République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supèrieure et de la recherche scientifique

N? Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Programmation d'inverse de Moore-Penrose des opérateurs linéaires

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques

par

Djelaili Belkais [1]

Sous la direction de

Mr B. Saadli

Soutenue le 16 Septembre 2020 devant le jury composé de

I. Mekkaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
K. Derfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail :belkaisdje@gmail.com

Dédicaces

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir , à toi mon père.

À la lumière de mes jours, la source des mes efforts, la flamme de mon cour, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères : Mohamed et Abdelkader, et mes soeurs : Asma, Fatima et Hala, je dédie ce travail dont le grand plaisir leur revient en premier lieu pour leur conseils, aides, et encouragement.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes cotés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieurs, mes aimable aimes, collègue d'étude, et frères de cours toi Fatima, Rania, Ikram et Hizia.

Remerciements

Par ce modeste travail que restera toujours notre compensation pour de longues années d'études

Nous remercions :

Allah le tout puissant et miséricordieux, qui grâce à lui, nous avons entreprendre nos études et les achever dans la sérénité, et qui nous à donné le courage d'accomplir ce modeste travail.

Mon encadreur, M.A **B.Saadli** pour les suggestions secourables et pour le support constant pendant cette recherche.
Je tiens aussi à remercier les membres du jury, Mme **I.Mekkaoui**, Dr **K.Djerfi** et Dr **A.Zeglaoui** pour m'avoir donné l'occasion de discuter ce travail, et spécialement.

Enfin nous tenons également à remercie toutes les personnes qui ont participé de prés ou le loin à la relation de ce travail.

Table des matières

Introduction

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation de type $Ax = y$, où A est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice ou un opérateur linéaire, comme l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires .

Il est bien connu qu'une matrice sur un corps a un inverse, si elle est carrée de déterminant non nul, on peut généraliser la notion d'inversibilité même pour les matrices non inversibles par plusieurs méthodes ; permis ces dernières il y a le pseudo-inverse de ***Moore-Penrose***.

Cette généralisation de l'inverse est introduite depuis 1903 par ***Erik Ivar Fredholm*** qui a donnée le concept de pseudo-inverse pour un opérateur intégral , puis en 1920 ***Eliakim Hastings Moore*** décrit pour une matrice à coefficients réels ou complexes (pas nécessairement carrée), ou pour une application linéaire entre espaces euclidiens ou hermitiens, il existe un unique pseudo-inverse de ***Moore-Penrose*** satisfaisant certaines conditions supplémentaires, et redécouvert indépendamment par ***Roger Penrose*** en 1955.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude des propriétés de l'inverse de ***Moore-Penrose***.

Dans la première section nous rappelons quelques généralités sur les matrices, dans la seconde section on donne quelques conséquences de la décomposition d'une matrice et nous avons ajouté une programmation pour chaque décomposition, dans

la troisième section on va étudier les $\{i, j, \ldots, k\}$- inverses généralisées des matrices, et aussi les types les plus célèbres de l'inverse généralisée et les relations entre ces types.
Précisément les types suivants de pseudo-inverse comme :

- L'inverse de ***Moore-Penrose*** $(A^\dagger)$ dans le cas des matrices carées. Ce type d'inverse vérifie les quatre équations de ***Penrose*** $AA^\dagger A = A \quad (1), A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad (2)$,
  $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger \quad (3), (A^\dagger A)^* = A^\dagger A \quad (4)$.
- L'inverse du ***Groupe*** $(A^\sharp)$ ou $\{1, 2, 5\}$- inverse(où $AA^\sharp = A^\sharp A \quad (5)$) il existe seulement pour les matrices d'indice $k = 1$ ou $k = 0$.

Et dans la quatrième section on étudie l'inverse de ***Moore-Penrose***$(A^\dagger)$ dans le cas des matrices carrées non inversibles, mais généralisable à toute algèbre de matrices à valeurs dans un corps. Ce type d'inverse vérifie les quatre équations de ***Penrose*** $AA^\dagger A = A$ (1), $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ (2), $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$ (3) et $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$ (4)

Dans le deuxième chapitre on aborde des notions de base nécessaires pour notre sujet. On donne quelques rappels de les opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert, ainsi on a prouvé des propositions concernant la multiplication, l'addition et la soustraction des projections orthogonales, puis une méthode pour extraire une projection orthogonale à partir d'une projection de même image, ce concept prendra également une partie importante de l'intérêt du troisième chapitre pour définir l'inverse de ***Moore-Penrose*** ; et après on est concerné par les algorithmes de **Moore-Penrose** pour les opérateurs bornés puis les opérateurs fermés à domaine dense.

Le dernièr chapitre représente l'objectif générale des notions de l'inverse de ***Moore-Penrose*** des opérateurs linéaire dans l'espace de **Hilbert**. La première section on donne un rappel sur la théorie spectrale des opérateurs linéaires. La deuxième section est une brève introduction à l'inversion généralisée des opérateurs linéaires où on a commencé par la définition de ***Tseng***. La troisième et la quatrième section concernent respectivement des opérateurs bornés et des opérateurs fermés à domaine dense sur un espace de Hilbert. Dans la dernière section nous approximons l'inverse de ***Moore-Penrose*** $T^\dagger$ de T par son $\{2\}-$inverse. Nous avons aussi illustré cette méthode avec un exemple.

Chapitre 1

Programmes (IMP) pour les matrices

Ce chapiitre contient troix sections, dans la première section "Rappels sur les matrices" nous rappelons les concepts de base d'algèbre linéaire nécessaire relatives aux matrices.
La deuxième section "Décomposition d'une matrice " qui est indispensable pour étudier l'inverse de **moore-penrose** avec la programmation de chaque décomposition, dans la troisième section on va étudier $\{i, j, \ldots, k\}$- inverses généralisées des matrices et la dernière section on étudie l'inverse de Moore-Penrose ($A^{\dagger}$)

1.1 Rappels

Définition 1.1.1. *Soit A une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$, on appelle matrice* ***Adjointe*** *de A, notée A^*, la matrice définie par :*

$$\begin{cases} A^* = A^t & si \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ A^* = (\overline{A})^t & si \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\forall (i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$$

une matrice A est symétrique si :

$$A^t = A$$

Elle est dite hermitienne ou auto-adjoint si : $A^* = A$

1.1.1 Rang et noyau d'une matrice

Étant donnée une matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, l'image par A d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est le vecteur $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in \mathbb{C}^m$ ou les a_i sont les colonne de A. L'image de A est définie par

$$ImA = \{Ax : x \in \mathbb{C}^n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x \in \mathbb{C}^n \right\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ engendré par les vecteurs-colonne de A. sa dimension est le rang de A. Le rang de A est donc le nombre maximum de vecteurs-colonne indépendants de A.

Une caractérisation utile du rang est la suivante : rang $A = r$ si et seulement s'il existe dans A une sous-matrice carrée $r \times r$ de déterminant non nul et si toute sous-matrice carrée $s \times s$ avec $s > r$ a un déterminant égal à 0.

cette caractérisation norme que

$$rang = rangA^t = rangA^*$$

Le noyau de A est le sous-espace vectoriel

$$kerA = x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0$$

Le rang et la dimension du noyau de A sont reliés par la formule célèbre :

$$rangA + dim \quad KerA = n$$

1.1.2 Matrice inversible

Définition 1.1.2. *Une matrice carré est inversible s'il existe une matrice B telle que : $AB = BA = I_n$ oû I_n est la matrice inverse de A notée A^{-1}*

Proposition 1.1.1. *Soient A, B dans $M_{\mathbb{R}}$:*

– *si A et B sont inversible, alors AB inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

– *si A est inversible, alors A^t est inversible et* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^{-t}$

Preuve 1.1.1. – $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$ *Donc AB est inversible d'inverse* $B^{-1}A^{-1}$
– $(A^t)(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I$

1.1.3 Matrice unitaire et matrice orthogonale

Une matrice carré est unitaire si et seulement si :$U^{-1} = U^*$
Une matrice A de $\mathbb{C}^{n\times n}$, est dite orthogonale si elle vérifiée l'une des propriétés équivalents suivantes :

1. $A^*A = I_n$
2. $AA^* = I_n$
3. A est inversible et $A^{-1}A = I$

1.2 Décomposition d'une matrice

1.2.1 Décomposition QR

En algébre linéaire, la décomposition QR (appelée aussi, décomposition QU) d'une matrice A est une décomposition de la forme

$$A = QR$$

oû Q est une matrice orthogonale ($QQ^* = I$), et R est une matrice triangulaire supérieure.
il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette décomposition :

- La méthode de **Householder** où Q est obtenue par produits successifs de matrices orthogonales élémentaires.
- la méthode de **Givens** où Q est obtennue par produits successifs de matrices de retation plane.
- La méthode de **Shmidt**

Chacune d'entre elle a ses avantages et ses, inconvénients. (La décomposition

QR n'étant pas unique, les différentes méthodes produiront des résultats différents).

Méthode de Schmidt :

On considère le procédé de gram-shmidt appliqué aux colonne de la matrice $A = [a_1, ..., a_n]$, muni du produit scalaire $< V.W >= V^*V$ ou $< V^*, W >= V^*W$. Pour le cas complexe, l'algorithme présenté ci-dessous convient à une matrice de rang n, pour des matrices de rang inférieur il est à adapter à chaque fois que le vecteur u_i, obtenu est nul, on définit la projection :

$\prod_e a = \frac{<e,a>}{<e,e>} e$

puis les vecteurs :

$u_1 = a_1, \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

$u_2 = a_2 - \prod_{e_1} a_2 \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

$u_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{e_j} a_k \qquad e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$

on réarrange ensuite les équation de sorte que les a_i soient à gauche, en utilisant le fait que les e_i sont des vecteurs unitaire :

$$a_1 =< e_1, a_1 > e_1$$

$$a_2 =< e_1, a_2 > e_1+ < e_2, a_2 > e_2$$

$$a_3 =< e_1, a_3 > e_1+ < e_2, a_3 > e_2+ < e_3, a_3 > e_3$$

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} < e_j, a_k > e_j$$

ou $< e_i, a_i >=\| u_i \|$ ceci s'écrit matriciellement :

$A = QR$

avec :

$Q = [e_1, .., e_n]$

et

$$R = \begin{pmatrix} <e_1, a_1> & <e_1, a_2> & <e_1, a_3> & ... \\ 0 & <e_2, a_2> & <e_2, a_3> & ... \\ 0 & 0 & <e_3, a_3> & ... \\ \vdots & \vdots & ... & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$a_1 = (1, 1, 0)^T$

$a_2 = (1, 0, 1)^T$

$a_3 = (0, 1, 1)^T$

$u_1 = a_1 = (1, 1, 0)$

$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$u_2 = a_2 - <a_1, e_1> e_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1)$

$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$

$u_3 = a_3 - <a_3, e_1> e_1 - <a_3, e_2> e_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \frac{1}{\sqrt{6}}(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) = (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$e_3 = \frac{u_3}{\|u_1\|} = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Le programme en MATLAB : $[Q, R] = qr([1 \quad 1 \quad 0; 1 \quad 0 \quad 1; 0 \quad 1 \quad 1])$

$>> A = [1 \quad 1 \quad 0; 1 \quad 0 \quad 1; 0 \quad 1 \quad 1]$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$>> [Q, R] = qr(A)$

$$Q = \begin{pmatrix} -0.7071 & 0.4082 & -0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0.5774 \\ 0 & 0.8165 & 0.5774 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -1.4142 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 1.2247 & 0.4082 \\ 0 & 0 & 1.1547 \end{pmatrix}$$

Programme de Schmidt sous Matlab :

```
function[Q,R]=mod_gram_shmidt(A)
[m,n]=size(A);
Q=zeros(m,n);
Q(1:m,1)=A(1:m,1);
R=zeros(n);
R(1,1)=1;
for k=1:n R(k,k)=norm(A(1:m,k));
    Q(1:m,k)=A(1:m,k)/R(k,k);
    for j=k+1:n R(k,j)=Q(1:m,k)'*A(1:m,j);
        A(1:m,j)=A(1:m,j)-Q(1:m,k)*R(k,j);
    end
end
disp(Q);
disp(R);
end
```

1.2.2 Décomposition en valeurs singulières d'une matrice

En mathématiques, le procédé d'algèbre linéaire de décomposition en valeurs singulières (ou SVD, de l'anglais singular value décomposition)d'une matrice est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. La décomposition a été prouvé en 1873-1874 par **E.Beltarmi** et **C.Jordan**, 1889 **J.J.Sylvester** a prouvé cette décomposition pour les matrices carrées réelles, et en 1915 la SVD a été prouvé pour les matrices complexes carrées par **Autonne**, valeurs singulière des opérateurs intégrales ont étudié par **Schimdt** et **Weyl**

Définition 1.2.1. *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, la décomposition en valeurs singulière de A s'écrit de la façon suivante :*

$$A = U\Sigma V^*$$

avec : U et V deux matrices orthogonales de taille $m \times m$ et $n \times n$ respectivement et Σ une matrice diagonale de taille $m \times n$ contenant les valeurs singulière de A notée $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma p$ et $p = min(m, n)$

Théorème 1.2.1. *les valeurs singulières d'une matrice A sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de AA^* et A^*A*

Preuve 1.2.1.

$$A^*A = (U\Sigma V^*)^*(U\Sigma V^*) = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^*$$

La matrice A^*A est semblable a $\Sigma^*\Sigma$, ce qui implique qu'elles ont les même valeurs propres, les valeurs propres de $\Sigma^*\Sigma$ sont $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_p^2$.

Théorème 1.2.2. $A = U\Sigma V^*$

$\| A \|_2 = \sigma_1$ $\quad$ $\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$

Preuve 1.2.2. *On a U et V sont orthogonale, nous avons :*

$$\| A \|_2 = \| U\Sigma V^* \|_2 = \| \Sigma \|_2$$

Maintenant

$$\| \Sigma \|_2^2 = max \| \Sigma x \|_2^2 = max(\sigma_1^2 x_1^2 + ... + \sigma_n^2 x_n^2) \leq \sigma_1^2(x_1^2 + ... + x_n^2) = \sigma_1^2$$

et le maximum est vérifié pour $x = e_1$ *alors*
$\| A \|_2 = \sigma_1$
Pour la norme de Frobenuis, nous avons

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i,j}^{n} x_{ij}^2} = \sqrt{tr(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$$

comme la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres

L'existence et l'unicité

Théorème 1.2.3. [3] *Soit* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *une matrice de rang* r, *il existe deux matrices orthogonales* $U \in \mathbb{R}^{m\times m}, (U^*U = UU^* = I_m)$ *et* $V \in \mathbb{R}^{n\times n}, (V^*V = VV^* = I_n)$ *telle que :*

$$A = U\Sigma V^t, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

ou $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}, \Sigma_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$,*et*

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$$

composante par composante, l'identité matriciel (1.1) devient :

$$Av_j = \sigma_j u_j \quad ; \quad A^*u_j = \sigma_j v_j \qquad pour \quad j = 1, ..., n$$

$$A^*u_j = 0 \qquad pour \quad j = 1, ..., m$$

Si l'on note $U = (u_1, u_2, ..., u_m), V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *Les colonnes des matrices* U *et* V, *les vecteurs* u_j *et* v_j *sont respectivement,les vecteurs singulières droits et gauches associé à les valeurs singulières* σ_j

Preuve 1.2.3. *La preuve se fait par récurrence sur n.*
par définition de ce qu'est une norme matricielle subordonnée, il existe un vecteur

$v_1 \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\| v_1 \|_2 = 1 \quad ; \quad \| Av_1 \|_2 = \| A \| =_{déf} \sigma$$

où σ *est strictement positif (si* $\sigma = 0$*, alors* $A = 0$*, et il n'y a rien à démontrer).*
Posons $u_1 = 1/\sigma A v_1 \in \mathbb{R}^m$
Complétons le vecteurs V_1 *en une base orthogonale de* $\mathbb{R}^n$*, et notons* $V = (v_1, V_1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *la matrice formée par les vecteurs de base.*
Faisons de meme pour U_1 *et* $\mathbb{R}^m$*, notant* $U = (u_1, U_1) \in \mathbb{R}^{m\times m}$
Remarquons que les matrices U *et* V *sont orthogonales par construction.*
D'après notre choix de $U_1, U_1^t A v_1 = \sigma U_1^t U_1 = 0$*, et donc le produit* $U^t AV$ *a la structure par bloc suivante :*

$$A_{1_{déf}} = U^t AV = \begin{pmatrix} \sigma & w^t \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $w^t = u_1^t AV^1$ *et* $B = U_1^t AV_1 \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$
comme U *et* V *sont orthogonales,* $\| A_1 \|_2 = \| A \|_2 = \sigma$*. Mais la double inégalité*

$$\| A_1 \|_2 \geq (\sigma^2 + w^t w)^{\frac{1}{2}} \geq \left\| A_1 \begin{pmatrix} \sigma \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma^2 + w^t w \\ Bw \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \sigma^2 + w^t w$$

montre que $\| A_1 \| \geq (\sigma^2 + w^t w)^{\frac{1}{2}}$*.On doit donc avoire* $w = 0$*. On peut alors terminer la démonstration en appliquant l'hypothèse de récurrence à* B*.*

Exemple 1.2.2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

$A^* A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{pmatrix}$

$det(A^* A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 26-\lambda & 18 \\ 18 & 74-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 100\lambda - 1600 = (\lambda - 20)(\lambda - 80)$

les valeurs propres sont :$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 80 \Rightarrow \sigma_1 = 4\sqrt{5}, \sigma_2 = 2\sqrt{5}$

calcul de U et V

$A^*A = 20I = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

$A^*A - 80I = \begin{pmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$AV = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$

alors $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$A = U\Sigma V^* = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

Le programme en MATLAB :[U,S,V]=svd([5 5; −1 7])

$>> A = [5 \quad 5; -1 \quad 7]$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$>> [U, S, V] = svd(A)$

$$U = \begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 8.9443 & 0 \\ 0 & 4.4721 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.3162 & 0.9487 \\ 0.9487 & -0.3162 \end{pmatrix}$$

Programme SVD sous Matalb :

```
function[U,S,V]=badsvd(A)
W=A*A';
[U,S]=eig(W);
max=0;
for i=1:size(W,1) %%sort
    for j=i:size(W,1)
        if(S(j,j)>max)
            max=S(j,j);
            temp_index=j;
        end
    end
    max=0;
    temp=S(temp_index,temp_index);
    S(temp_index,temp_index)=S(i,i);
    S(i,i)=temp;
    temp=U(:,temp_index);
    U(:,temp_index)=U(:,i);
    U(:,i)=temp;
end
W=A'*A;
[V,s]=eig(W);
max=0;
for i=1:size(W,1) %%sort
    for j=i:size(W,1)
        if(s(j,j)>max)
            max=s(j,j);
```

Command Window

```
            max=s(j,j);
            temp_index=j;
        end
    end
    max=0;
    temp=s(temp_index,temp_index);
    s(temp_index,temp_index)=s(i,i);
    s(i,i)=temp;
    temp=V(:,temp_index);
    V(:,temp_index)=V(:,i);
    V(:,i)=temp;
end
s=sqrt(s);
disp(U);
disp(V);
disp(S);
end
```

Command Window

1.2.3 Décomposition LU

La décomposition LU est une méthode de décomposition d'une matrice comme produit d'une matrice triangulaire inférieur L par une matrice triangulaire U. Cette décomposition est utilisée en analyse numérique pour résoudre des systèmes d'équation linéaire

Définition 1.2.2. *Soit A une matrice carrée. On dit que A admet une décomposition LU s'il existe une matrice tiangulaire inférieur formée de 1 sur la diagonale, noté L, et une matrice triangulaire supérieur, noté U, qui vérifiant l'égalité : $A = LU$*
Il n'est pas toujours vrai qu'une matrice A admette une décomposition LU. Cependant dans certains cas, en permutant des lignes de A, la décomposition devient possible, on obtient alors une décomposition de la forme $A = PLU$
où P est une matrice permutation bien que les décomposition LU et PLU conduisent à des formules distinctes, généralement quand on parle de la décomposition LU, on fait référence à l'une ou l'autre de ces décomposition

Existence,Unicité
Pour tout matrice carrée, on a existence d'une décomposition PLU. Pour une matrice inversible, la décomposition LU existe si et seulement si : toutes les sous-matrices principales d'ordre 1 à $n-1$ sont inversibles. [pur une matrice carrée de rang $r < n$, il y a des conditions suffisantes analogues] si toutes les sous-matrice principales d'ordre 1 à $n$sont inversibles, elle est même unique

Exemple 1.2.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

$L_2' = L_2 - 2L_1$
$L_3' = L_3 + L_1$
$\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$L_3' = L_3 - 3L_2$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

Programme en Matlab $[L, U, p] = lu[2 \quad 1 \quad -1; 4 \quad 6 \quad 1; -2 \quad 11 \quad 8]$

$>> A = [2 \quad 1 \quad -1; 4 \quad 6 \quad 1; -2 \quad 11 \quad 8]$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

$>> [L, U] = lu(A)$

$$L = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0.5000 & -0.1429 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 4.0000 & 6.0000 & 1.0000 \\ 0 & 14.0000 & 8.5000 \\ 0 & 0 & -0.2857 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Programme de LU sous Mtlab :

```
function[C]=Lu_decomposition(C)
[m,n]=size(C);
%upper Matrix
s=0;
for j=1:n
    for i=s+1:m-1
        t=C(i+1,j)/C(j,j);
        C(i+1,:)=C(i+1,:)-t*C(j,:);
        b(i+1)=b(i+1)-t*b(j);
        f(i+1,:)=t;
    end
    s=s+1;
end
u=C %upper Matrix
L=f;
L(:,n)=zeros(n,1);
for i=1:n
    L(i,i)=1;
end
L %Lower Matix
```

Command Window

1.2.4 Décomposition de Cholesky

La décomposition de cholesky est une décomposition d'un hermitienne, une matrice définie positive dans le produit d'une matrice triangulaire inférieure et son transposé conjugué. Il à été découvert par **André-Louis Cholesky** pour matrice réelles

Théorème 1.2.4. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice définie positive. Il existe une unique matrice $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangulaire inférieure telle que $l_{ii} > 0$ pour tout i et $A = LL^*$*

Preuve 1.2.4. *supposons que $LL^* = MM^*$, que $l_{ii} > 0$ et que $m_{ii} > 0$ pour tout i. On a $M^{-1}L = M^*L^{-*}$ qui est à la fois triangulaire inférieure (à gauche) et triangulaire (à droite). C'est donc une matrice diagonale. Les entrées diagonales valent $m_{ii}^{-1}l_{ii} = m_{ii}l_{ii}^{-1}$ et donc sont égales à 1 par la condition de positivité. Ainssi $M^{-1}L = M^*L^{-*} = I_n$ c'est-à-dire $L = M$*

L'existence de cette décomposition se prouve par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on *prend* $L = (\sqrt{a_{11}})$*. Supposons que la décomposition de Cholesky existe pour toute matrice définie positive* $n-1 \times n-1$*. Écrivons*

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ a^* & a_{nn} \end{pmatrix} \quad avec \quad a = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{pmatrix}$$

Notons $A_{n-1} = L_{n-1}L_{n-1}^*$ *la décomposition de Cholesky de* A_{n-1}*.On a*

$$A = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ u^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1}^* & u \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

en prenant $L_{n-1}u = a$ *et* $u^*u + \alpha\beta = a_{nn}$*. On obtiendra la décomposition de Cholesky de*A *si l'on peut prendre* $\alpha = \beta > 0$ *ce qui sera possible si* $\alpha\beta > 0$*. L'égalité ci-dessus prouve que*

$$detA = detL_{n-1}\alpha \quad detL_{n-1}^*\beta$$

Comme, par hypothèse, de $A > 0$ *et de* $L_{n-1} > 0$ *on a bien* $\alpha\beta > 0\beta$

Algorithme de calcule

Ecrivons $A = (a_{i,j})$ et $L = (l_{j,j})$

de l'igalité $A = L^*L$, on déduit que

$a_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} l_{i,j}l_{j,k}$

puisque L est triangulaire inférieur. Pour $i = 1$, on détermine la première colonne de L en commençant par la coefficient diagonale :

$j = 1, a_{11} = l_{11}l_{11}$, d'oû $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$j = 2, a_{12} = l_{11}l21$,d'oû $l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$

si on a déterminé les i-ême colonne de$L$, on peut déterminer la i-ême en commençant la aussi par le coefficient diagonale :

$j = i, a_{i,i} = l_{i,1}l_{i,1} + l_{i,2}l_{2,i} + ... + l_{i,i}l_{i,i}$ d'oû $l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - l_{i,1} - ... - l_{i,i}l_{i,i} - 1} = \sqrt{a_{i,i} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$

$j = i+1, a_{i,i+1} = l_{i,1}l_{l+1,1} + ... + l_{i,i}l_{i+1}$ d'oû $l_{i+1,i} = \frac{a_{i,i+1}-l_{i,1}l_{i+1,1}-...-l_{i,i-1}l_{i+1,i-1}}{l_{i,i}} = \frac{a_{i,i}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{i,k}l_{j,k}}{l_{i,i}}$

Exemple 1.2.4. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{15}{2.4495} = 6.1237$

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{55 - (6.1237)^2} = \sqrt{55 - 37.5} = 4.1833$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{55}{2.4495} = 22.4537$

$l_{32} = \frac{a_{32}-l_{31}\times l_{21}}{l_{22}} = \frac{225-(22.4537)\times(6.1237)}{4.1833} = \frac{225-137.5}{4.1833} = 20.9165$

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{979 - (22.4537)^2 - (20.9165)^2} = \sqrt{979 - 941.6667} = 6.1101$

$L = \begin{pmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.4537 & 20.9165 & 6.1101 \end{pmatrix} \quad L^* = \begin{pmatrix} 2.4495 & 6.1237 & 22.4537 \\ 0 & 4.1833 & 20.9165 \\ 0 & 0 & 6.1101 \end{pmatrix}$

Programme en Matlab

$>> A = [6 \quad 5 \quad 55; 15 \quad 55 \quad 225; 55 \quad 225 \quad 979]$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$$

$>> [L] = chol(A,' lower')$

$$L = \begin{pmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.4537 & 20.9165 & 6.1101 \end{pmatrix}$$

$>> L'$

$$L' = \begin{pmatrix} 2.4495 & 6.1237 & 22.4537 \\ 0 & 4.1833 & 20.9165 \\ 0 & 0 & 6.1101 \end{pmatrix}$$

Le programme de cholesky sous Matlab :

```
function L =my_chol(A)
n = size(A,1); O = zeros(n);
L = O;
for k = 1:n
 if k == 1
 L(k,k) = sqrt(A(k,k));
 L(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/L(k,k);
 else
 v = L(k,1:k-1)'; %L_k1'
 L(k,k) = sqrt(A(k,k)-v'*v);
 L(k+1:n,k) = (A(k+1:n,k)-L(k+1:n,1:k-1)*v)/L(k,k);
 end
end
```

Command Window

1.3 {i,j,. . . ,k}-Inverses généralisées

Dans cette section on va étudier l'inverse de ***Moore-Penrose*** des matrices et leur propriété (car est un inverse généralisé le plus célèbre). Puis les $\{i, j, \dots, k\}$ inverse et on etudier des méthodes pour calculer l'inverse de ***Moore-Penrose*** d'une matrice A.

1.4 Inverse de moore-penrose

Les Equations de Penrose

En 1955 ***Penrose*** a montré que, pour toute matrice finie A (carré ou rectangulaire) des éléments réels ou complexes, il y a une unique matrice X vérifiant les quatre équations (appelées les équations de ***Penrose***)

$$\begin{aligned} AXA &= A \qquad (1) \\ XAX &= X \qquad (2) \\ (AX)^* &= AX \qquad (3) \\ (XA)^* &= XA \qquad (4) \end{aligned}$$

où A^* désigne la transposée (cas réel) ou l'adjointe (cas complexe) de A. Cet inverse est appelé l'inverse de ***Moore-Penrose***, et on le note par $A^\dagger$.
Si A est inversible, il est claire que $X = A^{-1}$ trivialement vérifie les quatre équations. Puisque l'inverse de ***Moore-Penrose*** est unique il suit que l'inverse de ***Moore-Penrose*** d'une matrice inversible est le même comme l'inverse ordinaire.
Dans ce chapitre nous nous intéressons a plusieurs inverses généralisés qui satisfont quelques équations de ***Penrose***. $\mathbb{C}^{m\times n}$ $[\mathbb{R}^{m\times n}]$ dénote la classe des matrices $m \times n$ complexes [réelles].

Définition 1.4.1. *Pour toute $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, soit $A\{i, j, ..., k\}$ l'ensemble des matrices $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ qui satisfont les équations $(i), (j), ..., (k)$ parmi les équations $(1) - (4)$. Une matrice $X \in A\{i, j, ..., k\}$ est appelée un $\{i, j, ..., k\}-$inverse de A, et est notée par $A^{(i,j,...,k)}$.*

Exemple 1.4.1. *Si $A\{1, 2, 3, 4\}$ est non vide, alors il est constitue d'un seul élément.*

Preuve. Soit $X, Y \in A\{1, 2, 3, 4\}$. Alors

$$\begin{aligned} X &= X(AX)^* = XX^*A^* = X(AX)^*(AY)^* \\ &= XAY = (XA)^*(YA)^*Y = A^*Y^*Y \\ &= (YA)^*Y = Y \end{aligned}$$

□

Théorème 1.4.1. *[6] Si $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. tels que $AB^* = 0$ et $B^*A = 0$, alors :*

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

Théorème 1.4.2. *Si $A = BC$ où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{m\times r}, C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, et $r = rang(A) = rang(B) = rang(C)$, alors $A^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$.*

Preuve. Remarquons que B^*B et CC^* sont des matrices dans $\mathbb{C}^{r\times r}$ de rang égale à r. Soit $X = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$. On va montrer que X vérifie les quatre équations de ***Penrose***. On a
$AX = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$, donc $(AX)^* = AX$. En outre
$XA = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = C(CC^*)^{-1}C$, donc $(XA)^* = XA$. Par conséquent les équations (3) et (4) de ***Penrose*** sont vérifiées.
pour vérifier les équations (1) et (2) nous utilisons $XA = C^*(CC^*)^{-1}C$ pour obtenir $A(XA) = BC(C^*(CC^*)^{-1}C) = BC = A$.
Et $(XA)X = C^*(CC^*)^{-1}CC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = X$. Par conséquent $X = A^\dagger$.

□

Exemple 1.4.2. *Soit* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $r = rang(A) = 1,\ A = BC$ *ou* $B \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ *et* $C \in \mathbb{C}^{1\times 3}$. *En fait,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alors $B^*B = [5],\ CC^* = [6]$. *Par conséquent*

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1.5 Comparaison entre des décomposition

Dans cette section on va faire une comparaison entre les 4 programme étudié ultérieurement, cette comparaison est consacré sur la rapidité de l'exécution, on utilise le même PC et la même matrice et les même conditions, pour calculé le temps de l'exécution sur le programme Matlab il y à la commande (tic toc) et pour prendre une valeur presque stable on calcule la moyenne arithmétique de plusieurs tentative (10000 fois) par ce que chaque fois on trouve une valeur différente par rapport les autres

Programme de QR

```
w=0
for k=1:10000
tic
A=[1 -2 4 0 8 10 -5 7 20 11 30 5 1 4 9;4 3 1 10 3 -6 4 7 9 -2 1 0 11 -2 1;
    0 5 6 7 11 12 30 2 -4 5 0 3 14 12 16;5 4 -2 6 1 4 6 8 9 10 16 15 20 11 4;
    6 2 1 20 3 8 9 7 4 2 10 12 13 8 7;1 2 3 8 9 7 6 4 10 12 13 11 16 15 2;
    8 9 12 14 12 30 1 7 9 8 55 66 12 13 12;0 2 5 7 18 16 14 2 13 10 1 -1 -2 -3 5;
    5 20 10 4 6 7 8 9 30 2 15 40 0 -1 -6;2 4 6 55 20 52 7 8 9 14 22 10 33 2 1;
    1 0 77 8 5 6 4 2 1 3 1 3 20 0 14;20 1 0 -4 -5 -6 5 3 2 7 15 12 13 10 12]
[m,n]=size(A);
Q=zeros(m,n);
Q(1:m,1)=A(1:m,1);
R=zeros(n);
R(1,1)=1;
for k=1:n R(k,k)=norm(A(1:m,k));Q(1:m,k)=A(1:m,k)/R(k,k);
    for j=k+1:n R(k,j)=Q(1:m,k)'*A(1:m,j);
        A(1:m,j)=A(1:m,j)-Q(1:m,k)*R(k,j);
    end
end
disp(Q);v=inv(R*R');D=inv(Q'*Q);X=R'*(v)*(D)*Q'
toc
w=w+toc
end
p=w/10000
disp(p)
disp(X)
```

```
Command Window

p =

    0.0105
```

programme de SVD

```
w=0
for k=1:10000
    tic
    A=[1 -2 4 0 8 10 -5 7 20 11 30 5 1 4 9;4 3 1 10 3 -6 4 7 9 -2 1 0 11 -2 1;
        0 5 6 7 11 12 30 2 -4 5 0 3 14 12 16;5 4 -2 6 1 4 6 8 9 10 16 15 20 11 4;
        6 2 1 20 3 8 9 7 4 2 10 12 13 8 7;1 2 3 8 9 7 6 4 10 12 13 11 16 15 2;
        8 9 12 14 12 30 1 7 9 8 55 66 12 13 12;0 2 5 7 18 16 14 2 13 10 1 -1 -2 -3 5;
        5 20 10 4 6 7 8 9 30 2 15 40 0 -1 -6;2 4 6 55 20 52 7 8 9 14 22 10 33 2 1;
        1 0 77 8 5 6 4 2 1 3 1 3 20 0 14;20 1 0 -4 -5 -6 5 3 2 7 15 12 13 10 12]
    B=pinv(A)

toc
w=w+toc
end
p=w/10000
```

Command Window

```
p =

    0.0016

>>
```

Programme de LU

```
w=0
for k=1:10000
tic
A=[1 -2 4 0 8 10 -5 7 20 11 30 5 1 4 9;4 3 1 10 3 -6 4 7 9 -2 1 0 11 -2 1;
    0 5 6 7 11 12 30 2 -4 5 0 3 14 12 16;5 4 -2 6 1 4 6 8 9 10 16 15 20 11 4;
    6 2 1 20 3 8 9 7 4 2 10 12 13 8 7;1 2 3 8 9 7 6 4 10 12 13 11 16 15 2;
    8 9 12 14 12 30 1 7 9 8 55 66 12 13 12;0 2 5 7 18 16 14 2 13 10 1 -1 -2 -3 5
    ;5 20 10 4 6 7 8 9 30 2 15 40 0 -1 -6;2 4 6 55 20 52 7 8 9 14 22 10 33 2 1;
    1 0 77 8 5 6 4 2 1 3 1 3 20 0 14;20 1 0 -4 -5 -6 5 3 2 7 15 12 13 10 12]
n = size(A, 1); I = eye(n); L = I; U = A;
for k=1:n-1
L(k+1:n,k) = U(k+1:n,k)/U(k,k); %multipliers
for j = k+1:n
U(j,k:n) = U(j,k:n)-L(j,k)*U(k,k:n); %rows
end
end
L
U
w=inv(U*U');k=inv(L'*L);
X=U'*w*k*L'
toc
w=w+toc
end
p=w/10000
disp(p)
disp(X)
```

Command Window

Command Window

```
p =

   1.0e-05 *
```

Programme de Cholesky

```
w=0
for k=1:10000
tic
[1 -2 4 0 8 10 -5 7 20 11 30 5 1 4 9;4 3 1 10 3 -6 4 7 9 -2 1 0 11 -2 1;
    0 5 6 7 11 12 30 2 -4 5 0 3 14 12 16;5 4 -2 6 1 4 6 8 9 10 16 15 20 11 4;
    6 2 1 20 3 8 9 7 4 2 10 12 13 8 7;1 2 3 8 9 7 6 4 10 12 13 11 16 15 2;
    8 9 12 14 12 30 1 7 9 8 55 66 12 13 12;0 2 5 7 18 16 14 2 13 10 1 -1 -2 -3 5
    ;5 20 10 4 6 7 8 9 30 2 15 40 0 -1 -6;2 4 6 55 20 52 7 8 9 14 22 10 33 2 1;
    1 0 77 8 5 6 4 2 1 3 1 3 20 0 14;20 1 0 -4 -5 -6 5 3 2 7 15 12 13 10 12]
[m,n] = size(A) ; transpose=false ;
if m < n
transpose=true ;C = A*A' ;n = m;
else
C = A'*A;
end
dC = diag(C); tol = min(dC(dC > 0))*1e-9 ;L = zeros(size(C)) ;r = 0 ;
for k = 1 : n
r = r + 1 ;L(k : n,r) = C(k : n, k)-L(k : n,1 : (r -1))*L(k,1 : (r-1))';
if L(k,r) > tol
L(k,r) = sqrt(L(k,r));
if k < n
L((k + 1) : n,r) = L((k + 1) : n,r)==L(k,r);
end
else
r = r-1; end
end
```

Command Window

```
L = L(:, 1 : r);M = inv(L'*L);
if transpose
Y = A'*L*M *M *L';
else
Y = L *M*M*L*A';
end
Y
w=w+toc
end
p=w/10000
disp(p)
```

Command Window

Command Window

```
p =

    0.0014
```

Conclusuion

D'aprés la comparaison, nous concluons que la décomposiotion **LU** est le plus **rapide**

Chapitre 2

Opérateurs linéaires

Notion de projection

• **(A)** Tout au long de ce mémoire nous considérons les espaces de Hilbert, notés $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, etc. Le produit scalaire et la norme induite sont notés respectivement par $<,>$ et $\|.\|$. $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. Si $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ est un opérateur linéaire, le domaine, noyau et l'image de T sont notés respectivement $D(T)$, $N(T)$, et $R(T)$.

• **(B)** Le graphe de T est définie par $G(T) = \{(\mathrm{x}, T\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in D(T)\} \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Si $G(T)$ est fermé, alors T est appelé un opérateur fermé. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires fermés est noté $\mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

L'ensemble des opérateurs linéaires bornés est notée $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, alors $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ sont désignés par $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ respectivement.

• **(C)** Si S et T sont deux opérateurs linéaires tels que $D(T) \subseteq D(S)$ et $T\mathrm{x} = S\mathrm{x}$ pour tout $\mathrm{x} \in D(T)$, alors T est appelé une restriction de S et S est appelé une extension de T. On note $T \subseteq S$.

• **(D)** Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Si $\overline{D(T)} = \mathcal{H}_1$, alors T est appelé densément défini. Le sous-espace $C(T) = D(T) \cap N(T)^{\perp}$ est appelé le carrier de T,

si $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors $D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T)$, la somme directe orthogonale de $N(T)$ et $C(T)$

• **(E)** Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ à domaine dense, on a :

$$\overline{N(T)} = R(T^*)^{\perp}, \qquad N(T^*) = R(T)^{\perp}$$

où T^* l'adjoint de l'opérateur T satisfait

$$< T^*\mathrm{y}, \mathrm{x} >=< \mathrm{y}, T\mathrm{x} > \quad \text{pour tout x } \in D(T)$$

En particulier, T respectivement T^* a une image dense si et seulement si T^* respectivement T est injectif.

• **(F)** Un opérateur fermé partout défini est borné, c'est une conséquence de théorème du graphe fermé. Inversement, on peut écrire $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

• **(G)** On note :

$$\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \ : \ \mathrm{x} \in \mathcal{H}_1, \mathrm{y} \in \mathcal{H}_2\}$$

$\mathcal{H}_{1,2}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1), (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2) >=< \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 >_{\mathcal{H}_1} + < \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 >_{\mathcal{H}_2}$$

Soit $J_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}_{1,2}, \ i = 1, 2$ définie par

$$J_1\mathrm{x} = (\mathrm{x}, 0) \qquad \text{pour tout x } \in \mathcal{H}_1$$

$$J_2\mathrm{y} = (0, \mathrm{y}) \qquad \text{pour tout y } \in \mathcal{H}_2$$

et

$$\mathcal{H}_{1,0} = J_1\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1 \times \{0\}$$

$$\mathcal{H}_{0,2} = J_2\mathcal{H}_2 = \{0\} \times \mathcal{H}_2$$

Proposition 2.0.1. *Soient $T, \ S \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Alors si $R(T) + N(S)$ est fermé et si $R(T) \cap N(S) = \{0\}$, $R(T)$ est fermé.*

Proposition 2.0.2. [1] *Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur densément définit. Alors :*
(1) $N(T) = R(T^*)^\perp$
(2) $N(T^*) = R(T)^\perp$
(3) $N(T^*T) = N(T)$
(4) $\overline{R(T^*T)} = \overline{R(T^*)}$.

Proposition 2.0.3. *Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur densément définit. Alors :*
(1) $(I + T^*T)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), \ (I + TT^*)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$.
(2) $(I + TT^*)^{-1}T \subseteq T(I + T^*T)^{-1}$ et $\|T(I + T^*T)^{-1}\| \leq 1$
(3) $(I + T^*T)^{-1}T^* \subseteq T^*(I + TT^*)^{-1}$ et $\|T^*(I + TT^*)^{-1}\| \leq 1$.

2.1 Espace de Hilbert

Définition 2.1.1. *Soit H un espace vectoriel réel, resp(complexe). On appelle* ***produit scalaire*** *sur H tout forme bilinéaire symétrique, resp(hermitien), qui est définie positive.*
On notera $< x.y >$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$
cela signifie que l'application :

$$< .,. >: H \times H \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longrightarrow < x, y >$$

vérifie :

1. *pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \longrightarrow < x, y > \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire*
2. *pour tous $x, y \in H$. On a*
   $< y, x > = < x, y >$ si l'espace est réel
   $< y, x > = < \overline{x, y} >$ si l'espace est complexe
3. *pour tout $x \in H$, on a $< x, x > \geqslant 0$ si et seulement si $x = 0$*

Remarque : Notons que dans le cas complexe, on a donc, pour $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$< x, \lambda y > = \overline{\lambda} < x, y >$$

Définition 2.1.2. *Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un* ***espace préhilbartien***

Exemple 2.1.1. *si (S, m) est un espace mesuré, on muni $H = L^2(m)$ d'un produit scalaire (que l'on qualifiera de naturel) en posant, pour $f, g \in L^2(m)$:*
$< f, g > = \int_s fgdm$ dans le cas réel
$< f, g > = \int_s f\overline{g}dm$ dans le cas complexe
En particulier, Sur l_2, On a le produit scalaire naturel défini par :
$< x, y > = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$: dans le cas réel
$< x, y > = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$:dans le cas complexe
pour $x = (x_n)_n \geqslant 1, y = (y_n)_n \geqslant 1 \in l_2$

Proposition 2.1.1. *(Inégalité de Cauchy-Shwarz). Soit H un espace vectoriel(réel ou complexe) muni du produit scalaire$< .,. >$. Alors pour tous $x, y \in H$*

$$|< x, y >| \leq \| x \| \| y \|$$

Preuve 2.1.1. *Si$\| x \|= 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\| x \| > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons*

$$0 \leq \| tx + y \|^2 = \| x \|^2 t^2 + 2Re < x, y > t + \| y \|^2$$

Le discriminant de ce polynôme quadratiue doit être ≤ 0 :

$$0 \geq (2Re < x, y >)^2 - 4 \| x \|^2 \| y \|^2$$

d'ou

$$\| x \| \| y \| \geq | Re < x, y >|$$

.

De plus il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $< x, y >= \alpha \, |< x, y >|$, d'où
$\overline{\alpha} < x, y >= |< x, y >|$
et $\| x \| \| y \| = \| x \| \| \alpha y \| \geq Re < x, \alpha y > Re(\overline{\alpha} < x, y >) = Re \, |< x, y >|$.

Définition 2.1.3. *un espace de **Hilbert** est un espace vectoriel H(réel ou complexe) muni d'un produit scalaire et qui est **complet** pour la norme $< x, x >^{\frac{1}{2}}$*

Exemple 2.1.2. *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire euclidien usuel, est un espace de Hilbert*

Exemple 2.1.3. *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant :*

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

est un espace de Hilbert

Théorème 2.1.1. *(Théorème des projections) Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$|f-u| = \min_{v\in K} |f-v| \tag{2.1}$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K$$

$$(f-u, v-u) \leqslant 0 \tag{2.2}$$

on note $u = P_K f$ = projection de f sur K

Preuve 2.1.2. ***a)Existence*** *Nous indiquons deux démonstrations*

1. *La fonction $\Phi(v) = (f-v)$ est convexe, continue et $\lim\limits_{|v|\to\infty} \Phi(v) = +\infty$, Donc Φ atteint son minimun sur K puisque H est réflexif.*
2. *La deuxième démonstration ne fait pas appel à la théorème des espaces réflexifs. Soit (v_n) une suite minimisante pour 2.1.1 i.e $v_n \in K$ et*

$$d_n = |f - v_n| \to d = \inf_{v\in K} |f-v|$$

Montrons que (v_n) est de cauchy. Application l'identité du parallélogramme avec $a = f - v_n, b = f - v_m$ il vient

$$\mid f - \frac{v_n+v_m}{2} \mid^2 + \mid \frac{v_n - v_m}{2} \mid^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 d_m^2)$$

or $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ et donc $\mid f - \frac{v_n+v_m}{2} \mid \geqslant d$
par conséquent :

$$\mid \frac{v_n - v_m}{2} \mid^2 \leqslant \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 et \lim_{m,n\to\infty} |v_n - v_m| = 0$$

donc :$v_n \mapsto u \in K$ et l'on a $d = |f-u|$
b)Équivalence de 2.1.1 et 2.3
Soit $u \in K$ vérifiant (2) et soit $w \in K$ on a :

$v = (1-t)u + tw \in K$ *pour* $t \in]0,1[$ *et donc*

$$|f-u| \leqslant |f - [(1-t)u + tw]| = |(f-u) - t(w-u)|$$

par suit :

$$|f-u|^2 \leqslant |f-u|^2 - 2t(f-u, w-u) + t^2|w-u|^2$$

i.e $2(f-u, w-u) \leqslant t|w-u|^2$. *quand* $t \to 0$
on obtient(3)
Inversement, soit u vérifiant 2.3. Alors on a :

$$|u-f|^2 - |v-f|^2 = 2(f-u, v-u) - |u-v|^2 \leqslant 0 \forall v \in K$$

d'oû(2)
C)Unicité *:*
Soient $u_1 et u_2$ *vérifiant 2.3 on a :*

$$(f-u_1, v-u_1) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{2.3}$$

$$(f-u_2, v-u_2 \leqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{2.4}$$

Reportant $v = u_2$ *dans 2.3* et $v = u_1$ *dans2.4 , on obtient après addition,* $|u_1 - u_2|^2 \leqslant 0$

2.2 Opérateurs linéaires

2.2.1 Opérateur linéaire dans les espace de Hilbert

Définition 2.2.1. *Une application* T *définie d'un espace de Hilbert* H_1*, dans* H_2 *est dit "opérateur linéaire" si* T *satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in H_1, T(x+y) = T(x) + T(y)$.
2. $\forall x \in H_1, \forall \alpha \in H_2, T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

L'opérateur identité I *est défini par*$Ix = x$ *pour tout* $x \in H$.
L'opérateur nul 0 *est défini par* $0x = 0$,*pour tout* $x \in H$.
Le noyau de T *notée* $N(T)$ *et image de* T, *notée* $R(T)$ *sont définis par :*

soit $T : H_1 \to H_2, y \in H_2; \exists x \in H_1 : y = Tx.$
$N(t) = \{x \in H_1, Tx = 0\}$ *et* $R(T) = \{Tx, x \in H_1\}.$

Définition 2.2.2. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, on dit que T est borné si et seulement si :*

$$\exists C > 0, \| Tx \| \leqslant C \| x \|, \forall x \in H$$

Théorème 2.2.1. *(Représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert, et f est une forme linéaire continue sur H.*
Il existe un vecteur $a \in H$ et un seul, tel que :

$$\forall x \in H, f(x) = < a, x >$$

2.2.2 Adjoint d'un opérateur

Proposition 2.2.1. *Soit H un espace de Hilbert.Pour tout $T \in L(H)$ il existe un autre opérateur, noté T^*, et appelé* ***L'adjoint*** *de T, tel que :*

$$< Tx, y > = < x, T^*y > \qquad \forall x, y \in H$$

De plus $\| T^* \| = \| T \|$

Preuve 2.2.1. *Soit $y \in H$, L'application :*

$$\begin{aligned} \Phi \circ T : H &\longrightarrow H \\ x &\longrightarrow < Tx, y > \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur H, il existe donc, par le théorème de Fréchet-Riez, un unique élément de H que l'on notera T^*y, tel que :

$$< x, T^*y > = < Tx, y > \qquad \forall x \in H$$

A cause l'unicité ,l'application

$$T^* : y \in H \longrightarrow T^*y \in H$$

est clairement linéaire :si $y_1, y_2 \in H eta_1, a_2 \in \mathbb{K}$
On a pour tout $x \in H$ *:*
$< x, T * (a_1 y_1 + a_2 y_2) >=< Tx, a_1 y_1 + a_2 y_2 >$
$= \overline{a_1} < Tx, y_1 > + \overline{a_2} < Tx, y_2 >$
$= \overline{a_1} < x, T^* y_1 > + \overline{a_2} < x, T^* y_2 >$
$=< x, a_1 T^* y_1 + a_2 T^* y_2 >$ *Donc* $T^*(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 T^* y_1 + a_2 T^* y_2$
D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarze donne :

$$| (\Phi \circ T)(x) | = |< Tx, y >| \leqslant \| Tx \| \| y \| \leqslant \| T \| \| x \| \| y \|$$

Donc $\| T^* y \| = \| \Phi \circ T \| \leqslant \| T \| \| y \|$*.Cela prouve que l'application linéaire* T^* *est continue et que* $\| T^* \| \geqslant \| T \|$
Pour voir que $\| T \| \leqslant \| T^* \|$*, remarquons que* T^* *a lui-même au adjoint* T^{**}*, et que l'on a* $T^{**} = T$

$$< y, T^{**} x >=< T^* y, x >=< y, Tx >$$

Pour tous $x, y \in H$*, cela implique que* $T^{**} x = Tx$ *pour tout* $x \in H$*, Alors* $\| T \| = \| T^{**} \| \leqslant \| T^* \|$

Exemple 2.2.1. *Soit* S_d *l'opérateur linéaire (translation ou Shift à droite) défini sur* $\ell_2(\mathbb{R})$ *tel que :*

$$\begin{array}{rcl} S_d : \ell_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{R}) \\ x = (x_1, x_2, ...) & \longrightarrow & S_d = (0, x_1, x_2, ...) \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} < S_d x, y > &= < (0, x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) > \\ &= 0 \times y_1 + x_1 \times y_2 + x_2 \times y_3 ... \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_{i+1} \\ &= < (x_1, x_2, ...), (y_2, y_3, ...) > \\ &= < x, A^* y > \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} S_d^*\ell_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{R}) \\ y & = & (y_2, y_3, ...) \end{array}$$

2.2.3 Opérateurs fermés

Définition 2.2.3. *Soient X, Y deux espace vectoriels normés, T un opérateur linéaire de $D(T) \subset X$ dans Y : $D(T) \to Y$ est fermé si et seulement si :*

$$\begin{cases} x_n \in \mathcal{D}(T) \\ x_n \to x_0 \\ Tx_n \to y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathcal{D}(T) \\ et \\ Tx_0 = y_0 \end{cases}$$

Remarque 2.2.1. *T est fermé si et seulement si $G(T)$ est fermé (t.q $G(T) = \{(x, y)/x \in X, y \in Y \text{ et } y = Tx\}$).*

Proposition 2.2.2. *tout opérateur linéaire borné $T : X \to Y$ est fermé*

Preuve 2.2.2. *Supposons que $(x_n) \in D(T)$ telle que $x_n \to x$ dans X avec $Tx \to y$ dans Y, comme T est borné , donc $D(T) = X$, Alors d'après la continuité de T il est claire que $x \in D(T)$ et $Tx = y$*

2.3 Opérateurs Projections Orthogonales

Les opérateurs projection dans les espace de Hilbert et de banach sont largement utilisés dans différents domaines des mathématiques comme l'analyse fonctionnelle et numérique, théorie de l'optimisation et de contrôle optimal, la programmation non linéaire et stochastique et la théorie des jeux. On utilise l'opérateur de projection dans le chapitre 3 pour définir l'inverse généralisé et l'inverse de **Moore-Penros**

Opérateur de projection

Une projection sur un sous-espace quelconque F de $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire borné
P de $\mathcal{H}$ dans F tel que $P^2 = P$. Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ et G un

supplémentaire de F dans $\mathcal{H}$.
N'importe quel vecteur x de $\mathcal{H}$ peut s'écrire d'une façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G $\mathrm{x} = \mathrm{x}' + \mathrm{x}''$, $(\mathrm{x}', \mathrm{x}'') \in F \times G$.
La projection sur F parallèlement à G est alors l'application P qui associe à tout x de $\mathcal{H}$
le vecteur x' de F tel que $R(P) = F$ et $N(P) = G$.
La projection sur G parallèlement à F est l'application $Q = Id_{\mathcal{H}} - P$, appelé aussi projecteur associé à P.
L'image de Q n'est autre que le noyau de P, l'image de P est le noyau de Q.

Dans ce qui suit, nous supposerons que $\mathcal{H}$ est décomposé en la somme directe :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n.$$

Proposition 2.3.1. *La famille (P_i) des projections associées à la décomposition précédente vérifie les assertions suivantes :*
1) $\sum_{i=1}^{n} P_i = Id_{\mathcal{H}}$;
2) $P_i^2 = P_i$ pour tout i;
3) $P_i \circ P_j = 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

Définition 2.3.1. *Une projection orthogonale sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une application linéaire $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui satisfait :*
- $P^2 = P$ *;*
- $< P\mathrm{x}, \mathrm{y} > = < \mathrm{x}, P\mathrm{y} >$ *pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ (c.à.d $P = P^*$).*

Une projection orthogonale est nécessairement bornée.

Exemple 2.3.1. *L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est la somme directe orthogonale de l'espace $\mathcal{M}$ des fonctions paires et $\mathcal{N}$ l'espace des fonctions impaires. Les projections orthogonales P et Q de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, respectivement, sont donnés par :*

$$Pf(\mathrm{x}) = \frac{f(\mathrm{x}) + f(-\mathrm{x})}{2} \; ; \qquad Qf(\mathrm{x}) = \frac{f(\mathrm{x}) - f(-\mathrm{x})}{2}$$

On note que $I - P = Q$.

Définition 2.3.2. *Soit G un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et soit*

$$\mathcal{H} = G \overset{\perp}{\oplus} F$$

Alors tout vecteur $h \in \mathcal{H}$ est représentable uniquement sous la forme

$$h = g + f$$

où $g \in G$ et $f \in F$ et $< g, f >= 0$. Le vecteur g est appelé la projection orthogonale de h sur G. L'opérateur qui à tout $h \in \mathcal{H}$ associe $g \in G$ est appelé l'opérateur de projection orthogonale sur G. Il est noté par P_G ou parfois par P :

$$g = Ph = P_G h.$$

L'opérateur de projection orthogonale est évidemment linéaire, il est borné et sa norme égale à un. En effet, d'après l'équation

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2$$

on a

$$\|g\| \leq \|h\| \tag{2.5}$$

et alors

$$\|P\| \leq 1$$

Mais si $h \in G$, alors $g = h$, donc il y a une égalité dans (2.5).
Par conséquent $\|P\| = 1$.

Théorème 2.3.1. *Si P est un opérateur définie sur $\mathcal{H}$ tel que, pour $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ arbitraire*

$$1) < P^2 h_1, h_2 >=< Ph_1, h_2 >$$

$$2) < Ph_1, h_2 >=< h_1, Ph_2 >$$

alors il existe un sous-espace fermé $G \subset \mathcal{H}$ tel que P est l'opérateur projection orthogonale sur G.

Preuve 2.3.1. *L'opérateur P est borné.*

$$\|Ph\|^2 =< Ph, Ph >=< P^2 h, h >=< Ph, h >$$

et

$$\|Ph\|^2 \leq \|Ph\| \|h\|$$

alors que

$$\|Ph\| \leq \|h\|$$

Donc, l'opérateur P est borné et $\|P\| \leq 1$. Notons G l'ensemble des vecteurs $g \in \mathcal{H}$ tels que :

$$Pg = g.$$

Clairement, G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. On devra prouver que G est fermé dans $\mathcal{H}$. Soit $g_n \in G$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ et $g_n \to g$ dans $\mathcal{H}$. Alors

$$g_n = Pg_n$$

et

$$Pg - g_n = Pg - Pg_n = P(g - g_n).$$

Puisque $\|Pg - g_n\| \leq \|g - g_n\|$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} g_n = Pg = g$ donc, $g \in G$, ce qui implique que G est fermé. Vérifions que $P = P_G$, où P_G est l'opérateur de projection orthogonale sur G. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, le vecteur Ph appartient à G puisque $P(Ph) = Ph$, le sous-espace G contient aussi $P_G h$.
Par conséquent, il est suffisant de prouver que

$$< Ph - P_G h, g' >= 0, \ \forall g' \in \ G$$

ou alors

$$< Ph, g' >=< P_G h, g' >, \ \forall g' \in \ G$$

En utilisant les propriétés 1) et 2) on a :

$$< Ph, g' >=< h, Pg' >=< h, g' >$$

$$< P_G h, g' >=< h, P_G g' >=< h, g' >$$

En particulier, $(I - P)$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{H} \ominus G$ où I est l'identité de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

Théorème 2.3.2. (*Théorème de la Projection*) *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F un sous espace fermé de $\mathcal{H}$, alors.*
i) pour tout $\mathrm{x} \in \mathcal{H}$ existe y unique dans F.
ii) Le vecteur y est l'unique qui vérifie $(\mathrm{x} - \mathrm{y}) \in F^{\perp}$ c'est-à-dire
$< \mathrm{x} - \mathrm{y}, \mathrm{z} >= 0, \ \forall \mathrm{z} \in F$. *$\mathrm{y}$ est la projection orthogonale de x sur F.*

2.3.1 Opérations concernant les projections orthogonales

Dans cette section on doit prouver des propositions concernant la multiplication, l'addition et la soustraction des opérateurs de projections orthogonales.

Théorème 2.3.3. *Soient G_1 et G_2 deux sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$,*
le produit de deux opérateurs de projections orthogonales P_{G_1} et P_{G_2} est aussi un opérateur projection orthogonale si et seulement si P_{G_1} et P_{G_2} commutent, c.à.d, si

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$$

dans ce cas

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_G$$

où

$$G = G_1 \cap G_2$$

Preuve 2.3.2. *Si $P_{G_1}P_{G_2}$ est une projection orthogonale, Alors*

$$P_{G_1}P_{G_2} = (P_{G_1}P_{G_2})^* = P^*_{G_2}P^*_{G_1} = P_{G_2}P_{G_1}.$$

Inversement, fixons $h \in \mathcal{H}$ arbitrairement et soit

$$g = P_{G_1}P_{G_2}h = P_{G_2}P_{G_1}h$$

par la première représentation $g \in G_1$ et par la deuxième, $g \in G_2$, donc $g \in G_1 \cap G_2$. Si $h \in G_1 \cap G_2$, alors $P_{G_1}P_{G_2}h = h$. Notons

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1} = P$$

alors

$$\begin{aligned} P^2 &= (P_{G_1}P_{G_2})^2 \\ &= P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2} \\ &= P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2} \\ &= P_{G_1}P_{G_2} \\ &= P \end{aligned}$$

et pour tout $h_1,\ h_2 \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} < Ph_1, h_2 > &= < P_{G_1} P_{G_2} h_1, h_2 > \\ &= < P_{G_2} h_1, P_{G_1} h_2 > \\ &= < h_1, P_{G_2} P_{G_1} h_2 > \\ &= < h_1, P_{G_1} P_{G_2} h_2 > . \\ &= < h_1, Ph_2 > \end{aligned}$$

Ces équations montrent que l'opérateur $P = P_{G_1} P_{G_2}$ satisfait les conditions du théorème 2.3.1, donc, il est un opérateur projection orthogonale sur $G = G_1 \cap G_2$.

Corollaire 2.3.1. *Deux sous-espaces fermés G_1 et G_2 de $\mathcal{H}$ sont orthogonaux si et seulement si*

$$P_{G_1} P_{G_2} = 0$$

Théorème 2.3.4. *La somme finie d'opérateurs de projections orthogonales*

$$P_{G_1} + P_{G_2} + ... + P_{G_n} = Q \quad (n < \infty)$$

est un opérateur projection orthogonale si et seulement si

$$P_{G_i} P_{G_k} = 0 \quad (i \neq k)$$

c.à.d, si et seulement si les espaces $G_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$ sont deux à deux orthogonaux dans ce cas

$$Q = P_G$$

où

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$$

Preuve 2.3.3. *Si les espaces G_j sont deux à deux orthogonaux, alors $Q^2 = Q$, et, donc, la suffisance de la condition est évidente. Il reste seulement de prouver la nécessité de la condition. Soit Q est un opérateur projection orthogonale, alors*

$$\|f\|^2 \geq < Qf, f >= \sum_{j=1}^{n} < P_{G_j} f, f > \geq < P_{G_i} f, f > + < P_{G_k} f, f > .$$

Pour tout paire d'indices distingués i et k. D'après cette relation il suit que

$$\|P_{G_i} f\|^2 + \|P_{G_k} f\|^2 \leq \|f\|^2$$

Utilisons cette inégalité avec

$$f = P_{G_k} h$$

alors

$$\|P_{G_i} P_{G_k} h\|^2 + \|P_{G_k} h\|^2 \leq \|P_{G_k} h\|^2$$

et

$$\|P_{G_i} P_{G_k} h\|^2 = 0$$

Pour $h \in \mathcal{H}$. *Donc,*

$$P_{G_i} P_{G_k} = 0$$

Alors les espaces G_i *et* G_k *sont deux à deux orthogonaux.*

Théorème 2.3.5. *La différence de deux opérateurs projections orthogonales,*

$$P_{G_1} - P_{G_2} \tag{2.6}$$

est un opérateur projection orthogonale si et seulement si $G_2 \subset G_1$. *Dans ce cas* $P_{G_1} - P_{G_2}$ *est l'opérateur de projection orthogonale sur* $G_1 \ominus G_2$.

Preuve 2.3.4. *Posons*

$$Q = I - (P_{G_1} - P_{G_2})$$

Q *est un opérateur projection orthogonale si* $P_{G_1} - P_{G_2}$ *est une projection orthogonale.*

Donc

$$Q = (I - P_{G_1}) + P_{G_2}$$

Il suit du théorème 2.3.3 que

$$(I - P_{G_1}) P_{G_2} = 0$$

ou bien

$$P_{G_2} = P_{G_1} P_{G_2} \tag{2.7}$$

si $g \in G_2$ *alors*

$$g = P_{G_2} g = P_{G_1} P_{G_2} g = P_{G_1} g$$

Donc $g \in G_1$. *Puisque tout élément* $g \in G_2$ *appartient à* G_1, *on a* $G_2 \subset G_1$. *La condition (2.7) est nécessaire et suffisante pour que la différence (2.6) est un opérateur projection orthogonale. Il reste seulement de caractériser l'espace* G *sur lequel l'opérateur (2.6) projecté. L'opérateur* Q *projette orthogonalement sur*

$$[\mathcal{H} \ominus G_1] \oplus G_2$$

Donc, l'opérateur (2.6) projette sur

$$\mathcal{H} \ominus \{[\mathcal{H} \ominus G_1] \oplus G_2\} \tag{2.8}$$

c.à.d, sur le sous-espace des vecteurs orthogonaux à G_2 et $\mathcal{H} \ominus G_1$.
Puisque ce sous-espace est forme de tous les vecteurs de G_1 lesquels sont orthogonaux à G_2, il est le sous-espace

$$G_1 \ominus G_2 \tag{2.9}$$

2.3.2 Suite Monotone des Opérateurs Projections orthogonales

On prouve que la relation $G_2 \subset G_1$ est équivalente à l'inégalité

$$\|P_{G_2} f\| \leq \|P_{G_1} f\| \tag{2.10}$$

pour tout $f \in \mathcal{H}$. L'inégalité (2.10) est évidemment équivalente à

$$< P_{G_2} f, f > \leq < P_{G_1} f, f >$$

ou

$$< (P_{G_2} - P_{G_1}) f, f > \leq 0$$

pour tout $f \in \mathcal{H}$. Les deux dernières inégalités sont généralement exprimées par

$$P_{G_2} \leq P_{G_1}$$

Ainsi, nous souhaitons prouver que la relation $G_2 \subset G_1$ est équivalente à la relation $P_{G_2} \leq P_{G_1}$, cela nous autorisera à introduire les suites monotones d'opérateurs projections orthogonale.

Soit $G_2 \subset G_1$. Alors

$$P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1}$$

Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{H}$,

$$P_{G_2} f = P_{G_2} P_{G_1} f$$

et

$$\|P_{G_2} f\| \leq \|P_{G_1} f\| \tag{2.11}$$

Inversement, supposant (2.11)est vrai pour tout $f \in \mathcal{H}$. Considérons

$$f = (I - P_{G_1})h$$

où h est un élément arbitraire de $\mathcal{H}$. D'après (2.11) et

$$P_{G_1}(I - P_{G_1})h = 0$$

on obtient

$$P_{G_2}(I - P_{G_1})h = 0$$

Puisque cette équation est valable pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a

$$P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1}$$

Alors que $G_2 \subset G_1$.

Théorème 2.3.6. *Soient* $(G_k), (k = 1, 2, 3, \cdots)$ *des sous-espaces fermés de* $\mathcal{H}$ *Si* (P_{G_k})
$(k = 1, 2, 3, ...)$ *est une suite infinie d'opérateurs projections orthogonales et si* $P_{G_k} \leq P_{G_{k+1}}$
$(k = 1, 2, 3, \cdots)$, *alors, quand* $k \to \infty$, $(P_{G_k})_k$ *converges fortement vers* P *un opérateur de projection orthogonale dans* $\mathcal{H}$.

Preuve 2.3.5. *Pour* $m < n$ *la différence* $P_{G_n} - P_{G_m}$ *est un opérateur projection orthogonale. Par conséquent, pour tout* $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|P_{G_n} f - P_{G_m} f\|^2 &= \|(P_{G_n} - P_{G_m}) f\|^2 \\ &= < (P_{G_n} - P_{G_m}) f, f > \\ &= \|P_{G_n} f\|^2 - \|P_{G_m} f\|^2 \qquad (a1) \end{aligned}$$

Puisque, pour f *fixe,* $\|P_{G_k} f\|^2$ *croitre avec* k *mais il est borné par* $\|f\|^2$, *il a une limite finie. Donc, le membre droite de* $(a1)$ *tend vers à zéro et la suite* $(P_{G_n} f)_{n=1}^{\infty}$ *est de Cauchy dans* $\mathcal{H}$ *au sens fort. Puisque* $\mathcal{H}$ *est complet, il existe une limite forte*

$$f^* = \lim_{n \to \infty} P_{G_n} f$$

On définie l'opérateur P *par*

$$f^* = P f$$

$f \in \mathcal{H}$. L'opérateur P est évidemment linéaire. D'autre part,

$$< P_{G_k} f, P_{G_k} g >=< P_{G_k} f, g >=< f, P_{G_k} g >$$

un passage à la limite donne

$$< Pf, Pg >=< Pf, g >=< f, Pg >$$

Par conséquent,

$$P = P^* = P^2$$

alors que P est un opérateur projection orthogonale.

2.4 Projection Orthogonale extraite d'une Projection

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection ($P^2 = P$). Nous cherchons la projection orthogonale Q qui a la même image que P, c.à.d $Q^2 = Q$, $Q^* = Q$, $PQ = Q$ et $QP = P$.

Première méthode :

On prend : $D = PP^* + (I - P^*)(I - P) = I + (P^* - P)(P - P^*) \geq I$ d'où D est inversible.
Ensuite :

$$(I - D)PP^* = (P - P^*)(PP^* - P^*PP^*) = (I - PP^*)PP^*$$

Et

$$PP^*(I - D) = (PP^*P - PP^*)(P - P^*) = (I - PP^*)PP^*$$

Alors :

$$DPP^* = PP^*D = (PP^*)^2$$

Si $Q = PP^*D^{-1}$ alors $Q^2 = PP^*D^{-1}PP^*D^{-1} = (PP^*)^2D^{-2} = PP^*D^{-1} = Q$
et $Q^* = Q$ alors Q est une projection orthogonale.
Finalement

$$PQ = PPP^*D^{-1} = PP^*D^{-1} = Q$$

et

$$\begin{aligned}(QP-P)(P^*Q-P^*) &= QPP^*Q-QPP^*-PP^*Q+PP^*\\ &= QPP^*-QPP^*-PP^*+PP^*\\ &= 0\end{aligned}$$

tel que $QP = P$

Nous devons maintenant calculer $[I-(P-P^*)^2]^{-1}$. Nous allons utiliser une série de ***Neumann***, de sorte que :

$Q = \displaystyle\sum_{k\geq 0}(P-P^*)^{2k}PP^*$, à condition que la série converge.

Mais $(P - P^*)^{2j}PP^* = (I - D)^jPP^* = (I - PP^*)^jPP^*$, donc $Q = \sum_{k\geq 0}(I-PP^*)^kPP^*$, en fait, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a aussi.

$Q = \displaystyle\sum_{k\geq 0}(I-aPP^*)^k aPP^*$ à condition que la série converge.

Soit $\mathrm{c}(P) = \inf_{u\perp N(P)} \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$ appelée la conorme (appelé aussi le module minimum réduit) de P.

il est facile de voire que la conorme d'une projection est toujours ≥ 1 et que :

$$-[a\|P\|^2-1]^k aPP^* \leq (I-aPP^*)^k aPP^* \leq [1-ac^2(P)]^k aPP^*$$

l'estimation la plus forte de la norme de la série est donnée par l'équation $a\|P\|^2 - 1 = 1 - ac^2(P)$ c.à.d. quand $a = \frac{2}{\|P\|^2+c^2(P)}$. Dans ce cas, et plus généralement si $0 < a < \frac{2}{\|P\|^2}$, la série donc convergent.

Proposition 2.4.1. *Soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection. Soit la suite défini par :*

$$Q_0 = P\ ;\quad Q_{n+1} = (I-aPP^*)Q_n + aPP^* \tag{2.12}$$

où $a = \frac{2}{\|P\|^2+\mathrm{c}^2(P)}$.

Alors la suite (Q_n) converge uniformément vers Q dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Plus précisément :

$$\|Q-Q_n\| \leq \frac{[\|P\|^2-\mathrm{c}^2(P)]^{n+1}}{[\|P\|^2+\mathrm{c}^2(P)]^{n+1}} \leq \left(\frac{\|P\|^2-1}{\|P\|^2+1}\right)^{n+1} \tag{2.13}$$

En outre $Q = Q^*$, $PQ = Q$ et $QP = P$.

Preuve. Il est facile de montrer que

$$\|(I - aPP^*)^k PR\| \leq \left[\frac{\|P\|^2 - c^2(P)}{\|P\|^2 + c^2(P)}\right]^k \|PR\| \text{ pour tout } R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Alors, du fait que $Q_n = \sum_{k=0}^{n}(I - aPP^*)^k aPP^*$ et $Q - Q_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(I - aPP^*)^k aPP^*$

Nous voyons que $Q = \lim_{n\to\infty} Q_n$ existe et que (2.13) est satisfaite. Un calcul simple montre que $Q^2 = Q$ et puisque Q_n est symétrique alors Q est symétrique, aussi $PQ_n = Q_n$ alors que $PQ = Q$.

Finalement, en prenant les limites dans (2.12), nous voyons que $PP^*Q = PP^*$ et donc que $\|QP - P\|^2 = \|(I - Q)PP^*(I - Q)\| = 0$ alors $QP = P$.

Remarque 2.4.1. *En général Q_n n'est pas une projection et si l'on remplace dans (2.12) P par un opérateur borné T avec une image fermée, alors Q est la projection orthogonale sur l'image de T.*

Deuxième méthode :

Nous devons d'abord rappeler quelques résultats sur les projections.

Proposition 2.4.2. *Soient $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ deux projections. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (I - P - Q)^{2n} = [(I - P)(I - Q)]^n + (QP)^n \tag{2.14}$$

Preuve. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$ il est facile de vérifier que

$$(I - P - Q)^2 = (I - P)(I - Q) + QP \tag{2.15}$$

Supposons que (2.14) est vrai pour n. Alors :

$$\begin{aligned}
(I - P - Q)^{2(n+1)} &= (I - P - Q)^{2n}(I - P - Q)^2 \\
&= [[(I - P)(I - Q)]^n + (QP)^n][(I - P)(I - Q) + QP] \\
&= [(I - P)(I - Q)]^{n+1} + (QP)^{n+1}
\end{aligned}$$

La proposition est démontrée.

□

Proposition 2.4.3. *Soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection. Alors :*

$$\|I - P - P^*\| = \|I + P - P^*\| = \|I - P + P^*\|$$

Preuve. Il est facile de vérifier que :

$$(I - P - P^*)^2 = (I - P + P^*)(I - P^* + P) = (I - P + P^*)(I - P + P^*)^*$$

Donc, puisque $I - P - P^*$ est symétrique, on a :

$$\begin{aligned}
\|I - P - P^*\|^2 &= \|(I - P - P^*)^2\| \\
&= \|(I - P + P^*)(I - P + P^*)^*\| \\
&= \|I - P + P^*\|^2
\end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|I - P - P^*\| &= \|I - P + P^*\| \\
&= \|I - P^* + P\|
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4.4. *Soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection. Alors :*

$$\max\{\|P\|, \|I - P\|\} = \|I - P - P^*\|$$

Preuve. Montrons d'abord que :

$$\max\{\|P\|, \|I - P\|\} \leq \|I - P - P^*\| \tag{2.16}$$

En effet : $2(I - P) = I - P - P^* + I - P + P^*$ alors
$2\|I - P\| \leq \|I - P - P^*\| + \|I - P + P^*\|$.
En utilisant la Proposition 2.4.3 on trouve :

$$\|I - P\| \leq \|I - P - P^*\| \tag{2.17}$$

Nous avons aussi :$2P = I + P - P^* - (I - P - P^*)$ alors
$2\|P\| \leq \|I - P - P^*\| + \|I - P + P^*\|$, on obtient :

$$\|P\| \leq \|I - P - P^*\| \tag{2.18}$$

Alors d'après (2.17) et de (2.18) nous obtenons (2.16).
Inversement, en utilisant (2.14) avec $Q = P^*$, on obtient :

$$\forall \in \mathbb{N}^*, \ (I - P - P^*)^{2n} = [(I - P)(I - P^*)]^n + (P^*P)^n$$

Puisque $(I - P - P^*)$, $(I - P)(I - P^*)$ et P^*P sont des opérateurs hermitiens, on obtient :

$$\begin{aligned} \|I - P - P^*\|^{2n} &= \|(I - P - P^*)^{2n}\| \\ &\leq \|[(I - P)(I - P^*)]^n\| + \|(P^*P)^n\| \\ &\leq \|(I - P)(I - P^*)\|^n + \|P^*P\|^n \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|I - P - P^*\|^{2n} \leq \|I - P\|^{2n} + \|P\|^{2n} \leq 2[\max\{\|(I - P)\|, \|P\|\}]^{2n}$$

alors que

$$\|I - P - P^*\| \leq \max\{\|P\|, \|I - P\|\} \tag{2.19}$$

Et la preuve de la proposition résulte de (2.14) et (2.19).

□

Proposition 2.4.5. *Soient $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ deux projections. Alors :*

$$\forall \ n \in \mathbb{N}^*, \ [(I - P)(I - Q)]^{n+1} = [(I - P)(I - Q)]^n + (I - P)(QP)^n(I - Q) \tag{2.20}$$

Preuve. Par récurrence sur n.
Si $n = 1$, puisque $(I - P - Q)^2 = (I - P)(I - Q) + QP$ on constate que :

$$\begin{aligned} [(I - P)(I - Q)]^2 &= [I - P - Q + PQ]^2 \\ &= (I - P - Q)^2 + (I - P - Q)PQ + PQ(I - P - Q) + (PQ)^2 \\ &= (I - P)(I - Q) + QP - QPQ - PQP + (PQ)^2 \\ &= (I - P)(I - Q) + (I - P)QP(I - Q) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que (2.20) a été établi pour $n \geq 1$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence on constate que :

$$\begin{aligned} [(I - P)(I - Q)]^{n+2} &= [(I - P)(I - Q)]^{n+1}(I - P)(I - Q) \\ &= [[(I - P)(I - Q)]^n + (I - P)(QP)^n(I - Q)](I - P)(I - Q) \end{aligned}$$

alors que :

$$[(I-P)(I-Q)]^{n+2} = [(I-P)(I-Q)]^{n+1}+(I-P)(QP)^n(I-Q)(I-P)(I-Q) \quad (2.21)$$

Mais : $P(I-Q)(I-P)(I-Q) = -PQ(I-P)(I-Q) = PQP(I-Q)$
D'où : $(I-P)(QP)^n(I-Q)(I-P)(I-Q) = (I-P)(QP)^{n+1}(I-Q)$.
Faisant usage de cette identité dans (2.21), nous obtenons :

$$[(I-P)(I-Q)]^{n+2} = [(I-P)(I-Q)]^{n+1} + (I-P)(QP)^{n+1}(I-Q)$$

Et la proposition est prouvée.

□

Proposition 2.4.6. *Soit* $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *une projection,* $P \neq 0$, $P \neq I$ *Alors :*

$$\|P\| = \|I-P\| = \|I-P-P^*\| = \|I+P-P^*\| = \|I-P+P^*\|$$

Preuve. En utilisant la Proposition 2.4.3 et la Proposition 2.4.4, il suffit de montrer que $\|P\| = \|I-P\|$
Supposons d'abord que $\|I-P\| > 1$. Prenant $Q = P^*$ dans (2.20) on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[(I-P)(I-P^*)]^{n+1} = [(I-P)(I-P^*)]^n + (I-P)(P^*P)^n(I-P^*)$
Alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|I-P\|^{2n+2} &\leq \|I-P\|^{2n} + \|I-P\|\|(PP^*)^n\|\|I-P^*\| \\ &\leq \|I-P\|^{2n} + \|I-P\|^2\|P\|^{2n}\end{aligned}$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|I-P\|^{2n} \leq \frac{\|P\|^{2n}\|I-P\|^2}{\|I-P\|^2-1}$.
D'où :$\|I-P\| > 1 \Rightarrow \|I-P\| \leq \|P\|$.
De la symétrie entre P et $I-P$ Nous obtenons :

$$\|P\| > 1 \Rightarrow \|P\| \leq \|I-P\|$$

Donc $\|P\| > 1 \Rightarrow \|I-P\| \geq \|P\| > 1 \Rightarrow \|P\| \geq \|I-P\| \Rightarrow \|P\| = \|I-P\|$
La seule autre possibilité est de $\|P\| = \|I-P\| = 1$ □

Proposition 2.4.7. *Soit* $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *une projection. Alors :*

$$\|P-P^*\|^2 = \|P\|^2 - 1 \quad (2.22)$$

Preuve. il est facile de constate que $(P-P^*)(P^*-P)=(I-P-P^*)^2-I$.
Puisque $\|P-P^*\|^2=\|(P-P^*)(P^*-P)\|$.
Donc, nous obtenons : $\|P-P^*\|^2=\|I-P-P^*\|^2-1$ et la proposition est démontrée.

□

Proposition 2.4.8. *Soient $P,\ Q\in\ \mathcal{B}(\mathcal{H})$ deux projections telles que $PQ=Q,\ QP=P$. Alors :*

$$\|Q-P\|\leq\|Q^*-Q\|+\|P-P^*\| \tag{2.23}$$

Preuve. $(Q^*-P^*)(Q-P)=(Q^*-Q)(Q-P)+(Q-P)(Q-P)+(P-P^*)(Q-P)$ et $(Q-P)(Q-P)=Q-Q-P+P=0$.
Donc :

$$\begin{aligned}\|Q-P\|^2 &= \|(Q^*-P^*)(Q-P)\|\\ &\leq \|(Q^*-Q)(Q-P)\|+\|(P-P^*)(Q-P)\|\\ &\leq \|P-Q\|\|Q^*-Q\|+\|P-Q\|\|P-P^*\|\end{aligned}$$

et la proposition est démontrée.

□

Corollaire 2.4.1. *Soient $P,\ Q\ \in\ \mathcal{B}(\mathcal{H})$ deux projections telles que $PQ=Q$ et $QP=Q$ et Q est orthogonale. Alors :*

$$\|P-Q\|=\|P-P^*\| \tag{2.24}$$

Preuve.$(I-P^*)(I-P)=(Q-P^*)(Q-P)+(I-Q)$
Donc :

$$\begin{aligned}\|I-P\|^2 &= \|(I-P^*)(I-P)\|\\ &\leq \|(Q-P^*)(Q-P)\|+\|I-Q\|\\ &\leq \|Q-P\|^2+1\end{aligned}$$

Et par conséquent $\|P\|^2=\|I-P\|^2\leq\|Q-P\|^2+1$.
(2.22) implique que $\|P^*-P\|^2\leq\|Q-P\|^2$.
Et résultat suit maintenant en utilisant (2.23).

□

Nous sommes maintenant en position d'écrire un algorithme.
Si $a \in \mathbb{R}^+$, posons :

$$S = P + aPP^*(I - P) = P[I - a(I - P^*)(I - P)] \tag{2.25}$$

Alors S est une projection et $SP = P,\ PS = S$.
En outre, si $\mathcal{R} = i(S^* - S)$ et $K = i(P^* - P)$, on a :

$$\mathcal{R} = K(I - a - aK^2) \tag{2.26}$$

Aussi $I - a\|P\|^2 = I - a(1 + \|K\|^2) \leq I - a - aK^2$.
Donc si $0 < a < \frac{2}{\|P\|^2}$ on constate que $\|\mathcal{R}\| = C(a)\|K\|$ avec $C(a) < 1$.
La recherche de la valeur a qui minimise $C(a)$ conduit à la condition :

$$\frac{2(1-a)}{3\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1-a}{3}} = \|K\|(1 - a(1 + \|K\|^2))$$

Qui a les deux solutions doubles $a = \frac{1}{3\|K\|^2+1}$ et $a = \frac{4}{3\|K\|^2+4}$.
Avec les valeurs correspondantes $C(a) = \frac{2\|K\|^2}{3\|K\|^2+1}$ et $C(a) = \frac{\|K\|^2}{3\|K\|^2+4}$.
Alors que le meilleur choix est $a = \frac{4}{3\|K\|^2+4} = \frac{4}{3\|P\|^2+1}$.

□

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

Proposition 2.4.9. *Soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection. Définir de façon récurente :*

$$Q_0 = P;\ Q_{n+1} = Q_n \frac{3\|Q_n\|^2 + 1 + 4Q_n^*(I - Q_n)}{3\|Q_n\|^2 + 1} \tag{2.27}$$

Alors :

$$\|Q_{n+1}\| = \|Q_n\|\frac{\|Q_n\|^2 + 3}{3\|Q_n\|^2 + 1}\ ;\ \|Q_n\| = \frac{1 + \left(\frac{\|P\|-1}{\|P\|+1}\right)^{3^n}}{1 - \left(\frac{\|P\|-1}{\|P\|+1}\right)^{3^n}} \tag{2.28}$$

et la suite des projections (Q_n) converge uniformément vers Q dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec $Q = Q^*$, $PQ = Q$ et $QP = P$. Plus précisément :

$$\|Q - Q_n\| = \frac{2\left(\sqrt{\frac{\|P\|-1}{\|P\|-1}}\right)^{3^n}}{1 - \left(\frac{\|P\|-1}{\|P\|+1}\right)^{3^n}} \tag{2.29}$$

Preuve. On prend : $\mathcal{R}_n = i(Q_n^* - Q_n)$. Alors : $\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n \frac{3\|\mathcal{R}_n\|^2 - 4\mathcal{R}_n^2}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4}$ alors que

$$\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} - \mathcal{R}_{n+1} = \frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} - \mathcal{R}_n \frac{3\|\mathcal{R}_n\|^2 - 4\mathcal{R}_n^2}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} = \frac{(2\mathcal{R}_n - \|\mathcal{R}_n\|)^2(\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n)}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} \geq 0$$

et

$$\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} + \mathcal{R}_{n+1} = \frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} + \mathcal{R}_n \frac{3\|\mathcal{R}_n\|^2 - 4\mathcal{R}_n^2}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} = \frac{(2\mathcal{R}_n + \|\mathcal{R}_n\|)^2(\|\mathcal{R}_n\| - \mathcal{R}_n)}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} \geq 0$$

on constate que $0 \in \sigma(\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n) \cup \sigma(\|\mathcal{R}_n\| - \mathcal{R}_n)$, où $\sigma(\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n)$ est le spectre ponctuel de $(\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n)$, puisque $\|\mathcal{R}_n\| = \sup_{\rho \in \sigma(\mathcal{R}_n)} \mid \rho \mid$ alors $0 \in \sigma(\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} - \mathcal{R}_{n+1}) \cup \sigma(\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} + \mathcal{R}_{n+1})$ et par conséquent

$$\|\mathcal{R}_{n+1}\| = \frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} \tag{2.30}$$

Puisque $\|Q_n\|^2 = 1 + \|\mathcal{R}_n\|^2$, il s'ensuit que :

$$\|Q_{n+1}\|^2 = \frac{(\|Q_n\|^2 - 1)^3}{(3\|Q_n\|^2 + 1)^2} + 1 = \|Q_n\|^2 \frac{(\|Q_n\|^2 + 3)^2}{(3\|Q_n\|^2 + 1)^2}$$

ce qui établit la première égalité de (2.28) qui est équivalente à

$$\frac{\|Q_{n+1}\| - 1}{\|Q_{n+1}\| + 1} = \left(\frac{\|Q_n\| - 1}{\|Q_n\| + 1}\right)^3 \tag{2.31}$$

ce qui donne par itération

$$\frac{\|Q_n\| - 1}{\|Q_n\| + 1} = \left(\frac{\|P\| - 1}{\|P\| + 1}\right)^{3^n}$$

on obtient rapidement la deuxième égalité de (2.28). Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \|Q_n\| = 1$ et Par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{R}_n\| = 0$.

d'après (2.23) on constate que si $m,\ n \in \mathbb{N}$, on a $\|Q_m - Q_n\| \leq \|\mathcal{R}_m\| + \|\mathcal{R}_n\|$ ce qui montre que (Q_n) est une suite de Cauchy et alors que $Q = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n$ existe et satisfait à la condition de la proposition.

Finalement, (2.29) résulte de (2.24) et (2.28) et la proposition est prouvée.

$\square$

Remarque 2.4.2. *La suite (Q_n) est une suite de projections qui a la même image que P et converge uniformément vers Q lorsque $n \longrightarrow +\infty$.*

2.5 Algorithme de calcul l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire

1) Soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection et soit Q la projection orthogonale qui a la même image que P. Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$Q(0) = Q;\ Q(t) = Q_n \left[I + \frac{8(1-2^n t)Q_n^*(I-Q_n)}{3\|Q_n\|^2+1} \right] \quad \text{si } 2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}$$

Alors $Q(2^{-n}) = Q_n$, comme défini dans la Proposition 2.4.1 $\forall t \in [0,1]$, $Q(t)$ est une projection avec la même image que P et l'application $Q : [0,1] \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est continue avec $PQ(t) = Q(t)$; $Q(t)P = P$.
La preuve est une simple vérification. toute déformation continue de P en Q peut être définie mais celle-ci a la propriété que si $t \neq 0$, $Q(t)$ est un polynôme en P et P^*.

2) Si deux projections orthogonales sont dans la même composante connexe, alors elles peuvent être reliés par des projections orthogonales.
En effet, soit P, $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ deux projections orthogonales et soit $t \mapsto P(t)$ une application continue de $[0,1]$ dans l'ensemble des projections de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $P(0) = Q$ et $P(1) = P$. Soit

$$Q_0(t) = P(t);\ Q_{n+1}(t) = Q_n(t)\frac{3\|Q_n(t)\|^2 + 1 + 4Q_n(t)^*(I - Q_n(t))}{3\|Q_n(t)\|^2+1}$$

Alors il est facile de montrer par récurrence que $Q_n(t)$ est continue en t et que $(Q_n(t))$ converge uniformément vers une application continue de $[0,1]$ dans l'ensemble des projections orthogonales de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui a les propriétés requises.

3) Soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection et soit Q la projection orthogonale qui a la même image que P. Alors si P est essentiellement normal (c.à.d. $PP^* - P^*P$ est compact), $P - Q$ est compact.

Preuve. il est facile de vérifier que

$$(PP^* - P^*P)^2 = (P - P^*)(P^* - P)[I + (P - P^*)(P^* - P)]$$

Puisque $I + (P - P^*)(P^* - P) \geq I$ est inversible.

Alors si P est essentiellement normal $(P - P^*)(P^* - P)$ est compact et par conséquence $P - P^*$ est aussi compact puisque $i(P - P^*)$ est hermitien.

Maintenant, considérons la suite (Q_n) définie dans la Proposition 2.4.9. Il est facile de montrer que si Q_n est essentiellement normal Q_{n+1} est aussi puisque $Q_{n+1} - Q_{n+1}^*$ est un multiple de $Q_n - Q_n^*$.

Donc $P - Q = \sum_{n \geq 0} Q_n - Q_{n+1}$ est un opérateur compact (la série converge uniformément d'après (2.31)).

$\square$

Première méthode :

Proposition 2.5.1. *Soit T un opérateur linéaire borné a image fermée. Soit*

$$B_0 = aT^* \; ; \; B_{n+1} = (I - aT^*T)B_n + aT^* = \sum_{k=0}^{n+1} (I - aT^*T)^k aT^* \tag{2.32}$$

où $a = \frac{2}{\|T\|^2 + c^2(T)}$.
*Alors la suite (B_n) converge uniformément dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vers l'opérateur C qui est l'inverse de **Moore-Penrose** de T.*
Plus précisément :

$$\|C - B_n\| \leq \frac{[\|T\|^2 - c^2(T)]^{n+1}}{[\|T\|^2 + c^2(T)]^{n+1}} \|C\| \tag{2.33}$$

où $\mathrm{c}(T) = \inf_{u \perp N(T)} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}$ *appelée la conorme (appelé aussi le module minimum réduit) de T.*

Preuve. Nous procédons exactement comme la preuve de la Proposition 2.4.1.

$$\|(I - aT^*T)^k T^* R\| \leq \left[\frac{\|T\|^2 - c^2(T)}{\|T\|^2 + c^2(T)} \right]^k \|T^* R\| \text{ pour tout } R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \tag{2.34}$$

Alors du fait que $B_n = \sum_{k=0}^{n} (I - aT^*T)^k aT^*$ et

$C - B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (I - a\,T^*T)^k a\,T^*$ nous constatons que $C = \lim_{n\to\infty} B_n$ existe et que (2.33) est satisfaite.

De la Proposition 2.4.1, il s'ensuit que (TB_n) et (B_nT) convergent vers des projections orthogonales et que TB_nT converge vers T et $CTC = C$ alors que $C = IMP(T) = T^\dagger$.

□

Chapitre 3

Inverse de Moore-Penrse des opérateurs linéaires

Dans ce chapitre notre objectif est l'étudier l'inverse généralisé de **Moore-Penrose** des opérateurs linéaires dans les espace de Hilbert. La première section on va étudier des notions de théorie spectrale des opérateurs linéaires. La deuxième section est une brève introduction à l'inversion généralisée des opérateurs linéaire oû on a commencé par la définition de **Tseng** endex

3.1 Théorie spectrale des opérateurs linéaires

3.1.1 Inverse d'un opérateur

Définition 3.1.1. *Soit T un opérateur linéaire de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$.*
L'opérateur $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ est dit opérateur inverse à droite de T si $TS = I_{\mathcal{H}_2}$.
L'opérateur $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ est dit opérateur inverse à gauche de T si $ST = I_{\mathcal{H}_1}$.
Enfin on dit que S est inverse de T s'il est inverse à droite et à gauche.
Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, espace de Hilbert alors T^{-1} est continue (donc T est inversible). On écrit $S = T^{-1}$ et dit l'opérateur inverse de T.

Exemple 3.1.1. *Soit l'opérateur différentiel*

$$A : \ C^1[0;1] \to C[0;1]$$

$$f \mapsto Af = \frac{d}{dx} f$$

l'opérateur intégrale

$$B: \ C[0;1] \to C^1[0;1]$$

$$f \mapsto Bf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

On a $ABf(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = f(x)$ *donc* $AB = I$ *et* A *est un inverse à gauche de* B.
D'autre part, on a

$$BAf(x) = \int_0^x f^{'}dt = f(x) - f(0)$$

Ainsi, si $f(0) \neq 0, \ BA \neq I$ *et* A *n est pas inverse àdroite de* B*, mais si* $f(\mathrm{O}) = 0$ *alors* A *est un inverse de* B *(à droite et à gauche).*

Proposition 3.1.1. *Soit* $A \in \mathcal{L}(X;Y) t.q X$ *et* Y *sont deux espaces vectoriels normés ; si* A^{-1} *existe alors* A^{-1} *est linéaire.*

Preuve 3.1.1. $\forall x, \ y \in X \text{et} \mu, \ \lambda \in \mathbb{R}$

$$A^{-1}A(\lambda x + \mu y) = B(\lambda Ax + \mu Ay) \ (3)$$

on a aussi

$$\begin{aligned} A^{-1}A(\lambda x + \mu y) \ &= \lambda x + \mu y \\ &= \lambda BAx + \mu BAy \end{aligned}$$

$$A^{-1}A(\lambda x + \mu y) = \lambda B(Ax) + \mu B(Ax) \ (4)$$

d'aprés3 *et 4* $B(\lambda Ax + \mu Ay) = \lambda B(Ax) + \mu B(Ay)$
On pose $Ax = x'$ *et* $Ay = y'$ *on trouve*

$$B(\lambda x' + \mu y') = \lambda Bx' + \mu By'$$

donc B *est linéaire.*

3.1.2 Spectre des opérateurs bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans lui même, muni de la norme $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{H}}$.

L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach unifère (possède un élément e tel que $\|e\| = 1$).

Définition 3.1.2. *(**Spectre**).*
Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on appelle spectre de T et on note $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$ (L'ensemble résolvant de T). Le spectre de T est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ n'est pas inversible dans $\mathcal{H}$. Alors en peut trouver trois types de spectres distincts.

*1) **Le spectre ponctuel** de T, noté $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T, il est défini comme suit : $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ N(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$, c.à.d. $T - \lambda I$ n'est pas injectif alors $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ Tx = \lambda x \ \ x \in \mathcal{H}, \ x \neq 0\}$.*

*2) **Le spectre continu** de T, noté $\sigma_c(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans $\mathcal{H}$, c.à.d.*

$$N(T - \lambda I) = \{0\}, \quad R(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}, \quad \overline{R(T - \lambda I)} = \mathcal{H}.$$

*3) **Le spectre résiduel** de T, noté $\sigma_r(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, c.à.d*

$$N(T - \lambda I) = \{0\}, \quad (R(T - \lambda I))^{\perp} \neq \{0\}.$$

***Le spectre** de T est $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$*

3.2 Introduction à des inverses généralisés des opérateurs linéaires

Une définition naturelle d'inverses généralisés dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est la suivante dû a ***Tseng***[8]

Définition 3.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors un opérateur $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ est un inverse généralisé de **Tseng** (i.g. en abrégé) de T si*

$$R(T) \subset D(T^g) \tag{3.1}$$

$$R(T^g) \subset D(T) \tag{3.2}$$

$$T^g T\mathrm{x} = P_{\overline{R(T^g)}}\mathrm{x} \quad \text{pour tout } \mathrm{x} \in D(T) \tag{3.3}$$

$$TT^g y = P_{\overline{R(T)}} y \quad \text{pour tout } y \in D(T^g) \tag{3.4}$$

Cette définition est symétrique en T et T^g, donc T est un i.g de T^g.
Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ peut avoir un i.g unique, ou plusieurs i.g ou il peut n'en avoir aucun. Nous allons montrer dans le théorème 3.2.1 que T a un i.g. si et seulement si son domaine est décomposable par rapport à son noyau,

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} (D(T) \cap N(T)^{\perp}) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \tag{3.5}$$

d'après le lemme 3.2.1, cette condition est satisfaite si $N(T)$ est fermé. Donc il est valable pour tous les opérateurs fermés, et en particulier pour les opérateurs bornés. Si T a des i.g's, alors il a un i.g maximum. Pour les opérateurs bornés d'image fermée, l'i.g maximum coïncide avec l'inverse de ***Moore-Penrose***, et sera de même noté par $T^{\dagger}$.

Lemme 3.2.1. [1] *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. L, M deux sous-espaces de $\mathcal{H}$ tels que $M \subset L$. Alors*

$$L = M \oplus (L \cap M^{\perp})$$

si seulement si

$$P_{\overline{M}} x \in M \text{ pour tout } x \in L$$

Théorème 3.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors T a un i.g. si et seulement si*

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \tag{3.5}$$

dans ce cas, pour tout sous-espace $L \in R(T)^{\perp}$, il y a un i.g T_L^g de T, avec

$$D(T_L^g) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} L \tag{3.6}$$

et

$$N(T_L^g) = L \tag{3.7}$$

Preuve 3.2.1. *Si T a un i.g, alors (3.5) résulte des lemmes ?? et ??. Réciproquement, supposons que (3.5) est vérifiée. Alors*

$$R(T) = T(D(T)) = T(C(T)) = R(T_0) \tag{3.8}$$

où $T_0 = T_{[C(T)]}$ *est la restriction de* T *à* $C(T)$. *L'inverse* T_0^{-1} *existe, et satisfait*

$$R(T_0^{-1}) = C(T)$$

et, d'après (3.8)

$$D(T_0^{-1}) = R(T)$$

Pour tout sous-espace $L \subset R(T)^{\perp}$, *considérons l'extension* T_L^g *de* T_0^{-1} *avec domaine*

$$D(T_L^g) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} L$$

et de noyau

$$N(T_L^g) = L$$

De sa définition, il s'ensuit que T_L^g *satisfait*

$$D(T_L^g) \supset R(T)$$

et

$$R(T_L^g) = R(T_0^{-1}) = C(T) \subset D(T) \tag{3.9}$$

Pour tout $\mathrm{x} \in D(T)$

$$\begin{aligned} T_L^g T\mathrm{x} &= T_L^g T P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}, \qquad \text{d'après (3.5)} \\ &= T_0^{-1} T_0 P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}, \qquad \text{d'après le Lemme 3.2.1} \\ &= P_{\overline{R(T_L^g)}}\mathrm{x}, \qquad \text{d'après (3.9).} \end{aligned}$$

Finalment, tout $\mathrm{y} \in D(T_L^g)$ *s'écrit, d'après (3.6), comme*

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2, \quad \mathrm{y}_1 \in R(T), \quad \mathrm{y}_2 \in L, \quad \mathrm{y}_1 \perp \mathrm{y}_2$$

et donc

$$\begin{aligned} TT_L^g\mathrm{y} &= TT_L^g\mathrm{y}_1, \quad \text{d'après (3.7)} \\ &= T_0 T_0^{-1}\mathrm{y}_1 \\ &= \mathrm{y}_1 \\ &= P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}. \end{aligned}$$

Par conséquent, T_L^g *est un i.g. de* T.

Théorème 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ a des i.g.'s est soit L un sous espace de $R(T)^{\perp}$. Alors les conditions*

$$D(T_L^g) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} L \qquad (3.6)$$

$$N(T_L^g) = L \qquad (3.7)$$

déterminent un unique i.g, qui est donc égale à T_L^g construit dans la preuve du théorème précedent.

Preuve 3.2.2. *Soit T^g est un i.g de T vérifiant (3.6) et (3.7), et soit $\mathrm{y} \in D(T^g)$ où* $\mathrm{y} = \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2, \quad \mathrm{y}_1 \in R(T), \quad \mathrm{y}_2 \in L$
Alors

$$\begin{aligned} T^g\mathrm{y} &= T^g\mathrm{y}_1, && \text{d'après } (3.7) \\ &= T^gT\mathrm{x}_1, && \text{pour } \mathrm{x}_1 \in D(T) \\ &= P_{\overline{R(T^g)}}\mathrm{x}_1, && \text{d'après } (3.3) \\ &= P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_1, && \text{d'après } (??) \end{aligned}$$

Nous affirmons que ceci détermine T^g de façon unique. Car, supposons qu'il y a un $\mathrm{x}_2 \in D(T)$ avec $\mathrm{y}_1 = T\mathrm{x}_2$, alors :

$$T^g\mathrm{y} = P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_2$$

par conséquent

$$\begin{aligned} P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_1 - P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_2 &= P_{\overline{C(T)}}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) \\ &= 0 \ \text{ puisque } \ (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) \ \in N(T) \end{aligned}$$

3.3 Inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire borné

Définition 3.3.1. *Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un inverse généralisée de T (désigné par $X(INV)T$) Si les conditions suivantes sont vérifié :*
1) $\forall \mathrm{x} \in \mathcal{H}, \quad TXT\mathrm{x} = T\mathrm{x}$

2) $\forall \mathrm{y} \in \mathcal{H}, \quad XTX\mathrm{y} = X\mathrm{y}$

Il est alors facile de constater que TX et XT sont des projections dans $\mathcal{H}$. Remarquons aussi que X n'est pas en général unique et que si T est inversib le alors $T^{-1} = X$.

Définition 3.3.2. *Soit T un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que $T^{\dagger}$ est un inverse de **Moore-Penrose** de T (désigné par $T^{\dagger} = IMP(T)$) si $T^{\dagger}(INV)T$ et $TT^{\dagger}$ et $T^{\dagger}T$ sont des projections orthogonales.*
Il est facile de montrer que $T^{\dagger}$ est unique.
Si $R(T)$ est fermé alors $T^{\dagger}$ existe même si T est fermé à domaine dence.
Soit $T^{\dagger}$ un opérateur linéaire borné à image fermée, défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Théorème 3.3.1. (***Petryshyn*** *[7]*) *Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $R(T)$ est fermé, alors $T^{\dagger}$ est caractérisé comme l'unique solution X des systèmes équivalents suivants :*
(a) $TXT = T,\ XTX = X,\ (TX)^* = TX,\ (XT)^* = XT$,
(b) $TX = P_{R(T)}$, $N(X^*) = N(T)$,
(c) $TX = P_{R(T)}$, $XT = P_{R(T^*)}$, $XTX = X$,
(d) $XTT^* = T^*$, $XX^*T^* = X$,
(e) $XT\mathrm{x} = \mathrm{x}$ pour tout $\mathrm{x} \in R(T^*)$,
$X\mathrm{y} = 0$ pour tout $\mathrm{y} \in N(T^*)$,
(f) $XT = P_{R(T^*)}$, $N(X) = N(T^*)$,
(g) $TX = P_{R(T)}$, $XT = P_{R(X)}$.

Preuve 3.3.1. *Nous prouvons le Théorème en montrant que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (a)$*
(a)$\Rightarrow$ (b) *:Il résulte de (a) que TX et XT sont des projection orthogonales en $H_2 et H_1$ respectivement, par conséquent pour prouve que $TX = R(A)$, nous n'avons besoin que pour monter que $R(TX) = R(T)$.*
supposons que $y \in R(T)$, il existe alors un X unique dans $R(T^*)$ tel que $y = TX$ par conséquent $TXy = TXTx = Tx = y$ montant que $R(T) \subseteq R(TX)$, supposons maintenant que $y \in R(TX)$. Alors, puisque TX est un projection $TXy = y$, i.e, $R(TX) \subseteq R(T)$ par conséquent $R(TX) = R(T)$, pour montrer que $N(X^*) = N(T)$ notez que si $x \in N(X^*)$ puis, $0 = T^*X^*x = XTx$ et donc $0 = TXTx$ i.e $N(X^*) \subseteq N(T)$ sur d'autre parte, si $x \in N(T)$, alors $0 = XTx = T^*X^*x = X^*T^*X^*x = X^*x$,

i.e $N(T) \subseteq N(X^*)$ *ainssi* $N(X^*) = NT$.
(b) $\Rightarrow$ ***(c)*** *: Il résulte* $TX = P_{R(T)}$ *que* $TXT = T$ *et que* XT *est une projection en* H. *De plus* $XTX = X$ *en effet, puisque* $R(TX) = R(T)$*, il s'ensuite que si* $y \in R(T)$ *puis* $y = TXy = X^*T^Xy$ *impliquant que* $R(T) \subseteq R(X^*)$ *sur le d'autre parte, si* $y \in R(X^*)$ *alors puisque* $N(X^*) = N(T)$ *il existe un unique* X *dans* $R(T^*)$ *tel que* $y = X^*x = T^*z$ *pour certains* z *dand* H *et par conséquent* $y = TXz$ *d'oû l'on dérive l'égalité* $R(T) = R(X^*)$ *pour tout* x *dans* H *nous avons* $X^*T^*X^*x = TXX^*x = X^*x$ *i.e* $X^*T^*X^* = X^x$ *ou* $XTX = X$ *enfin* $XT = P_{R(T^*)}$ *pour voir ça, notons d'abord que* $N(T) = N(XT)$ *pour* $N(T) \subset N(XT)$ *est evident alors que si* $x \in N(XT)$ *puis* $XTx = 0$ *et* $TXTx = 0$ *ce qui montre que* $N(XT) \subseteq N(T)$ *notre preuve sera complète que une fois que nous montrons que* $R(XT) = R(T^*)$ *pour ce faire, nous montons d'abord que* $R(X) = R(XT)$ *en fait si* $x \in R(X)$*, alors il existe* y *tel que* $x = Xy$ *et par conséquent* $XTx = XTXy = Xy = x$ *c'est à dire* $R(X) \subseteq R(XT)$ *si maintenant* $x \in R(XT)$ *alors il existe* y *tel que* $x = XTy$ *et par conséquent* $x \in R(X)$ *aussi* $R(X) = R(XT)$ *puisque*$R(X)$ *est fermé et* $N(X^*) = N(T)$.
(c) $\Rightarrow$ ***(d)*** *:*$XT = P_{R(T^*)}$ *implique que* $XTT^* = T^*$ *tandis que les égalité* $X^*T^* = TX$ *et* $XTX = X$ *impliquant* $XX^*T^* = X$.
(d) $\Rightarrow$ ***(e)*** *: Clairement* $XTX^* = T^*$ *implique que* $XTx = x$ *pour tout* x *dans* $R(T^*)$ *tandis que* $XX^*T^* = X$ *montre que* $Xy = 0$ *pour tous dans* $N(T^*)$.
(e) $\Rightarrow$ ***(f)*** *: pour tout* x *dans* H *considérons la décomposition orthogonale* $x = x_1 + x_2$ *avec* x_1 *dans* $R(T^*)$ *et* x_2 *dans* $N(T)$ *alors* $XTx = XTx_1 = x_1$ *ce qui montre que* XT *est une projection de* H_1 *sur* $R(T^*)$. *Montre que* $XT = P_{R(T^*)}$ *nous devons encore montrer que* $N(XT) = N(T)$ *il ca de soi que* $N(T) \subseteq N(XT)$ *de plus, puisque* $XTx = x_1$ *implique que* $TXTx = Tx_1 = Tx$ *alors* $XTx = 0$ *et par conséquent* $0 \rightleftharpoons TXTx = Tx$ *par conséquent* $N(XT) = N(T)$ *et donc* $XT = P_{R(T^*)}$ *le fait que* $N(X) = N(T^*)$ *est evident*
(f) $\Rightarrow$ ***(g)*** *: Il est facile de voir que* $TXT = T$ *et que* TX *est une projection en* H_2 *de plus* $TX = P_{R(T)}$ *en fait si* $y \in R(T)$ *alors il existe un unique dans* $R(T^*)$ *tel que* $y = Tx$ *par conséquent* $TXy = TXTx = Tx = y$ *impliquant que* $R(T) \subseteq R(TX)$ *inversement si* $y \in R(TX)$ *alors puisque* TX *est une projection* $TXy = y$ *et donc* $y \in R(T)$ *ainsi* $R(T) = R(TX)$ *en outre* $N(TX) = N(T^*)$ *en fait puisque* $N(X) = N(T^*)$ *nous voyons que pour* y *dans* $N(T^*)$ *nous avons* $0 = Xy = TXy$ *i.e* $N(T^*) \subseteq N(TX)$ *inversement pour* y *dans* $N(TX)$ *nous avons* $TXy = 0$ *ou* $XTXy = Xy = 0$ *puisque, comme on le verra ci-dessous* $XTX = X$ *par conséquent* $N(TX) = N(T^*)$ *pour voir*

que $XTX = X$, note d'abord que $R(XT) = R(T^*)$ implique l'égalité $R(T^*) = R$ en effet, si $x \in R(T^*)$ puisque $x = XTz$ pour certains z dans H_1, et par conséquent $x \in R(X)$ inversement, si $x \in R(X)$ alors puisque $N(X) = N(T^*)$ il existe un y unique dans $R(T)$ tel que $x = Xy = XTz = T^*X^*z$ pour certaines z dans H_1 donc $R(X) \subseteq R(T^*)$ et par conséquent$R(x) = R(T^*)$. Maintenant puisque $R(T^*) = R(X)$ et $R(XT) = R(T^*)$ il s'ensuite que pour tout y dans H_2, $XTXy = Xy$ notez que nous avons non seulement prouvé que $TX = P_{R(T)}$ mais aussi que $XT = P_{R(X)}$.

(g) $\Rightarrow$ ***(a)*** *: cela découle du fait que TX et XT, étant orthogonaux projections, sont hermitiennes et que puis $R(TX) = R(T)$ et $R(XT) = R(X)$ il s'ensuit que $TXT = T$ et $XTX = X$ qui est (a) ceci complète la preuve du théorème.*

3.4 Inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense

Définition 3.4.1. *Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et densément définit. Alors il existe un unique opérateur densément définit $T^\dagger \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ de domaine*

$D(T^\dagger) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} R(T)^\perp$ et est les propriétés suivantes ;

(1) $TT^\dagger \mathrm{y} = P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}$, pour tout $\mathrm{y} \in D(T^\dagger)$.

(2) $T^\dagger T\mathrm{x} = P_{N(T)^\perp}\mathrm{x}$, pour tout $\mathrm{x} \in D(T)$.

(3) $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$.

*Cet opérateur $T^\dagger$ est appelé l'inverse de **Moore-Penrose** de T.*

Pour tout $\mathrm{y} \in D(T^\dagger)$, soit

$$L(\mathrm{y}) = \{\mathrm{x} \in D(T) \ : \ \|Tx - \mathrm{y}\| \leq \|Tu - \mathrm{y}\| \ \forall \ u \in D(T)\}.$$

*ici tout $u \in L(\mathrm{y})$ est appelée une **solution des moindres carrés** de l'équation de l'opérateur $T\mathrm{x} = \mathrm{y}$. Le vecteur $\mathrm{x} = T^\dagger \mathrm{y} \in L(\mathrm{y})$ et vérifie, $\|T^\dagger \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| \ \forall \ u \in L(\mathrm{y})$ et est appelée **la solution des moindres carrés de la norme minimale**.*

Remarque 3.4.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ vérifiant (3.5). L'i.g maximum de T, noté $T^\dagger$, est l'i.g. de T de domaine*

$$D(T^\dagger) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} R(T)^\perp \tag{3.10}$$

et de noyau

$$N(T^{\dagger}) = R(T)^{\perp} \tag{3.11}$$

D'après le Théorème 3.2.1, l'i.g. $T^{\dagger}$ ainsi défini est unique. Il est maximum et tout autre i.g. de T est une restriction de $T^{\dagger}$.
En outre, $T^{\dagger}$ de domaine dense, d'après (3.10), et de noyau fermé, d'après (3.11). Choisir L comme un sous-espace dense de $R(T)^{\perp}$ montre que un opérateur T peut avoir une infinité d'i.g's à domaine denses T_L^g. De plus, T peut avoir un nombre infini d'i.g's T_L^g avec un noyau fermé, chacun obtenu en choisissant L comme un sous-espace fermé de $R(T)^{\perp}$. Cependant, $T^{\dagger}$ est l'unique i.g à domaine dense. avec un noyau fermé en vertu du Théorème 3.4.1.
Les opérateurs fermés à domaine dense, les i.g's maximums sont définits par la méthode de construction suivante dû à ***Hestenes*** *[4].*
Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ à domaine dense. Puisque $N(T)$ est fermé, il s'ensuit, de Lemme 3.2.1, que

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \tag{3.5}$$

et donc

$$G(T) = N \overset{\perp}{\oplus} C \tag{3.12}$$

En utilisant ***(C)***, ***(G)***, *et* ***(D)*** *dans la première section du chapitre 1. Alors*

$$N = J_1 N(T) = G(T) \cap \mathcal{H}_{1,0} \tag{3.13}$$

$$C = \{(\mathrm{x}, T\mathrm{x}) : \ \mathrm{x} \in C(T)\} \tag{3.14}$$

De même, puisque T^* est fermé, il découle de ***(B)*** *de la première section du chapitre 1, que*

$$G(T)^{\perp} = N^* \overset{\perp}{\oplus} C^* \tag{3.15}$$

où

$$N^* = J_2 N(T^*) = G(T)^{\perp} \cap \mathcal{H}_{0,2} \tag{3.16}$$

$$C^* = \{(-T^*\mathrm{y}, \mathrm{y}) : \ \mathrm{y} \in C(T^*)\} \tag{3.17}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1,2} &= G(T) \overset{\perp}{\oplus} G(T)^{\perp} \ , \quad \textit{puisque } T \textit{ est fermé} \\
&= (N \overset{\perp}{\oplus} C) \overset{\perp}{\oplus} (N^* \overset{\perp}{\oplus} C^*) \ , \quad \text{d'après } (3.12) \textit{ et } (3.15) \\
&= (C \overset{\perp}{\oplus} N^*) \overset{\perp}{\oplus} (C^* \overset{\perp}{\oplus} N) \\
&= G^{\dagger} \overset{\perp}{\oplus} G^{\dagger *}
\end{aligned}$$

où

$$G^{\dagger} = C \ \overset{\perp}{\oplus} N^*$$

$$G^{\dagger *} = C^* \overset{\perp}{\oplus} N$$

Puisque

$$G^{\dagger} \cap \mathcal{H}_{1,0} = (0,0)$$

il s'ensuit que $G^{\dagger}$ *est le graphe inverse* $G^{-1}(T^{\dagger}) = \{(T^{\dagger}\mathrm{y}, \mathrm{y}) : \ \mathrm{y} \in D(T^{\dagger})\}$ *de l'opérateur* $T^{\dagger} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$*, de domaine*

$$\begin{aligned}
J_2^{-1} P_{\mathcal{H}_{0,2}} G^{\dagger} &= T(C(T)) \overset{\perp}{\oplus} N(T^*) \\
&= R(T) \overset{\perp}{\oplus} R(T)^{\perp} \ , \quad \text{d'après } (3.8) \text{ et } \textbf{\textit{(E)}} \text{ de la première section dans le chapitre 1}
\end{aligned}$$

et de noyau

$$J_2^{-1} N^* = N(T^*) = R(T)^{\perp}$$

tel que

$$T^{\dagger} T\mathrm{x} = P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x} \ , \quad \text{pour tout } \mathrm{x} \in N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T)$$

et

$$TT^{\dagger}\mathrm{y} = P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y} \ , \quad \text{pour tout } \mathrm{y} \in R(T) \overset{\perp}{\oplus} R(T)^{\perp}$$

Donc $T^{\dagger}$ *est l'i.g maximums d'après la Remarque 3.4.1.*
De même, $G^{\dagger *}$ *est le graphe de l'opérateur* $-T^{*\dagger} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$*, qui est l'i.g maximum de* $-T^*$*.*
Cette construction met en évidence les propriétés de l'i.g maximum.

Théorème 3.4.1. *Soit* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *ayant des i.g.'s. Alors* $T^{\dagger}$ *est l'unique i.g à domaine dense et de noyau* $N(T^{\dagger})$ *fermé.*

Preuve. Soit T^g un i.g à domaine dense de T et de noyau fermé. Alors :

$$\begin{aligned} D(T^g) &= N(T^g) \overset{\perp}{\oplus} C(T^g), \qquad \text{d'après Téorème (3.2.1)} \\ &= N(T^g \overset{\perp}{\oplus} R(T)), \qquad \text{d}'\text{après (??)} \end{aligned}$$

qui, avec les hypothèses $\overline{D(T^g)} = \mathcal{H}_2$ et $N(T^g) = \overline{N(T^g)}$, donc

$$N(T^g) = R(T)^{\perp}$$

T^g a le même domaine et le même noyau que $T^\dagger$, par conséquent $T^g = T^\dagger$, d'après le Théorème 3.2.2.

□

Théorème 3.4.2. (***Hestenes*** [4]). *Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ à domaine dense. Alors*

(a) $T^\dagger \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$,

(b) $D(T^\dagger) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} N(T^*)$, $N(T^\dagger) = N(T^*)$,

(c) $R(T^\dagger) = C(T)$,

(d) $T^\dagger T\mathrm{x} = P_{\overline{R(T^\dagger)}}\mathrm{x}$ pour tout $\mathrm{x} \in D(T)$,

(e) $TT^\dagger \mathrm{y} = P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}$ pour tout $\mathrm{x} \in D(T^\dagger)$,

(f) $T^{\dagger\dagger} = T$,

(g) $T^{*\dagger} = T^{\dagger *}$,

(h) $N(T^{*\dagger}) = N(T)$,

(i) $(T^*T)^* = T^\dagger T^{*\dagger}$, et $N(T^*T) = N(T)$,

(j) $(TT^*)^\dagger = T^{*\dagger}T^\dagger$, et $N(TT^*) = N(T^*)$.

Définition 3.4.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et soit T_r la restriction de T définie sur*

$$D(T_r) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \ , \ N(T_r) = N(T)$$

L'existence de $T_r^\dagger$ est justifié puisque T_r vérifie (3.5). Les propriétés suivantes de $T_r^\dagger$ sont vérifiées.

Théorème 3.4.3. (***Erdélyi*** [2]) *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et soit sa restriction T_r définie précédemment. Alors*

(a) $T_r^\dagger = T^\dagger$ si $T^\dagger$ existe,

(b) $D(T_r^\dagger) = T(C(T)) \overset{\perp}{\oplus} T(C(T))^\perp$, *et en général*, $R(T) \not\subset D(T_r^\dagger)$,

(c) $R(T_r^\dagger) = C(T)$, $\overline{R(T_r^\dagger)} = N(T)^\perp$,

(d) $T_r^\dagger T\mathrm{x} = P_{\overline{R(T_r^\dagger)}}\mathrm{x}$ pour tout $\mathrm{x} \in D(T_r)$,

(e) $TT_r^\perp y = P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}$ pour tout $\mathrm{y} \in D(T_r^\dagger)$,

(f) $D((T_r^\dagger)_r^\dagger) = \overline{N(T)} \overset{\perp}{\oplus} C(T)$,

(g) $R((T_r^\dagger)_r^\dagger) = T(C(T))$,

(h) $N((T_r^\dagger)_r^\dagger) = \overline{N(T)}$,

(i) $T \subset (T_r^\dagger)_r^\dagger$ si (3.5) est vérifié ,

(j) $T = (T_r^\dagger)_r^\dagger$ si et seulement si $N(T)$ est fermé ,

(k) $T_r^{\dagger *} \subset (T^*)_r^\dagger$ si T est à domaine dense et fermable.

3.5 Approximation de l'inverse de Moore-Penrose

Dans cette section on calcul une approximation de l'inverse de ***Moore-Penrose*** $T^\dagger$ de T par son $\{2\}-$inverse. Nous avons aussi illustrer cette méthode avec un exemple, nous prouvons tout d'abord un lemme qui est utile pour prouver le théorème principal.

Lemme 3.5.1. *Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ densément définit. Soit $Y_n \subseteq R(T)$ tel que*

(a) $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b) $\dim Y_n = n$

(c) $\overline{\cup_{n=1}^\infty Y_n} = \overline{R(T)}$

Soit $Z_n = (I + TT^*)^{-1} Y_n$ et $X_n = T^* Z_n = T^*(I + TT^*)^{-1} Y_n$. *Alors*

(1) $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$, $\dim X_n = n$ et

(2) $\overline{\cup_{n=1}^\infty Z_n} = \overline{R(T)}$

(3) $\overline{\cup_{n=1}^\infty X_n} = \overline{R(T^*)}$

(4) $\overline{\cup_{n=1}^\infty TX_n} = \overline{R(T)}$.

Preuve. D'après la définition de $X_n, X_n \subseteq C(T) \subseteq N(T)^\perp = R(T^*)$ pour tout n et $X_n \subseteq X_{n+1}$. Puisque l'opérateur $T^*(I + TT^*)^{-1} \;|_{\overline{R(T)}}$ est injectif alors $\dim X_n = n = \dim Y_n$.

Pour une preuve de (2), nous utilisons l'observation suivante :

$$\overline{(I+TT^*)^{-1}(\overline{R(T)})} = \overline{R(T)}$$

On peut prouver facilement que $(I+TT^*)^{-1}(N(TT^*)) = N(TT^*)$. D'après le Théorème de projection 2.3.2, $\mathcal{H}_2 = N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} N(TT^*)^{\perp}$. Alors $\mathcal{H}_2 = N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(TT^*)}$. Mais

$$(I+TT^*)^{-1}(\mathcal{H}_2) = D(TT^*) = N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} C(TT^*)$$

Donc

$$\begin{aligned}(I+TT^*)^{-1}(\mathcal{H}_2) &= (I+TT^*)^{-1}(N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(TT^*)})\\ &= N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} ((I+TT^*)^{-1}(\overline{R(TT^*)})\end{aligned}$$

De cela on a $(I+TT^*)^{-1}(\overline{R(TT^*)}) = C(TT^*)$ et que $\overline{C(TT^*)} = \overline{N(TT^*)}$. Nous avons $\overline{(I+TT^*)^{-1}(\overline{R(TT^*)})} = \overline{R(TT^*)}$.

Par conséquent, $\overline{(I+TT^*)^{-1}(\overline{R(T)})} = \overline{R(T)}$, d'après la Proposition 2.0.2. Ainsi

$$\begin{aligned}\overline{R(T)} = \overline{(I+TT^*)^{-1}(\overline{R(T)})} &= \overline{(I+TT^*)^{-1}(\overline{\cup_{n=1}^{\infty} Y_n})}\\ &= \overline{\cup_{n=1}^{\infty}(I+TT^*)^{-1}Y_n}\\ &= \overline{\cup_{n=1}^{\infty} Z_n}.\end{aligned}$$

Cela prouve (2).

Il est clair que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty}} X_n \subseteq \overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp}$.

Supposons $\overline{\cup_{n=1}^{\infty}} X_n \subsetneq N(T)^{\perp}$. Alors il existe un $0 \neq \mathrm{z}_0 \in N(T)^{\perp}$ tel que $\mathrm{z}_0 \in (\overline{\cup_{n=1}^{\infty}} X_n)^{\perp}$. Alors

$$< \mathrm{z}_0, T^*(I+TT^*)^{-1}\mathrm{y} >= 0 \text{ pour tout } \mathrm{y} \in R(T)$$

Puisque $T^*(I+TT^*)^{-1}$ est borné ceci est valable pour touts les $\mathrm{y} \in \overline{R(T)}$.

Nous affirmons que cela est vrai pour tous les $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$. Soit $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$, alors $\mathrm{y} = u + v$ tel que $u \in \overline{R(T)}$ et $v \in R(T)^{\perp} = N(T^*) \subseteq D(T^*)$. Ainsi d'après la Proposition 2.0.3, $T^*(I+TT^*)^{-1}v = (I+T^*T)^{-1}T^*v = 0$. Ainsi

$$< \mathrm{z}_0, T^*(I+TT^*)^{-1}\mathrm{y} >=< \mathrm{z}_0, T^*(I+TT^*)^{-1}u >= 0$$

Cela prouve notre affirmation.

Ensuite, puisque $\overline{C(T)} = N(T)^{\perp}$, il existe une suite $(\mathrm{z}_n) \subseteq C(T)$ tel que $\mathrm{z}_n \to \mathrm{z}_0$. Donc pour tous $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$,

$$\begin{aligned} 0 = < \mathrm{z}_0, T^*(I+TT^*)^{-1}\mathrm{y} > &= \lim_{n\to\infty} < \mathrm{z}_n, T^*(I+TT^*)^{-1}\mathrm{y} > \\ &= \lim_{n\to\infty} < T\mathrm{z}_n, (I+TT^*)^{-1}\mathrm{y} > \\ &= \lim_{n\to\infty} < (I+TT^*)^{-1}T\mathrm{z}_n, \mathrm{y} > \\ &= \lim_{n\to\infty} < T(I+T^*T)^{-1}\mathrm{z}_n, \mathrm{y} > . \end{aligned}$$

Cela montre que $T(I+T^*T)^{-1}\mathrm{z}_n \xrightarrow{w} 0$ (faiblement), mais puisque $T(I+T^*T)^{-1}$ est borné, on a $T(I+T^*T)^{-1}\mathrm{z}_0 = 0$. Donc $T(I+T^*T)^{-1}\mathrm{z}_0 \in N(T)$. Soit $\mathrm{y} = (I+T^*T)^{-1}\mathrm{z}_0$. Alors $T\mathrm{y} = 0$. Ainsi $\mathrm{z}_0 = (I+T^*T)\mathrm{y} = \mathrm{y} \in N(T)$. Donc $\mathrm{z}_0 \in N(T) \cap N(T)^{\perp} = \{0\}$. Ainsi $\mathrm{z}_0 = 0$, une contradiction à notre hypothèse. Cela prouve (3).

En utilisant une preuve similaire on obtient (4).

Remarque 3.5.1. *On peut noter que le Lemme 3.5.1 montre que si $R(T)$ est séparable, alors $R(T^*)$ est séparable.*

Théorème 3.5.1. *Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur densément définit à image séparable $R(T)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $\{2\}-$inverse borné $T_n^{(2)}$ de T de rang n tel que*

$$D(T^{\dagger}) = \{\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2 \ : \ \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n^{(2)}\mathrm{y} \text{ existe}\}$$

et $T^{\dagger}\mathrm{y} = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n^{(2)}\mathrm{y}$ pour tout $\mathrm{y} \in D(T^{\dagger})$.

Remarque 3.5.2. *On a vu dans le chapitre 2 que le $\{2\}-$inverse d'une matrice, peut être exprimer de même pour un opérateur. Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. S'il existe un opérateur linéaire $T^{(2)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tel que $T^{(2)}TT^{(2)} = T^{(2)}$, alors $T^{(2)}$ est appelé $\{2\}-$inverse de T.*

Preuve du Théorème 3.5.1. Supposons que $R(T)$ est de dimension infinie. Puisque $R(T)$ est séparable, nous pouvons trouver une suite de sous-espaces Y_n de $\overline{R(T)}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ et $\dim Y_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} Y_n} = \overline{R(T)}$.

(Par exemple, si $\{\phi_1, \phi_2, ..., \}$ est un ensemble orthonormé qui s'étend sur $R(T)$, alors $Y_n = \text{span}(\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\})$).

Soit Z_n et X_n comme dans le Lemme 3.5.1. Alors $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ et $\dim Z_n = n$, $X_n \subseteq X_{n+1}$ et $\dim X_n = n$.

Soit $P_n : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ et $Q_n : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ deux suites de projections orthogonales avec $R(P_n) = Z_n$ et $R(Q_n) = X_n$. Soit $T_n = P_n T$. Ici, $D(T_n) = D(T)$ et $T_n \mathrm{x} \longrightarrow T\mathrm{x}$ pour tout $\mathrm{x} \in D(T)$.
Ensuite, nous affirmons que $R(T_n) = R(P_n) = Z_n$. Il est clair que $R(T_n) \subseteq R(P_n) = Z_n$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer $N(T_n^*) \subseteq N(P_n)$.
Maintenant, soit $\mathrm{z} \in N(T_n^*)$. Alors $T^* P_n \mathrm{z} = 0$. Ainsi $P_n \mathrm{z} \in N(T^*) = R(T)^{\perp}$.
Mais, $P_n \mathrm{z} \in \overline{R(T)}$. Ainsi $P_n \mathrm{z} = 0$. Donc $\mathrm{z} \in N(P_n)$. Notez que $T_n^* = T^* P_n = T^* |_{R(P_n)} = T^* |_{Z_n}$.
Alors $R(T_n^*) = T^* Z_n = X_n = N(T_n)^{\perp}$. C'est $N(T_n) = X_n^{\perp}$. $R(T_n)^{\perp} = N(T_n^*) = Z_n^{\perp}$, et $R(T_n) = Z_n$. Alors $T_n |_{X_n}: X_n \longrightarrow Z_n$ est un opérateur bijectif. par conséquent $\dim X_n = \dim Z_n = n$.

□

Construction de $\{2\}-$inverses :

On définit $T_n^{(2)} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ par

$$T_n^{(2)} \mathrm{y} = \begin{cases} (T_n |_{X_n})^{-1} y \ , & \text{si } \mathrm{y} \in Z_n \,; \\ 0 \ , & \text{si } \mathrm{y} \in Z_n^{\perp}. \end{cases}$$

Ici $T_n^{(2)} = T_n^{\dagger}$ et $T_n^{\dagger}$ est borné puisque $R(T_n)$ est fermé. $T_n^{(2)}$ est aussi un $\{2\}-$inverse de T_n. Ici $N(T_n^{(2)}) = Z_n^{\perp}$ et $R(T_n^{(2)}) = X_n$.

Ensuite, nous affirmons que $T_n^{(2)}$ est aussi un $\{2\}-$inverse de T. Pour cela nous utilisons l'observation suivante : $T_n^{(2)} \mathrm{y} = T_n^{(2)} P_n \mathrm{y}$, pour tous les $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$. Soit $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$.

Alors $\mathrm{y} = u + v$ pour certains $u \in Z_n$ et $v \in Z_n^{\perp}$.
D'où

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}\mathrm{y} = T_n^{(2)}(u+v) &= T_n^{(2)}u \quad (T_n^{(2)}(v) = 0, \quad \text{puisque } v \in \ Z_n^{\perp}) \\ &= T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} \end{aligned}$$

puisque $T_n^{(2)}$ est un $\{2\}-$inverse de T_n,

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}TT_n^{(2)}\mathrm{y} = T_n^{(2)}P_nTT_n^{(2)}\mathrm{y} &= T_n^{(2)}T_nT_n^{(2)}\mathrm{y} \\ &= T_n^{(2)}\mathrm{y} \end{aligned}$$

On peut maintenant prouver que

$$D(T^{\dagger}) = \{\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2 \ : \ \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n^{(2)}\mathrm{y} \text{ existe}\}$$

Soit $\mathrm{y} \in D(T^{\dagger})$. Alors $T^{\dagger}\mathrm{y} \in C(T)$.

Puisque $Q_n\mathrm{x} \longrightarrow \mathrm{x}$ pour tout $\mathrm{x} \in C(T) \subseteq N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}$, il est clair que $Q_nT^{\dagger}\mathrm{y} \longrightarrow T^{\dagger}\mathrm{y}$. Ensuite, nous montrons que $Q_nT^{\dagger}\mathrm{y} = T_n^{(2)}\mathrm{y}$, pour tous les $\mathrm{y} \in D(T^{\dagger})$. Des faits $Q_nT^{\dagger}\mathrm{y} \in X_n$, $(Q_n - I)T^{\dagger}\mathrm{y} \in N(T_n)$ et le Théorème 2.3.6,

$$\begin{aligned} Q_nT^{\dagger}\mathrm{y} = T_n^{(2)}T_nQ_nT^{\dagger}\mathrm{y} &= T_n^{(2)}T_nQ_nT^{\dagger}\mathrm{y} + T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} - T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} \\ &= T_n^{(2)}(T_nQ_nT^{\dagger}\mathrm{y} - P_n\mathrm{y}) + T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} \\ &= T_n^{(2)}(T_nQ_nT^{\dagger}\mathrm{y} - P_nTT^{\dagger}\mathrm{y}) + T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} \\ &= T_n^{(2)}(T_nQ_n - P_nT)T^{\dagger}\mathrm{y} + T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} \\ &= T_n^{(2)}T_n(Q_n - I)T^{\dagger}\mathrm{y} + T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} \\ &= T_n^{(2)}P_n\mathrm{y} \\ &= T_n^{(2)}\mathrm{y}. \end{aligned}$$

Puisque $Q_nT^{\dagger}Y \longrightarrow T^{\dagger}\mathrm{y}$ pour tout $\mathrm{y} \in D(T^{\dagger})$, et d'après la preuve précédente $\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n^{(2)}\mathrm{y}$ exite et égale à $T^{\dagger}\mathrm{y}$.

Cela montre que $D(T^{\dagger}) \subseteq \{\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2 : \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n^{(2)}\mathrm{y} \text{ existe}\}$.

Ensuite, nous prouvons que si $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$ telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n^{(2)}\mathrm{y}$ existe, alors $\mathrm{y} \in D(T^{\dagger})$.

Soit $\mathrm{x}_0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n^{(2)}\mathrm{y}$. On peut facilement vérifier que $TT_n^{(2)}$ est une projection avec $R(TT_n^{(2)}) = TX_n$ et $N(TT_n^{(2)}) = (TX_n)^{\perp}$. Comme d'après le Lemme 3.5.1, il s'ensuit

que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} TX_n} = \overline{R(T)}$, notons que $TT_n^{(2)}\mathrm{y} \longrightarrow P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}$.
Comme T est fermé, $\mathrm{x}_0 \in D(T)$ et $T\mathrm{x}_0 = P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}$.
puisque $\mathrm{x}_0 \in C(T) = R(T^\dagger)$, il existe $u \in D(T^\dagger)$ tel que $\mathrm{x}_0 = T^\dagger u$.
Maintenant, $P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y} = T\mathrm{x}_0 = TT^\dagger u = P_{\overline{R(T)}}u$. Alors $\mathrm{y} - u \in R(T)^\perp = N(T^\dagger)$. C'est $\mathrm{y} = \mathrm{y} - u + u \in D(T^\dagger)$. Par conséquent $\mathrm{x}_0 = T^\dagger u = T^\dagger \mathrm{y}$. Ceci termine la preuve.

□

Théorème 3.5.2. *[5] Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur densément définit. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) $R(T)$ est fermé.
(2) $T^\dagger$ est borné.
(3) $D(T^\dagger) = \mathcal{H}_2$.
(4) 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(T^*T)$.
Si, en plus $R(T)$ est séparable et $T_n^{(2)}$ est comme dans le Théorème 3.5.1, alors chacun des assertions ci-dessus est équivalente à ;
(5) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n^{(2)}\mathrm{y}$ existe pour tout $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$.
(6) $T_n^{(2)}$ est uniformément borné.

Théorème 3.5.3. *[5] Soit $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur densément définit. S'il existe une suite de projections orthogonales décroissantes P_n sur $\mathcal{H}_2$ vers un sous-espace de $\overline{R(T)}$ avec la propriété $P_n\mathrm{y} \longrightarrow P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}$ pour tout $\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2$ et $R(P_nT)$ est fermé, alors pour chaque n, il existe un $T_n^{(2)}$ tel que*

$$D(T^\dagger) = \{\mathrm{y} \in \mathcal{H}_2 \ : \ \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n^{(2)}\mathrm{y} \text{ existe}\}$$

et

$$T^\dagger\mathrm{y} = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n^{(2)}\mathrm{y}, \text{ pour tout } \mathrm{y} \in D(T^\dagger)$$

On peut prouver ce Théorème par une preuve similaire du Théorème 3.5.1.

Exemple 3.5.1. *Soit $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ avec*

$$D(T) = \{(x_1, x_2, \cdots) \in \ell^2 : (0, 2x_2, 0, 4x_4, \cdots) \in \ell^2\}$$

Définit par

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (0, 2x_2, 0, 4x_4, \cdots) \text{ pour touts } (x_1, x_2, \cdots) \in D(T).$$

On peut montrer que $T = T^*$ *et* $R(T)$ *est fermé. Soit* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est la base orthogonale pour* ℓ^2. *Ici* $R(T) = \overline{span(e_2, e_4, \cdots, e_{2n}, \cdots)}$. *Soit* $Y_n = span\{e_2, e_4, \cdots, e_{2n}\}$. *Alors* $Y_n \subseteq Y_{n+1}, \dim(Y_n) = n$ et $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} Y_n} = R(T)$.
Puisque $T = T^*$, *nous avons* $I + TT^* = I + T^2$.
Pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots) \in D(T^2)$,

$$(I + T^2)x = (x_1, 5x_2, x_3, 17x_4, \cdots, x_{2n-1}, (1 + 4n^2)x_{2n}, \cdots)$$

Pour tout $y = (y_1, y_2, \cdots) \in \ell^2$,
$(I + T^2)^{-1}y = (y_1, \frac{y_2}{5}, y_3, \frac{4}{17}y_4, \cdots, y_{2n-1}, \frac{y_{2n}}{1+4n^2}, \cdots),\ y = (y_1, y_2, \cdots,) \in \ell^2$.
En particulier, $(I + T^2)^{-1}(e_{2n}) = \frac{e_{2n}}{1+4n^2}$. *D'où* $Z_n = (I + T^2)^{-1}Y_n = Y_n$.
Aussi $X_n = T^*Z_n = Y_n$. *Alors* $X_n = Y_n = Z_n$. *Ainsi* $P_n = Q_n$. *C'est* $P_n x = x_2e_2 + x_4e_4 + \cdots + x_{2n}e_{2n}$ *pour tout* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,) \in \ell^2$. $T_n = P_nT$. *pour* $T_nx = 2x_2e_2 + 4x_4e_4 + \cdots + 2nx_{2n}e_{2n}$. *Ainsi*

$$T_n^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{y_2}{2}e_2 + \frac{y_4}{4}e_4 + \cdots + \frac{y_{2n}}{2n}e_{2n} & \text{si } y \in Y_n\,; \\ 0, & \text{si } y \in Y_n^{\perp}. \end{cases}$$

Donc d'après le Théorème 3.5.1 , $D(T^\dagger) = \{y \in \ell^2 \ :\ \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n^{(2)} \text{ existe}\} = \ell^2$ *et*

$$T^\dagger y = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n^{(2)} y = (0, \frac{1}{2}y_2, 0, \frac{1}{4}y_4, \cdots) \text{ pour tout } y = (y_1, y_2, \cdots) \in \ell^2$$

.

Conclusion

On peut généraliser la notion d'inversibilité d'une matrice ou d'un opérateur linéaire non inversible par plusieurs méthodes permis ces méthodes on a vu l'inverse de ***Moore-Penrose*** pour les matrices avant de voir le cas des opérateurs linéaires et d'étudier leur propriétés.

Perspectives

Dans ce mémoire le calcul de l'inverse de ***Moore-Penrose*** restreint aux opérateurs bornés et les opérateurs fermés densément définit, peut être il y a une extension pour les opérateurs fermables (Opérateurs presque formable).

Bibliographie

[1] A.Ben-Israel et T.N.E.Greville, Generalized inverses Theory and Applications, New York,(2003).

[2] I.Erdélyi. A generalized inverse for arbitrary operators between hilbert spaces, (1972), $43-50$.

[3] M. Kern, Problèmes inverses. Syllabus du cours à l.Ecole supérieure d.ingénieurs Léonard de Vinci, 2002.

[4] M.R.Hestenes. Inversion of matrices by biorthogonalization and related results, J. Soc. Indust. Appl. Math. (1958), $51-90$.

[5] S.H.Kulkarni et G.Ramesh. Approximation of Moore-Penrose Inverse of a Closed Operator by a Sequence of Finite Rank Outer Inverses, (2008), $1-8$.

[6] S.L.Campbell et C.D.Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, SIAM (1979).

[7] W.V.Petryshyn, On generalized inverses and on the uniform convergence of $(I-\beta K)^n$ with application to iterative methods, J. Math. Anal. Appl. (1967), $417-439$.

[8] Y.Y.Tseng, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Nauk SSSR (1949), $431-434$.