République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Théorème de point fixe de Krasnoselskii et ses applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Boubekri Karima [1]

Sous la direction de

Mlle Abbas Hafida

Soutenu le 14/09/2020 devant le jury composé de

A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
I. Mekkaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : karima.boubekri1996@gmail.com

Remerciement

Voilà enfin, aprés de longues années de travail avec l'aide d'Allah, le tout puissant qui mène toujours à bonne fin, j'ai réussi à mettre en forme le manuscrit que vous avez entre les mains.

Un énorme remerciement que dois présenter en premier lieu à mon encadreur **H.Abbas** qui m'a soutenue et m'a guidée au cours de la réalisation de ce mémoire, merci pour leur temps qu'elle m'a consacré.

J'adresse un garnd merci a les membres du jury d'avoir bien voulu présider mes jury et d'avoir examiner ce travail.

Mes remerciments s'adressent également à tout mes enseignants de l'université Dr.Moulay Tahar de Saida.

Je remercie mon père, ma mère, mes soeurs, mes frères et mes amies pour leur soutien durant toute la péroide de ma préparation de mon mémoire.

Boubekri Karima

Dédicace

J'adresse en premier lieu ma reconnaissance à notre Dieu tout puissant, de m'avoir permis d'en arriver là, car sans lui rien n'est possible.

Je dédie cette mémoire...

À mes chèrs parents :

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.
Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.
Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.
Puisse Dieu, le trés haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie nchallah à toute ma famille.
M*a* prunelle de mes yeux, **Mohamed Islem**.
M*a* jolie princesse, **Chahd Rafif**.
M*on* cœur, ma vie et mon bonheur **Khadidja**.
M*es* chères frères et sœurs, puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage et réussite.
M*a* chère amie et mon compagnon dans ma carrière universitaire **Fatima** Je te souhaite du succès dans ta vie.
T*oute* la promotion 2020 de Master analyse Mathématique, université de Saida.

Boubekri Karima

Table des matières

Introduction

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie du point fixe est un coeur de l'analyse non-linéaire puis qu'elle fournit des outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaire différent. Elle utilise ses outils de l'analyse et de la topologie et pour cette raison nous avons la classification "point fixe et théorie métrique" et "point fixe et théorie topologique".

Le développement de la théorie du point fixe, qui est la branche cardinale de l'analyse non-linéaire a donné un grand effets sur l'avancement de l'analyse non-linéaire. l'analyse non-linéaire comme une branche autonome des mathématiques a été élaboré dans les années 1950 par des mathématiciens, comme Brouwer, comme une combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Cependant, les premiers résultats avaient déjà été obtenus dans les années 1920, les résultats non-linéaire sont applicables à un large éventail domaines. Plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, économie conduisent à des modèles non-linéaire. Les équations différentielles non-linéaire et intégrales, les inégalité variationnelles et plus de problèmes d'optimisation générale sont quelques un des sujets importants dans l'analyse non-linéaire. La théorie du point fixe et d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution, et de nombreux théorèmes d'existence sont obtenus a partir des théorèmes de Banach et Schauder en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme, qu'une fonction f possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$. Ces théorèmes présentes un outil très utile en mathématique, principalement dans le domaine de résolution des équation différentielles.

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui étudier la possibilité de définir des puissances non entières des opérateurs de dérivation et d'intégration. Par exemple, on peut se demander comment interpréter convenablement la racine carrée.

$$\sqrt{D} = D^{\frac{1}{2}}$$

l'opérateur de dérivation, c'est-à-dire une expression d'un certain opérateur qui lorsqu'elle est appliquée deux fois à une fonction, aura le même effet que la dérivation, plus généralement, on peut examiner le problème de définir D^{α}. Pour des valeurs réelles de α, de telle sorte que lorsque α prend une valeur entière n, on récupère la dérivation n-ième usuelle pour $n > 0$ ou l'intégration itérée $|n|$ fois pour $n < 0$. Le terme "Fractionnaire" est utilisé de fa impropre : α n'est pas nécessairement un nombre rationnel, et l'on devrait donc plutôt parler de dérivation non entière. Cependant le terme "Analyse fractionnaire" est devenu traditionnel.
Les dérivées fractionnaires sont utilisées par exemple dans certains domaines de la physique faisant intervenir des phénomènes de diffusion comme lèlèctromanètisme,...
L'équation différentielles fractionnaires également connu sous le nom d'équations différentielles extraordinaire, sont une généralisation des équation différentielles à travers l'application du calcul fractionné.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a établir son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaire, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.
Krasnoselskii a prouvé un théorème de point fixe motivé par une observation que la dans version d'un opérateur différentiel perturbé peut donner la somme des opérateurs de compactage et de contraction. Son théorème combine à la fois le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Schauder, et est utile pour établir théorèmes

d'existence pour les équations d'opérateurs perturbées.
Le théorème traditionnel du point fixe de Krasnoselskii dans les espaces de Banach ne reproduit pas les formes riches et variées des équations d'opérateurs dans les espaces abstraits qui ne sont pas une structure linéaire. Par conséquent, ses applications aux équations intégrales et aux équations différentielles ont rencontré de nombreux obstacles.
Le théorème de point fixe actuel de Krasnoselskii dans les espaces semi-linéaires généralisés de Banach surmonte cette carence et ouvre à des recherches rentables telles que les systèmes différentielles avec incertitude.

Ce mémoire décompose en trois chapitres de la manière suivante :

Dans **le premier chapitre**, nous commençons par présenter quelques fonctions spéciales utiles dans le calcul fractionnaire ainsi que quelques propriétés fondamentales, ce chapitre est consacré pour un rappel général sur le calcul fractionnaire et plus précisément les définitions des dérivées et des intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que la relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

Dans **le seconde chapitre**, On introduit quelques définitions concernant les cônes et des notations de la fonction de Green et leurs propriétés qu'on va utiliser à travers ce mémoire. Et j'énonce et montre le théorème de Krasnoselskii ainsi que quelques théorèmes de point fixe telles que le théorème de point fixe de Banach, Brouwer, Schauder.

Dans **le troisième chapitre**, On va appliqués le théorème de Krasnoselskii pour établir l'existence et d'unicité des solutions et nous prenons des exemples pour mieux comprendre.

Chapitre 1

Définitions et notions de bases

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons certaines théories de base qui concernent des fonctions spéciales qui sont utilisées dans les autres chapitres. Nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma, Bêta, et la fonction d'erreur . Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie de différentiation d'ordre fractionnaire.

Nous présentons aussi différentes approche de généralisation de la notion de différentiation et intégration. Le choix étant réduit aux définitions qui sont liée aux applications.

1.2 Fonctions utiles

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels et *même* aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, \ldots\}$ tel que $Re(z) > 0$.

Définition 1.2.1 *:[9]*
La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} exp(-t) dt \tag{1.1}$$

quand la partie réelle de z est strictement positive ($Re(z) > 0$), *cette intégrale est convergente.*

Proposition 1.2.1 *:[9]*
Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+, t > 0, n \in \mathbb{N}$, *on a :*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(0) = \infty$
3. $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$
5. $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$

Exemples 1.2.1 *:*

1. $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} exp(-t)dt = 1$$

2. $$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} exp(-t)dt$$

Posons $t = x^2$, *alors* $dt = 2xdx$, *Donc :*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} exp(-x^2)dx$$

Pour calculer cette intégrale posons :

$$A = \int_0^{+\infty} exp(-x^2)dx$$

Prenons :

$$A^2 = \int_0^{+\infty} exp(-y^2)dy \int_0^{+\infty} exp(-x^2)dx = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} exp-(x^2+y^2)dxdy$$

Le calcul est plus simple à réaliser qu'on effectue les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} rexp(-r^2) dr d\theta = \frac{\pi}{4} \\ A &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Alors

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

1.2.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta est appellée intégrale d'Euler du premier type.

Définition 1.2.2 *:[9]*
La fonction Bêta est définie par :

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad (Re(z) > 0; Re(w) > 0) \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.2 *:[9]*
les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (z, w \in \mathbb{C}; (Re(z); Re(w)) > 0) \tag{1.3}$$

Propriété 1.2.1 *:[9]*
soient $a, b \in \mathbb{C}, (Re(a), Re(b)) > 0$

1. $B(a,b) = B(b,a)$
2. $B(a,1) = \frac{1}{a}$
3. $B(a,b+1) = B(a+1,b)$
4. *Si* $n = b+1$ *est un entier, cela donne une relation de récurrence.*

$$B(a,b) = \frac{n-1}{a} B(a+1,b)$$

5. *Si* $a = m$ *et* $b = n$, *on obtient*

$$B(m,n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

Exemples 1.2.2 *:*

1.

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} \\ &= \pi \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B(2,3) &= \int_0^1 t(1-t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t-2t+t^3) dt \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

1.2.3 La fonction d'erreur

La fonction d'erreur appellée aussi la fonction d'erreur de Gauss, utilisée en analyse et fait partie des fonctions spéciales.

Définition 1.2.3 *:[9]*

La fonction d'erreur est noté par Erf, *elle est définie par :*

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x exp(-t^2) dt \tag{1.4}$$

Propriété 1.2.2 *: [9]*

1. $Erf(0) = 0$
2. $Erf(\infty) = 1$
3. $Erf(-x) = -Erf(x)$

1.3 Analyse et calcul fractionnaire

1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires pour les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville.
La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$), selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois :

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots\ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

Définition 1.3.1 *[8]*
Soit $f \in \mathrm{L}^1([a,b])$. *l'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville de la fonction* f *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$, *notée* $I_a^{(\alpha)} f$ *et définie par la formule suivante :*

$$(I_a^{(\alpha)} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x > a \tag{1.5}$$

où α *est un nombre non entier et* $\Gamma(\alpha)$ *est la fonction Gamma d'Euler.*

Théorème 1.3.1 *[8]*
Si $f \in \mathrm{L}^1([a,b])$, *alors* $I_a^\alpha f$ *existe pour presque tout* $x \in [a,b]$ *et de plus* $I_a^\alpha f \in \mathrm{L}^1([a,b])$

Démonstration. En introduisant la définition (1.3.1) puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)|dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t)|dtdx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |f(t)|\int_t^b (x-t)^{\alpha-1}dxdt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(t)|(b-t)^\alpha dt \\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(t)|dt
\end{aligned}$$

Puisque $f \in \mathrm{L}^1([a,b])$, la derniére quantité est fini, ce qui établit le résultat. ∎

Exemples 1.3.1 *Soient* $\alpha > 0$, $\beta > -1$ *et* $f(x) = (x-a)^\beta$, *alors :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \tag{1.6}$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x-a)y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

alors (1.6) *devient*

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^\beta(x-a)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1}y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{(\beta+1)-1}dy
\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.2) *puis de la relation* (1.3) *on arrive à :*

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.7}$$

Exemples 1.3.2 *Soit* $f(x) = x^\beta$ *avec* $\beta \geq -1$ *On a*

$$(I_0^\alpha f)(x) = I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1} dt \tag{1.8}$$

En posant $t = xu$,(1.8) *devient :*

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (1-u)^{\alpha-1} x du$$

En utilisant la fonction Bêta (1.2) *puis de la relation* (1.3) *on arrive à :*

$$\begin{aligned}I^\alpha f(x) &= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 *[8]*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $R(\alpha), R(\beta) > 0$*, pour toute fonction* $f \in \mathrm{L}^1([a, b])$*, on a :*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{(\alpha+\beta)} f = I_a^\beta (I_a^\alpha f)$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. Si de plus $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration.Supposons d'abord que $f \in \mathrm{L}^1([a,b])$, on a :

$$\begin{aligned}
[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dtds
\end{aligned}$$

En vertu du théorème (1.3.1), les intégrale figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a,b]$, et le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta)f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds]dt$$

En effectuant le changement de variable :

$$s = t + (x-t)y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

on obtient

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta)f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dydt$$

Enfin, en tenant de la relation (1.3) on obtient :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta)f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt = (I_a^{\alpha+\beta}f)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt = (I_a^{\alpha+\beta}f)(x)$$

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors (d'après les théorèmes sur les intégrales dépendant de paramètres)$I_a^\beta f \in \mathcal{C}([a,b])$, et par suite

$$I_a^{\alpha+\beta}, I_a^\alpha I_a^\beta f \in \mathcal{C}([a,b])$$

Ainsi, d'après ce qui précède, les deux fonctions continues $I_a^{\alpha+\beta}, I_a^\alpha I_a^\beta f$ coincident presque partout sur $[a,b]$, elles doivent donc coincider partout sur $[a,b]$. ■

Le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 1.3.2 *[8]*
Soient $\alpha > 0$, et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[a, b]$. Alors on peut invertir l'intale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit :

$$[I_a^\alpha(\lim_{k\to+\infty} f_k)](x) = \lim_{k\to+\infty}(I_a^\alpha f_k)(x)$$

Démonstration. Voir [8]

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il existe plusieures définitions de dérivées fractionnaires, Dans cette partie on va présenter la dérivée de Riemann-liouville, qu'est la plus utilisée.

Définition 1.3.2 *[8]*
Soit $f \in \mathrm{L}^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(R(\alpha) > 0)$ notée $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \tag{1.9}$$

Où $n - 1 < [R(\alpha)] < n$ *et* $x > a$.
En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x f(t)dt \tag{1.10}$$

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)\int_a^x f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x) \tag{1.11}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.3.1

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_n^{n-\alpha} f)(x)$$

tel que : $n = [R(\alpha)] + 1, x > a$.

Exemples 1.3.3

1. *Soit* $f(x) = (x-a)^{\beta}$ *avec* $\beta > -1$.
   Pour $\alpha \geq 0$ *tel que* $n-1 \leq \alpha \leq n$, *on a d'après la remarque* (1.3.1) *puis l'exemple* (1.3.3) *:*

$$D_a^{\alpha} f(x) = D^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}$$

   Alors, pour $(\alpha - \beta) \in \{1, 2, ..., n\}$ *on a :*

$$D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} (x-a)^{\alpha-j} = 0 \quad j \in \{1, 2, ..., n\}$$

   Par ailleurs si $(\alpha - \beta) \notin \{1, 2, ..., n\}$ *on trouve*

$$D_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} D^n (x-a)^{\beta-\alpha}$$

2. *En particulier, si* $\beta = 0$ *et* $\alpha > 0$, *la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante* $f(x) = C$ *est non nulle, sa valeur est :*

$$D_a^{\alpha} C = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

La proposition suivante établie une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 1.3.2 *[8]*
Soient $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Si* $f \in AC^n([a, b])$, *alors la dérivée fractionnaire* $D_a^{\alpha} f$ *existe presque partout sur*$[a, b]$ *et de plus, elle est donnée par*

$$D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)} (x-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt$$

1.3.3 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Par analogie avec la dérivation usuelle, et comme conséquence directe de la relation (1.5) , l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire.

Théorème 1.3.3 *[8]*
Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x)$$

Lemme 1.3.1 *[8]*
Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et f une fonction vérifiant $D_a^\alpha = 0$ alors :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}$$

Démonstration. Soit

$$(D_a^\alpha f)(x) = 0$$

En tenant compte de la remarque (1.3.1) on a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$$

et par suite

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$$

Maintenant, l'application de l'opérateur I_a^α équation précédente donne

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j I_a^\alpha((x-a)^j)$$

En utilisant la relation (1.7) on obtient ainsi

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)}(x-a)^{j+\alpha}$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m .(x-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)}.(x-a)^{\alpha-m}$$

établit le résultat désiré. ■

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriètès rèsumées dans la proposition suivante.

Proposition 1.3.3 *[8]*
Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n, m-1 \leq \beta < m$.

1. *Pour $f \in \mathrm{L}^1([a,b])$, légalité :*

$$D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t)$$

est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$.

2. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in \mathrm{L}^1([a,b])$, la relation :*

$$D_a^\beta (D_a^\alpha f)(x) = (I^{\alpha-\beta} f)(x)$$

est vrai presque partout sur $[a,b]$.

3. *Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :*

$$D_\alpha^\beta (I^\alpha f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha})(x)$$

4. *Si $f \in \mathrm{L}^1([a,b])$ et $I^{n-\alpha} f \in AC^m([a,b])$ avec $n = [R(\alpha)+1]$, alors :*

$$[I_a^\alpha (D_a^\alpha f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f \right](x)$$

1.3.4 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.3.3 *[8]*
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $R(\alpha) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 \leq R(\alpha) < n$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$.
La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^cD_a^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m-\alpha$ suivit d'une dérivation classique d'ordre m, alors que La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemples 1.3.4 *Pour $f(x) = (x-a)^\beta$ avec $\beta \geq 0$ on a*

$${}^cD_a^\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \beta \in \{0, 1, 2, ..., m-1\} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-\alpha)^{\beta-\alpha} & si\ \beta > n-1 \end{cases} \tag{1.12}$$

En particulier, si f est constante sur $[a,b]$, alors :

$${}^cD_a^\alpha f = 0$$

1.3.5 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.3.4 *[8]*
Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \right]$$

presque partout sur $[a, b]$.

Remarque 1.3.3 *Le résultat du théorème* (1.3.4) *signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f.*

Chapitre 2

Le théorème du point fixe de Krasnoselskii

On commence par donner des définitions, Ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

2.1 Le cône

Définition 2.1.1 *[7]*
Soit E un espace de Banach réel, un sous ensemble convexe P de E est dit un Cône s'il satisfait :

1. $x \in P$ *et* $\lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \in P$
2. $x \in P$ *et* $-x \in P \Rightarrow x = \theta$ *où* θ *est l'élément nul de* E

Définition 2.1.2 *[7](Définition d'un Cône solide)*
Soit $\mathring{P}$ l'intérieur du Cône P, Alors P est dit Cône solide si son intérieur est non vide.

Définition 2.1.3 *[7](Définition d'un Cône normal)*
P est un Cône normal s'il existe une constante N telle que :
Pour tout $x, y \in P$

$$\theta \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant N\|y\|$$

N est constante de normalité de P.

Autres définitions

1. On dit que E est partiellement ordonné par le Cône P si :

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in P$$

2. Si $a, b \in E$, l'ensemble $[a, b] = x \in E/a \leqslant x \leqslant b$ est dit intervalle ordonné entre a et b.
3. On dit qu'un opérateur $A : E \to E$ est croissant(décroissant) si :

$$x \leqslant y \Rightarrow Ax \leqslant Ay \quad (Ax \geqslant Ay)$$

2.2 Fonction de Green

2.2.1 Construction de la fonction de Green :

Les fonctions de Green sont un dispositif utilisé pour résoudre des équations différentielles ordinaires et partielles. En particulier, quand leurs résolutions ne peuvent être évidentes par d'autre méthodes.
La forme générale : Soit l'équation différentielle d'ordre m

$$L(y) = p_0(x)y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1}(x)y^{'} + p_m(x)y = 0 \tag{2.1}$$

Où les fonctions $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)$ sont continues sur $[a, b], p_0(x) \neq 0$, sur $[a, b]$ avec les conditions aux limites

$$V_k(y) = \alpha y(a) + \alpha^{(1)}y^{'}(a) + \ldots + \alpha^{(m-1)}y^{(m-1)}(a) + \beta y(b) + \beta^{(1)}y^{'}(b) + \beta^{(m-1)}y^{(m-1)}(b) = 0 \tag{2.2}$$

Avec $k = 1, 2, \ldots, m$ et les formes linéaires $V_1, \ldots, V_{m-1}$, en fonction de $y(a), y^{'}(a), \ldots, y^{(m-1)}(a)$, $y(b), y^{'}(b), \ldots, y^{(m-1)}(b)$ étant linéairement indépendantes. Supposons que le problème aux limites homogène $(2.1) - (2.2)$ admet la seule solution triviale $y(x) \equiv 0$

Définition 2.2.1 *On appelle fonction de Green (ou fonction d'influence) du problème aux limites* $(2.1) - (2.2)$ *la fonction* $G(x, y)$ *construite pour tout* y, $a < y < b$.

Définition 2.2.2 *[14](Fonction de Green en une dimension)*
Soit $q :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction bornèe et on considère le problème de l'équation différentielle et les conditions aux limites homogs :

$$\begin{cases} (-\frac{d^2}{dx^2} + q(x))f(x) = h(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha_1 f(a) + \beta_1 f(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f(b) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

où h est une fonction donnée et $\alpha_j, \beta_j (j = 1, 2)$ sont des constantes données.
La méthode de la fonction de Green, consiste à résoudre, pour chaque $y \in]a,b[$ fixé.

$$\left[\frac{-d^2}{dx^2} + q(x)\right] G(x,y) = \delta(x-y) \tag{2.4}$$

L'équation (2.4) doit être au sens des distributions.
La fonction de Green satisfait les mêmes conditions aux limites en $x = a$ et $x = b$.
On obtient, la solution f de (2.3) par :

$$f(x) = \int_a^b G(x,y)h(x)dx \tag{2.5}$$

Proposition 2.2.1 *[14]*
Si f est une solution de (2.3), alors f peut être représentée sous la forme (2.5).

Remarque 2.2.1 *La fonction de Green est symétrique i.e :*

$$G(x,y) = G(y,x)$$

Théorème 2.2.1 *[14]*
La fonction de Green possède les proprietés suivantes :

1. $\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right] G(x,y) = 0$ *sur (a,y) et sur (b,y).*
2. *G satisfait les conditions aux limites.*
3. *G est continue en $x = y$.*

2.2.2 Les propriétés de la fonction de Green

Cette fonction jouit des quatre propriétés suivantes :

1. $G(x, y)$ est continue et possède des dérivées continues par rapport à x jusqu'à l'ordre $(m-2)$ inclu pour $a \leq x \leq b$.

2. Sa $(m-1)-ime$ dèrivée par rapport à x présente au point $x = y$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\frac{1}{p_0(x)}$, ie

$$\frac{\partial^{m-1}G}{\partial x^{m-1}}(y_+, y) - \frac{\partial^{m-1}G}{\partial x^{m-1}}(y_-, y) = \frac{1}{p_0(y)}$$

3. Dans chacun des intervalles $[a, y)$ et $(y, b]$ la fonction $G(x, y)$ considérée comme une fonction de x est solution de l'équation (2.1)

$$L(G) = 0 \tag{2.6}$$

4. $G(x, y)$ vérifie les conditions aux limites (2.2) :

$$V_k(G) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m$$

2.2.3 Positivité de la fonction de Green :

Théorème 2.2.2 *[14]*
La fonction de Green associée au problème :

$$-(p(x)u')' + q(x)u = h(x) \quad x \in [0, T]$$

$$u(0) = u(T) \qquad u^{(1)}(0) = u^{(1)}(T)$$

est strictement positive, pour x, y dans $[0, T]$, c'est à dire :

$$G(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in [0, T]^2 \tag{2.7}$$

Théorème 2.2.3 *Si le problème aux limites* (2.1) − (2.2)*, n'a pas de solution autre que la solution triviale $y(x) \equiv 0$, l'opérateur L a une fonction de Green $G(x, y)$ et une seule.*

Exemples 2.2.1 *Soit la fonction de Green pour le système suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = f(t) & ; \\ y(0) = \frac{d}{dt}y(0) = 0 & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

On remplace par :

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t,\tau) - 3\frac{d}{dt}g(t,\tau) + 2g(t,\tau) = \delta(t-\tau)$$

Pour $g(0,\tau) = \frac{d}{dt}g(0,\tau) = 0$ *On applique la transformée de Laplace, et on obtient :*

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}g(t,\tau)\right)(s) + 3\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}g(t,\tau)\right)(s) + 2\mathcal{L}(g(t,\tau))(s) = \mathcal{L}(\delta(t-\tau))(s)$$

$$s^2G(t,\tau) - sg(0,\tau) - \frac{d}{dt}g(0,\tau) - 3[sG(t,\tau) - g(0,\tau)] + 2G(t,\tau) = \frac{1}{s}$$

oú

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}$$

alors :

$$\mathcal{L}(\delta(t-\tau))(s) = \frac{1}{s}$$

Donc :

$$G(t,\tau) = \frac{\frac{1}{s}}{s^2 - 3s + 2}$$

La transformée de la fonction pour le problème tel que $\tau = 0$, alors la fonction de Green est :

$$g(t,\tau) = \left[\frac{1}{2}e^{2(t-\tau)} - e^{t-\tau} + \frac{1}{2}\right]H(t-\tau), \quad t \geq \tau$$

où H est la fonction de heaviside.
Alors, la solution du problème (2.8) écrit comme suit :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b g(t,\tau)f(t)dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2}e^{2(t-\tau)} - e^{t-\tau} + \frac{1}{2}\right] H(t-\tau)f(t)dt \end{aligned}$$

2.3 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 2.3.1 *Soient (X,d) un espace métrique, une application f est définie par $f : X \to X$, on dit que $x \in X$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.*

2.3.1 Théorème de point fixe de Banach

Vers 1922, Banach reconnu le rôle fondamental de la complétude métrique, il énonce le théorème suivant :
Théorème 2.3.1 *[11](Théorème de Banach(1922))*
soit (E,d) un espace métrique complet non vide et soit $f : E \to E$ une application $\alpha-$contraction c'est-à-dire il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x,y)$, pour tout $x, y \in E$.
Alors f possède un unique point fixe.

Démonstration.

1. L'unicité :
   On pose que $x, y \in E$ deux points fixes de f alors $f(x) = x, f(y) = y$

   $$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

   comme $0 < \alpha < 1$ donc : $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
2. L'existance :
   On choisit un point $x_0 \in E$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n+1})$, on

montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{n=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^n \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

et donc $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ceci exprime le fais que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E , et comme E est un espace complet , il existe $x \in E$ tel que $x_n \to x$. Par continuité, $x_{n+1} = f(x_n) \to f(x)$,d'où $f(x) = x$. ∎

La signification du théorème de point fixe de Banach

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linéaire.
citons quelque uns :

1. Existence de la solution.
2. Unicité de la solution.
3. Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation.
4. Existence de la convergence des méthodes d'approximation.
5. Stabilité des méthodes d'approximation.

2.3.2 Théorème de point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de grande famille des théorèmes du point fixe, il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation.

Théorème 2.3.2 *[11](Théorème de Brouwer* (1910)*)*
Il existe plusieurs forme du thèorème, selon le contexte d'utilisation.
La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :
Dans le plan : *Toute application T continue d'un disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.*
Il est possible de généraliser à toute dimension finie.
Dans un espace euclidien :*Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.*
De mani ivalente :
convexe compact :*Toute application continue T d'un convexe K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.*

2.3.3 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de schauder est une généralisation de théorème de Brouwer, il s'énonce ainsi :

Théorème 2.3.3 *[11](Théorème de schauder* (1930) *)*
Soit C un sous ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(c)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.

Démonstration.
On note K l'adhérence de $f(C)$ i.e. $K = \overline{f(C)}$ qui est par hypothése un compact.
$K \subset C$ car C est un fermé (si C est compact alors $K = f(C)$ car $f(C)$ est compact).
Pour chaque n, soit F_n un $\frac{1}{n}-$réseau de K i.e $F_n = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset K$ telque $K = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{1}{n})$ et soit $P_n : K \to conv(F_n)$ une projection de Schauder , comme C est convexe et F_n une partie de C alors $conv(F_n) \subset C$ est un sous ensemble convexe et

compact. Ont définit $f_n : conv(F_n) \to conv(F_n), f_n = P_n \circ f_{|conv(F_n)}$. Par le théorème de Brouwer $(f_n)_{n\in N}$ possède au moins un point fixe y_n i.e $f_n(y_n) = y_n$. Or $(f(y_n))_{n\in N} \subset K$ qui est compact et donc la suite $(f(y_n))_{n\in N}$ possède une sous suite convergente nous noterons de la même manière. On pose

$$y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \tag{2.9}$$

et on a $y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \in C$ car $(f(y_n))_{n\in N} \subset K \subset C$ fermé d'où contient les limites de tous ses suites convergentes.
Montrons $f(y) = y$. En effet :

$$\|f_n(y_n) - f(y_n)\| = \|P_n(f(y_n)) - f(y_n)\| < \frac{1}{n}$$

d'où :

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} f(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

Alors : $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ D'aprés l'égalité (2.9) et par la continuité de f , on obtient : $f(y) = y$. Par conséquent f admet un point fixe. ■

Théorème 2.3.4 *[14](Théorème Ascoli-arzelà) Soient (X, d_X) un espace métrique compact et (Y, d_Y) un espace métrique . on se donne un ensemble F de $C^0(X, Y)$ tel que :*

(i) $\forall x \in X, \{f(x), f \in F\}$ *est compact dans Y*

(ii) *la famille F est equicontinue, ie :$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que, $\forall x, x' \in x$, $f \in F$, on a , $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \epsilon$*

Alors, $\bar{F}$ est compact dans $C^0(X, Y)$

2.4 Théorèmes du point fixe de type Krasnoselskii

Introduction :

En 1958, Krasnoselskii a observé que dans un bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte.Il déclare alors :

Principe. L'intégrale d'un opérateur différentiel peut produire une somme de deux application, une contraction et un opérateur compact.

Pour mieux comprendre cette observation de Krasnoselskii, on considère l'equation différentielle perturbé suivante :

$$x'(t) = -a(t)x(t) - g(t, x(t)) \tag{2.10}$$

où $a(t+T) = a(t)$ et $g(t+T, x) = g(t, x)$ pour un certain $T > 0$. On peut transformer cette équation sous une autre forme en écrivant :

$$x'(t)exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) = -a(t)x(t)exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) - g(t,x)exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$

Par conséquent :

$$\left(x(t)exp\int_0^t a(s)ds\right)' = -g(t,x(t))exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$

Une intégration $t-T$ à t donne :

$$\int_{t-T}^t \left(x(u)exp\int_0^u a(s)ds\right)' du = -\int_{t-T}^t g(u,x(u))\left(exp\int_0^u a(s)ds\right) du$$

Ainsi

$$x(t)exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) - x(t-T)exp\int_0^{t-T} a(s)ds = -\int_{t-T}^t g(u,x(u))\left(exp\int_0^u a(s)ds\right) du \tag{2.11}$$

Alors :
$x(t) = x(t-T) exp \int_0^{t-T} a(s)dsexp \left(-\int_0^t a(s)ds\right) - \int_{t-T}^t g(u,x(u)) \left(exp \int_0^u a(s)ds\right) duexp \left(-\int_0^t a(s)ds\right)$
d'où

$$x(t) = x(t-T)exp\left(-\int_{t-T}^{t} a(s)ds\right) - \int_{t-T}^{t} g(u,x(u))exp\left(-\int_{u}^{t} a(s)ds\right) \qquad (2.12)$$

Si on suppose que $exp\left(-\int_{t-T}^t a(s)ds\right) = \alpha < 1$, et si $(\mathbb{E}, \| \, . \, \|)$ est l'espace de banach de fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et T-périodique alors l'equation (2.12) peut se mettre sous forme :

$$\phi(t) = (B\phi)(t) + (A\phi)(t)$$

Avec B est une contraction de constante $\alpha < 1$ et A est une application compacte. Cet exemple montre bien la naissance de l'application $P\phi = B\phi + A\phi$ qui s'identifie à une somme d'une contraction est une application compacte. La recherche d'une solution pour (2.12) exige donc un théorème adéquat qui s'applique à cette opérateur hybride P et qui peut conclure l'existence d'un point fixe qui sera à son tour, solution de l'equation initiale (2.10) Krasnoselskii trouva la solution en combinant les deux théorèmes de Banach et celui de Schauder en un seul théorème hybride mais puissant qui porte son nom, En clair il établit le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 *[11](Théorème de Krasnoselskii* (1955)*) :*
Soit $(\mathbb{E}, \| \, . \, \|)$ *un espace de Banach et soit* M *une partie non vide, convexe et fermée de* E*, On suppose que :*
$A, B : M \to E$ *sont deux applications satisfaisant :*

- **(i)** $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$
- **(ii)** *A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact.*
- **(iii)** *B est une contraction de constante $\alpha < 1$ Alors,* $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$

Le lemme suivant est fondamental pour la démonstration de ce théorème.

Lemme 2.4.1 *[11]*
Soient $(E, \|.\|)$ *est un espace vectoriel normé, et* C *un sous ensemble non vide de* E *. Soit*

$g : C \to E$ une contraction . Alors $(I - g) : C \to (I - g)(C)$ est un homéomorphisme, où I désigne l'identité.

Démonstration :Lapplication $I - g$ est continue. En effet, $\forall x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|(I-g)(x)-(I-g)(y)\| &\leq \|x-y\|+\|g(x)-g(y)\| \\ &\leq \|x-y\|+k\|x-y\| \\ &\leq (1+k)\|x-y\| \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|(I-g)(x)-(I-g)(y)\| &= \|(x-y)-(g(x)-g(y))\| \\ &\geq \|x-y\|-\|g(x)-g(y)\| \\ &\geq \|x-y\|-k\|x-y\| \\ &\geq (1-k)\|x-y\|, \quad (0<k<1). \end{aligned}$$

Ceci montre que $(I - g)^{-1}$ existe et continue. ∎

Démonstration :(démonstration du théorème de Krasnoselskii)

Soit $y \in C$ fixé, d'aprés le théorème du point fixe de Banach, l'application $\Phi : C \to C$ définie par :

$$\Phi(x) = g(x) + f(y)$$

admet au moins un point fixe dans C.

L'application :

$$\begin{aligned} h : C &\to C \\ x &\to h(x) = (I-g)^{-1} \circ f(x) \end{aligned}$$

est continue, compacte et envoie C dans lui même. En effet,

h est une composition d'une application continue et compacte avec une application continue $(I - g)^{-1}$ est continue d'aprés le lemme précédent), donc compacte.

Par le théorème du point fixe de Schauder, h admet un point fixe dans C. ∎

Remarque 2.4.1 *Si $A = 0$ alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach et si $B = 0$ il coïncide avec le théorème de Schauder .*

Remarque 2.4.2 *En 1998, Burton constate que le théorème du point fixe de Krasnoselskii reste valable si on remplace le première condition par :*

$$\forall y \in C \quad (x = f(y) + g(x) \Rightarrow x \in C)$$

Théorème 2.4.2 *Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ un fermé, borné et convexe. Supposons que :*

1. *L'application $f : C \to E$, est compacte et continue.*
2. *L'application $g : C \to E$, est une contraction non linéaire.*
3. *$\forall x, y \in C$, $f(x) + g(y) \in C$. Alors, $f + g$ admet un point fixe dans C.*

Démonstration.Voir [11]

2.5 Théorie de l'indice du point fixe

Un des outils les plus importants de l'analyse fonctionnelle, non linéaire est le degré topologique de Leray-Schauder pour le champs des vecteurs compacts, définis sur la fermeture des sous-ensemble ouverts bornés dans les espaces de Banach. Cependant, en relation avec les applications non linéaire dans les espace de Banach ordonnés, il est naturel de considérer aussi les applications qui sont définies sur les sous-ensemble ouverts d'un cône positif (ces sous-ensemble sont ouverts par rapport à la topologie induite de l'espace tout entier).
Si le cône positif n'a pas de points intérieur (la plupart des cône de dimension infinie intéréssant-du point de vue des applications ont ce défaut), le degré de Leray-Schauder n'est pas immédiatement applicable.

Il est possible de définir " Lindice du point fixe" pour les applications compactes, définies dans le cône positif . Cet indice du point fixe est une extension de la notion du degré de Leray-Schauder.

dans ce suit, on donne les propriétés, les plus importantes de cet indice, on indique en particulier que l'indice du point fixe peut être dérivé du degré bien connu de Leray-schauder.

Définition 2.5.1 *Soit E un espace de Banach. On dit que $A \subset E$ est un rétracte de E s'il existe une application continue $r : E \to A$ telle que $r(x) = x, \forall x \in A$.*

Définition 2.5.2 *Toute partie convexe fermée de E est un rétracte de E, en particulier tout Cône $P \subset E$ est un rétracte de E.*

2.5.1 Axiomes de l'indice du point fixe

Théorème 2.5.1 *(**Définition axiomatique**)[17]*
Soit A un rétracte de l'espace de Banach E. Pour chaque sous-ensemble ouvert Ω de A et chaque application $f : \overline{\Omega} \to A$ compacte sans point fixe sur $\partial\Omega$, il existe un nombre entier $i(f, \Omega, A)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) ***Normalisation.*** $i(f, \Omega, A) = 1$ *si* $f(x) = y_0 = cte \in \Omega, \forall x \in \overline{\Omega}$.

(ii) ***Additivité.*** *Pour toute paire de sous-ensemble ouverts disjoints Ω_1, Ω_2 de Ω tel que f n'admet pas de point fixe sur $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, on a*

$$i(f, \Omega, A) = i(f, \Omega_1, A) + i(f, \Omega_2, A)$$

Où

$$i(f, \Omega_k, A) = i(f\backslash_{\overline{\Omega_k}}, \Omega_k, A), \quad k = 1, 2.$$

(iii) ***Invariance homotopie.*** *L'indice $i(h(x, t), \Omega, A)$ est indépendant du paramètre t, $0 \leq t \leq 1$ où $h : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to A$ est une application compacte et $h(x, t) \neq x$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et $0 \leq t \leq 1$.*
Plus généralement, on peut remplacer l'intervalle $[0, 1]$ par un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

(iv) ***Permanence.*** *Si Δ est une réctractée de A et $f(\overline{\Omega}) \subset \Delta$, alors*

$$i(f, \Omega, A) = i(f, \Omega \cap \Delta, \Delta)$$

Où

$$i(f, \Omega \cap \Delta, \Delta) = i(f\backslash_{\overline{\Omega \cap \Delta}}, \Omega, \Delta)$$

.

2.6 Théorèmes du point fixe dans les cônes

Théorème 2.6.1 *[17]*
Soient $P \subset E$ un cône et soit $\Omega_r = \{u \in P : \|u\| \leq r\}$. Supposons que $T : \Omega_r \to P$ est un opérateur complètement continu satisfaisant $Tu \neq u, \forall u \in \partial\Omega_r$. Alors :

(a) *Si $\|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in \partial\Omega_r$, alors l'indice de point fixe $i(T, \Omega_r, P) = 1$*

(b) *Si $\|Tu\| \geq \|u\|, \forall u \in \partial\Omega_r$, alors l'indice de point fixe $i(T, \Omega_r, P) = 0$*

Définition 2.6.1 *(opérateurs monotones)[7]*
Un opérateur $A : D \to E$ est dit croissant si $x_1 \leqslant x_2$, $(x_1, x_2 \in D)$ implique $Ax_1 \leqslant Ax_2$, et strictement croissant si $x_1 < x_2$ implique $Ax_1 < Ax_2$. De même est dit décroissant si $x_1 \leqslant x_2$ implique $Ax_1 \geqslant Ax_2$, et strictement décroissant si $x_1 < x_2$ implique $Ax_1 > Ax_2$.

Définition 2.6.2 *(L'opérateur concave)[7]*
Soit l'opérateur $A : P \to P$ et $e > \theta$. Supposons que pour tout $x > \theta$, il existe $\alpha = \alpha(x) > 0$ et $\beta = \beta(x) > 0$ tel que :

$$\alpha e \leqslant Ax \leqslant \beta e \tag{2.13}$$

Et pour tout $x \in P$ satisfaisant $\alpha_1 e \leqslant x \leqslant \beta_1 e \quad (\alpha_1 = \alpha_1(x) > 0, \beta_1 = \beta_1(x) > 0)$ et tout $0 < t < 1$, il existe $\eta = \eta(x, t) > 0$ tel que :

$$A(tx) \geqslant (1 + \eta)tAx \tag{2.14}$$

Ensuite, est appelé un opérateur e-concave.

Théorème 2.6.2 [*7*]
Si l'opérateur $A : P \to P$ est coissant et e-concave, il a alors au plus un point fixe positif

Démonstration. Suppons que $x_1 > \theta$ et $x_2 > \theta$ sont deux points fixes positifs de A. Ensuite par (2.13), nous voyons :

$$x_1 = Ax_1 \geqslant \alpha_1 e = \frac{\alpha_1}{\beta_2}\beta_2 e \geqslant \frac{\alpha_1}{\beta_2} Ax_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_2} x_2$$

Oú α_1 et β_2 sont des constantes positives. On a $t_0 = \sup\{t > 0/x_1 \geqslant tx_2\}$, nous voyons que $0 < t_0 < +\infty$.
Aussi maintenant, nous pouvons $t_0 \geqslant 1$, en fait si $0 < t_0 < 1$ alors par (2.14), il n'existe pas $\eta_0 > 0$ tel que :

$$x_1 = Ax_1 \geqslant A(t_0x_0) \geqslant (1+\eta_0)t_0Ax_2 = (1+\eta_0)t_0x_2$$

Ce qui contredit la définition de t_0, d'o $t_0 > 1$ et ainsi $x_2 \geqslant x_1$.
De même manière, nous pouvons prouver $x_2 \geqslant x_1$ ainsi $x_2 = x_1$ ■

Théorème 2.6.3 [7]
Soit l'opérateur $A : P \to P$ est croissant et e-concave, supposons que A a un point fixe soit positif $x^* \geq \theta$ et que le Cône P soit normal. Il existe alors $R > r > 0$ tel que :

1. $Ax \nleqslant x \quad \forall x \in P, 0 < \|x\| < r$
2. $Ax \nleqslant x \quad \forall x \in P, \|x\| > R$

Définition 2.6.3 *(L'opérateur convexe)*[7]
Soit l'opérateur $A : P \to P$ et $e > \theta$. Supposons que pour tout $x > \theta$, il existe $\alpha = \alpha(x) > 0$ et $\beta = \beta(x) > 0$ tel que :

$$\alpha e \leqslant Ax \leqslant \beta e$$

Et pour tout $x \in P$ satisfaisant $\alpha_1 e \leqslant x \leqslant \beta_1 e \quad (\alpha_1 = \alpha_1(x) > 0, \beta_1 = \beta_1(x) > 0)$ et tout $0 < t < 1$, il existe $\eta = \eta(x,t) > 0$ tel que :

$$A(tx) \leqslant (1-\eta)tAx$$

Ensuite, est appelé un opérateur e-convexe.

Théorème 2.6.4 [7]
Si l'opérateur $A : P \to P$ est e-convexe et e-croissant, alors A il ne peut pas avoir deux points fixes positifs comparables.

Démonstration. Supposons que A ait deux points fixes $x_1 > \theta$ et $x_2 > \theta$, qui sont comparables, par exemple $x_1 > x_2$. Puisque A est e-croissant, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$x_2 - x_1 = Ax_2 - Ax_1 \geqslant \alpha e$$

Par (2.13), nous avons

$$\alpha_2 e \leqslant x_2 = Ax_2 \leqslant \beta_2 e$$

O $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$ et donc

$$x_1 \leqslant (1 - \frac{\alpha}{\beta_2})x_2$$

Maintenant, on a $t_0 = inf\{t > 0/x_1 \leqslant tx_2\}$, nous voyons que :

$$0 < t_0 \leqslant 1 - \frac{\alpha}{\beta_2} < 1, x_1 \leqslant t_0 x_2$$

Ainsi par e-convexité de A, il existe un $\eta > 0$ tel que :

$$x_1 = Ax_1 \leqslant A(t_0 x_2) \leqslant (1-\eta)t_0 Ax_2 = (1-\eta)t_0 x_2$$

Ce qui contredit la définition de t_0.
Remarquez, selon les hypothèse du théorème (2.6.4), peut avoir de nombreux points fixes positifs bien *sûr*, ils ne sont pas comparables les uns aux autres. ■

2.6.1 Théorèmes Points fixes d'expansion et de la compression des Cônes

Dans ce qui suit, soit P un Cône de l'espace réel de Banach E. Par conséquent P est un retrait de E et P est également un ensemble fermé convexe étoilé. Soit Ω un ensemble ouvert borné de E, alors $P \cap \Omega$ est un ensemble ouvert borné de P et

$$\partial(P \cap \Omega) = P \cap \partial\Omega, \quad \overline{P \cap \Omega} = P \cap \overline{\Omega}$$

Lemme 2.6.1 *Soit $\theta \in \Omega$ et $A : P \cap \overline{\Omega} \to P$. Supposons que :*

$$Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega, \quad \mu \geqslant 1$$

Alors :

$$i(A, P \cap \Omega, P) = 1$$

Lemme 2.6.2 *Soit $A : P \cap \overline{\Omega} \to P$ être complètement continue. Supposons que :*

1. $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega} \|Ax\| > 0$

2. $Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega, \quad 0 < \mu \leqslant 1$

Alors :

$$i(A, P \cap \Omega, P) = 0$$

est vérifier.

Corollaire 2.6.1 *Soit $A : P \cap \overline{\Omega} \to P$ être complètement continue. S'il existe un $u_0 > \theta$ tel que :*

$$x - Ax \neq tu_0, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega, \quad t \geqslant 0$$

Alors $i(A, P \cap \Omega, P) = 0$ est valable.

Théorème 2.6.5 *(Théorème à point fixe de l'expansion et de la compression des Cônes) Soit Ω_1 et Ω_2 deux ensembles ouverts bornés dans E tels que $\theta \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Soit l'opérateur $A : P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1) \to P$, soit complètement continu. Supposons que l'une des deux coditions :*

(C_1) $Ax \ngeqslant x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $Ax \nleqslant x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$

(C_2) $Ax \nleqslant x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $Ax \ngeqslant tx, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$

Satisfait, alors A a au moins un point fixe dans $P \cap (\Omega_2/\overline{\Omega_1})$

Démonstration.Par le théorème d'extension, A a une extension complètement continue(également désignée par A) de $P \cap \overline{\Omega_2}$ en P.
Premièrement, nous supposons que (C_1) est satisfait c'est-à-dire c'est le cas de l'extension du Cône, il est facile de voir que :

$$Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1, \quad \mu \geqslant 1 \tag{2.15}$$

Autrement, il existe $x_0 \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\mu_0 \geqslant 1$ tels que $Ax_0 = \mu_0 x_0 \geqslant x_0$, dans contraduction avec (C_1), maintenant à partir de (2.15) et du lemme(2.6.1) nous obtenons :

$$i(A, P \cap \Omega_1, P) = 1 \tag{2.16}$$

Par contre, en choisissant un arbitraire $\mu_0 > \theta$, nous avons

$$x - Ax \neq t\mu_0, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2, \quad t \geqslant 0 \tag{2.17}$$

En fait, s'il existe $x_1 \in P \cap \partial\Omega_2$ tels que $x_1 - Ax_1 = t_1\mu_0 \geqslant \theta$, alors $x_1 \geqslant Ax_1$ en contraduction avec (C_1), par consent par (2.17) et corrollaire(2.6.1), nous avons :

$$i(A, P \cap \Omega_2, P) = 0 \tag{2.18}$$

Il découle donc (2.16),(2.18) et du propriété d'additivité de l'indice à point fixe que :

$$i(A, P \cap (\Omega_2/\overline{\Omega_1}, P) = i(A, P \cap \Omega_2, P) - i(A, P \cap \Omega_1, P) = -1 \neq 0 \tag{2.19}$$

Par conséquent, par la propriété solution d'indice de point fixe A a au moins un point fixe dans $\Omega_2/\overline{\Omega_1}$
De même, l'orsque (C_2) est satisfait au lieu de (2.16), (2.18) et (2.19) nous avons :

$$i(A, P \cap \Omega_1, P) = 0, \quad i(A, P \cap \Omega_2, P) = 1 \quad et \quad i(A, P \cap (\Omega_2/\overline{\Omega_1}, P) = 1$$

par conséquent, nous pouvons également affirmer que A a au moins un point fixe dans $\Omega_2/\overline{\Omega_1}$. ■

Théorème 2.6.6 *(Théorème à point fixe de l'expansion et de la compression des Cônes de type normalisé)*
Soit Ω_1 et Ω_2 deux ensembles ouverts bornés dans E tels que $\theta \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Soit l'opérateur $A : P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1) \to P$, soit complètement continu. Supposons que l'une des deux coditions :

(C_3) $\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$

(C_4) $\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Ax\| \leq \|x\| \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$

sont Satisfait, alors A a au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$

Démonstration. : Il suffit de prouver ce théorème sous la condition (C_3), car la preuve est similaire lorsque (C_4) est satisfait. Par le théorème d'extension A peut être étendu à

opérateur complètement continu de $P \cap \overline{\Omega_2}$ en P. Nous pouvons supposer que A n'a pas de points fixes sur $P \cap \partial\Omega_1$ et $P \cap \partial\Omega_2$. Il est facile de voir que (2.15) est valable car sinon, il existe $x_0 \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\mu_0 > 1$ tel que $Ax_0 = \mu_0 x_0$ et donc $\|Ax_0\| = \mu_0\|x_0\| > \|x_0\|$ en contraduction avec (C_3). Ainsi par (2.15) et lemme(2.6.1),(2.16) est vrai.
D'autre part, il est également facile de vérifier.

$$Ax \neq \mu x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2, \quad 0 < \mu \leqslant 1 \tag{2.20}$$

En fait, s'il ya $x_1 \cap P \in \partial\Omega_2$ et $0 < \mu_1 < 1$ tel que $Ax_1 = \mu_1 x_1$ alors $\|Ax_1\| = \mu_1\|x_1\| < \|x_1\|$, en contradiction avec (C_3), de plus par (C_3) nous avons :

$$\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \|Ax\| \geqslant \inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \|x\| > 0 \tag{2.21}$$

Il résulte de (2.20),(2.21) et lemme(2.6.2) que (2.18) et vrai. Comme précédemment (2.16) et (2.18) impliquent (2.19) et donc A a au moins un point fixe dans $\Omega_2/\overline{\Omega_1}$. ■

Théorème 2.6.7 *Supposons que l'opérateur $A : P \to P$ soit complètement continu et $A\theta = \theta$. Supposons que l'une des deux condition :*

$$(C_5) \quad \lim_{x \in P, \|x\| \to 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0, \qquad \lim_{x \in P, \|x\| \to +\infty} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty$$

$$(C_6) \quad \lim_{x \in P, \|x\| \to 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty, \qquad \lim_{x \in P, \|x\| \to +\infty} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$$

est satisfaite, les deux conclusion suivantes sont donc valables :

a) Chaque $\mu > 0$ est un valeur propre de A, qui correspond à un vecteur propre positif, c'est-à-dire qu'il existe $x_\mu > \theta$ tel que $Ax_\mu = \mu x_\mu$.

b) $\lim_{\mu \to +\infty} \|x_\mu\| = +\infty$ sous (C_5) et $\lim_{\mu \to +\infty} \|x_\mu\| = 0$ sous (C_6)

Démonstration. :Il suffit de prouver ce th sous la condition (C_5), puisque la dnstration est similaire lorsque (C_6) est satisfaite. Pour $\mu > 0$ donnn vertu de (C_5), il existe $R > r > 0$ tel que :

1. $\|\frac{1}{\mu}Ax\| < \|x\|, \quad \forall x \in P, \quad \|x\| = r.$

2. $\|\frac{1}{\mu}Ax\| > \|x\|, \quad \forall x \in P, \quad \|x\| = R.$

D'oú la condition (C_6) du th (2.6.6) est satisfaite pour l'opérateur $1/\mu\ A$ et $\Omega_1 = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$, $\Omega_2 = \{x \in E \mid \|x\| < R\}$. Il dule donc du th (2.6.6) que l'opérateur $1/\mu\ A$ a un point fixe x_μ en $\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1$, ce qui prouve la conclusion a).
Pour prouver $\|x_\mu\| \to +\infty$ tel que $\mu \to +\infty$ i.e conclusion b).
Supposons que ce n'est pas vrai. Alors il existe un nombre $c > 0$ et une suite $\mu_n \to +\infty$ tel que :

$$\|x_{\mu_n}\| \leq c \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

De plus, la suite $\{\|x_{\mu_n}\|\}$ contient une sous-suite qui converge vers un nombre T $(0 \leq T \leq c)$. Par souci de simplicitupposons que $\{\|x_{\mu_n}\|\}$ converge lui-m vers T.
Si $T > 0$, alors $\|x_{\mu_n}\| > T/2$ pour n suffisamment grand (disons $n > N$), et donc

$$\mu_n = \frac{\|Ax_{\mu_n}\|}{\|x_{\mu_n}\|} \leq \frac{2M}{T} \quad (n > N)$$

Où $M = \sup\limits_{\|x\| \leq c} \|Ax\|$, ce qui contredit $\mu_n \to +\infty$.
Si $T = 0$, alors de (C_5) nous avons :

$$\mu_n = \frac{\|Ax_{\mu_n}\|}{\|x_{\mu_n}\|} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

en contradiction avec $\mu_n \to +\infty$, par consent $\|x_\mu\| \to +\infty$, tel que $\mu \to +\infty$ et notre preuve est complète. ∎

Nous rappelons ici deux versions du théorème de point fixe de Krasnoselskii dans un cône.

1. **Version Scalaire** :

   Théorème 2.6.8 *[7]*
   Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé, $K \subset E$ un cône, $0 < r < R$ deux nombre réels et $K_{r,R} = \{u \in K : r \leq u \leq R\}$. Soit $T : K_{r,R} \to K$ une application compacte telle que l'une des conditions suivantes soit vérifiée

(a) $\|Tu\| \leq \|u\|$ *si* $\|u\| = r$ *et* $\|Tu\| \geq \|u\|$ *si* $\|u\| = R$ *;*

(b) $\|Tu\| \geq \|u\|$ *si* $\|u\| = r$ *et* $\|Tu\| \leq \|u\|$ *si* $\|u\| = R$

Alors T *possède un point fixe* u *dans* $K_{r,R}$.

Théorème 2.6.9 *[7]*
Soient $(E, \|.\|)$ *un espace normé,* $K \subset E$ *un cône,* $0 < r < R$ *deux nombre réels et* $K_{r,R} = \{u \in K : r \leq u \leq R\}$. *Soit* $T : K_{r,R} \to K$ *une application compacte telle que l'une des conditions suivantes soit vérifiée*

(a) $Tu \leq \|u\|$ *si* $\|u\| = r$ *et* $Tu \geq u$ *si* $\|u\| = R$ *;*

(b) $Tu \geq u$ *si* $\|u\| = r$ *et* $Tu \leq u$ *si* $\|u\| = R$

Alors T *possède un point fixe* u *dans* $K_{r,R}$.

2. **Version vectorielle** :
Maintenant nous allons rappeler la version vectorielle du théorème de point fixe de Krasnoselskii dans un cône.
Avant cela, nous allons introduire quelques notations. Considérons n cônes K_i, $(i = 1, ..., n)$ de E et leur cône produit correspondant $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_N$ de E^n.
Pour $r, R \in R_+^n, r = (r_1, r_2, ..., r_n)$, $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$, on écrit $0 < r < R$ si $0 < r_i < R$ $(i = 1, .., n)$, et on a les notations :

$$(K_i)_{r_1,R_1} = \{u_i \in K_i, r_i \leq \|u\| \leq R_i \quad pour i = 1, 2, ..., n\}$$

Clairement, $K_{r,R} = (K_1)_{r_1,R_1} \times K_{r,R} = (K_1)_{r_1,R_2} \times .... \times K_{r,R} = (K_n)_{r_n,R_n}$.

Théorème 2.6.10 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace normé,* $K_1, K_2, ..., K_n \subset E$ *n cône,* $K = K_1 \times K_2 \times .... \times K_n$ *et* $r = (r_1 \times r_2 \times .... \times r_n)$, $R = (R_1 \times R_2 \times .... \times R_n) \in (R_+)^n$ *avec* $0 < r < R$.
Soit $T = (T_1, T_2, ..., T_n) : K_{r,R} \to K$ *une application compacte. Supposons que pour chaque* $i \in \{1, 2, .., n\}$, *l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

(a) $T_i u \not< u_i$ *si* $\|u_i\| = r_i$ *et* $Tu_i \not> \|u_i\|$ *si* $\|u_i\| = R_i$ *;*

(b) $T_i u \not> u_i$ *si* $\|u_i\| = r_i$ *et* $Tu_i \not< u_i$ *si* $\|u_i\| = R_i$.

Alors T poss un point fixe $u = (u_1, u_1, ..., u_n) \in K_{r,R}$

Chapitre 3

Application

3.1 Introduction

Le calcul fractionnaire apparaît dans de nombreux domaines de l'ingénierie et des sciences comme la rhéologie, la viscoélasticité, l'électrochimie, l'électromagnétisme, etc. De nombreux livres et monographies différents sont consacrés au développement du calcul fractionné. L'intérêt de l'étude des équation différentielles d'ordre fractionnaire réside dans le fait qu'il ya plus de degrés de liberté dans les modèles d'ordre fractionnaire. En outre, les dérivés fractionnaires fournissent un excellent instrument pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de divers matériaux et processus. Les conditions aux limites intégrales ont diverses applications dans des domaines appliqués tels que les problèmes de circulation sanguine, le génie chimique, la dynamique des populations, etc. Comme dans la dynamique des populations, de nombreux domaines du génie et ses sciences focalisent leur L'intet sur l'existence de solutions positives, dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions positives de l'équation différentielle fractionnelle suivante avec les conditions aux limites intégrales.

$$D^{\delta}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \delta \leq 2 \tag{3.1}$$

$$u(0) = 0, \int_0^1 u(s)ds = u(1) \tag{3.2}$$

où D^{δ} est la dérivée fractionnaire de Riemann-liouville, f est une fonction donnée. Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous rappelons quelques définitions concernant l'intégrales et les dérivée fractionnaires, et les propriétés de base associées qui seront utilisées dans la suite. Nous considérons un problème auxiliaire pour dériver la fonction de Green. Nos principaux résultats d'existence sont donnés dans la section 3. Quelques exemples sont donnés dans la dernière section.

3.2 Préliminaires

Nous présentons ici quelques connaissances de base pour le calcul fractionnaire qui seront utilisées dans la suite.

Lemme 3.2.1 *Soit $\delta > 0$, alors l'equation différentielle fractionnelle :*

$$D^{\delta}u(t) = 0$$

A une solution unique donnée par :

$$u(t) = c_1 t^{\delta-1} + c_2 t^{\delta-2} + \ldots + c_n t^{\delta-n}, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$$

où $i = 1, ..., n$ et

$$n = \begin{cases} [\delta] + 1, & si\ n \in \{0, 1, 2, ...\}; \\ \delta & si\ n \notin \{0, 1, 2, ...\}. \end{cases}$$

Du lemme(3.2.1)*, on déduit le lemme suivant.*

Lemme 3.2.2 *Soit $\delta > 0$, alors :*

$$I^{\delta}(D^{\delta}u(t)) = u(t) + c_1 t^{\delta-1} + c_2 t^{\delta-2} + \ldots + c_n t^{\delta-n}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

où : $i = 1, ..., n$ et n donnée dans lemme (3.2.1)

Nous commençons par résoudre un problème auxiliaire pour obtenir une expression de la fonction de Green du problème des valeurs limites (3.1)-(3.2)*.*

Lemme 3.2.3 *Soit $1 < \delta \leq 2$. Supposons que $\sigma \in C[0, 1]$. Une fonction $u \in C[0, 1]$ est une solution du problème :*

$$D^{\delta}u(t) + \sigma(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \delta \leq 2 \tag{3.3}$$

$$u(0)=0, \int_0^1 u(s)ds = u(1) \tag{3.4}$$

si et seulement si elle satisfait l'équation intégrale :

$$u(t)=\int_0^1 G_\delta(t,s)\sigma(s)ds$$

Où $G_\delta(t,s)$ est la fonction de Green donnée par :

$$G_\delta(t,s)=\begin{cases} \frac{t^{\delta-1}(1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)+(1-\delta)(t-s)^{\delta-1}}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} & 0\leq s\leq t\leq 1; \\ \frac{t^{\delta-1}(1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} & 0\leq t\leq s\leq 1 \end{cases}$$

Démonstration : De lemme (3.2.2) le probléme $(3.3)-(3.4)$ est équivalent a l'équation intégrale

$$u(t)=-\int_0^t \frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds + c_1 t^{\delta-1} + c_2 t^{\delta-2}$$

La condition $u(0)=0$ implique nécessairement que $c_2=0$.
De $\int_0^1 u(s)ds = u(1)$ on en déduit

$$c_1=\int_0^1 u(s)ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds$$

enfin nous avons l'expression suivante :

$$u(t)=-\int_0^1 \frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds + t^{\delta-1}\int_0^1 u(s)ds + t^{\delta-1}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds \tag{3.5}$$

de légalité précédente, nous en déduisons

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(s)ds &= -\int_0^1\int_0^t \frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sigma(s)dsdt + \int_0^1\int_0^1 t^{\delta-1}u(s)dsdt \\ &+ \int_0^1\int_0^1 t^{\delta-1}\frac{(1-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sigma(s)dsdt \\ &= -\int \frac{(1-s)^{\delta}}{\delta\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds + \frac{1}{\delta}\int_0^1 u(s)ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\delta-1}}{\delta\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds \end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$\int_0^1 u(s)ds = -\int_0^1 \frac{(1-s)^\delta}{(\delta-1)\Gamma(\delta)}\sigma(s) + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\delta-1}}{(1-s)^{\delta-1}}$$

En remplacant cette valeur dans l'equation (3.5) on arrive a léxpression suivante pour la fonction u :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\int_0^t \frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds + t^{\delta-1}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)}{(\delta-1)\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds \\ &= \int_0^t \frac{(1-\delta)(t-s)^{\delta-1} + t^{\delta-1}(1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)}{(\delta-1)\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds \\ &+ \int_t^1 \frac{t^{\delta-1}(s+\delta-1)}{(\delta-1)\Gamma(\delta)}\sigma(s)ds \\ &= \int_0^1 G_\delta(t,s)\sigma(s)ds. \end{aligned}$$

cela compléte la preuve. ■

Lemme 3.2.4 *On a* $1 < \delta \leq 2$. *Soit* $G_\delta(t,s)$ *la fonction de Green liée au problème* (3.1)-(3.2). *Alors les inégalités suivantes sont valables :*

$$t^{\delta-1}G_\delta(1,s) \leq G_\delta(t,s) \leq \delta G_\delta(1,s), \quad \textit{pour tout} \quad t,s \in (0,1)$$

Démonstration : Supposons dans un premier temps que $0 < t \leq s < 1$. Dans un tel cas :

$$h(t,s) \equiv \frac{G_\delta(t,s)}{G_\delta(1,s)} = \frac{t^{\delta-1}(s+\delta-1)}{s}, \quad \text{pour tout} \quad 0 < t \leq s < 1$$

Maintenant, il est immédiat de vérifier les inégalités suivantes :

$$t^{\delta-1} < t^{\delta-1}(1 + \frac{\delta-1}{s}) = h(t,s) \leq \delta t^{\delta-1} < \delta, \quad \text{pour tout} \quad 0 < t \leq s < 1$$

D'un notre coté, si $0 < s \leq t < 1$ nous avons :

$$h(t,s) = \frac{t^{\delta-1}(1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1) - (\delta-1)(t-s)^{\delta-1}}{s(1-s)^{\delta-1}} \quad \text{pour tout} \quad 0 < s \leq t < 1$$

et puisque $s \geq ts$, On déduit que :

$$h(t,s) \geq \frac{t^{\delta-1}(1-s)^{\delta-1}[(s+\delta-1)-(\delta-1)]}{s} = t^{\delta-1}$$

Comme dans le cas précédent, il n'est pas difficile de vérifier que $h(t,s) \leq \delta$ à chaque fois $0 < s \leq t < 1$. ■

Du corollaire du résultat précédent, nous déduisons ce qui suit :

Corollaire 3.2.1 *Soit G_δ la fonction de Green liée au problème* (3.1)-(3.2).
Alors pour tout $1 < \delta \leq 2$, les inégalités suivantes sont valables :

$$0 < G_\delta(t,s) < \frac{\delta}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \quad \textit{pour tout} \quad t,s \in (0,1)$$

3.3 Existence de solutions positives

Cette section est consacrée à prouver l'existence d'une solution positive du problème des valeurs aux limites non linéaires (3.1)-(3.2). Pour énoncer les principaux résultats de ce chapitre, nous utilisons le théorème de point fixe de Guo-Krasnoselskii suivant.

Théorème 3.3.1 *Soit E un espace de Banach, et soit $P \subset E$ un Cône dans E. Supposons que Ω_1, Ω_2 sont des sous-ensembles ouverts de E avec $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_2} \subset \Omega_2$, et que $T : P \to P$ soit un opérateur complètement continu tel que :*

1. $\|Tu\| \geq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Tu\| \leq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_2$
2. $\|Tu\| \leq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Tu\| \geq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_2$

Alors T a un point fixe dans $p \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.
Soit $E = C[0,1]$ l'espace de Banach munit de la norme Sup $\|.\|$ et définir le Cône $P \in E$ comme suit :

$$P = \left\{ u \in E, u(t) \geq 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0,1], u(t) \geq \frac{t^{\delta-1}}{\delta}\|u\|, \quad \textit{pour tout} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$$

Lemme 3.3.1 *Supposons que* $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *est continu et définit l'opérateur* $T : E \to E$ *comme :*

$$Tu(t) = \int_0^1 G_\delta(t,s) f(s,u(s))ds$$

Où G_δ *la fonction de Green liée au problème* (3.1)-(3.2), *alors* $T : P \to P$ *est complétement continu.*

Démonstration :

1. On montre d'abord que $TP \subset P$.
   Il résulte de la continuité et de la non négativité des fonction G_δ et f sur leurs domaines de définitions que si $u \in P$ alors $Tu \in E$ et $Tu(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$.
   Pour un fixe $u \in P$ et pour tout $t \in [0,1]$, en utilisant le lemme (3.2.4), les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G_\delta(t,s) f(s,u(s))ds \\ &\geq t^{\delta-1} \int_0^1 G_\delta(1,s) f(s,u(s))ds \\ &\geq \frac{t^{\delta-1}}{\delta} \int_0^1 \max_{t\in[0,1]} G_\delta(t,s) f(s,u(s))ds \\ &\geq \frac{t^{\delta-1}}{\delta} \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G_\delta(t,s) f(s,u(s))ds \\ &\geq \frac{t^{\delta-1}}{\delta} \|Tu\| \end{aligned}$$

2. compte tenu de la continuité des fonctions G_δ et f l'opérateur $T : P \to P$ est continue .
   Soit $\Omega \subset P$ est borné, Il existe une constante positive $M > 0$ tel que $\|u\| \leq M$ pour tous $u \in \Omega$. Posons

$$L := \sup_{0\leq t\leq 1, 0\leq u\leq M} |f(t,u)| + 1$$

alors pour tout $u \in \Omega$, on a

$$|Tu(t)| \leq L \int |G_\delta(t,s)|ds \leq LM^*, \quad t \in [0,1]$$

donc $T(\Omega)$ est borné dans P .

3. pour tout $u \in \Omega$, et $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$ on a :

$$\begin{aligned}
|[Tu](t_2) - [Tu](t_1)| &= |\int_0^1 G_\delta(t_2,s)f(s,u(s))ds - \int_0^1 G_\delta(t_1,s)f(s,u(s))ds| \\
&= \int_0^{t_1} \frac{[t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta-1}](1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} f(s,u(s))ds \\
&+ \int_0^{t_1} \frac{(1-\delta)[(t_2-s)^{\delta-1} - (t_1-s)^{\delta-1}]}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} f(s,u(s))ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{[t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta-1}](1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} f(s,u(s))ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(1-\delta)(t_2-s)^{\delta-1}}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} f(s,u(s))ds \\
&+ \int_{t_2}^{1} \frac{[t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta} - 1](1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} f(s,u(s))ds \\
&\leq \frac{L|t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta-1}|}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \int_0^{t_1} (1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)ds \\
&+ \frac{L|1-\delta|}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \int_0^{t_1} |(t_2-s)^{\delta-1} - (t_1-s)^{\delta-1}|ds \\
&+ \frac{L|t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta-1}|}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \int_{t_1}^{t_2} (1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)ds \\
&+ \frac{L|1-\delta|}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\delta-1}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{L|t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta-1}}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \int_{t_2}^{1} (1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)ds \\
&= \frac{L\mathfrak{B}}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} |t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta-1}| \\
&+ \frac{L}{\Gamma(\delta)} \int_0^{t_1} |(t_2-s)^{\delta-1} - (t_1-s)^{\delta-1}| ds \\
&+ \frac{L}{\Gamma(\delta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\delta-1} ds
\end{aligned}
$$

Où

$$\mathfrak{B} = \int_0^1 (1-s)^{\delta-1}(s+\delta-1)ds = \tfrac{\delta}{\delta+1} < \infty$$

Notons que

$$\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\delta-1} ds = \frac{(t_2-t_1)^\delta}{\delta}$$

pour $t_1 < t_2$, on'a $(t_1-s)^{\delta-1} < (t_2-s)^{\delta-1}$, Alors :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_1} |(t_2-s)^{\delta-1} - (t_1-s)^{\delta-1}| ds &= \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\delta-1} - (t_1-s)^{\delta-1}] ds \\
&= (-1)\frac{(t_2-t_1)^\delta}{\delta} + \frac{t_2^\delta}{\delta} - \frac{t_1^\delta}{\delta}
\end{aligned}
$$

par conséquence, pour $u \in \Omega$, et $t_1, t_2 \in [0,1]$, avec $t_1 < t_2$

$$
\begin{aligned}
|[Tu](t_2) - [Tu](t_1)| &= \frac{L\mathfrak{B}}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} |t_2^{\delta-1} - t_1^{\delta-1}| + \frac{L}{\delta\Gamma(\delta)} (t_2^\delta - t_1^\delta - (t_2-t_1)^\delta) \\
&+ \frac{L}{\delta\Gamma(\delta)} (t_2-t_1)^\delta
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que L'application $t \to t^\delta$ soit uniformément continue sur $[0,1]$ on déduit que le côté droit de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $|t_1 - t_2| \to 0$

et donc l'ensemble $T(\Omega)$ est équicontinu sur P. Maintenant du théorème d'Arzelà-Ascoli nous concluons que l'ensemble $\overline{T(\Omega)}$ est compact. d'où l'opérateur $T : P \to P$ est complètement continu. La preuve est ainsi complète. ■

Maintenent nous pouvons indiquer notre résultat principal pour ce chapitre, définir :

$$f_0 = \lim_{u \to 0^+} \min_{t \in [1/2,1]} \frac{f(t,u)}{u}, \quad f_0^* = \lim_{u \to 0^+} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u}$$

$$f_\infty = \lim_{u \to \infty} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u}, \quad f_\infty^* = \lim_{u \to \infty} \min_{t \in [1/2,1]} \frac{f(t,u)}{u}$$

Théorème 3.3.2 *Supposons que $f(t,u)$ soit continue sur $[0,1] \times [0,\infty]$ et remplit l'une des conditions suivantes :*

(i) *(cas sublinéaire)* $f_0 = \infty$ *et* $f_\infty = 0$

(ii) *(cas superlinéaire)* $f_0^* = 0$ *et* $f_\infty^* = \infty$

Alors le problème (3.1)-(3.2) *admet au moins une solution positive.*

Démonstration :

(i) (cas sublinéaire) : $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$

Puisque $f_0 = \infty$, alors il existe une constante $\rho_1 > 0$ telle que $f(t,u) \geq \delta_1 u$ pout tout $0 < u \leq \rho_1$, où $\delta_1 > 0$ satisfait :

$$\frac{\delta_1}{\delta} \max_{t \in [0,1]} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^{1} s^{\delta-1} G_\delta(t,s) ds \right\} \geq 1 \tag{3.6}$$

Prendre $u \in P$, tel que $\|u\| = \rho_1$, de l'expression (3.6) on déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \underset{t\in[0,1]}{max}\left\{\int_0^1 G_\delta(t,s)f(s,u(s))ds\right\}\\
&\geq \delta_1 \underset{t\in[0,1]}{max}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^1 G_\delta(t,s)u(s)ds\right\}\\
&\geq \frac{\delta_1}{\delta}\|u\|\underset{t\in[0,1]}{max}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^1 s^{\delta-1}G_\delta(t,s)ds\right\}\\
&\geq \|u\|
\end{aligned}$$

Puisque $f(t,.)$ est une fonction continue sur $[0,\infty)$, nous pouvons définir la fonction suivante :

$$\widetilde{f}(t,u) = \max_{z\in[0,u]} f(t,z)$$

Clairement $\widetilde{f}(t,u)$ non décroissant on $[0,\infty)$, de plus puisque $f_\infty = 0$ il est évident que :

$$\underset{u\to\infty}{lim}\max_{t\in[0,1]}\frac{\widetilde{f}(t,u)}{u} = 0$$

Choisissez $\delta_2 > 0$ tel que :

$$\frac{\delta_2\delta}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \leq 1 \tag{3.7}$$

il existe donc une constante $\rho_2 > \rho_1 > 0$ tel que $\widetilde{f}(t,u) \leq \delta_2 u$ pour tout $u \geq \rho_2$. Poson maintenant $u \in P$, tel que $\|u\| = \rho_2$, alors à partir de la définition de $\widetilde{f}$. De equation (3.7) du choix de δ_2 et du corollaire (3.2.1), nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{t\in[0,1]} \left\{ \int_0^1 G_\delta(t,s) f(s,u(s)) ds \right\} \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \left\{ \int_0^1 G_\delta(t,s) \widetilde{f}(s,\|u\|) ds \right\} \\
&\leq \delta_2 \|u\| \max_{t\in[0,1]} \left\{ \int_0^1 G_\delta(t,s) ds \right\} \\
&\leq \frac{\delta_2 \delta}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \|u\| \\
&\leq \|u\|
\end{aligned}$$

Ainsi, par la première partie du théorème de Guo-Krasnoselskii, nous concluons que le problème (3.1)-(3.2) a au moins une solution positive u telle que $\rho_1 \leq \|u\| \leq \rho_2$.

(ii) Considérons maintenant le deuxième cas (ii)
Soit $\delta_2 > 0$ est donné comme dans eq (3.7) .
Comme $f^0 = 0$, il existe une constante $r_1 > 0$ tel que $f(t,u) \leq \delta_2 u$ pour $0 \leq u \leq r_1$.
Soit $u \in P$, tel que $\|u\| = r_1$. Ensuite nous avons :

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{t\in[0,1]} \{ \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s)) ds \} \\
&\leq \delta_2 \|u\| \max_{t\in[0,1]} \{ \int_0^1 G(t,s) ds \} \\
&\leq \frac{\delta_2 \delta}{(\delta-1)\Gamma(\delta)} \|u\| \\
&\leq \|u\|.
\end{aligned}$$

Considérez maintenant $\delta_3 > 0$ satisfaisant :

$$\frac{\delta_3}{2^{\delta-1}\delta} \max_{t\in[0,1]} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 G(t,s) ds \right\} \geq 1. \tag{3.8}$$

le fait que $f_\infty = \infty$ nous dit qu'il existe une constante $r_2 > r_1 > 0$ avec $r_2\delta 2^{\delta-1} > r_1$ tel que $f(t,u) \geq \delta_3 u$ pour tous $u \geq r_2$.
Soit $u \in P$ tel que $\|u\| = r_2\delta 2^{\delta-1}$. Notez que d'après la définition du cône P , nous avons $u(t) \geq r_2$ pour tous $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Alors, condition (ii) nous donne les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \underset{t\in[0,1]}{max}\left\{\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds\right\} \\
&\leq \underset{t\in[0,1]}{max}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^1 G(t,s)f(s,u(s))ds\right\} \\
&\leq \delta_3 \underset{t\in[0,1]}{max}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^1 G(t,s)u(s)ds\right\} \\
&= \frac{\delta_3}{2^{\delta-1}\delta}\|u\| \underset{t\in[0,1]}{max}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^1 G(t,s)ds\right\} \geq \|u\|.
\end{aligned}$$

Donc, par la deuxième partie du théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii , nous concluons que le problème (3.1)-(3.2) a au moins une solution positive. ■

3.4 Exemples

Exemples 3.4.1 *Considns le problème des valeurs aux limites fractionnelles :*

$$D^{3/2}u(t) + e^{-u(t)} + \sqrt{u(t)} = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.9}$$

$$u(0) = 0, \quad \int_0^1 u(s)ds = u(1) \tag{3.10}$$

On peut facilement voir que pour tout $u > 0$.

$$\begin{aligned}
f_0 &= \underset{u\to 0^+}{lim} \min_{t\in[1/2,1]} \frac{f(t,u)}{u} = \infty \\
f_\infty &= \underset{u\to\infty}{lim} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = 0
\end{aligned}$$

A partir de la première partie du théorème (3.3.2)*, nous obtenons que le problème* (3.9)-(3.10) *a une solution positive.*

Exemples 3.4.2 *Considérons le problème des valeurs aux limites fractionnelles :*

$$D^{3/2}u(t) + e^{u(t)} + u^2(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.11}$$

$$u(0) = 0, \quad \int_0^1 u(s)ds = u(1) \tag{3.12}$$

On peut facilement voir que pour tout $u > 0$.

$$\begin{aligned} f_0 &= \lim_{u\to 0^+} \min_{t\in[1/2,1]} \frac{f(t,u)}{u} = 0 \\ f_\infty &= \lim_{u\to\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = \infty \end{aligned}$$

A partir de la seconde partie du théorème (3.3.2)*, nous obtenons que le problème* (3.11)-(3.12) *a une solution positive.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on va présenter quelques théorèmes de point fixe tels que, le théorème de Banach, de Brouwer, de Schauder et on accordera plus d'importance aux théorème de Krasnoselskii.

On va commencer par rappelé quelques notions de base de l'analyse fractionnelles et de résultat connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail, ensuite on va étudier quelques théorèmes de point fixe, et on va parler d'un théorème de Krasnoselskii qui est utilisé pour prouver l'existence de la solution des équations différentielles et les équations intégrales non-linéaire.

Bibliographie

[1] H.Abbas, M.Belmekii, A.Cabada, *Positive solutions for fractional boundary value problems with integral boundary conditions.*

[2] C.Avermescu, *Some remarks on a fixed point theorem of Krasnoselskii*, EJQTDE, 5(2003)1-15.

[3] B.Benali, *Recherche de l'opérateur de Green pour quelques problèmes de physique mathématiques par la méthode des perturbations*, thèse de doctorat, université de Mohamed Khider-Biskra,(2015).

[4] T.A.Burtun, *A fixed point theorem of Krasnoselskii*, Appl.Math.Lelt 11(1)(1995) 85-88.

[5] A.Cabada.G.Wang, *positive solution of nonlinear fractional differential equation with integral boundary value condition* J.Math.Anal.Application 389(1)(2012).

[6] F.Dubois, A.C Galucio et N.point, *Introduction à la dérivation fractionnaire conservatoire National des Arts et Metiers.* Paris, France(2008).

[7] D.GuoA, V.Lakshmikantham, *Nonlinear problems in Abstract cones*,P.INC (1988)1-126.

[8] A.A.A.Kilbas, *Theory and Applications of fractional Defferential equations.*

[9] J.M.Kimeu, *Fractional Calculs : Definition and Applications*, Western Kentucky university,(2009).

[10] M.A.Krasnoselskii, Amer.Math.Soc.Transi(1958).

[11] F.Laaiadi, Le Théorème de point fixe de Krasonoselskii et ses Application au Equation Différentielle Impulsive . Mémoire De Master -Université d'Adrar -

[12] W.R.Melvin, *somme extensions of Krasnoselskii fixed point theorem*, J.Diff.Eq 11(1972) 335-348

[13] K.S.Miller and Ross, *An introduction to the Fractional calculs and Fractional Differential equation.* John wiley ans sous, INC, New york, B(1993).

[14] S.Y.Mokhtari, *Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire.*Memoire de Magister Universite Badji Mokhtar -Annaba-(2012).

[15] I.Podlubny,*Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego,(1999).

[16] D.O'Regan, *Fixed point theorems for the sum of two operators*, Appl.Math 9(1)(1996).

[17] A.SAADI, *Existence de solutions positives pour certaines classes d'equations diffntielles d'ordre fractionnaire*, Th de doctorat, universit Science et de la Technologie Houari-Boumedi,(2016).

[18] V.M.sehgal and S.P.singh, *Fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex-spaces*, Pacific J.Math 62(1976)

[19] S.G.Smarko,A.A.Kilbas, and O.I.Marichev,*Fractional intals and Derivatives theory and Application*, Gordon and Breach, Yverdon,(1993).

[20] D.R.Smart,*Fixed point theorems*, cambridge university Press (1974).

[21] T.Xiang, R.Yuan, *A class of expansive type Krasnoselskii fixed point theorems nonlinear* Analysis 71(2009)3229-3239

[22] P.P.Zabreiko, R.N.Krasnoselskii, and M.A.O Krasnoselskii, *On a fixed point principal for operators in hilbert spaces*, Funk.Anal.Prilojemia 1,2(1967)168-169.

[23] S.Zhang, *Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equation*, Electrom.J.Diff.Eqy, (2006)No.36.1-12.

[24] D.Ziane, *Etude de l'existance et de la stabilité des solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire*, Mémoire de Magister -Universite De Oran-