République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Problème de courbure scalaire prescrite sur une variété Riemannienne

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saîda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie différentielle

par

Mohamed Borhane Eddine Baahmed [1]

Sous la direction de

Dr. Mohamed. Bekiri

Soutenue le 15 /09/2020 devant le jury composé de

Mr. S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr. M. Bekiri	Université Mustapha Stambouli - Mascara	Encadreur
Mr. B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mr. A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. germanymohamed@gmail.com

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à mon encadrer **Dr. Mohamed BEKIRI** enseignant à l'Université Mustapha Stambouli de Mascara pour accepter encadrer ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail.

Je tiens à remercier également les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je désire aussi remercier tous les professeurs de Département de Mathématiques à l'Université Dr Tahar Moulay - Saïda pour son aide durant toutes ces années.

Enfin, je remercie profondément mes parents pour leur soutien constant durant toutes mes études. Ils occupent une place particulière au fond de moi.

Table des matières

Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques est un des sujets de recherche de grande importance dans l'analyse sur les variétés Riemanniennes développé ces dernières années dans de nombreux travaux ([1], [4], [6], [7], [10], [11]).

Différentes techniques sont employées pour la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques comme par exemple la méthode variationnelle utilisée pour résoudre le problème de Yamabe et le problème de courbure scalaire prescrite.

0.1 Problème de Yamabe

Le problème de Yamabe consiste à trouver sur une variété Riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 3$ une métrique $\tilde{g}$ conforme à g i.e. ($\tilde{g} = fg$ où $f \in C^{\infty}(M)$; $f > 0$) dont la courbure scalaire de la métrique $\tilde{g}$ est constante ?

En terme d'analyse les deux courbures scalaires de g et $\tilde{g}$ sont reliées entre elles par une formule très simple et élégante. En effet, si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ est une métrique conforme à g où $u \in C^{\infty}(M)$, $u > 0$ alors les deux courbures scalaires R_g et $R_{\tilde{g}}$ de g et de $\tilde{g}$ sont reliée par l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} R_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{1}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur (M, g)

Il est clair que le problème de Yamabe est équivalent à l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'une fonction $u \in C^{\infty}(M)$ strictement positive solution de l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{2}$$

Ce problème a été conjecturé par Yamabe en 1960 qui l'énonça dans [11]. Quelques années plus tard en 1968 Trudinger [9] a découvert une erreur dans la preuve de Yamabe et il a résolut le problème dans certains cas particuliers. En 1976 Aubin [1] a amélioré l'approche de Yamabe en réduisant le problème à la preuve d'une certaine inégalité sur l'invariant de Yamabe. Cette inégalité a été démontrée par Aubin [1] dans certains cas, ensuite par Schoen [7] dans les autres cas en 1984.

0.2 Problème de courbure scalaire prescrite

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 3$. Une généralisation naturelle du problème de Yamabe, qui peut être très utile dans l'étude de la classe conforme d'une métrique g, est le problème de la courbure scalaire prescrite. Il s'agit de trouver une métrique $\tilde{g}$ conforme à g dont la courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ est égale à une fonction donnée f. En terme d'analyse ce problème se ramène après calculs à l'équation en u suivante

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = f u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3}$$

L'objectif de ce mémoire consiste à utiliser l'approche variationnelle développée par Yamabe [11] et employée par Aubin dans [1] pour montrer l'existence de solutions positives des deux problèmes (2) et (3).

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre nous commençons par un chapitre introductif, où nous rappelons l'essentiel des notions géométriques et quelques résultats de base de l'analyse sur les variétés Riemanniennes qui seront utilisés dans ce mémoire.
- Dans le deuxième chapitre nous présentons les résultats obtenus par Aubin [1], plus précisément on s'intéresse à l'existence de solutions positives d'un problème de type (2).
- Dans le dernier chapitre nous montrons d'une manière analogie que la technique variationnelle utilisée dans le deuxième chapitre reste valable pour montrer l'existence de solutions positives d'un problème de type (3)

Chapitre 1

Notions préliminaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire différents résultats d'analyse sur les variétés Riemanniennes que nous utiliserons dans la suite. Pour plus de détails on pourra se référer aux ouvrages de Hebey [5]et de Aubin [2].

1.1 Éléments de la géométrie Riemannienne

1.1.1 Variétés Riemanniennes

Définition 1.1.1 *Une variété Riemannienne de dimension n est un espace topologique séparé M qui vérifie la propriété suivante : tout point de M possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
Autrement dit si pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x, il existe un voisinage ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et il existe $\varphi : U \longrightarrow V$ un homéomorphisme. Le couple (U, φ) est appelé carte locale de x où φ est l'application de coordonnées.

Définition 1.1.2 *Soient M une variété topologique et $\mathbb{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I \subset \mathbb{N}}$ une famille de cartes locales de M. On dit que $\mathbb{A}$ est un atlas de classe C^k de M si*

1. $M = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$
2. *pour tous i et j dans I, les applications de changement de cartes $\varphi_{ij} : \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i \left(U_i \cap U_j\right) \to \varphi_j \left(U_i \cap U_j\right)$ sont des difféomorphismes de classe C^k.*

Définition 1.1.3 *Soient M une variété topologique et $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ deux atlas de classe C^k sur M.*

On dit que $\mathbb{A}_1$ *et* $\mathbb{A}_2$ *sont* C^k *compatibles si* $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2$ *est encore un atlas de classe* C^k *sur* M.

Remarque 1.1.1 *On peut vérifier facilement que la relation de* C^k *compatibilité sur les atlas est une relation d'équivalence. La réunion des atlas d'une même classe d'équivalence est appelée un* C^k *atlas complet.*

Définition 1.1.4 *Une variété de classe* C^k *est une variété topologique munie d'un atlas complet.*

Définition 1.1.5 *Étant donnés des entiers* $p, q > 0$*, Soit* M *une variété de dimension* n*. Un tenseur de type* (p,q) *(p-fois contravariants et q-fois covariants sur* M *est une forme* $p+q$*-linéaire sur* $(T_xM)^p \times ((T_xM)^*)^q$
On note

$$\overset{(p,q)}{\otimes} T_xM = \underbrace{T_xM \otimes T_xM \otimes \ldots \otimes T_xM}_{p\ fois} \otimes \underbrace{(T_xM)^* \otimes (T_xM)^* \otimes \ldots \otimes (T_xM)^*}_{q\ fois}$$

l'ensemble des tenseurs de type (p,q) *sur* M*. Si* $T \in \overset{(p,q)}{\otimes} T_xM$ *et* (U,φ) *désigne une carte locale de* M *au point* x *alors on peut écrire*

$$T = T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$$

où $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ *sont les coordonnées du tenseur* T.

Exemple 1.1.1 *:*

- *Toute fonction sur une variété* M *est un tenseur de type* $(0,0)$
- *Un champ de vecteur* X *est un tenseur* $1-$ *fois contravariant et* $0-$ *fois covariant i.e. de type* $(1,0)$*, tandis qu'une* $1-$ *forme différentielle sur une variété* M *est un tenseur* $0-$ *fois contravariant et* $1-$ *fois covariant i.e. de type* $(0,1)$.

Définition 1.1.6 *Une métrique Riemannienne sur une variété* M *est un champ de tenseur deux fois covariants sur* M *qui définit en tout point* x *de* M *un produit scalaire symétrique non dégénéré et défini positif sur* T_xM*. Une telle métrique* g*, le couple* (M,g) *s'appelle une variété Riemannienne.*

Remarque 1.1.2 *Les coordonnées d'une métrique g dans une carte (U, φ) sont données par*

$$g = g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j.$$

Exemple 1.1.2 *Sur $\mathbb{R}^n$ avec les coordonnées cartésiennes $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, on définit sur $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ la métrique euclidienne δ défini par*

$$\delta = \sum_i \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_i dx^i \otimes dx^i$$

En particulier pour sur $\mathbb{R}^2$, avec les coordonnées cartésiennes, la métrique euclidienne s'écrit

$$\delta = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

On peut vérifier facilement que la métrique euclidienne δ en coordonnées polaires $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ s'écrit

$$\delta = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

Proposition 1.1.1 *Toute variété paracompacte possède une métrique Riemannienne.*

1.1.2 Courbures Riemanniennes

Définition 1.1.7 *Soit (M, g) une variété. On note $\Gamma(M)$ l'espace des champs de vecteurs différentiables sur M.*
Une connexion sur M est une application $D : T(M) \times \Gamma(M) \to T(M)$ qui vérifie les

1. *$\forall x \in M$ si $X \in T(M)$ et $Y \in \Gamma(M)$, alors $D(X, Y) \in T(M)$*
2. *$\forall x \in M$, D restreint à $T_xM \times \Gamma(M)$ est bilinéaire*
3. *$\forall x \in M$, $\forall X \in T_xM$, $\forall Y \in \Gamma(M)$ et si $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors*

$$D(X, fY) = X(f)\,Y(x) + f(x)\,D(X, Y)$$

Remarque 1.1.3 *On note généralement D_XY au lieu de $D(X, Y)$. D_XY est la dérivée covariante de Y par rapport à X.*

Soit (Ω, φ) *une carte de* M *de coordonnées associées* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, pour* $i = 1, \ldots n$ *, on note*

$$\nabla_i \frac{\partial}{\partial x_j} = D(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

où Γ_{ij}^k *sont les symboles de Christoffel.*

Définition 1.1.8 *La torsion d'une connexion D est l'application*

$$\begin{array}{rccc} T: & \bigcup\limits_{x \in M} (T_x M \times T_x M) & \longrightarrow & TM \\ & (X, Y) & \longmapsto & T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] \end{array}$$

Dans une carte (Ω, φ) *de* M *de coordonnées associées* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, si* $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *et* $Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *alors*

$$T(X, Y) = \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

On pourra regarder la torsion comme un tenseur un fois covariant et deux fois contravariants dont les composantes sont données par la formule

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Définition 1.1.9 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* $n \geq 1$ ∇ *la connexion de Levi-Civita est la connexion sans torsion pour laquelle g est à dérivée covariante nulle), son expression locale est donné par*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial xj} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

où g_{ij} *et* g^{ij} *désignent respectivement les coordonnées de la métrique g et les coordonnées de son inverse* g^{-1}.

Définition 1.1.10 *Soit* ∇ *la connexion de Levi-Civita*

1. *Le tenseur de courbure R relatif à la connexion* ∇ *s'écrit*

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x_k} + \Gamma_{j\alpha}^l \Gamma_{ki}^\alpha - \Gamma_{k\alpha}^l \Gamma_{ji}^\alpha.$$

2. *On appelle tenseur de courbure de Riemann noté Rm_g, le champ de tenseur C^∞ quatre fois covariants défini par*
$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl}.$$
3. *On appelle tenseur de courbure de Ricci, le champ de tenseur C^∞ deux fois covariants, obtenu en contractant le tenseur de courbure Riemannienne*
$$Ric_{ij} = R^{\alpha}_{i\alpha j} = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha j\beta}.$$
4. *La courbure scalaire est la fonction numérique de classe C^∞ sur M notée R_g et définie par*
$$R_g = R_{ij} g^{ij}.$$

1.1.3 Métriques conformes

Définition 1.1.11 *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. La classe conforme de g notée $[g]$, est l'ensemble des métriques sur M qui s'écrivent sous la forme*
$$\tilde{g} = \varphi g$$
où φ est une fonction $C^\infty(M)$ strictement positive.
On pourra encore écrire que
$$[g] = \left\{ e^f g \ / \ f \in C^\infty(M) \right\}$$
Deux métrique dans la même classe conforme sont tout simplement dites conformes.

1.2 Intégrale Riemannienne

Définition 1.2.1 (Partition de l'unité) *Soient M une variété et $\mathcal{A} = (\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de M. On dira qu'une famille $\left(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j\right)_{j\in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{A}$ si :*

1. *$\forall j \in J$, $\Omega_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur M*
2. *$\forall j \in J$, $\forall x \in M$, $0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$*
3. *$\forall j \in J$, $\exists i \in I$ tel que $Supp\alpha_j \subset_i$*

4. $\forall x \in M$, $\exists V$ *voisinage ouvert de* x *tel que* $Supp\alpha_j \cap V = \emptyset$ *sauf pour un nombre fini de* j

5. $\forall x \in M$, $\sum_{j \in J} \alpha_j = 1$

6. $(\Omega_j, \varphi_j)_{j \in J}$ *est un sous atlas de* $\mathcal{A}$

7. *pour tout* j, $Supp\alpha_j \subset \Omega_j$.

Définition 1.2.2 (Définition et proposition)

▶ *Soit* $(M, g$ *une variété Riemannienne de dimension* n *et soit* $f : M \to \mathbb{R}$ *une fonction de continue à support compact dans* M. *Étant donné* $\mathcal{A} = (\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ *un atlas de* M. *L'intégrale Riemannienne de* f *se définit de la manière suivante*

$$\int_M f dv_g = \sum_{j \in J} \int_{\varphi_j(\Omega_j)} \left(\alpha_j \sqrt{|g|}\right) f \ \circ \varphi_j^{-1} dx \tag{1.1}$$

où $\left(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j\right)_{j \in J}$ *est une partition de l'unité subordonnée à* $\mathcal{A}$, $|g|$ *désigne le déterminant de la matrice* g *et* dx *est la mesure de Lebesgue.*

▶ *L'intégrale Riemannienne de* f *définit par la relation (1.1) ne dépend ni du choix de l'atlas* $\mathcal{A}$ *et ni du choix de la partition de l'unité* $\left(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j b\right)_{j \in J}$.

1.3 Espaces de Sobolev

1.3.1 Définitions et propriétés

Nous rappelons l'inégalité de Hölder qu'on l'utilise plus souvent dans les majorations.

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Hölder) *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne compacte. Si*

$$f \in L^p(M) \ \text{ et } g \in L^q(M) \ \text{ où } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors

$$f.g \in L^1(M) \ \text{ et } \ \|f.g\|_1 \leq \|f\|_p . \|g\|_q$$

Définition 1.3.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n, $p \geq 1$ un réel et k est un entier positif. On note $C_c^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à supports compactes dans M.*

1. *L'espace de Sobolev $H_k^p(M)$ est le complété de $C_c^\infty(M)$ pour la norme*

$$||u|| := \sum_{i=0}^{k} \left(\int_M \left|\nabla^i u\right|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

où $\nabla^i u$ est la i-ème dérivée covariante de u.

2. *En particulier pour pour $p = 2$, l'espace de Sobolev $H_k^2(M)$ est un espace de Hilbert, on peut donc définir la norme équivalente induite du produit scalaire par*

$$||u||^2_{H_k^2(M)} = \sum_{i=0}^{k} \int_M \left|\nabla^i u\right|^2 dv_g$$

Pour $k = 1$, on obtient la norme de l'espace $H_1^2(M)$ définie par

$$||u||^2_{H_1^2(M)} = \int_M |u|^2 dv_g + \int_M |\nabla u|^2 dv_g$$

On rappelle maintenant le théorème de Banach qui consiste à caractériser la réflexivité des espaces de Sobolev.

Définition 1.3.2 (Convergence faible) *Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach. On rappelle qu'une suite (u_n) de E est dite faiblement convergente vers u si pour tout forme linéaire Φ continue de E, $\Phi(u_n)$ converge $\Phi(u)$ dans $\mathbb{R}$. La limite u est unique et on a nécessairement que*

$$||u|| \leq \liminf_n ||u_n||.$$

Théorème 1.3.1 (Théorème de Banach) *L'espace de Banach $(E, ||.||)$ est réflexif si est seulement si sa boule unité fermée centrée en 0 est faiblement compacte. Autrement dit l'espace $(E, ||.||)$ est réflexif si est seulement si toute suite bornée de E possède une sous suite qui converge faiblement.*

Proposition 1.3.2 *Pour tout k et tout réel $p > 1$, l'espace de Sobolev $H_k^p(M)$ est réflexif.*

1.3.2 Espaces de Hölder

Définition 1.3.3 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n, m un entier naturel et $\alpha \in (0, 1)$.*

1. *L'espace de Hölder $C^{0,\alpha}(M)$ est l'espace des fonctions continues, muni de la norme*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(M)} := \|u\|_\infty + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|u(x) - u(y)|}{d_g(x, y)^\alpha}$$

   où $d_g(.,.)$ est la distance géodésique.

2. *L'espace de Hölder $C^{m,\alpha}(M)$ est l'espace des fonctions de classe C^m, dont la m-ème dérivée covariante $\nabla^m u$ appartient à $C^{0,\alpha}(M)$. On munit $C^{m,\alpha}(M)$ d'une norme définie par*

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(M)} := \|u\|_{C^m(M)} + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|\nabla^m u(x) - \nabla^m u(y)|}{d_g(x, y)^\alpha}.$$

Nous rappelons les deux résultats très importants sur les espaces de Sobolev.

Théorème 1.3.2 (Théorème d'inclusion de Sobolev) *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n.*

1. *Si k et l sont deux entiers avec $(k > l \geq 0)$, p et q deux réels tels que $(p > q \geq 1)$ qui vérifient $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{(k-l)}{n}$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset H_l^p(M)$ est continue.*

2. *En particulier pour $q = 2$ et $k = 1$, alors l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$ est continue où $2^\sharp = \frac{2n}{n-2}$*

3. *Si $m \in \mathbb{N}$ et $\frac{(k - m - \alpha)}{n} \geq \frac{1}{q}$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^{m,\alpha}(M)$ est continue avec $\alpha \in (0, 1)$.*

Le deuxième résultat donne des conditions de compacité des inclusions dans le théorème précédent.

Théorème 1.3.3 (Théorème de Rellich Kondrakov) *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n et soient k et l deux entiers avec $k > l \geq 0$*

1. *Si* $p, q \geq 1$ *sont deux réels tels que* $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} - \frac{(k-l)}{n}$, *alors l'inclusion* $H_k^q(M) \subset H_l^p(M)$ *est compacte.*
2. *En particulier pour* $q = 2$, $k = 1$, *alors l'inclusion* $H_1^2(M) \subset L^p(M)$ *est compacte où* $p < 2^\sharp$
3. *Si* $\frac{(k-\alpha)}{n} > \frac{1}{q}$, *alors l'inclusion* $H_k^q(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$ *est compacte avec* $\alpha \in (0,1)$.

1.3.3 Meilleure constante de Sobolev pour $H_1^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$

Définition 1.3.4 *On définit* $K_0 > 0$ *par*

$$\frac{1}{K_0} := \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} dx\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

la meilleure constante dans l'inégalité $\|u\|_{2^\sharp}^2 \leq K \|\nabla u\|_2^2$ *de l'inclusion de Sobolev* $H_1^2(\mathbb{R}^n) \subset L^{2^\sharp}(\mathbb{R}^n)$ *où* $2^\sharp = \frac{2n}{n-2}$ *est l'exposant critique de Sobolev*
Cette constante a été calculée par Talenti [8] et pat Aubin [1]. Ils ont montré que

$$\frac{1}{K_0} = \frac{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4}$$

où ω_n *est le volume de la sphère unité standard de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.3.4 Inégalité de la meilleure constante

Nous citons l'inégalité de la meilleure constante de Sobolev $K_0(n,k)$ concernant l'inclusion de Sobolev $H_1^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$ qui a été démontrée par Aubin [2].

Lemme 1.3.1 *([1]) Soit* (M, g) *une variété Riemannienne compacte de dimension n. Alors pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $B_\epsilon \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $u \in H_1^2(M)$ *on a*

$$\|u\|_{2^\sharp}^2 \leq (K_0 + \epsilon) \|\nabla u\|_2^2 + B_\epsilon \|u\|_{L^2(M)}^2$$

où K_0 *est la meilleure constante Euclidienne et* $2^\sharp = \frac{2n}{n-2}$.

1.4 EDP sur les variétés Riemanniennes

Nous rappelons quelques définitions et propriétés des EDP sur les les variétés Riemanniennes

1.4.1 Opérateur de Laplace-Beltrami

Définition 1.4.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, le Laplacien $\Delta_g u$ d'une fonction $u \in C^2(M)$ est l'opposé de divergence du gradient de u, Son expression en coordonnées locales donnée par*

$$\Delta_g u := -div_g(\nabla u) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

où $|g|$ le déterminant de la métrique g

1.4.2 Opérateur de laplacien conforme

Définition 1.4.2 *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 3$. L'opérateur de laplacien conforme agissant sur les fonction de $C^2(M)$ défini par*

$$P_g u := \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}R_g u$$

où R_g est la courbure scalaire.

Proposition 1.4.1 ([2]) *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 3$. L'opérateur de laplacien conforme $P_g u := \Delta_g u + \dfrac{n-2}{4(n-1)}R_g u$ est invariant conforme i.e.*

Pour toute fonction $\phi \in C^\infty(M)$ strictement positive, si $\tilde{g} = \phi^{\frac{4}{n-2}}.g$, alors

$$P_g(u\phi) = \phi^{\frac{n+2}{n-2}}P_{\tilde{g}}u$$

Définition 1.4.3 *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n. On dit que l'opérateur de laplacien conforme P_g est coercif s'il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$*

$$\int_M \left(P_g u\right) u dv_g = \int_M \left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}R_g u^2\right) dv_g \geq \Lambda \|u\|^2_{H_1^2(M)}.$$

1.4.3 Principe du maximum

Définition 1.4.4 *On dira qu'un opérateur P défini sur une variété Riemannienne (M, g) vérifie le principe de maximum si*

$$\forall u \in C^\infty(M),\ Pu \geq 0 \Longrightarrow u > 0 \text{ ou } u \equiv 0$$

Théorème 1.4.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte et $u \in C^\infty(M)$ une fonction positive ou nulle. On suppose qu'en tout point x de M*

$$(\Delta_g u)(x) \geq u(x) f(x, u(x))$$

où $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors u est soit partout strictement positive, soit identiquement nulle.

Remarque 1.4.1 *L'opérateur de Laplacien conforme P_g vérifie le principe de maximum si et seulement s'il est coercif, ce résultat est important pour montrer la positivité des solutions d'un problème du second ordre sachant que si $u \in H_1^2(M)$ on a alors $|u| \in H_1^2(M)$.*

1.4.4 Solutions faibles et résultats de régularité

Définition 1.4.5 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n > 3$, $f \in L^1_{loc}(M)$. Alors u est dite solution faible de l'équation*

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda f u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

si pour tout $\phi \in C^\infty(M)$

$$\int_M \left(\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_g + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u \phi \right) dv_g = \lambda \int_M f \phi u^{\frac{n+2}{n-2}} dv_g.$$

La résolution des équations aux dérivées partielles par une méthode variationnelle ne permet de trouver que des solutions faibles alors que très souvent on a besoin de montrer que les solutions faibles sont des solutions régulières (ou classiques). Nous rappelons quelques résultats de régularité des solutions faibles appliqués aux problèmes elliptiques du second ordre. Pour plus de détails sur ce sujet on pourra se référer aux ouvrages de Hebey [5] et Gilbard-Trudinger [3].

Théorème 1.4.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte et $f \in C^{0,\alpha}(M)$ avec $\alpha \in (0, 1)$. Si $u \in H_1^2(M)$ est une solution faible de*

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = f$$

alors $u \in C^{2,\alpha}(M)$. En plus on a

$$\|u\|_{C^2(M)} \leq C \left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^0(M)} \right)$$

où $C = C(M, g)$ une constante.

1.4.5 Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Très souvent, trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles revient à minimiser une fonctionnelle sur un ensemble de contraintes. On rappellera le théorème du multiplicateurs de Lagrange qui est un résultat très important que nous utiliserons par la suite pour montrer l'existence de solutions d'une EDP.

Théorème 1.4.3 (Théorème des multiplicateurs de Lagrange) *[5] Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E ; $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω et $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur Ω de composantes $\phi_1, ..., \phi_n$. Étant donné a un point de $\mathbb{R}^n$, on pose $H = \phi^{-1}(a)$ que l'on suppose non vide ; si en un point x_0 de H*

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x) \tag{1.2}$$

et si de plus $D\phi(x_0) \in L(E, \mathbb{R}^n)$ est surjective, alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ pour lesquels

$$Df(x_0) = \lambda_1 D\phi_1(x_0) + ... + \lambda_n D\phi_n(x_0).$$

Cette relation est l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème de minimisation considéré par (1.2), les λ_i sont les coefficients de Lagrange .

Chapitre 2

Problème de Yamabe

Position du problème

Dans ce chapitre nous rappelons quelques résultats obtenus par T. Aubin dans [1] concernant le problème de Yamabe qui a été énoncé en 1960 par Yamabe comme suit :

Problème de Yamabe : Étant donnée (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, prouver qu'il existe une métrique conforme à g qui est à courbure scalaire constante. En vertu de ce qui a été dit dans l'introduction, résoudre le problème de Yamabe revient à montrer qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, et il existe une fonction **strictement positive** $u \in C^{2,\alpha}(M)$ où $\alpha \in]0, 1[$, tels que

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda u^{2^\sharp - 1} \tag{2.1}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami, R_g est la courbure scalaire de la variété (M, g) et $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev.

Cette équation à la particularité de contenir l'exposant critique de Sobolev donc toute la difficulté du problème vient ici de ce que l'inclusion de $H_1^2(M)$ dans $L^{2^\sharp}(M)$ n'est pas compacte. Pour éviter ce problème nous utilisons l'approche variationnelle présenter dans le travail de Yamabe [11] qui consiste à approcher l'équation (2.1) par des équations sous critiques pour lesquelles on récupère la compacité donnée par le théorème 1.3.3 de Rellich-Kondrakov.

Le résultat principal de ce chapitre qui montre l'existence d'une solution strictement positive de l'équation critique (2.1) est énoncé dans théorème suivant.

Théorème 2.0.4 (Théorème principal) *([1], [5]) Soit (M, g) une variété Riemannienne compact de dimension $n \geq 3$ de courbure scalaire positive R_g. Sous la condition*

$$\inf_{u \in H_1^2(M)/\{0\}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g}{\left(\int_M u^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}} < \frac{1}{K_0}$$

où K_0 est la meilleure constante de Sobolev énoncé dans la définition 1.3.4.
Alors il existe un réel $\lambda > 0$ et une fonction strictement positive $u \in C^{2,\alpha}(M)$ qui est solution de l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda u^{2^\sharp - 1}$$

et qui minimise la fonctionnelle I définie sur $H_1^2(M)$ par :

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g$$

sous la contrainte $\displaystyle\int_M u^{2^\sharp} dv_g = 1.$

Ce chapitre est organisé comme suit :

- Dans la première section, nous construisons par la méthode variationnelle, une suite de fonctions positives (u_q) solutions de la famille d'équations sous critiques suivantes :

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda u^{q-1}$$

  où q est l'exposant sous critique tel que $2 < q < 2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$.

- Dans la deuxième section, nous montrons que sous certaine condition géométrique, la suite (u_q) converge vers une solution strictement positive ($u \not\equiv 0$) de l'équation critique (2.1) lorsque l'exposant sous critique q tend vers l'exposant critique $2^\sharp$.

2.1 Existence de solutions des équations sous critiques

Dans cette section, nous montrons l'existence de solutions des équations sous-critiques associées à l'équation (2.1) sur une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension

$n \geq 3$. Il s'agit de la famille d'équations

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda u^{q-1} \tag{2.2}$$

où $2 < q < 2^\sharp$.
Pour cela on note

1. $H_1^2(M)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|u\|^2_{H_1^2(M)} = \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2$$

2. I est la fonctionnelle associée à l'équation (2.2) définie sur l'espace $H_1^2(M)$ par

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g. \tag{2.3}$$

3. λ_q est le minimum de la fonctionnelle I

$$\lambda_q := \inf_{u \in H_1^2(M)-\{0\}} \frac{I(u)}{\left(\int_M u^q dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} = \inf_{u \in \mathcal{H}_q} I(u)$$

où $\mathcal{H}_q$ est la contrainte

$$\mathcal{H}_q = \left\{ u \in H_1^2(M) \;\; / \;\; \int_M |u|^q dv_g = 1 \right\}$$

Nous avons le théorème suivant, qui montre l'existence d'une suite de solution minimisante de la famille d'équations sous critique (2.2).

Théorème 2.1.1 *([1], [5]) Soit (M, g) une variété Riemannienne compact de dimension $n \geq 3$. Pour tout réel $q \in \left]2, \frac{2n}{n-2}\right[$, il existe une fonction strictement positive $u_q \in C^{2,\alpha}(M)$ qui est solution de l'équation*

$$\Delta_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u_q = \lambda_q u_q^{q-1} \tag{2.4}$$

et qui vérifie $\int_M u^q dv_g = 1$, où $\lambda_q = \inf_{u \in \mathcal{H}_q} I(u) = I(u_q)$

Preuve. L'idée de la démonstration :

(a) Tout d'abord, on montre que λ_q est fini.

(b) On montre ensuite que le minimum λ_q de la fonctionnelle I est atteint par une fonction positive ou nulle $u_q \in \mathcal{H}_q$.

(c) On montre enfin que u_q est régulière, strictement positive et solution de (2.4).

(a) λ_q est fini, pour toute $u \in \mathcal{H}_q$, $\int_M |u|^q dv_g = 1$, D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_M R_g u^2 dv_g\right| &\leq \left(\max_{x\in M} |R_g|\right) \int_M u^2 dv_g \\
&\leq \left(\max_{x\in M} |R_g|\right) \left(\int_M u^q dv_g\right)^{\frac{2}{q}} V_g^{1-\frac{2}{q}} \\
&\leq \left(\max_{x\in M} |R_g|\right) V_g^{1-\frac{2}{q}}
\end{aligned}$$

où $V_g = \int_M dv_g$ désigne le volume de (M, g)

Il est clair que pour toute $u \in \mathcal{H}_q$

$$\begin{aligned}
I(u) &= \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g \\
&\geq \int_M |\nabla u|^2 dv_g - \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x\in M} |R_g|\right) V_g^{1-\frac{2}{q}} \qquad (2.5) \\
&\geq -\left(\frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x\in M} |R_g|\right) V_g^{1-\frac{2}{q}}
\end{aligned}$$

ce qui entraine que le minimum λ_q est fini.

(b) On montre l'existence d'une fonction $u_q \in \mathcal{H}_q$, positive ou nulle presque partout telle que $I(u_q) = \lambda_q$. Pour cela, considérons (v_i) une suite minimisante supposée positive ou nulle de la fonctionnelle I sur $\mathcal{H}_q$ i.e.

$$\lim_{i\longrightarrow+\infty} I(v_i) = \lambda_q$$

Pour i suffisamment grand on pourra écrire

$$I(v_i) \leq \lambda_q + 1$$

On obtient avec l'inégalité (2.5) et cette dernière inégalité que

$$\|\nabla v_i\|_2^2 = \int_M |\nabla v_i|^2 dv_g \leq 1 + \lambda_q + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x\in M} |R_g|\right) V_g^{1-\frac{2}{q}} \tag{2.6}$$

D'autre part de l'inégalité de Hölder on a

$$\|v_i\|_2^2 = \int_M v_i^2 dv_g \leq \left(\int_M v_i^q dv_g\right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_M 1 dv_g\right)^{1-\frac{2}{q}}$$

Comme $v_i \in \mathcal{H}_q$ i.e. $\displaystyle\int_M |v_i|^q dv_g = 1$ et , on déduit que

$$\|v_i\|_2^2 \leq V_g^{1-\frac{2}{q}} \tag{2.7}$$

où $V_g := \displaystyle\int_M 1 dv_g$.

De l'inégalité (2.6) et (2.7), on déduit que

$$\|v_i\|^2_{H_1^2(M)} := \|\nabla v_i\|_2^2 + \|v_i\|_2^2 \leq 1 + \lambda_q + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x\in M} |R_g|\right) V_g^{1-\frac{2}{q}} + V_g^{1-\frac{2}{q}}$$

Ce qui montre que la suite v_i est bornée dans l'espace $H_1^2(M)$ qui est un espace réflexif et d'après le théorème de Banach 1.3.1, il existe une fonction $u_q \in H_1^2(M)$ et une sous suite de (v_i) encore notée (v_i) telle que

(i) (v_i) converge faiblement vers (u_q) dans $H_1^2(M)$

(ii) (v_i) converge fortement vers (u_q) dans $L^q(M)$ où $q < 2^\sharp$

Le point (ii) résulte du théorème 1.3.3 de Rellich Kondrakov puisque l'espace $H_1^2(M)$ s'injecte d'une manière compacte dans l'espace $L^q(M)$.

Du point (ii) on peut déduire que la suite (v_i) converge fortement dans $L^2(M)$ et presque partout sur M vers u_q.

Il résulte du point (i) et de la définition 1.3.2 de la convergence faible que

$$\left\|u_q\right\|^2_{H_1^2(M)} \leq \liminf_{i\longrightarrow+\infty} \|v_i\|^2_{H_1^2(M)}$$

i.e.

$$\left\|\nabla u_q\right\|_2^2 + \left\|u_q\right\|_2^2 \leq \liminf_{i\longrightarrow+\infty} \left(\|\nabla v_i\|_2^2 + \|v_i\|_2^2\right)$$

Puisque v_i converge fortement vers u_q dans $L^2(M)$, il suit que

$$\left\|\nabla u_q\right\|_2^2 \leq \liminf_{i\longrightarrow+\infty} \|\nabla v_i\|_2^2$$

De cette dernière inégalité et de la convergence forte de v_i vers u_q dans $L^2(M)$, on récupère que

$$I(u_q) = \left\|\nabla u_q\right\|_2^2 + \int_M R_g u_q^2 dv_g \leq \liminf_{i\longrightarrow+\infty}\left(\|\nabla v_i\|_2^2 + \int_M R_g v_i^2 dv_g\right) = \liminf_{i\longrightarrow+\infty} I(v_i) := \lambda_q$$

Alors

$$I(u_q) \leq \lambda_q \tag{2.8}$$

Il résulte de la convergence forte de v_i vers u_q dans $L^q(M)$ et de $\int_M |v_i|^q dv_g = 1$ que

$$\int_M |u_q|^q dv_g = \lim_{i\longrightarrow+\infty} \int_M |v_i|^q dv_g = 1$$

d'où $u_q \in \mathcal{H}_q$ et comme λ_q est un minimum de I on aura

$$I(u_q) \geq \lambda_q \tag{2.9}$$

De (2.8) et (2.9), on en déduit que $I(u_q) = \lambda_q$. D'où le minimum de λ_q est atteint par la fonction u_q. On obtient avec le théorème des multiplicateurs de Lagrange 1.4.3, qu'il existe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in H_1^2(M)$,

$$DI(u_q).v = \alpha D\phi(u_q).v$$

où $\phi(u_q) = \int_M |u_q|^q dv_g$

Par conséquent

$$\int_M < \nabla u_q, \nabla v >_g dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u_q.v = \alpha \int_M u_q^{q-1}.v dv_g$$

En prenant $v = u_q$ dans cette relation, on obtient que $\alpha = \lambda_q$. Par suite et d'après la définition (1.4.5), u_q est une solution faible de l'équation (2.4)

$$\Delta_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u_q = \lambda_q u_q^{q-1}$$

(c) On peut constaté avec le théorème 1.4.2 de régularité que $u_q \in C^{2,\alpha}(M)$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$. On a u_q est positive ou nulle, comme $u_q \in \mathcal{H}_q$ i.e. $\int_M |u_q|^q dv_g = 1$, alors u_q est non identiquement nulle. Il suit du principe du maximum énoncé au théorème 1.4.1 que u_q est strictement positive. ■

2.2 Existence de solution d'équation critique

Dans cette section, on montre que la suite u_q donnée par le théorème 2.1.1 converge vers une solution non triviale de l'équation critique (2.1), lorsque l'exposant q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \frac{2n}{n-2}$. Avant d'entamer la convergence de la suite u_q, nous adoptons les notations suivantes.
Etant donnée (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ sur laquelle on considère l'équation critique (2.1),

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda u^{2^\sharp - 1}$$

Notation 2.2.1 *on note*

1.

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g$$

la fonctionnelle associée à l'équation (2.1)

2.

$$\mu_g := \inf_{u \in \mathcal{H}} I(u) = \inf_{u \in H_1^2(M)/\{0\}} \frac{I(u)}{\left(\int_M u^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

qui s'appelle l'invariant de Yamabe de la variété (M, g)

3. lorsque l'exposant sous-critique q tend vers $2^\sharp$ *la contrainte*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2^\sharp} := \left\{ u \in H_1^2(M) \ / \ \int_M |u|^{2^\sharp} dv_g = 1 \right\}$$

Le premier résultat que l'on démontre est la convergence de la suite (λ_q) lorsque l'exposant sous critique q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$.

Lemme 2.2.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, pour $q \in \left]2, 2^\sharp\right[$, la suite (λ_q) converge vers l'invariant de Yamabe μ_g lorsque q tend vers $2^\sharp$ i.e.* $\lim\limits_{q \longrightarrow 2^\sharp} \lambda_q = \mu_g$.

Preuve. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $u \in \mathcal{H}$ telle que

$$I(u) \leq \mu_g + \epsilon$$

Comme

$$\lim_{q \longrightarrow 2^\sharp} \int_M u_q^q dv_g = \int_M u^{2^\sharp} dv_g$$

on obtient que

$$\lim_{q \longrightarrow 2^\sharp} I(u_{q)} \leq \mu_g + \epsilon$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{q \longrightarrow 2^\sharp} \lambda_q \leq I(u) \leq \mu_g + \epsilon$$

Or ϵ quelconque, ceci entraîne que

$$\lim_{q \longrightarrow 2^\sharp} \lambda_q \leq \mu_g \tag{2.10}$$

D'autre part, on a

$$\lim_{q \longrightarrow 2^\sharp} \left(\int_M u_q^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{q}{2^\sharp}} V_g^{1-\frac{q}{2^\sharp}} = \liminf_{q \longrightarrow 2^\sharp} \int_M u_q^{2^\sharp} dv_g \geq 1$$

Or

$$\mu_g \leq \frac{I(u_q)}{\left(\int_M u_q^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}} \leq I(u_q) = \lambda_q$$

et ainsi

$$\lim_{q \longrightarrow 2^\sharp} \lambda_q \geq \mu_q \tag{2.11}$$

Il suit des relations (2.10) et (2.11) que la suite λ_q converge pour $q \longrightarrow$ vers μ_g i.e.

$$\lim_{q \longrightarrow \frac{2n}{n-2}} \lambda_q = \mu_q.$$

■

Le deuxième résultat que l'on démontre est la convergence de la suite (u_q) donnée par le théorème 2.1.1 vers une solution faible de l'équation (2.1) lorsque l'exposant sous critique q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$.

Lemme 2.2.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, il existe une suite (q_i) de réels dans $\left]2, 2^\sharp\right[$ qui tend vers $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$ lorsque $i \longrightarrow +\infty$,pour laquelle la suite correspondante de fonctions (u_{q_i}) donnée par le théorème 2.1.1 converge vers une fonction positive ou nulle $u \in H_1^2(M) \cap C^{2,\alpha}(M)$ solution faible de l'équation critique*

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \mu_g u^{2^\sharp - 1}$$

où μ_g est l'invariant de Yamabe de (M, g).

Preuve. On commence à montrer que la suite de fonctions u_q donnée par le théorème 2.1.1 reste bornée dans l'espace $H_1^2(M)$ indépendamment de q. Sachant que $\int_M u_q^q dv_g = 1$, avec l'inégalité de Hölder on obtient que

$$\int_M u_q^2 dv_g \leq \left(\underbrace{\int_M (u_q^2)^{\frac{q}{2}} dv_g}_{=1} \right)^{\frac{2}{q}} V_g^{1-\frac{2}{q}} = V_g^{1-\frac{2}{q}} \tag{2.12}$$

où $V_g = \int_M dvg$ est le volume de (M, g)

Comme $V_g^{\frac{-1}{q}} \in \mathcal{H}_q$ (car $\int_M \left(V_g^{\frac{-1}{q}}\right)^q dv_g = 1$, par ailleurs il est clair que

$$\begin{aligned} \lambda_q = I(u_q) \leq I(V_g^{\frac{-1}{q}}) &:= \frac{n-2}{4(n-1)} V_g^{\frac{-2}{q}} \int_M R_g dv_g \\ &\leq \frac{n-2}{4(n-1)} V_g^{1-\frac{2}{q}} \max_{x \in M} R_g \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lambda_q \leq \frac{n-2}{4(n-1)} V_g^{1-\frac{2}{q}} \max_{x\in M} R_g$$

De cette dernière inégalité et de l'inégalité (2.12), on pourra ainsi écrire que

$$\begin{aligned}
\|u_q\|_{H_1^2(M)} &= \int_M |\nabla u_q|^2 dv_g + \int_M u_q^2 dv_g \\
&= \lambda_q + \int_M \left(1 - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g\right) u_q^2 dv_g \\
&\leq \frac{n-2}{4(n-1)} V_g^{\frac{-2}{q}} \int_M R_g dv_g + \max_{x\in M} |1 - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g| \int_M u_q^2 dv_g \\
&\leq \frac{n-2}{4(n-1)} V_g^{1-\frac{2}{q}} \max_{x\in M} R_g + \max_{x\in M} |1 - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g| V_g^{1-\frac{2}{q}} \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Or la fonction $(1+\dfrac{1}{V_g})^{\alpha}$ est croissante en α et comme $\dfrac{2}{q} < 1$ car $q \in \left]2, 2^\sharp\right[$ on peut déduire que

$$V_g^{1-\frac{2}{q}} = V_g(\frac{1}{V_g})^{\frac{2}{q}} \leq V_g(1+\frac{1}{V_g})^{\frac{2}{q}} \leq V_g(1+\frac{1}{V_g})^{1} = V_g + 1$$

Par conséquent l'inégalité (2.13) devient

$$\|u_q\|_{H_1^2(M)} \leq (V_g+1)\left(\frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x\in M} R_g + \max_{x\in M} |1 - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g|\right) \qquad (2.14)$$

ce qui preuve que la suite u_q est indépendamment de q et elle est bornée dans $H_1^2(M)$ qui est un espace réflexif et d'après le théorème de Banach 1.3.1, il existe une fonction $u \in H_1^2(M)$ et une sous suite de (q_i) encore notée (q_i) qui tend vers $2^\sharp$ lorsque $i \longrightarrow +\infty$ telle que

(a) (u_{q_i}) converge faiblement vers u dans $H_1^2(M)$

(b) (u_{q_i}) converge fortement vers u dans $L^q(M)$ où $q < 2^\sharp$. En particulier dans $L^2(M)$

(c) $(u_{q_i}^{q_i-1})$ converge faiblement vers $u^{2^\sharp-1}$ dans $L^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp-1}}(M)$.

Le point (b) résulte du théorème 1.3.3 de Rellich Kondrakov puisque l'espace $H_1^2(M)$ s'injecte d'une manière continue dans l'espace $L^q(M)$.
Le point (c) résulte du théorème 1.3.1 de Banach. En effet on a la suite (u_q) est bornée dans

l'espace $L^{2^\sharp}(M)$, il est clair que (u_q^{q-1}) est bornée dans $L^{\frac{2^\sharp}{q-1}}(M) \subset L^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp-1}}(M)$ (car $\dfrac{2^\sharp}{2^\sharp - 1} < \dfrac{2^\sharp}{q-1}$) par suit (u_q) est bornée dans $L^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp-1}}(M)$

Du point (b) on peut déduire que la suite (u_{q_i}) converge fortement dans $L^2(M)$ et presque partout sur M vers u.

Comme la suite (u_{q_i}) converge faiblement vers u dans H_1^2, par ailleurs on pourra utiliser la définition 1.3.2 de la convergence faible pour dire que pour tout $\phi \in H_1^2(M)$

$$\lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_M < \nabla u_{q_i},\ \nabla\phi >_g dv_g = \int_M < \nabla u,\ \nabla\phi >_g dv_g \tag{2.15}$$

De la même façon et comme la suite $(u_{q_i}^{q_i-1})$ converge faiblement vers $u^{2^\sharp-1}$ dans $L^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp-1}}(M)$, par ailleurs on pourra utiliser la définition 1.3.2 de la convergence faible pour dire que pour tout $\phi \in H_1^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$

$$\lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i-1} \phi dv_g = \int_M u^{2^\sharp-1} \phi dv_g \tag{2.16}$$

On obtient facilement avec (b) que pour tout $\phi \in H_1^2(M)$,

$$\lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_M R_g u_{q_i} \phi dv_g = \int_M R_g u \phi dv_g \tag{2.17}$$

Or la suite (u_{q_i}) est une solution de l'équation sous-critique (2.2) (Voir le théorème 2.1.1) i.e. elle vérifie

$$\Delta_g u_{q_i} + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u_{q_i} = \lambda_{q_i} u_{q_i}^{q_i-1}$$

autrement dit

$$\int_M < \nabla u_{q_i},\ \nabla\phi >_g dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u_{q_i} \phi dv_g = \lambda_{q_i} \int_M u_{q_i}^{q_i-1} \phi dv_g \tag{2.18}$$

En passant à la limite ($i \longrightarrow +\infty$) dans l'équation (2.18) et on utilise les équations (2.15), (2.16) et (2.17) et le fait que $\lim\limits_{i \longrightarrow +\infty} \lambda_{q_i} = \mu_g$ (voir le lemme 2.2.1), on déduit que pour tout $\phi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M < \nabla u,\ \nabla\phi >_g dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u \phi dv_g = \mu_g \int_M u^{2^\sharp-1} \phi dv_g$$

Cela signifie que u est une solution faible de l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \mu_g u^{2^\sharp - 1} \tag{2.19}$$

On obtient avec le résultat de régularité énoncé du théorème 1.4.2 de régularité et que la solution u de l'équation (2.19) est régulière i.e. $u \in C^{2,\alpha}(M)$ où $\alpha \in (0,1)$.
On peut déduire immédiatement par le principe du maximum énoncé au théorème 1.4.1 que u soit identiquement nulle soit partout strictement positive i.e. ($u \geq 0$). D'où le résultat demandé. ■

Remarque 2.2.1 *A ce moment on a démontré que notre équation critique (2.19) possède une solution u soit identiquement nulle soit partout strictement positive. Toute la difficulté consiste maintenant à trouver une condition qui va nous permettre d'éviter la solution triviale ($u \equiv 0$). C'est l'objet du lemme suivant.*

Lemme 2.2.3 (Condition géométrique) *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et μ_g son invariant de Yamabe. Sous la condition*

$$\mu_g < \frac{1}{K_0} = \frac{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4} \tag{2.20}$$

où K_0 est la meilleure constante de Sobolev énoncé dans la définition 1.3.4. Alors la fonction u donnée par le lemme 2.2.2 est une solution non triviale ($u \not\equiv 0$) de l'équation critique (2.19).

Preuve. On raisonne par absurde, supposons que que $u \equiv 0$, En reprenant les notation du lemme 2.2.2, il est clair que la suite (u_{q_i}) converge faiblement vers 0 dans l'espace $H_1^2(M)$ et fortement vers 0 dans $L^2(M)$ i.e. $\lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_M u_{q_i}^2 dv_g = 0$

On a $u_{q_i} \in \mathcal{H}_{q_i}$ i.e. $\int_M |u_{q_i}|^{q_i} dv_g = 1$, avec l'inégalité de Hölder, on pourra écrire que pour tout

i

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\int_M |u_{q_i}|^{q_i} dv_g\right)^{\frac{2}{q_i}} \\
&\le \left(\left(\int_M (|u_{q_i}|^{q_i})^{\frac{2^\sharp}{q_i}} dv_g\right)^{\frac{q_i}{2^\sharp}} V_g^{1-\frac{q_i}{2^\sharp}}\right)^{\frac{2}{q_i}} \\
&\le \left(\int_M |u_{q_i}|^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

où V_g est le volume de la variété (M, g). D'autre part on utilise l'inégalité de la meilleure constante de Sobolev énoncé dans le lemme 1.3.1, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$
\left(\int_M |u_{q_i}|^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \le (K_0 + \epsilon) \int_M |\nabla u_{q_i}|^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u_{q_i}^2 dv_g
$$

l'inégalité (2.21) devient

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\int_M |u_{q_i}|^{q_i} dv_g\right)^{\frac{2}{q_i}} \\
&\le \left(\int_M |u_{q_i}|^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \\
&\le V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left((K_0 + \epsilon) \int_M |\nabla u_{q_i}|^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u_{q_i}^2 dv_g\right)
\end{aligned}
$$

Or on a

$$
\int_M |\nabla u_{q_i}|^2 dv_g = \lambda_{q_i} - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u_{q_i}^2 dv_g
$$

alors la dernière inégalité devient

$$
\begin{aligned}
1 &\le V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left\{(K_0 + \epsilon)\left(\lambda_{q_i} - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u_{q_i}^2 dv_g\right) + B_\epsilon \int_M u_{q_i}^2 dv_g\right\} \\
&\le V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left\{(K_0 + \epsilon)\lambda_{q_i} + \left((K_0 + \epsilon)\frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x\in M} |R_g| + B_\epsilon\right) \int_M u_{q_i}^2 dv_g\right\}
\end{aligned}
$$

En passant à la limite pour $i \longrightarrow +\infty$, dans la dernière inégalité et on utilise le fait que

$$
\lim_{i\longrightarrow+\infty} \int_M u_{q_i}^2 dv_g = 0, \ \lim_{i\longrightarrow+\infty} \lambda_{q_i} = \mu_g \text{ et } \lim_{i\longrightarrow+\infty} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} = V_g^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{2^\sharp}} = 1
$$

on obtient

$$1 \leq (K_0 + \epsilon)\mu_g$$

Par conséquent pour ϵ suffisamment petit on aura

$$1 \leq K_0\mu_g$$

ce qui contredit avec la condition (2.20) $\mu_g < \dfrac{1}{K_0}$. D'où $u \not\equiv 0$. ■

Remarque 2.2.2 *Pour achever la preuve du théorème principal 2.0.4, il nous reste à démontré le lemme suivant.*

Lemme 2.2.4 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et μ_g son invariant de Yamabe. Sous la condition*

$$\mu_g < \frac{1}{K_0}$$

Alors la fonction u donnée par le lemme 2.2.2 minimise la fonctionnelle

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g$$

sur la contrainte

$$\mathcal{H} := \left\{ u \in H_1^2(M) \ / \ \int_M |u|^{2^\sharp} dv_g = 1 \right\}$$

(c-a-d, u vérifie $\int_M |u|^{2^\sharp} dv_g = 1$ et $\mu_g = I(u)$).

Preuve. Nous reprenons les notations du lemme 2.2.2. Comme la suite $(u_{q_i}^{q_i-1})$ converge faiblement vers $u^{2^\sharp-1}$, c-a-d pour tout $\phi \in H_1^2(M)$ on a

$$\lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i-1} \phi dv_g = \int_M u^{2^\sharp-1} \phi dv_g$$

En particulier pour $\phi = u$, alors

$$\lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i-1} u dv_g = \int_M u^{2^\sharp} dv_g$$

On déduit avec l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_M u^{2^\sharp} dv_g &= \lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i - 1} u dv_g \\
&\leq \lim_{i \longrightarrow +\infty} \left(\underbrace{\int_M u_{q_i}^{q_i} dv_g}_{=1} \right)^{1 - \frac{1}{q_i}} \left(\int_M u^{q_i} dv_g \right)^{\frac{1}{q_i}}
\end{aligned}$$

Pour $i \longrightarrow +\infty$, on en déduit que

$$\int_M u^{2^\sharp} dv_g \leq \left(\int_M u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{1}{2^\sharp}}$$

ce qui signifie que

$$\int_M u^{2^\sharp} dv_g \leq 1 \tag{2.22}$$

Par ailleurs, u est solution de

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \mu_g u^{2^\sharp - 1}$$

En multipliant cette équation par u, puis en intégrant sur M, on obtient que

$$I(u) = \mu_g \int_M u^{2^\sharp} dv_g \tag{2.23}$$

Comme $u \not\equiv 0$, on sait par définition que μ_g vérifie l'inégalité suivante (Voir la notation 2)

$$\frac{I(u)}{\left(\int_M u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{2}{2^\sharp}}} \geq \mu_g$$

En combinant entre cette dernière inégalité et l'égalité (2.23), on en déduit que

$$\frac{\mu_g \int_M u^{2^\sharp} dv_g}{\left(\int_M u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{2}{2^\sharp}}} \geq \mu_g$$

$\Longrightarrow$

$$\mu_g \left(\left(\int_M u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \geq 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_M u^{2^\sharp} dv_g \geq 1 \tag{2.24}$$

On tire alors des égalités (2.22), (2.23) et (2.24) que

$$\int_M u^{2^\sharp} dv_g = 1 \text{ et } I(u) = \mu_g$$

D'où le résultat demandé. ■

Démonstration du théorème principal 2.0.4

La preuve du théorème principal 2.0.4 est une application directe des lemmes 2.2.1 à 2.2.4.

Chapitre 3

Problème de courbure scalaire prescrite

Position du problème

Le problème de la courbure scalaire est une généralisation naturelle du problème de Yamabe, qui consiste à trouver sur une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ une métrique $\tilde{g}$ conforme à la métrique initiale g dont la courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ est égale à une fonction f donnée à priori. En vertu de ce qui a été dit dans l'introduction, La résolution du problème de la courbure scalaire revient à l'existence d'un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, et l'existence d'une fonction **strictement positive** $u \in C^{2,\alpha}(M)$ où $\alpha \in]0, 1[$, tels que

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda f u^{2^\sharp - 1} \tag{3.1}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami, R_g est la courbure scalaire de la variété M, f une fonction positive de classe $C^\infty(M)$ et $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev.
Cette équation à la particularité de contenir l'exposant critique de Sobolev donc toute la difficulté du problème vient ici de ce que l'inclusion de $H_1^2(M)$ dans $L^{2^\sharp}(M)$ n'est pas compacte.

Dans ce chapitre nous montrons d'une manière analogie comme dans le deuxième chapitre que la technique variationnelle utilisée pour résoudre le problème de Yamabe reste valable pour résoudre l'équation (3.1).
Le résultat principal de ce chapitre est énoncé dans théorème suivant.

Théorème 3.0.1 (Théorème principal) *([1], [5]) Soit (M, g) une variété Riemannienne compact de dimension $n \geq 3$ de courbure scalaire positive R_g et f une fonction positive de classe*

$C^{\infty}(M)$. Sous la condition

$$\inf_{u\in H_1^2(M)/\{0\}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M R_g u^2 dv_g}{\left(\int_M f u^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}} < \frac{1}{\left(\max\limits_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0}$$

où K_0 est la meilleure constante de Sobolev énoncé dans la définition 1.3.4.
Alors il existe un réel $\lambda > 0$ et une fonction strictement positive $u \in C^{2,\alpha}(M)$ qui est solution de l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda f u^{2^\sharp - 1}$$

et qui minimise la fonctionnelle I définie sur $H_1^2(M)$ par :

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M R_g u^2 dv_g$$

sous la contrainte $\int_M f u^{2^\sharp} dv_g = 1$.

Tout comme le chapitre précédent, ce chapitre est organisé comme suit :

- Dans la première section, nous construisons par la méthode variationnelle, une suite de fonctions positives (u_q) solutions de la famille d'équations sous critiques suivantes :

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda f u^{q-1}$$

  où q est l'exposant sous critique tel que $2 < q < 2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$.

- Dans la deuxième section, nous montrons que sous certaine condition géométrique, la suite (u_q) converge vers une solution strictement positive ($u \not\equiv 0$) de l'équation critique (3.1) lorsque l'exposant sous critique q tend vers l'exposant critique $2^\sharp$.

3.1 Existence de solutions des équations sous critiques

Dans cette section, nous montrons d'une manière analogie comme le deuxième chapitre, l'existence de solutions des équations sous-critiques associées à l'équation (3.1) sur une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Il s'agit de la famille d'équations

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda f u^{q-1} \tag{3.2}$$

où $2 < q < 2^\sharp$.
Pour cela on note

1. $H_1^2(M)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|u\|^2_{H_1^2(M)} = \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2$$

2. I est la fonctionnelle associée à l'équation (3.2) définie sur l'espace $H_1^2(M)$ par

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g. \tag{3.3}$$

3. λ_q est le minimum de la fonctionnelle I

$$\lambda_q := \inf_{u \in H_1^2(M) - \{0\}} \frac{I(u)}{\left(\int_M f u^q dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} = \inf_{u \in \mathcal{H}_q} I(u)$$

   où $\mathcal{H}_q$ est la contrainte

$$\mathcal{H}_q = \left\{ u \in H_1^2(M) \ / \ \int_M f|u|^q dv_g = 1 \right\}$$

Nous avons le théorème suivant, qui montre l'existence d'une suite de solution minimisante de la famille d'équations sous critique (3.2).

Théorème 3.1.1 *([1], [5]) Soit (M, g) une variété Riemannienne compact de dimension $n \geq 3$. Pour tout réel $q \in \left]2, \frac{2n}{n-2}\right[$, il existe une fonction strictement positive $u_q \in C^{2,\alpha}(M)$ qui est solution de l'équation*

$$\Delta_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u_q = \lambda_q f u_q^{q-1} \tag{3.4}$$

et qui vérifie $\int_M f u^q dv_g = 1$, où $\lambda_q = \inf_{u \in \mathcal{H}_q} I(u) = I(u_q)$

Preuve. La démonstration de ce théorème est tout à fait similaire à la démonstration du théorème 2.1.1.

L'idée de la démonstration :

(a) Tout d'abord, on montre que λ_q est fini.

(b) On montre enshuite que le minimum λ_q de la fonctionnelle I est atteint par une fonction positive ou nulle $u_q \in \mathcal{H}_q$.

(c) On montre enfin que u_q est régulière, strictement positive et solution de (3.4).

■

3.2 Existence de solution d'équation critique

Dans cette section, on montre d'une manière similaire comme le deuxième chapitre que la suite u_q obtenue du théorème 3.1.1 converge vers une solution non triviale de l'équation critique (3.1), lorsque l'exposant q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$. Avant d'entamer la convergence de la suite u_q, nous adoptons les notations suivantes.

Etant donnée (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ sur laquelle on considère l'équation critique (3.1),

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda f u^{2^\sharp - 1}$$

Notation 3.2.1 *on note*

1.

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u^2 dv_g$$

la fonctionnelle associée à l'équation (3.1)

2.

$$\mu_g := \inf_{u \in \mathcal{H}} I(u) = \inf_{u \in H_1^2(M)/\{0\}} \frac{I(u)}{\left(\int_M f u^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

est le minimum de la fonctionnelle I sur la contrainte

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2^\sharp} := \left\{ u \in H_1^2(M) \ / \ \int_M f |u|^{2^\sharp} dv_g = 1 \right\}$$

Le premier résultat que l'on démontre est la convergence de la suite (λ_q) lorsque l'exposant sous critique q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$.

Lemme 3.2.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, pour $q \in \left]2, 2^\sharp\right[$, la suite (λ_q) converge vers μ_g lorsque q tend vers $2^\sharp$ i.e. $\lim\limits_{q \longrightarrow 2^\sharp} \lambda_q = \mu_g$.*

Preuve. La démonstration de ce lemme se fait d'une manière similaire comme la démonstration du lemme 2.2.1. ■

Le deuxième résultat que l'on démontre dans cette section est la convergence de la suite (u_q) donnée par le théorème 3.1.1 vers une solution faible de l' lorsque l'exposant sous critique q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$.

Lemme 3.2.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, il existe une suite (q_i) de réels dans $\left]2, 2^\sharp\right[$ qui tend vers $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$ lorsque $i \longrightarrow +\infty$,pour laquelle la suite correspondante de fonctions (u_{q_i}) donnée par le théorème 3.1.1 converge vers une fonction positive ou nulle $u \in H_1^2(M) \cap C^{2,\alpha}(M)$ solution faible de l'équation critique*

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \mu_g f u^{2^\sharp - 1} \tag{3.5}$$

où $\mu_g = \inf\limits_{u \in H_1^2(M)/\{0\}} \dfrac{I(u)}{\left(\int_M f u^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$.

Preuve. La démonstration de ce lemme est tout à fait similaire à la démonstration du lemme 2.2.2. ■

Remarque 3.2.1 *Le lemme précédent montre que notre équation critique (3.5) possède une solution u soit identiquement nulle soit partout strictement positive. Toute la difficulté consiste maintenant à trouver une condition qui va nous permettre d'éviter la solution triviale ($u \equiv 0$). C'est l'objet du lemme suivant.*

Lemme 3.2.3 (Condition géométrique) *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ de courbure scalaire R_g positive. Sous la condition*

$$\mu_g < \frac{1}{\left(\max\limits_{x \in M} f(x)\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0} \tag{3.6}$$

où K_0 est la meilleure constante de Sobolev énoncé dans la définition 1.3.4. Alors la fonction u donnée par le lemme 3.2.2 est une solution non triviale ($u \not\equiv 0$) de l'équation critique (3.5).

Preuve. Tout comme la démonstration du lemme 2.2.3, on raisonne par absurde, supposons que que $u \equiv 0$, En reprenant les notation du lemme 3.2.2, il est clair que la suite (u_{q_i}) converge faiblement vers 0 dans l'espace $H_1^2(M)$ et fortement vers 0 dans $L^2(M)$ i.e. $\lim\limits_{i \longrightarrow +\infty} \int_M u_{q_i}^2 dv_g =$ 0

On a $u_{q_i} \in \mathcal{H}_{q_i}$ i.e. $\int_M f|u_{q_i}|^{q_i} dv_g = 1$, avec l'inégalité de Hölder, on pourra écrire que pour tout i

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\int_M f|u_{q_i}|^{q_i} dv_g\right)^{\frac{2}{q_i}} \\
&\leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{q_i}} \left(\int_M |u_{q_i}|^{q_i} dv_g\right)^{\frac{2}{q_i}} \\
&\leq\leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{q_i}} \left(\left(\int_M (|u_{q_i}|^{q_i})^{\frac{2^\sharp}{q}} dv_g\right)^{\frac{q_i}{2^\sharp}} V_g^{1-\frac{q_i}{2^\sharp}}\right)^{\frac{2}{q_i}} \\
&\leq\leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{q_i}} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left(\int_M |u_{q_i}|^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

où V_g est le volume de la variété (M, g). D'autre part on utilise l'inégalité de la meilleure constante de Sobolev énoncé dans le lemme 1.3.1, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left(\int_M |u_{q_i}|^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \leq (K_0+\epsilon)\int_M |\nabla u_{q_i}|^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u_{q_i}^2 dv_g$$

l'inégalité (3.7) devient

$$\begin{aligned}
1 &\leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{q_i}} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left(\int_M |u_{q_i}|^{2^\sharp} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \\
&\leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{q_i}} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left((K_0+\epsilon)\int_M |\nabla u_{q_i}|^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u_{q_i}^2 dv_g\right)
\end{aligned}$$

Or on a

$$\int_M |\nabla u_{q_i}|^2 dv_g = \lambda_{q_i} - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g u_{q_i}^2 dv_g$$

alors la dernière inégalité devient

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{q_i}} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left\{(K_0+\epsilon)\left(\lambda_{q_i} - \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M R_g u_{q_i}^2 dv_g\right) + B_\epsilon \int_M u_{q_i}^2 dv_g\right\} \\
&\leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{q_i}} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} \left\{(K_0+\epsilon)\lambda_{q_i} + \left((K_0+\epsilon)\frac{n-2}{4(n-1)}\max_{x\in M}|R_g| + B_\epsilon\right)\int_M u_{q_i}^2 dv_g\right\}
\end{aligned}
$$

En passant à la limite pour $i \longrightarrow +\infty$, dans la dernière inégalité et on utilise le fait que

$$\lim_{i\longrightarrow+\infty}\int_M u_{q_i}^2 dv_g = 0,\ \lim_{i\longrightarrow+\infty}\lambda_{q_i} = \mu_g \text{ et } \lim_{i\longrightarrow+\infty} V_g^{\frac{2}{q_i}-\frac{2}{2^\sharp}} = V_g^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{2^\sharp}} = 1$$

on obtient

$$1 \leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} (K_0+\epsilon)\mu_g$$

Par conséquent pour ϵ suffisamment petit on aura

$$1 \leq \left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0\mu_g$$

ce qui contredit avec la condition (3.6). D'où $u \not\equiv 0$. ■

Remarque 3.2.2 *Pour achever la preuve du théorème principal 3.0.1, il nous reste à démontré le lemme suivant.*

Lemme 3.2.4 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et μ_g. Sous la condition*

$$\mu_g < \frac{1}{\left(\max_{x\in M} f(x)\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0}$$

Alors la fonction u donnée par le lemme 3.2.2 minimise la fonctionnelle

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M R_g u^2 dv_g$$

sur la contrainte

$$\mathcal{H} := \left\{u \in H_1^2(M)\ /\ \int_M f|u|^{2^\sharp} dv_g = 1\right\}$$

(c-a-d, u vérifie $\int_M f|u|^{2^\sharp} dv_g = 1$ et $\mu_g = I(u)$).

Preuve. La preuve se fait d'une manière similaire de la preuve du lemme 2.2.4. ■

Démonstration du théorème principal 3.0.1

La preuve du théorème principal 3.0.1 est une application directe des lemmes 3.2.1 à 3.2.4.

Bibliographie

[1] T. Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 269–296.*

[2] T. Aubin. Some nonlinear problems in Riemannian geometry, *Springer (1998).*

[3] D. Gilbard, N. Trudinger, Elliptical partial difierential equations of second order, *Springer Verlag 1983.*

[4] E. Hebey, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev, *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Lineaire 13 (1996), 57–93.*

[5] E. Hebey, Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, *Diderot Editeur, Paris, 1997.*

[6] E. Hebey, F. Madani, Thèse de Doctorat. *Université Paris 6, 2009.*

[7] R. Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom, 20, (1984), 479-495.*

[8] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, *Ann. di Matem. Pura ed Appl. 110 (1976), 353–372.*

[9] N.S. Trudinger. Remarks concerning the confomal deformation of Riemannian structures on compacts manifold. *Ann. Sc. Norm. Super. Pipa, Sci. Fis. Mat., III. Ser., 22(1968).265-274.*

[10] M. Vaugon, Transformation de la courbure scalaire sur une variété Riemannienne compacte *J. of Funct. Anal. 71 No. 1 (1987), 182-194*.

[11] H. Yamabe. On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.*