est positif : $\det(\Lambda) = +1$. Elles forment un sous-groupe de $O(3,1)$ noté $SO(3,1)$ incluant les rotations et les boosts. Il existe aussi des **transformations de Lorentz impropres** dont le déterminant est négatif : $\det(\Lambda) = -1$. Ces transformations correspondent à la parité et au renversement du temps. Notons que seules les transformations propres sont continûment connectées à l'identité et admettent donc un développement infinitésimal. Les transformations impropres sont discrètes. Notons aussi que les transformations qui préservent la flèche du temps sont telles que :

$$\Lambda^0_0 \geq 0 \quad (II.59)$$

De telles transformations sont dites **orthochrones**. Le **groupe de Lorentz restreint**, noté $SO^+(3,1)$ est un sous-groupe du groupe de Lorentz comprenant les transformations propres et orthochrones. Par abus de langage, le groupe de Lorentz restreint est parfois appelé groupe de Lorentz.

Pour conclure cette sous-section, notons que le groupe de Lorentz $O(3,1)$ est un sous-groupe du **groupe de Poincaré**. Ce dernier inclut aussi des translations d'espace et de temps (le groupe des translations d'espace-temps est commutatif). Sous le groupe de Poincaré, les transformations (II.52) se généralisent en :

$$(x')_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}x^{\nu} + a_{\mu}, \quad (x')^{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu}x_{\nu} + a_{\mu} \quad (II.60)$$

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

Où le 4-vecteur au paramétrise la translation. Le groupe de Poincaré est parfois qualifié de groupe de Lorentz **inhomogène**. Pour insister sur l'absence de translation, les transformations (1.52) sont quant à elles parfois qualifiées de transformations de Lorentz **homogènes**.

II.3.4 Covariance de Lorentz

Les scalaires, vecteurs et plus généralement tenseurs sont définis par l'action du groupe des rotations SO (3) sur ces objets [19]. Dans l'espace de Minkowski, c'est l'action de SO (3,1) qui permet de définir la nature des objets que l'on manipule. Dans ce cadre, on peut définir un 4-vecteur comme étant un objet dont les quatre composantes se transforment comme celle du 4-vecteur position, x^μ sous l'action d'une transformation de Lorentz homogène. Ainsi :

$$b'^\mu = \Lambda^\mu_\nu b^\nu, \quad c'^\mu = \Lambda^\mu_\nu c^\nu \quad (\text{II.61})$$

Impliquent que b^μ et c^μ sont des 4-vecteurs. A l'aide de (II.56) on peut alors montrer que :

$$b'^\mu c'_\mu = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda_\mu^\rho b^\sigma c_\rho = b^\mu c_\mu \quad (\text{II.62})$$

Ce qui permet de vérifier explicitement la covariance de Lorentz du produit scalaire :

$$b' \cdot c' = b \cdot c \quad (\text{II.63})$$

En utilisant (II.55) on peut aussi montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (\text{II.64})$$

i.e., ∂^μ se transforme comme un 4-vecteur contravariant et ∂_μ comme un 4-vecteur covariant.

On peut de même définir des tenseurs de rang plus élevé via leur transformation de Lorentz.

Ainsi, un 4-tenseur de rang 2 est défini comme :

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho T^{\sigma\rho} \quad (\text{II.65})$$

Les transformations de Lorentz admettent aussi des **représentations** sur les champs qui permettent d'en définir la nature. Dans le cas d'un champ scalaire, une transformation de Lorentz, $x \rightarrow x' = \Lambda x$, implique que :

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (\text{II.66})$$

Où nous avons utilisé la notation $\phi(x) = \phi(\vec{x}, t)$ et l'apparition de Λ^{-1} dans l'argument du champ vient du fait que nous utilisons le **point de vue actif**. Notons que (1.66) peut aussi

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

s'écrire : $\phi'(x') = \phi(x)$ *i.e.*, la valeur du champ transformé en la coordonnée transformée est égale à la valeur du champ d'origine en la coordonnée d'origine. De même, dans le cas d'un **champ vectoriel**, *e.g.* pour le 4-vecteur potentiel, la représentation suivante s'applique naturellement :

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) \quad (II.67)$$

Une théorie (ou un modèle) est dite **covariante de Lorentz** (ou **invariante de Lorentz** ou encore **invariante relativiste**) si lorsque $\phi(x)$ satisfait les équations du mouvement alors $\phi(\Lambda^{-1}x)$ satisfait les **mêmes** équations du mouvement. On peut s'assurer de cette covariance de manière très simple : en construisant un Lagrangien qui est lui-même covariant de Lorentz, c'est-à-dire un **scalaire**. Le point crucial est que l'invariance relativiste de \mathcal{L} est tellement **restrictive** que l'on peut s'en servir pour **construire** \mathcal{L} .

D'un point de vue pratique, le formalisme présenté permet de repérer d'un seul coup d'œil la nature des objets manipulés. Il suffit tout simplement pour cela de compter le nombre d'indices non contractés :

- Scalaire : tous les indices sont contractés. C'est le cas par exemple de $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$
- Vecteur : un seul indice non contracté. C'est le cas par exemple de $\partial^\mu \phi \gamma^\alpha \partial_\mu \phi \sim V^\alpha$ où γ^μ est un 4-vecteur.
- Tenseur de rang 2 : deux indices non contractés. C'est le cas par exemple de

$$\partial^\mu \phi \gamma^\alpha \gamma^\beta \partial_\mu \phi \sim T^{\alpha\beta}. \quad (II.68)$$

Sans faire aucun calcul, on peut alors immédiatement s'assurer que le Lagrangien libre d'un champ scalaire réel, (II.43), est bien covariant de Lorentz et que l'équation du mouvement correspondante, (II.44), l'est aussi. On comprend ainsi mieux ce que l'on entendait au premier cours par "émergence d'une invariance de Lorentz" pour la corde vibrante.

II.4.1 Champs scalaires

II.4.1.1 Champ scalaire réel

Revenons au cas d'un champ scalaire réel $\phi(x)$ et tentons de construire le Lagrangien libre le plus général à l'aide des contraintes d'invariance de Lorentz et de localité [20]

Imposons à notre modèle d'être non seulement invariant sous les transformations de Lorentz homogènes mais aussi sous les translations d'espace-temps, *i.e.*, sous le groupe de Poincaré. Le Lagrangien $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ ne peut alors pas dépendre explicitement de x^μ . Par ailleurs, le seul 4-vecteur qui entre dans \mathcal{L} est $\partial_\mu \phi$. Pour que \mathcal{L} soit un scalaire, il doit être contracté avec lui-

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

même. Enfin, une théorie libre étant caractérisée par des équations du mouvement linéaires en les champs, \mathcal{L} ne peut être qu'au plus quadratique en ϕ

La localité quant à elle proscrit des contributions du type $\phi(x)\phi(y)$ avec $x \neq y$

Compte tenu de ces contraintes, la forme la plus générale du Lagrangien est

Donnée par :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad (II.69)$$

Où μ est un paramètre quelconque à ce niveau et doit avoir les dimensions de l'inverse d'une longueur. Le Lagrangien (II.43) est le **Lagrangien de Klein-Gordon** ou Lagrangien gaussien. C'est l'exemple le plus simple de Lagrangien relativiste pour un champ scalaire réel libre. Notons que c'est le choix de la métrique majoritairement positive qui permet de l'écrire avec un signe global positif (avec une métrique majoritairement négative un signe global négatif apparaîtrait).

L'application de (II.40) à (II.68) permet de déterminer l'équation du mouvement du champ :

$$\square \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad (II.70)$$

Qui correspond à l'**équation de Klein-Gordon**. La solution de cette équation linéaire en ϕ peut être cherchée sous la forme d'une onde plane en accord avec le fait qu'elle décrit l'évolution d'un champ libre. A ce point, on peut remarquer que la seule différence avec la corde vibrante est la présence du terme en μ^2 dans (II.69). Tout comme pour le modèle de la corde vibrante, le champ libre ϕ correspond à une infinité d'oscillateurs harmoniques découplés. Ce découplage se manifeste le plus clairement dans l'espace de Fourier. Nous utiliserons les conventions suivantes pour la transformée de Fourier et son inverse :

$$\phi(\vec{p}, t) = \int d^3x \phi(\vec{x}, t) e^{-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}} \quad (II.71a)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \phi(\vec{p}, t) e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}} \quad (II.71b)$$

Où la constante de Planck a été introduite pour rendre l'argument de l'exponentielle sans dimension. Ainsi, au moyen de (II.70b), l'équation de Klein-Gordon devient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{p^2 c^2 + \mu^2 \hbar^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{p}, t) = 0 \quad (II.72)$$

L'équation (II.71) est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

$$\omega_{\vec{p}}^2 = \frac{p^2 c^2 + \mu^2 \hbar^2 c^2}{\hbar^2} \quad (\text{II.73})$$

La transformée de Fourier du champ, $\phi(\vec{p}, t)$ apparaît donc comme un mode propre du champ. Par transformée de Fourier inverse, $\phi(\vec{x}, t)$ correspond à une superposition linéaire d'une infinité d'oscillateurs harmoniques découplés chacun oscillant à une certaine pulsation propre $\omega_{\vec{p}}$.

A partir de la pulsation $\omega_{\vec{p}}$ il est possible de définir une relation de dispersion en énergie :

$$E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 c^2 + \hbar^2 \mu^2 c^2 \quad (\text{II.74})$$

Ce résultat permet de retrouver la relation de dispersion relativiste $E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ à la condition que μ satisfasse à :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{mc} \quad (\text{II.75})$$

Et l'on retrouve naturellement la longueur d'onde de Compton qui est l'échelle de longueur relativiste caractéristique associée à une particule de masse m . Cet argument est à prendre avec beaucoup de précaution puisque l'équation (II.69) est une équation classique et ϕ est un **champ classique qui n'a rien à voir avec une fonction d'onde**. Il permet cependant de deviner que, une fois correctement quantifiée, ce champ pourra être associé à une particule (quantique) relativiste de masse m . Ceci sera l'objet du Chapitre suivant [22].

II.4.1.2 Champ scalaire réel et interaction de Yukawa

Ajoutons maintenant au Lagrangien libre \mathcal{L}_0 un terme d'interaction dit de Yukawa qui couple le champ ϕ (champ de méson) à un champ ρ (champ de nucléon) [21] :

$$\mathcal{L}_{int} = -\phi(x)\rho(x) \quad (\text{II.76})$$

Le Lagrangien total est donné par $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ où la dynamique associée à ρ est négligée par simplicité. L'équation du mouvement qui en résulte s'écrit :

$$\square \phi + \mu^2 \phi = -\rho \quad (\text{II.77})$$

Où ρ apparaît comme une **source** pour l'équation de Klein-Gordon.

II-5. Références

Remarque générale : il existe de nombreux excellents ouvrages de TQC (voir ci-dessous). La référence qui nous semble être la plus abordable et que nous suivrons pendant ce cours est celle du polycopié de David Tong (des vidéos sont aussi disponibles). Pour aller plus loin, nous recommandons les notes de cours de Sidney Coleman (des vidéos de 1975 sont aussi disponibles).

A titre indicatif, citons (la liste est loin d'être exhaustive) :

— Le beau livre d'Anthony Zee : assez compact, fourmillant de croustillants Détails physiques mais plus compliqué qu'il n'en a l'air au premier abord (Attention, la quantification y est menée via l'intégrale fonctionnelle).

RÉFÉRENCE :

[1]- Le grand "classique" de Claude Itzykson et Jean-Bernard Zuber : incontournable mais difficile d'accès aux débutants.

[2]-Le livre de Peskin et Schroeder : à la mode depuis quelques années mais Toujours d'un niveau avancé pour ce cours.

[3]- Le livre de Lewis Ryder : sensé être plus accessible que les précédents. Tout en ayant un exposé moderne du sujet.

[4]- L'ouvrage en deux volumes de Bjorken et Drell : fondamental (a formé des générations de physiciens), beaucoup de détails des calculs dans mais assez démodé.

[5]- Le livre de Bogolyubov et Shirkov : fondamental (a formé des générations de physiciens), c'est le premier livre à avoir exposé de manière rigoureuse la renormalisation (d'un niveau avancé pour ce cours).

[6] —On pourra aussi consulter : Histoire de la théorie quantique des champs (Wikipédia).

Pour réviser l'électromagnétisme et sa formulation covariante : polycopié de TCC (MU4PY110), Sorbonne Université.

[7]-James D. Bjorken, Sidney David Drell, Relativistic quantum mechanics, international series In pure and applied physics, McGraw-Hill (1964).

[8]-James D. Bjorken, Sidney David Drell, Relativistic quantum fields, international series in pure and applied physics, McGraw-Hill (1965).

[9]- N. N. Bogolyubov and D. V. Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields," Intersci. Monogr. Phys. Astron. **3** (1959) 1.

[10]-Sidney Coleman, Notes from Sidney Coleman's Physics 253a, arXiv: 1110.5013 [Physics.ed-ph]

<https://arxiv.org/abs/1110.5013>

[11]- Sidney Coleman, Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Fore Word by David Kaiser, B. G. Chen, D. Derbes, D. Griffiths, B. Hill, R. Sohn and Y. S. Ting, World Scientific Publishing (2018).

[12]-Sidney Coleman, Physics 253a, vidéos de 1975 disponibles sur :

<https://www.youtube.com/watch?v=IRDpW7QOyGw>

[13]-Claude Itzykson et Jean-Bernard Zuber, Quantum Field Theory, Dover Books on Physics, Courier Corporation (2012).

[14]-John D. Jackson, Classical electrodynamics, Wiley India Pvt. Limited (2007).

[15]-Lev Landau et Evguéni Lifchitz, Vol. 2, Théorie des Champs, Editions Mir (1989).

[16]-Lev Landau et Evguéni Lifchitz, Vol. 4, Electrodynamique Quantique, Editions Mir (1989).

Chapitre II : Le lagrangien d'un champ scalaire réel

[17]- Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, an Introduction to Quantum Field Theory, Frontiers in Physics, Avalon Publishing (1995).

[18]-Lewis Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press (1996).

[19]-Jun John Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Pearson (1967).

[20]- David Tong, Lectures on Quantum Field Theory, Université de Cambridge (2006).

Notes de cours + vidéos disponibles sur : <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>

[21]Steven Weinberg, the Quantum Theory of Fields, Volume 1, Cambridge University Press (1995).

[22]-Anthony Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, Princeton University Press (2010).

Chapitre III

Résultats & discussions

III-1. Introduction

Nous arrivons à la partie la plus laborieuse de notre travail, ou nous convertissons tout ce que nous avons vu dans les chapitres I et II d'un point de vue théorique à des équations numériques accessibles aux calculs. Pour cela nous réécrivons notre lagrangien et nous utilisons nos équations d'Euler Lagrange déduite à partir du principe de minimisation [1-10].

Alors résoudre ces équations numériquement revient à construire un organigramme de calcul inspirés par un programme écrit en fortran 77 qui repose sur la méthode d'Euler. Nous en donnerons ici un bref aperçu.

III-2. Méthode de calcul

Alors en partant de l'équation du lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \quad (\text{III} - 1)$$

Avec :

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} (m\varphi)^2 \quad (\text{III} - 1a)$$

Et avec le principe d'action qui stipule que notre chemin

$$S = \int L d^4x \quad (\text{III} - 2)$$

Soit minimal :

Donc en minimisant S c'est-à-dire $\delta S = 0$, Et en posant que $\delta S > 0$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{III} - 3)$$

On injectant notre L dans (III-3)

On obtient la fameuse équation appelée Klein-Gordon équation :

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi \quad (\text{III-3a})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \quad (\text{III-3b})$$

Ce qui donne :

$$(\square + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0 \quad (\text{III-4})$$

Cette équation décrit un champ libre ce qui est la laisse insuffisante pour nous donner toutes les informations possibles de notre univers.

Arrivé à cette étape nous allons essayer de résoudre notre équation, ou nous supposons que notre champ écrit comme :

$$\varphi(t, x) = e^{ik^\mu x_\mu} \quad (\text{III-5})$$

Est solution de notre équation vue au-dessus (III-6).

III.3. Solution analytique

$$(\square + m^2)\varphi(t, x) = 0 \quad (\text{III-6})$$

Nous utilisons maintenant la méthode de séparation des variables ou nous séparons la partie temporaire de la partie spatiale :

$$\varphi(t, x) = x(t) \cdot \psi(x) \quad (\text{III-7})$$

Une méthode très utilisée par les mathématiciens.

$$(\square + m^2)\varphi(t, x) = 0 \quad (\text{III-8})$$

Avec : $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ (III-9)

Nous injectons l'expression (III-5) nous obtenons :

$$\Rightarrow \psi_1(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) + m^2 \psi(x) X(t) \quad (\text{III-7a})$$

$$= X(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) \quad (\text{III-7b})$$

Multipliant les deux membres de l'équation par : $\frac{1}{X(t)\psi(x)}$

On obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) + m^2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{III-8})$$

Dont le premier membre dépend totalement de t et le deuxième membre dépend totalement de x ou leur égalité n'est permise que si chacun de ces membres soient égal à une constante.

$$\begin{cases} \frac{1}{X(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) + m^2 = C & (\text{III-9}) \\ \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = C & (\text{III-10}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = C\psi(x) \quad (\text{III-11})$$

$$\psi''(x) - C\psi(x) = 0 \quad (\text{III-11a})$$

$$\psi''(x) + i^2 C\psi(x) = 0 \quad (\text{III-11b})$$

Avec $k^2 = i^2 C$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (\text{III-12})$$

$$k = \pm\sqrt{c} \quad (\text{III-12a})$$

$$\psi(x) = Ae^{-\sqrt{c}x} + Be^{+\sqrt{c}x} \quad (\text{III-12b})$$

$$(III - 9) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(t) + (w^2 - c)X(t) = 0 \quad (III-12c)$$

Posons :

$$w^2 = m^2 - c \quad (III-13)$$

$$X(t) = A_1 e^{iwt} + B_1 e^{-iwt} \quad (III-14)$$

Après ce développement théorique nous allons passer à la résolution numérique qui se base principalement sur la méthode des différences finies toute en exposant notre organigramme de calcul

III.4. Solution numérique

Avec notre programme basé sur l'organigramme vue au-dessous nous obtenons les figures suivantes toute en se référant à la méthode de discrétisation via les différences finies. Nous en donnerons ici un flash :

III.5. Méthode des différences finies

Pour résoudre numériquement l'équation de Klein-Gordon second terme, il semble pertinent d'appliquer la méthode de discrétisation de l'espace et des opérateurs. Sous les hypothèses $\varphi(x)$ qu'est au moins de classe C^2 , un développement de Taylor nous permet d'écrire les deux égalités suivantes [1] :

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^3) \quad (III-15a)$$

$$\varphi(x - h) - \varphi(x) = -h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^3) \quad (III-15b)$$

Le somme de ces deux égalités :

$$\frac{\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x)}{h^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + O(h^2) \quad (III - 16)$$

Apparait alors équivalent discret de l'opérateur Δ (à une dimension, mais le cas à trois dimensions s'en déduit aisément). La précision de cette expression est en $O(h^2)$.

En discrétisant l'espace d'un pas "h" et en injectant le résultat précédent dans l'équation de Klein-Gordon, il vient :

$$\frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} + f(x)\varphi(x) + O(h^2) = 0 \quad (\text{III} - 17\text{a})$$

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x) + h^2 f(x)\varphi(x) + O(h^4) = 0 \quad (\text{III} - 18\text{b})$$

Cette équation peut être réécrite de façon à faire apparaître une relation de récurrence entre les valeurs de φ aux nœuds du maillage. Le pas de la discrétisation est fixé à h et l'origine est définie par le point O.

Lors de la résolution numérique, l'algorithme débute à $x = -2h$. La connaissance des deux premières valeurs de φ_n (il s'agit de l'onde plane écrite précédemment) permet d'initier la récurrence qui donne accès à tous les φ_n .

III.6. Organigramme de calcul

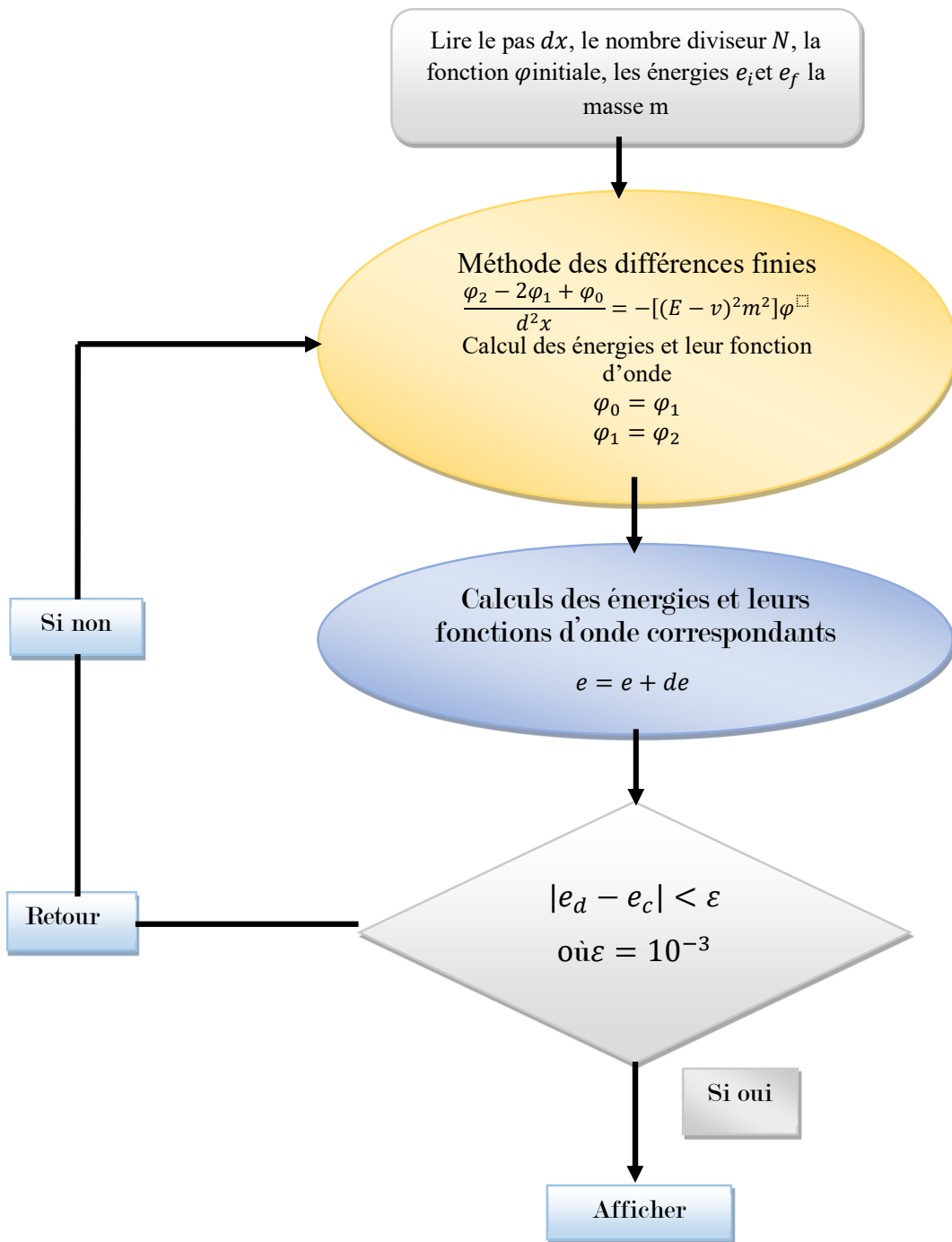


Figure III-1 : Organigramme de calcul.

Nous commencerons par la résolution de l'équation Klein-Gordon

Champ scalaire (unité arbitraire)

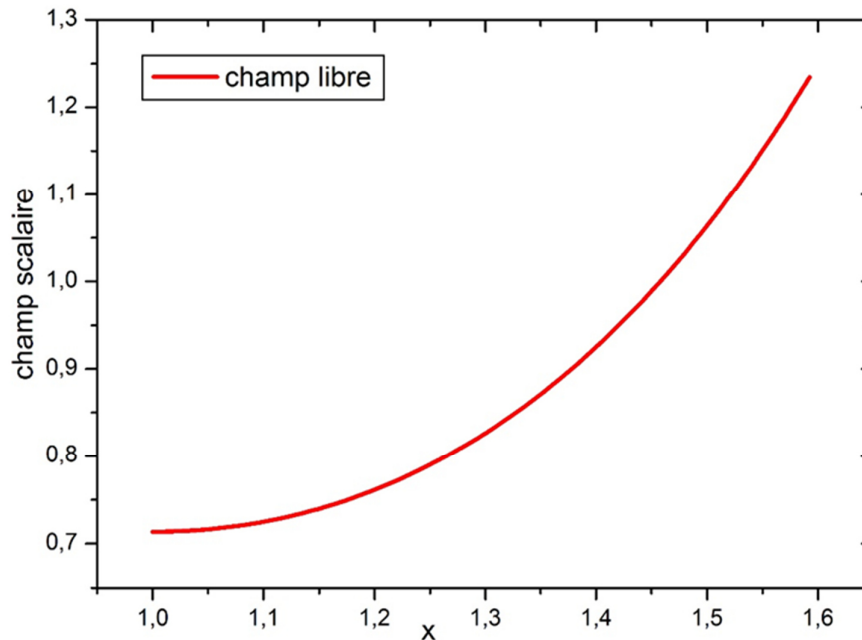


Figure III-2 : Evolution du champ scalaire réel libre en fonction de x.

La Figure III-2, donne l'évolution de notre champ scalaire réel en absence d'un potentiel en fonction de la distance X un comportement gaussien est observé ce qui nous permet de dire qu'un champ libre est décrite toujours par une Gaussienne

$$V(x)=0$$

III.7. Système lié

Dans un second temps nous allons essayer de résoudre notre équation vue précédemment toute en appliquant un potentiel $V(x)$.

L'équation se réécrit comme :

$$(\Delta + m^2 + (E - v(x)^2)\varphi(t, x) = 0 \quad (\text{III-19})$$

Sa résolution repose sur la connaissance de $v(x)$.

Traitant par exemple le cas ou $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$, dit système harmonique.

Psi (unité arbitraire)

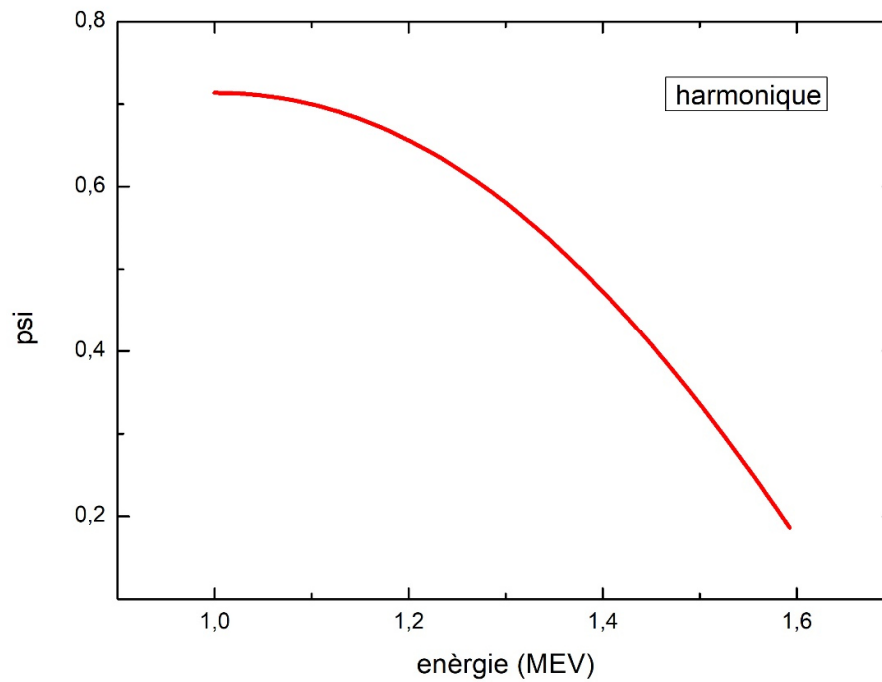


Figure III-3 : Evolution du champ scalaire réel en fonction de x.

La figure III-3, montre l'évolution du champ scalaire réel en présence du potentiel harmonique : $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$ la forme de notre champ est pratiquement Gaussienne ce qui nous permet de dire que l'influence de ce potentiel est quasiment faible.

Champ harmonique (unité arbitraire)

X : distance

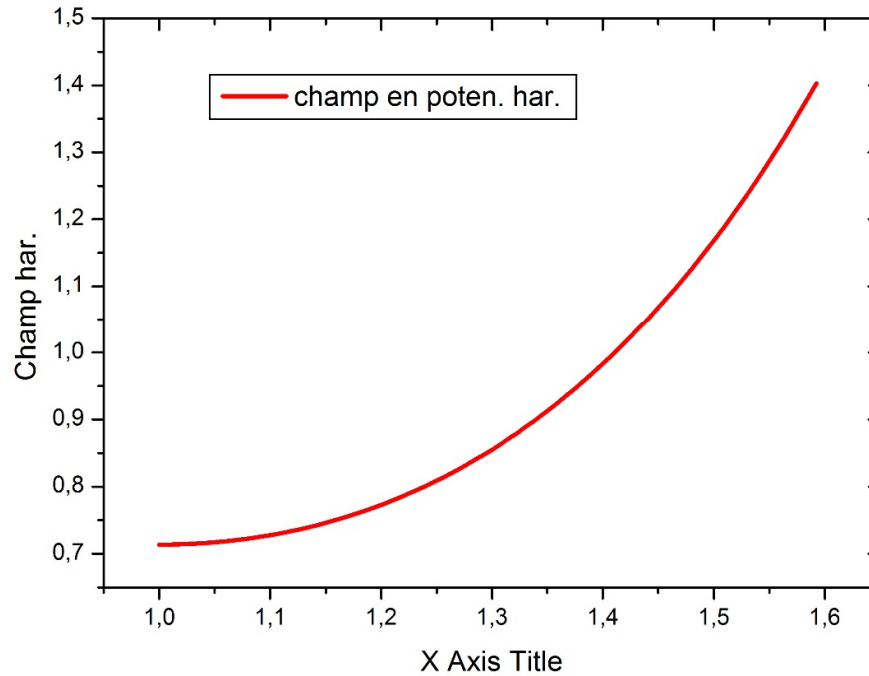


Figure III-4 : Evolution du potentiel harmonique en fonction de x une forme parabolique est observée.

La Figure III-4, donne l'évolution du potentiel harmonique en fonction de la distance x un comportement parabolique est observé.

Champ scalaire (unité arbitraire) , X :distance

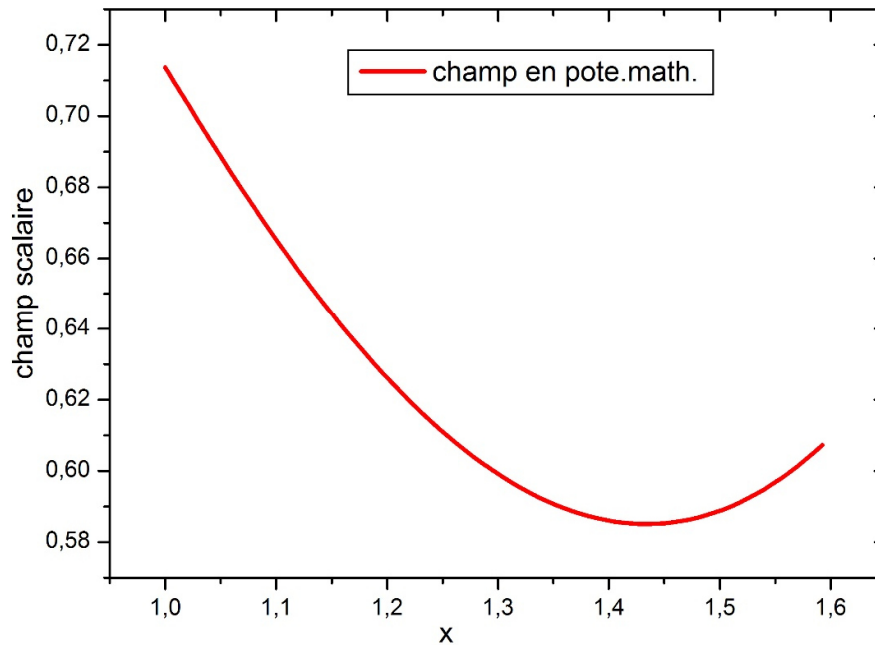


Figure III-5 : Evolution du champ scalaire réel via un potentiel mathématique
En fonction de x.

La Figure III-5, donne l'évolution de notre champ scalaire réel en présence d'un potentiel mathématique en exponentielle x en fonction de la distance X un comportement gaussien est observé ce qui nous permet de dire qu'un champ libre est décrite toujours par une gaussienne.

Champ scalaire (unité arbitraire) , X : distance

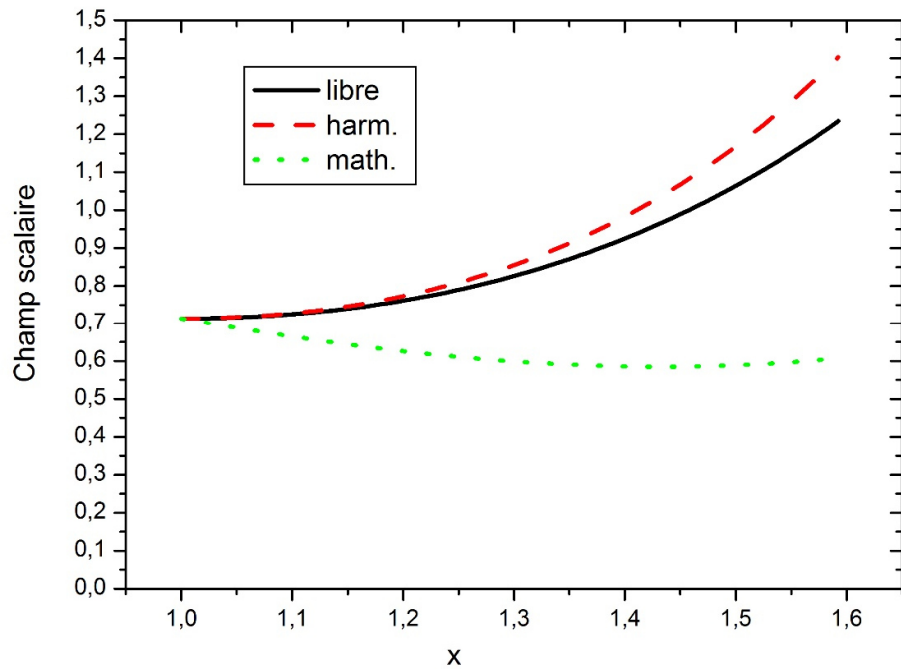


Figure III-6 : Variation des trois potentiels utilisés.

La Figure III-6, montre la différence la variation des potentiels utilisés pour notre calcul on remarque qu'une convergence rapide est observée du potentiel harmonique vis-à-vis les autres potentiels ce qui nous permettra de dire que la physique est d'autant plus décrite par un potentiel harmonique que les autres adversaires.

Référence :

- [1]-P.G. Drazin and R.S.johnson , solitons : an introduction ,camridge university press ,1989.
- [2]- Maciej Dunaskji , solitons , instantons and twistors , oxford university press 2010.
- [3]- jan govaerts , an introduction to quantum physiques et relativiste quantum eld théorie , un published manuscript , 2008
- [4]- V.F.Kislev , ya.M.shnir , an A .YA tregubovich , introduction to quantum eld théorie , CRC PRESS , 2004.
- [5]- Nicholas Manton and paul sutcli e (eds) , topologique solitons , cambridge université press, 2004
- [6]- William H. press, saul A. teukolsky , and william T . vetterling, Numeriac l recépés in fortran 77 ,2,ed ,vol.1,press syndicate of the university of cambridje ,1992
- [7]- R. Rajarman, an introduction to solitons and instantons in quantum eld theory , north-holland,1989
- [8]-More information about solitons ,hhttp://people .seas . harvard .edu/jones/solitons/solitons.html.
- [9]- Numérique méthode ,http://math .fullerton .edu/mathews/n2003/Numérique diff formule mod.html
- [10]- Noureddine zettli,quantum nmechanics concepts and applications ,2ed , john wiley &sons Ltd ,2009.

*Conclusion
générale*

Conclusion générale

Conclusion :

Ce travail de mémoire a été pour moi l'occasion d'aborder un certain nombre de solutions de l'équation de Klein Gordon non linéaire via des calculs numériques assez clair.

Nous avons en effet proposé de simplifier autant que possible la fonction Lagrangienne d'un champ scalaire libre et lié via les équations d'Euler Lagrange.

L'équation de Klein Gordon non linéaire était notre premier pas d'aborder ce travail d'une manière rigoureuse.

Le premier nous a permis d'aboutir à l'équation de Klein Gordon standard et le deuxième nous donne une équation de Klein Gordon non linéaire.

Notre dernière étape était basée sur la programmation où on écrit des programmes inspirés par le langage fortran 77 et à ce stade nous avons pu résoudre cette fameuse équation d'une manière numérique.

Sa solution numérique nous renseigne sur l'état du champ ainsi que sur sa densité de probabilité via des potentiels en ϕ^4 et afin de réaliser cet objectif nous avons dans un premier temps développé les lagrangiens des systèmes physiques en particulier pour un champ scalaire libre et en champ lié.

Le premier nous a permis d'aboutir à l'équation de Klein Gordon standard et le deuxième nous donne une équation de Klein Gordon non linéaire.

ملخص:

يبدأ أول موضوع نظرية المجال الكمي إعادة صياغة ميكانيكا الكم من خلال مبدأ التكميم الثاني. مبدأ يعالج المجال ليس فقط بطريقة تـليلية ولكن بطريقة عامل يطيع قوانين التخفيف البوزوني أو الفيرميوني المضاد للتبديل، ثم بناء مثل لاغرانج قادر على تزويدنا بجميع المعلومات الممكنة عن طبيعة حركة نظام مادي معين وتعتمد على معادلة أويلر-لاغرانج الشهيرة.

Summary:

This subject of quantum field theory tries to reformulate quantum mechanics via a principle of second quantization. A principle which treats the field not only in an analytical way but in an operator way obeying the laws of bosonic commutation or of fermionic anti-commutation, then the construction of such a Lagrangian able to give us all the information possible on the nature of the motion of a given physical system and based on the famous Euler-Lagrange equation.

Résumé:

Ce sujet de théorie quantique des champs essaye de reformuler la mécanique quantique via un principe de seconde quantification. Un principe qui traite le champ n'en seulement d'une manière analytique mais d'une façon operateur obéissant aux lois de commutation bosonique au d'anti-commutation fermionique, alors la construction d'un tel lagrangien capable à nous donner

toutes les informations possibles sur la nature du mouvement d'un système physique donne et basée sur la fameuse équation d'Euler –Lagrange.