République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2020/2021

# Equations Différentielles Impulsives Discrètes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques

par

**H**adjar **A**mara [1]

Sous la direction de

**Dr/Mr B**errezoug **H**alimi

Soutenue le 13/07/2021 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **G. D**jellouli | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Président |
| **H. B**errezoug | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Encadreur |
| **A. Z**eglaoui | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |
| **N. B**ekkouche | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinatrice |

1. e-mail : azerty@gmail.com

# Table des matières

# Remerciements


Je tiens avant tout à remercier **Allah** pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

Je dois beaucoup à mon directeur de thèse **M. Berrezoug HALIMI** qui a su me faire profiter de sa science. Il m'a offert son temps et sa patience. Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été une aide précieuse pour moi. J'ai beaucoup appris à son contact et eu grand plaisir à travailler avec lui. Il m'est trés agréable de lui adresser mes vives remerciements et de lui témoigner ma sincère reconnaissance. Merci aussi pour toutes les fois où j'ai fait appel à lui pour une aide, scientifique ou autre, car il n'a jamais ni hésité, ni ménagé sa peine pour répondre à mes sollicitations.

Je tiens également à remercier **M.Gouti DJELLOULI** qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que **M.Ahmed ZEGLAOUI et Mme.Noria BEKKOUCHE** pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de Mathématique qui m'ont aidé à m'améliorer durant mon cursus universitaire.

Enfin, merci à mes parents. Sans leurs sacrifices je ne serais pas devenu ce que je suis aujourd'hui.

# Dedicace

Je dédie ce travail à mes chers parents,

maman et mon père

à mes frères et soeurs

à tous mes enseignants.

# Introduction

La théorie des équations différentielles est un vaste domaine aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Celles-ci sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques.

La théorie des équations différentielles ordinaires impulsives a été initialisée en 1960 par V. Milman et A. Myshkis, elle a connait une période de développement de 1960 à 1975. Ensuite, de 1975 à 1990, le mérite du développement de cette théorie et de sa popularisation revient au mathématicien américain V. Lakshmikantham.

A partir de 1991, en plus de Lakshmikantham, d'autres mathématiciens comme L. Byszewski, D. Bainov contribuaient à l'enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors [4].

De nos jours, les systèmes impulsifs (différentielles et aux différences) sont devenus de plus en plus importants dans certains processus réels et phénomènes étudiés en physique, en pathologie [42], en technologie chimique [26], en dynamique des populations [63, 64], en biotechnologie, surtout dans les réseaux de neurones biologiques [36] et en économie [32]. Ces dernières années, il y a eu un développement important dans la théorie des équations différentielles impulsives avec moments fixés, voir les ouvrages [9], [62] et [70].

Ce mémoire comprend quatre chapitres.

**Le premier chapitre** intitulé "Préliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude. Il est divisé comme suit :

- Dans la section 1, nous donnons en quelques lignes un aperçu sur les équations différentielles impulsives.

- La section 2, sera consacrée aux différentes définitions de base.
- La section 3, nous donnons quelques définitions et théoremes de point fixe.
- La section 4, sera réservée à un petit rappel sur l'analyse multivoque.

**Le deuxième chapitre** intitulé “Equations différentielles impulsives”, on traitera l'existence des solutions par le théoreme de Banach et par le théoreme de Krasnoselskii pour les équations différentielles impulsives.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{y}(t) &=& f(t, y(t)), t \neq t_k \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) &=& I_k(y(t_k)), t = t_k \\ y(t_0^+) &=& y_0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Où, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $\Omega$ est un domaine de $\mathbb{R}^n, I : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues.

**Le troisième chapitre** intitulé “Systèmes d'équations différentielles impulsives”, on traitera l'existence des solutions pour le systhème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& f(t, x, y), t \in J := [0, \infty), t \neq t_k,\ k = 1, \ldots, \\ y'(t) &=& g(t, x, y), t \in J, \quad t \neq t_k,\ k = 1, \ldots, \\ x(t_k^+) - x(t_k^-) &=& I_k(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 1, \ldots, \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) &=& \overline{I}_k(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 1, \ldots, \\ x(0) &=& x_0, \\ y(0) &=& y_0, \end{array}\right. \tag{2}$$

Où $x_0, y_0 \in \mathbb{R},\ f, g : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, $I_k, \overline{I}_k \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les notations $x(t_k^+) = \lim_{h \to 0^+} x(t_k + h)$ et $x(t_k^-) = \lim_{h \to 0^+} x(t_k - h)$ sont les limites à droite et à gauche des fonctions $y$ à $t = t_k$, respectivement.

**Le quatrième chapitre** intitulé “Equations aux différences impulsives”, sera consacré au notions sur le calcul aux différences et à l'existence et unicité des solutions pour le problème discret suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta x(n) &=& f(n, x(n), y(n)), n \neq n_k, \\ \Delta y(n) &=& g(n, x(n), y(n)), n \neq n_k, \\ \Delta x(n_k) &=& B_k x(n_k), n = n_k \\ \Delta y(n_k) &=& \bar{B}_k y(n_k), n = n_k \\ x(0) &=& x_0, \\ y(0) &=& y_0, \end{array}\right. \tag{3}$$

$f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions ; $B_k, \bar{B}_k$ sont des constantes $k \in \mathbb{N}$. Les impulsions $\{n_k\}_1^\infty$ sont des entiers naturels et satisfaits $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$.

**Mots clés** : Equations différentielles Impulsives, multifonction, théoremse du point fixe, espace métrique généralisé.

# Notations

Dans tout ce mémoire on désignera par

$\mathbb{C}$ : l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{R}$ : l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$ : l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^*$ : l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$ : l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^*$ : l'ensemble des nombres naturels non nuls.

$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \ldots\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$

$x(t_j^+) := \lim\limits_{t \to t_j^+} x(t)$

$x(t_j^-) := \lim\limits_{t \to t_j^-} x(t)$

# Chapitre 1

# Quelques notions et résultats préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite.

## 1.1 Un aperçu historique sur les équations différentielles impulsives

De nos jours, les systèmes impulsifs sont devenus, de plus en plus, importants dans certains processus réels et phénomènes naturels. Par exemple, en physique, en dynamique des populations, en biotechnologie, en économie, etc.

La théorie des équations différentielles impulsives a été initiée par A. Mishkis et V.D. Mil'man en 1960. Le développement de cette théorie était relativement lent à cause de la difficulté de manipulation de telles équations. Après, beaucoup de chercheurs ont participé à l'enrichissement de cette théorie où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors.

## 1.2 Définitions et notions fondamentales

Soit $J := [0, T], T > 0$ et E un espace de Banach, muni de la norme $\|.\|$.
Notons C(J,E) l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \to E$, muni de la norme

$$\|y\|_\infty := \sup\{\|y(t)\|, t \in J\}.$$

**Définition 1.2.1.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace $E$ toute application notée $\|.\|$ définie sur $E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour tout $x$, $y$ dans $E$ et $\alpha$ dans $K$*

**i)** $\|x\| = 0$ *si seulement si* $x = 0$.

**ii)** $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$.

**iii)** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

**Définition 1.2.2.** *Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach s'il est complet. Autrement dit, E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

**Exemple 1.2.1.** $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *est l'espace de Banach des fonctions continues* $y : ([a, b]) \to \mathbb{R}^n$, *muni de la norme*

$$\|y\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} \|y(t)\|.$$

*Soit* $J = [0, b], L^1(J, \mathbb{R})$ *est l'espace de Banach des fonctions mesurables* $x : J \to \mathbb{R}$ *qui sont Lebesgue intégrable avec la norme*

$$\|x\|_1 = \int_0^b \|x(t)\|ds.$$

*On désigne par* $AC(J, \mathbb{R})$ *: l'espace des fonctions absolument continues sur* $J$. *Notons* $AC^i(J, \mathbb{R}^n)$, *l'espace des fonctions* $y : J \to \mathbb{R}^n$ *qui sont i-emme fois différentiables et dont la i-emme dérivée* $y^{(i)}$ *est absolument continue.*

**Définition 1.2.3.** *(Fonction Carathéodory)*
*Soient* $X, Y$ *deux espaces de Banach. Une application* $f : J \times X \to Y$ *est dite Carathéodory si f vérifie :*

**(1)** $t \to f(t, x)$ *est mesurable pour tout* $x \in X$,

**(2)** $x \to f(t, x)$ *est continue presque pour tout* $t \in J$.
*L'application f est dite* $L^1$ *- Carathéodory si f est Carathéodory et on a* $\forall q > 0, \exists l_q \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ :

$$\|f(t, x)\| \leq l_q(t) \text{ p.p. } t \in J, \forall \|x\| \leq q$$

**Exemple 1.2.2.** *Soient* $h : J \to Y$ *une fonction mesurable et* $g : X \to Y$ *une fonction continue, alors la fonction* $f : J \times X \to Y$ *définie par* $f(t, x) = h(t) + g(x)$ *est Carathéodory.*

**Définition 1.2.4.** *(Fonction localement lipschitzienne)*
*Soient J un intervalle, D un ouvert de* $\mathbb{R}^n, f : J \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. *Soient* $(t_0, y_0) \in J \times D$. *Soit* $U \subset D$ *un voisinage du point* $y_0$. *On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable y dans le voisinage U s'il existe une constante* $L > 0$ *et il existe un voisinage* $V \subset J$ *du point* $t_0$ *tels que :*

$$\|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| \leq L\|y_1(t) - y_2(t)\| \text{ pour } y_1(t), y_2(t) \in U, t \in V.$$

**Définition 1.2.5.** *Soient* $(X, d)$ *et* $(Y, \delta)$ *deux espaces métriques. Soit k un réel strictement positif. On dit que* $f : X \to Y$ *est lipschitzienne de rapport k si*

$$\forall x, y \in X : \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

*Si de plus* $k < 1$, *on dit que f est contractante.*

**Exemple 1.2.3.** *La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ :

$$f(y) = \sqrt{y}$$

*n'est pas lipschitzienne au voisinage de* $y = 0$.
*En effet :*

$$\lim_{(y_1,y_2)\to(0,0)} \frac{\mid f(y_1) - f(y_2) \mid}{\mid y_1 - y_2 \mid} = \infty$$

*Et par conséquent il ne peut pas exister une constante* $L$ *vérifiant la condition de Lipschitz.*
*Cependant* $f$ *est Lipschitzienne sur tout intervalle* $[a, b]$ *avec* $b > a > 0$.
*En effet pour tout* $y_1(t), y_2(t) \in [a, b]$ *on a :*

$$\frac{\mid \sqrt{(y_1)} - \sqrt{(y_2)} \mid}{\mid y_1 - y_2 \mid} = \frac{1}{\mid y_1 - y_2 \mid} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

*Et donc la condition de Lipschitz est vérifiée avec* $L = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

**Remarque 1.2.1.** **(1)** *Si une fonction (d'une variable) est dérivable au voisinage d'un point et la dérivée est bornée dans ce voisinage, alors la fonction est localement lipschitzienne. La réciproque est fausse : il y a des fonctions lipschitziennes qui ne sont pas dérivables.*

**(2)** *Si une fonction est de classe* $C^1$ *alors elle est localement lipschitzienne.*

**Définition 1.2.6.** *Soient* $E$ *et* $F$ *deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de* $E$ *dans* $F$.

**Définition 1.2.7.** *(Opérateur complètement continu).*
*Soient* $E$ *et* $F$ *deux espaces de Banach et* $f$ *une application définie de* $E$ *à valeurs dans* $F$. *On dit que* $f$ *est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de* $E$ *en un ensemble relativement compact dans* $F$.

**Définition 1.2.8.** *(Ensemble uniformément borné).*
*On dit que* $M \subset C(E, F)$ *est uniformément borné s'il existe un nombre réel* $c > 0$ *tel que :*

$$\|x(t)\| \leq c, \forall x \in M$$

**Définition 1.2.9.** *(Partie équicontinue).*
*Soient (E, d) un espace métrique et F un un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A(E ; F) est équicontinue si, pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\alpha(\epsilon) > 0$ *telle que pour tout* $f \in A$, *on a*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon \text{ pour tout } x, y \in E \text{ et } d(x, y) < \alpha(\epsilon).$$

**Définition 1.2.10.** *(Théorème d'Arzela-Ascoli).*
*Soient* $E$ *un espace métrique complet, et* $J$ *un ensemble compact de* $\mathbb{R}$, *soit* $A$ *un sous ensemble de* $C(J, E)$, $A$ *est relativement compact dans* $C(J, E)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

**1.** *L'ensemble $A$ est uniformément borné i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :*

$$\|f(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A$$

**2.** *L'ensemble $A$ est équicontinu i.e pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$| t_1 - t_2 | \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A$$

**3.** *Pour tout $x \in A$, l'ensemble $\{f(x); f \in A\} \subset E$ est relativement compact.*

**Théorème 1.2.1.** *(Convergence dominée de Lebesgue).*
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(f_n)$ une suite de fonctions de $L^1$. On suppose que*

**i)** *$f_n(x) \to f(x)$ p.p sur $\Omega$.*

**ii)** *Il existe une fonction $g \in L^1$ tel que pour chaque $n$, $| f_n(x) | \leq g(x)$ p.p sur $\Omega$, Alors*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

**Définition 1.2.11.** *(Semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés).*
*Soit $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach.*

- *Une famille à un paramètre $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de $X$ dans $X$ est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ si :*
  *(i) $T(0) = I$ (où $I$ est l'opérateur identité de $X$).*
  *(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.*
- *un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ est dit uniformément continu sur $X$ si :*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0, \tag{1.1}$$

- *L'opérateur linéaire $A$ défini par :*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}, \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

  *et*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt} |_{t=0},$$

  *est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de $A$.*

**Définition 1.2.12.** *($C_0$-semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés).*
*Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ est dit fortement continu si :*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \forall x \in X, \tag{1.2}$$

*Un semi-groupe fortement continu sur $X$ est aussi appelé $C_0$-semi-groupe sur $X$.*

**Théorème 1.2.2.** *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ $C_0$*-semi-groupe sur* $X$*. Alors il existe deux constantes* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *telles que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

**Théorème 1.2.3.** *(Hille-Yosida).*
*Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire tel que :*
*(i)* $A$ *est fermé et* $D(A)$ *est dense dans* $X$*,*
*(ii) il existe* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *tels que*

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |Re(\lambda)| > \omega\}$$

*et pour* $Re\lambda > \omega, n = 1, 2, \ldots$

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}$$

*Alors* $A$ *est le générateur infinitésimal d'un* $C_0$ *semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$

**Définition 1.2.13.** *(Espace métrique généralisé).*
*Si* $v, r \in \mathbb{R}^m$, $v := (v_1, \ldots, v_m)$ *et* $r := (r_1, \ldots, r_m)$ *alors* $v \leq r$ *si* $v_i \leq r_i$ *pour tous* $i = 1, \ldots, m$.
*Aussi* $|v| := (|v_1|, \ldots, |v_m|)$ *et* $\max(u, v) := (\max(u_1, v_1), \ldots, \max(u_m, v_m))$*. Si* $c \in \mathbb{R}$*, alors* $v \leq c$ *si* $v_i \leq c$ *pour tous* $i \in \{1, \ldots, m\}$.
*Soit* $X$ *un ensemble non vide et considérons l'espace* $\mathbb{R}^m_+$*. L'application* $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ *qui vérifie tous les axiomes habituels de la métrique est appelée une métrique* ***généralisé*** *au sens de Perov et* $(X, d)$ *est appelé espace métrique généralisé.*

Pour $r := (r_1, r_2, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m_+$, on note par

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x_0, x) < r\},$$

La boule ouverte centrée en $x_0$ et de rayon $r$

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

La boule fermée centrée en $x_0$ et de rayon $r$
Les notions de convergence, suite de cauchy et les sous ensembles ouverts et fermés dans le cas des espaces métrique généralisé sont similaires à ceux correspondants dans l'espace métrique habituel.

**Définition 1.2.14.** *(Matrice convergente).*
*Une matrice carrée* $M \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}^+)$ *de nombres réels est convergente vers zéro si et seulement si* $A^n \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

**Lemme 1.2.1.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}^+)$*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $A$ *est une matrice convergente vers zéro ;*

- *les valeurs propres de $A$ sont dans le disque ouvert unité,i.e.,* $\mid \lambda \mid < 1$, *pour tous* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $det(A - \lambda I) = 0$;
- *La matrice* $(I - A)$ *est non-singulière et* $(I - A)^{-1}$ *a des éléments non négatifs ;*
- $A^n q \to 0$ *et* $qA^n \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *pour tous* $q \in \mathbb{R}^m$.

**Exemple 1.2.4.** *Exemples de matrices qui convergent vers zero :*

1. $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$, *où* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $a + b < 1$ *;*
2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, *où* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $a + b < 1$ *;*
3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, *où* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *et* $\max\{a, c\} < 1$.

**Définition 1.2.15.** *(Opérateur contractif).*
*Soit* $(X, d)$ *un espace métrique généralisé. Un opérateur* $N : X \to X$ *est contractif s'il existe une matrice convergente vers zéro* $A$ *tel que*

$$d(N(x), N(y)) \leq Ad(x, y), \forall x, y \in X.$$

**Théorème 1.2.4.** *Soit* $(X, d)$ *un espace métrique généralisé complet et* $N : X \to X$ *un opérateur contractif avec la matrice de Lipschitz* $A$. *Alors* $N$ *a un point fixe unique* $x^*$ *et pour tout* $x_0 \in X$ *on a*

$$d(N^k(x_0), x^*) \leq A^k(I - A)^{-1} d(x_0, N(x_0)) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

## 1.3 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.

Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

**Définition 1.3.1.** *Soit* $f$ *une application d'un ensemble* $E$ *dans lui même. On appelle point fixe de* $f$ *tout point* $u \in E$ *tel que*

$$f(u) = u.$$

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe. Ce théorème prouvé en 1922 par Stefan Banach est basé essentiellement sur les notions d'application Lipschitzienne et d'application contractante.

**Théorème 1.3.1.** *(Principe de contraction de Banach)*
*Soit $E$ un espace métrique complet et soit $F : E \to E$ une application contractante, alors $F$ possède un point fixe unique.*

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énnoncer est celui de Schauder.

**Théorème 1.3.2.** *Soit $C$ une partie convexe et fermée d'un espace de Banach $E$ et soit $F : C \to C$ un opérateur continu et compact . Alors $F$ possède au moins un point fixe.*

**Théorème 1.3.3.** *(Théorème du point fixe de Brouwer).*
*Soit $C$ un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors $f$ admet au moins un point fixe dans $C$.*

**Théorème 1.3.4.** *(Alternative non linéaire de Leray et Schauder).*
*Soit $E$ un e.v.n. et $B := \overline{B}(0, R)$ une boule fermée dans $E$. Supposons que $f : B \to E$ est une application continue, compacte. Alors*

**(a)** *Ou bien $f$ possède un point fixe dans $B$.*

**(b)** *Ou bien il existe $x \in \partial B$ et $\lambda \in ]0, 1[$ tel que $x = \lambda f(x)$.*

**Théorème 1.3.5.** *[28] (Théorème du point fixe de Krasnoselskii).*
*Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit $M$ une partie non vide, convexe et fermée de $E$. On suppose que $A, B : M \to E$ sont deux applications satisfaisant :*

- $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$
- *$A$ est continue et $AM$ est contenu dans un ensemble compact,*
- *$B$ est une contraction.*

*Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.*

## 1.4 Quelques définitions d'analyse multivoque

Pour un éspace métrique $(X, d)$, les notations suivantes seront employées dans tout ce mémoire

- $\mathcal{P}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$
- $\mathcal{P}_f(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{ A fermé }\}$
- $\mathcal{P}_{cp}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{ A compact }\}$
- $\mathcal{P}_{cv}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{ A convexe }\}$, avec $X$ muni d'une structure d'un espace vectoriel.
- $\mathcal{P}_{cv,cp}(X) = \mathcal{P}_{cv}(X) \cap \mathcal{P}_{cp}(X)$

**Définition 1.4.1.** *Une multifonction (ou application multivoque) (ou multi application) $F$ d'un espace $X$ vers un espace $Y$ est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de $Y$. On notera $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \to 2^Y$ et $F : X \to \circ Y$ sont aussi utilisées dans la littérature )*

**Définition 1.4.2.** *On appelle graphe de la multifonction $F$, l'ensemble*

$$Graph(F) = \{(x, y) \in E \times F : y \in F(x)\}$$

$F$ est à graphe fermé si Graph(F) est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que $F$ est fermée

**Définition 1.4.3.** *On appelle image de $F$ l'union des images $F(x)$ :*

$$Im(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

*et le domaine de $F$, l'ensemble*

$$Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

**Définition 1.4.4.** *Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque. On dira que $F$ est fortement mesurable si pour chaque fermé $U \subset Y$, l'ensemble $F^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est mesurable dans $X$.*

**Lemme 1.4.1.** [14]
*Soit $X$ un esace normé séparable.L'application multivoque : $F : J \to \mathcal{P}(X)$ est mesurable si et seulement si pour chaque $x \in X$, la fonction $\varphi : J \to [0, +\infty[$ définie par*

$$\varphi(t) = d(x, F(t)) = \inf\{\|x - y\| : y \in F(t)\}, t \in J$$

*est lebesgue mesurable.*

**Définition 1.4.5.** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $F : E \to \mathcal{P}(E)$ une application multivoque. On dit que $F$ a un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$. L'ensemble des points fixes de $F$ sera noté par $Fix(F)$. On dit que $F$ est à valeurs (fermés) convexes si $F(x)$ est fermé convexe pour tout $x \in X$ et $F$ est localement borné si $F(A) = \cup_{x \in A} F(x)$ est borné dans $E$ pour tout ensemble $A \subset E$, c.à.d.*

$$\sup_{x \in A}\{\sup\{\|y\|\} : y \in F(x)\} < \infty$$

**Définition 1.4.6.** *Soient $(X, d)$ et $(Y, \rho)$ deux espaces métriques et soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque.*
*On dit que $F$ est semi-continu supérieurement (s.c.s) sur $X$ si pour chaque $x_0 \in X$ l'ensemble $F(x_0)$ est un ensemble non vide, et si pour chaque sous ensemble ouvert $N$ de $Y$ contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage ouvert $M$ de $x_0$ tel que $F(M) \subset N$. C'est à dire, si l'ensemble $F^{-}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$ est fermé pour n'importe quel ensemble fermé $V$ dans $Y$.*
*D'une manière équivalente, $F$ est s.c.s si l'ensemble $F^{+} = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ est ouvert pour chaque ouvert $V$ dans $Y$.*
*La fonction $F$ est semi-continue inférieurement (s.c.i) si l'image inverse de $V$ par $F$*

$$F^{-}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

*est ouverte pour chaque ouvert $V$ dans $Y$. D'une manière équivalente, $F$ est s.c.i si le noyau de $V$ par $F$*

$$F^{+}(V) = \{x \in X : F(X) \subset V\}$$

*est fermé pour n'importe quel ensemble fermé $V$ dans $Y$.*
*En conclusion, pour une fonction à valeurs multiples $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on prend*

$$\|F(t,z)\|_p := sup\{\|v\|; v \in F(t,z)\}$$

**Définition 1.4.7.** *Une fonction multivoque $F$ est dite Carathéodory si :*
*(a) la fonction $t \to F(t,z)$ est mesurable pour chaque $z \in \mathbb{R}^n$ ;*
*(b) pour tout $t \in J$ la fonction $z \to F(t,z)$ est semi-continue supérieurement, p.p.*
*En outre, elle est $L^1$- Carathéodory si $F$ est localement intégrablement bornée, c.à.d. pour chaque nombre réel positif $r$ , il existe $h_r \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\|F(t,z)\|_p \leq h_r(t) \ p.p \quad t \in J, \forall \|z\| \leq r$$

**Lemme 1.4.2.** *Soit $X$ un espace de Banach. Soit $F : [0,b] \times X \to \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ une multifonction $L^1$-Carathéodory avec $S_{F,y} \neq 0$ et soit $\Gamma$ un opérateur linéaire continu de $L^1([0,b], X)$ dans $C([0,b], X)$, alors l'opérateur*

$$\begin{array}{cccc} \Gamma \circ S_F & : & C([0,b],X) & \to & \mathcal{P}_{cp,cv}(C([0,b],X)) \\ & & y & \mapsto & (\Gamma \circ S_F)(y) := \Gamma(S_{F,y}) \end{array}$$

*est à graphe fermé dans $C([0,b], X) \times C([0,b], X)$, où*

$$S_{F,y} = \{v \in L^1([0,b], X) : v(t) \in F(t, y(t)); t \in [0,b]\}$$

**Définition 1.4.8.** *On considère la distance pseudo-métrique de Hausdorf :*

$$H_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

*définie par*

$$H_d(A,B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{bnB} d(A,b)\}$$

*où $d(A,b) = \inf_{a \in A}, d(a,B) = \inf_{b \in B} d(a,b)$ . Donc $(\mathcal{P}_{b,f}(\mathbb{R}^n, H_d)$ est un espace métrique et $(\mathcal{P}_{bf}(\mathbb{R}^n, H_d)$ est un espace métrique généralisé. D'ailleurs, $H_d$ satisfait l'inégalité triangulaire. Et si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} d(x_0, x) \ \text{ et } \ H_d(\{x_0\}, A) = \sup_{x \in A} d(x_0, x)$$

**Définition 1.4.9.** *Une multifonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ s'appelle :*
*(a) k-Lipschitz s'il existe $k > 0$ telle que*

$$H_d(F(x), F(y)) \leq kd(x,y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

*(b) Une contraction si elle est k-Lipschitz avec $k < 1$.*

**Lemme 1.4.3** (21). *Soit $(X,d)$ un espace métrique complet. Si $F : X \to \mathcal{P}_f(X)$ est contractante, alors $Fix(F) \neq \emptyset$.*

**Lemme 1.4.4** (21). *Pour une multifonction $F : X \to \mathcal{P}_{cp}(Y)$ s.c.s. on a*

$$\forall x_0 \in X, \lim_{x \to x_0} \sup F(x) = F(x_0)$$

**Lemme 1.4.5** (21). *Soit $(K_n)_n \subset K$ tel que $K$ est un sous ensemble compact de $X$, et $X$ est un espace de Banach separable. Alors*

$$\overline{co}(\lim_{n \to \infty} \sup K_n) = \cap_{N>0} \overline{co}(\cup_{N \geq 0} K_n)$$

*où co l'enveloppe convexe.*

# Chapitre 2

# Équations différentielles impulsives

Ce chapitre traîte l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy sur les équations différentielles ordinaires impulsives de premier ordre sur un intervalle compact.

**Définition 2.0.1.** *(Description d'une équation impulsive).*
*Une équation différentielle impulsive représente une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle ordinaire et des sauts instantanés de l'état appelés impulsions.*

Dans ce mémoire, on s'intéresse à une équation impulsive avec des impulsions fixés, de la forme :

$$\begin{cases} x' &= f(t,x), t \neq t_k \, k = 1,2,\dots \\ \Delta x &= I_k(x), t = t_k \\ x(t_0^+) &= x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Où pour, $t = t_k, \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ et $x(t_k^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t_k + h), x(t_k^-) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t_k - h)$.
La solution $x(t)$ du système 2.1 satisfait :

- $x' = f(t, x(t)), t \in ]t_k, t_{k+1}]$,
- $\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), t = t_k, k = 1, 2, \dots$

## 2.1 L'espace des solutions

Comme les équations différentielles ordinaires, il existe des équations impulsives qui peuvent être résolues dont la solution est une fonction continue par morceau.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J \backslash \{t_1, t_2, \dots, t_m\}. \tag{2.2}$$

$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k)), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \tag{2.3}$$

$$y(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

Où $J = [0, b], f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction Carathéodory, $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, m, a \in \mathbb{R}^n, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m, \Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-), y(t_k^+) = \lim_{h \to 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h \to 0^+} y(t_k - h)$ représentent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ à $t = t_k$.
Tout d'abord, nous définissons ce que nous exprimons être une solution du problème 2.2 - 2.4.
$PC(J, \mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Banach défini par :
$PC(J, \mathbb{R}^n) = \Big\{ y : J \to \mathbb{R}^n, y \in C((t_k, t_{k+1}], \mathbb{R}^n),\ k = 0, \dots, m+1, y(t_k^-)$ et $y(t_k^+)$ existe et satisfait $y(t_k^+) = y(t_k^-)$ pour $k = 1, \dots, m \Big\}$.
Avec la norme

$$\|y\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|y(t)\|.$$

**Lemme 2.1.1.** *[?]*
*L'espace* $(PC, \|.\|_{PC})$ *est un espace de Banach.*

*Démonstration.* Soit $(y_q)_q$ une suite de Cauchy dans $PC$, alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall q_0, q_1 \geq n_0 \Rightarrow \|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{PC} \leq \epsilon$$

Avec

$$\|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{PC} = \sup_{t \in ]0,b]} \|y_{q_0}(t) - y_{q_1}(t)\|$$

Comme $y_q \in PC$ alors $y_q \in C(J_0, \mathbb{R}^n), et\ on\ a$

$$\|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{J_0} \leq \|y_q - y_{q_1}\|_{PC} \leq \varepsilon$$

donc $(y_q)_q$ une suite de Cauchy dans $C(J_0, \mathbb{R}^n)$ alors on a $\exists y_0 \in C(J_0, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|y_q - y_{q_0}\|_{J_0} \to 0 \text{ } quand \text{ } q \to \infty$$

On a aussi $y_q \in C(J_1, \mathbb{R}^n)$, on considère la suite des fonctions :

$$\widetilde{y_q}(t) = \begin{cases} y_q(t) & , \quad t \in ]t_1, t_2] \\ y_q(t^+) & , \quad t = t_1 \end{cases}$$

Alors $(\widetilde{y_q})_q$ est une suite de Cauchy dans $C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, donc $\exists y_1 \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ tel que $\lim_{q \to \infty} \widetilde{y_q} = y_1$
$\lim_{q \to \infty} y_q = y_1, \forall t \in ]t_1, t_2], \lim_{q \to \infty} \widetilde{y_q}(t_1) = \lim_{q \to \infty} y_q(t_1^+) = y_1(t_1)$
Donc $\|y_q - y_1\|_{J_1} \to 0$ *quand* $q \to \infty$

Par analogie, on peut continuer la démonstration jusqu'a l'étape "m", d'ou $\lim_{q\to\infty} \|y_q - y\|_{PC} = 0$ tel que :

$$y(t) = \begin{cases} y_0(t) & , \quad t \in J_0 \\ y_1(t) & , \quad t \in J_1 \\ \vdots & , \quad \vdots \\ y_m(t) & , \quad t \in J_m \end{cases}$$

□

**Définition 2.1.1.** *Une fonction $y \in PC(J, E)$ est dite une solution de (2.2) - (2.4) si $y$ satisfait l'équation (2.2) et les conditions (2.3)-(2.4)*

**Lemme 2.1.2.** *[?]*
*$y$ est solution du problème (2.2) - (2.4), si et seulement si $y \in PC \cap \cup_{k=1}^{m} AC(J_k, \mathbb{R}^n)$ et satisfait*

$$y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)) \tag{2.5}$$

*Démonstration.* • Si $t \in [0, t_1]$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J \backslash \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}. \tag{2.6}$$

$$y(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

On a, si $t \in [0, t_1]$, l'intégration de l'équation (2.6) entre 0 et t, donne

$$\int_0^t \dot{y}(s)ds = \int_0^t f(s, y(s))ds$$

$$\begin{aligned} y(t) - y(0) &= \int_0^t f(s, y(s))ds \\ y(t) &= y(0) + \int_0^t f(s, y(s))ds \\ y(t) &= a + \int_0^t f(s, y(s))ds \end{aligned} \tag{2.8}$$

• Si $t \in [t_1, t_2]$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J \backslash \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}.$$

$$y(t_1^+) = y(t_1^-) + I_1(y(t_1)) \tag{2.9}$$

On a, d'après l'équation (2.8)

$$\begin{aligned}
y(t) &= y(t_1^+) + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds \\
y(t) &= y(t_1^-) + I_1(y(t_1)) + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds \\
y(t) &= a + \int_{0}^{t_1} f(s, y(s))ds + I_1(y(t_1)) + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds \\
y(t) &= a + \int_{0}^{t} f(s, y(s))ds + I_1(y(t_1)) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

- Si $t \in [t_2, t_3]$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J \backslash \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}.$$

$$y(t_2^+) = y(t_2^-) + I_2(y(t_2)) \qquad (2.11)$$

On a, d'après l'équation (2.8)

$$\begin{aligned}
y(t) &= y(t_2^+) + \int_{t_2}^{t} f(s, y(s))ds \\
y(t) &= y(t_2^-) + I_2(y(t_2)) + \int_{t_2}^{t} f(s, y(s))ds \\
y(t) &= a + \int_{0}^{t_2} f(s, y(s))ds + I_1(y(t_1)) + I_2(y(t_2)) + \int_{t_2}^{t} f(s, y(s))ds \\
y(t) &= a + \int_{0}^{t} f(s, y(s))ds + I_1(y(t_1)) + I_2(y(t_2)) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

En répétant successivement la procédure ci-dessus, on obtient

- Si $t \in [t_m, b]$

$$y(t) = a + \int_{0}^{t} f(s, y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)) \qquad (2.13)$$

Inversement, il est facile de démontere que si y est une solution de l'équation intégrale (2.13), alors y est une solution du problème (2.2) - (2.4) □

## 2.2 Existence des solutions

### 2.2.1 Utilisation du théorème de Banach

**Théorème 2.2.1.** *Supposons qu'il existe une fonction $l \in L^1([0, b], \mathbb{R}^+)$ telle que :*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq l(t)\|x - y\|; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

*Alors le problème (2.2) - (2.4) admet une solution unique.*

*Démonstration.* 1. **L'existence :**

On considère le problème (2.2) - (2.4) sur $[0, t_1]$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), t \in J_0 = [0, t_1] \\ y(0) &= a \end{cases} \tag{2.14}$$

Nous considérons l'opérateur $N_1 : C([0, t_1], \mathbb{R}^n) \to C([0, t_1], \mathbb{R}^n)$ définie par

$$N_1(y)(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds, t \in [0, t_1]$$

Soient $x, y \in C([0, t_1]$ et $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \|N_1x(t) - N_1y(t)\| &\leq \int_0^t l(s)\|x(s) - y(s)ds\| \\ &\leq \frac{1}{\tau}\int_0^t \tau l(s)e^{\tau L(s)}ds\|x - y\|_{BC}; L(t) = \int_0^t l(s)ds \\ &\leq \frac{1}{\tau}e^{\tau L(t)}\|x - y\|_{BC} \end{aligned}$$

Donc

$$e^{-\tau L(t)}\|N_1x(t) - N_1y(t)\| \leq \frac{1}{\tau}\|x - y\|_{BC}; t \in J_0 = [0, t_1]$$

Alors

$$\|N_1x(t) - N_1y(t)\|_{BC} \leq \frac{1}{\tau}\|x - y\|_{BC}$$

Avec, $\|y\|_{BC} = \sup\limits_{t \in [0,t_1]} e^{-\tau L(t)}\|y(t)\|$.

$N_1$ est contractant, $(\tau \in [1, +\infty))$, donc

$$\exists y_0 \in C([0, t_1], \mathbb{R}^n) : N_1y_0 = y_0$$

Donc $y_0$ est la solution de (2.14).

On considère le problème (2.2) - (2.4) sur $[t_1, t_2]$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), t \in J_1 = ]t_1, t_2] \\ y(t_1^+) &= y_0(t_1) + I_1(y_0(t_1)) \end{cases} \tag{2.15}$$

On considère l'espace $C_* = \{y \in C(J_1, \mathbb{R}^n)/y(t_1^+)\ existe\}, (C_*, \|.\|)$ est un espace de Banach. Nous considérons l'opérateur $N_2 : C_* \to C_*$ définie par

$$N_2(y)(t) = y_0(t_1) + I_1(y_0(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds, t \in ]t_1, t_2]$$

Soient $x, y \in C_*, t \in [t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
\|N_2x(t) - N_2y(t)\| &\leq \int_{t_1}^{t} l(s)\|x(s) - y(s)ds\| \\
&\leq \frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t} \tau l(s)e^{\tau L(s)}ds\|x - y\|_{BC}; L(t) = \int_{t_1}^{t} l(s)ds \\
&\leq \frac{1}{\tau}e^{\tau L(t)}\|x - y\|_{BC}
\end{aligned}$$

Donc

$$e^{-\tau L(t)}\|N_2x(t) - N_2y(t)\| \leq \frac{1}{\tau}\|x - y\|_{BC}; t \in ]t_1, t_2]$$

Alors

$$\|N_2x - N_2\|_{BC} \leq \frac{1}{\tau}\|x - y\|_{BC}$$

$N_2$ est contractant, ($\tau \in [1, +\infty)$), donc

$$\exists y_1 \in C(]t_1, t_2], \mathbb{R}^n) : N_2y_1 = y_1$$

et on a

$$y_1(t_1^+) = N_2y_1(t_1^+) + I_1(y_0(t_1)) + \lim_{t \to t_1}\int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds$$

Donc ($y_1$) est la solution de (2.15).Par suite, la solution du problème (2.2) - (2.4) est donnée par :

$$y_*(t) = \begin{cases} y_0(t) & , \quad t \in [0, t_1] \\ y_1(t) & , \quad t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & , \quad \vdots \\ y_m(t) & , \quad t \in [t_m, b] \end{cases}$$

2. **L'unicité :**
   Soient $y_*, y_{**}$ deux solution du problème de Cauchy (2.2) - (2.4), on va montrer que : $y_*(t) = y_{**}(t), \forall t \in J = [0, b]$
   Si $t \in J_0 = [0, t_1]$, alors $y_*(t) = y_{**}(t), \forall t \in [0, t_1]$
   Si $t \in J_i = [t_i, t_{i+1}]$, alors $y_*(t) = y_{**}(t), \forall t \in [t_i, t_{i+1}]; y_*(t_i^+) = y_{**}(t_i^+), i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
   On a : $y_*(t_i^+) - y_*(t_i^-) = I_i(y_*(t_i))$ implique que :
   $y_*(t_i^+) = y_*(t_i^-) + I_i(y_*(t_i)) = y_{**}(t_i) + I_i(I_{**}(t_i)) = y_{**}(t_i^+)$

$\square$

### 2.2.2 Utilisation du théorème de Krasnoselskii

**Théorème 2.2.2.** *Supposons que :*

$(H_1)$ $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction* $L^1$ *- Carathéodory,*

**$(H_2)$** $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k = 1, \dots, m$ *avec* $\exists c_k$*, tel que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \|I_k(x) - I_k(y)\| \leq c_k \|x - y\|. \tag{2.16}$$

*Avec*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k < 1. \tag{2.17}$$

*sont vérifiées. Alors le problème (2.2) - (2.4) admet au moins une solution.*

*Démonstration.* Considérons l'opérateur $N$ défini par :

$$\begin{array}{rcll} N & : & PC(J, \mathbb{R}^n) & \to & PC(J, \mathbb{R}^n) \\ & & y & \mapsto & (N(y))(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) \end{array}$$

D'aprés le lemme 1.3.5, les points fixes de l'opérateur $N$ sont les solutions du problème (2.2) - (2.4).
On va appliquer le théorème de Krasnoselskii sur l'opérateur $N$ :
On écrit la forme de la solution sous la forme de la somme de deux applications $A$ et $B$ tel que $N = A + B$ avec $A$ est une contraction et $B$ est complètement continu.
On suppose que :

$$A(y(t)) = y_0 + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) \tag{2.18}$$

$$B(y(t)) = \int_0^t f(s, y(s))ds \tag{2.19}$$

La preuve est donnée par les étapes suivantes :

**Étape 1 :** Soit $M$ une partie non vide, convexe et fermée de $PC$. On suppose que :
$A, B : M \to PC$.
$M$ est défini par la formule suivante :

$$\exists l > 0, M = \{y \in PC, \ tel \ que \ \|y\|_{PC} \leq l\}.$$

On montre que $A(x) + B(y) \in M, \forall x, y \in M$ :
Soient $x, y \in M$ il faut que $A(x) + (y) \in M$,
$x, y \in M \Rightarrow \|x\|_{PC} \leq l \ et \ \|y\|_{PC} \leq l$,

On a :

$$
\begin{aligned}
\|A(x(t))+B(y(t))\| &= \|a+\int_0^t f(s,y(s))ds+\sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-))\| \\
&\leq \|a\|+\|\sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-))\|+\|\int_0^t f(s,y(s))ds\| \\
&\leq \|a\|+\sum_{0<t_k<t} \|I_k(x(t_k^-))\|+\|\int_0^t f(s,y(s))ds\| \\
&\leq \|a\|+\sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\|+\|\int_0^t h_r(s))ds\| \\
&\leq \|a\|+\sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\|+\|h_r\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

On a $\|x\|_{PC} \leq l$ donc $\|x(t_k^-)\| \leq l, k=1,\ldots,m$ donc $x(t_k^-) \in \overline{B}(0,l)=\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|\leq l\}$.
Puisque les $I_k$ sont continues sur le compact $\overline{B}(0,l)$ alors

$$
\sup_{x\in\overline{B}(0,l)} \|I_k(x)\| < \infty. \tag{2.20}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\|A(x(t))+B(y(t))\| &\leq \|a\|+\sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\|+\|h_r\|_{L^1}. \\
&\leq \|a\|+\sum_{k=1}^{m} \sup_{x\in\overline{B}(0,l)} \|I_k(x)\|+\|h_r\|_{L^1}. \\
&\leq C
\end{aligned}
$$

Donc $\|A(x(t))+B(y(t))\|_{PC} \leq C$ avec $C$ une constante positive.
Donc $A(x)+B(y) \in M$.

**Étape 2 :** On montre que $A$ est une contraction :
Soient $y,z \in PC(J,\mathbb{R}^n)$ :

$$
\begin{aligned}
\|A(y(t))-A(z(t))\| &= \|\sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-))-\sum_{0<t_k<t} \|I_k(z(t_k^-))\| \\
&= \|\sum_{0<t_k<t} \Big[I_k(y(t_k^-))-I_k(z(t_k^-))\Big]\| \\
&\leq \sum_{0<t_k<t} \|I_k(y(t_k^-))-I_k(z(t_k^-))\| \\
&\leq c_k\|y-z\|
\end{aligned}
$$

et comme :

$$\sum_{k=1}^{m} c_k < 1. \tag{2.21}$$

Donc $A$ est une contraction.

**Étape 3 :** On montre que $B$ est complètement continu en appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli :

**1.** $B$ transforme tout ensemble borné en un ensemble borné :

Soit $y \in M$

$$\begin{aligned}\|B(y(t))\| &= \|\int_0^t f(s,y(s))ds\| \\ &\leq \int_0^t \|f(s,y(s))ds\| \\ &\leq \|h_r\|_{L^1}\end{aligned}$$

**2.** $B$ est équicontinu :

Soient $l_1, l_2 \in [0,b]$ tel que $l_1 < l_2$ et soit $y \in M$

$$\begin{aligned}\|B(y(l_2)) - B(y(l_1))\| &= \|\int_0^{l_2} f(s,y(s))ds - \int_0^{l_1} f(s,y(s))ds\| \\ &= \|\int_0^{l_1} f(s,y(s))ds + \int_{l_1}^{l_2} f(s,y(s))ds - \int_0^{l_1} f(s,y(s))ds\| \\ &= \|\int_{l_1}^{l_2} f(s,y(s))ds\| \\ &\leq \int_{l_1}^{l_2} h_r(s))ds.\end{aligned}$$

Si $l_1 \to l_2$ alors $\|B(y(l_2)) - B(y(l_1))\| \to 0$.

**3.** $B$ est continue :

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $PC$ qui converge vers $y$. Il existe un entier $l$ tel que $\|y_n\|_{PC} \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|y\|_{PC} \leq l$ donc $y_n \in M$ et $y \in M$.

D'aprés le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned}\|B(y_n) - B(y)\| &= \|\int_0^t f(s,y_n(s))ds - \int_0^t f(s,y(s))ds\| \\ &= \|\int_0^t \Big(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\Big)ds\| \\ &\leq \int_0^t \|\Big(f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\Big)ds\| \to 0 \ si \ n \to \infty\end{aligned}$$

Donc $B$ est continu.

D'ou d'aprés le théoreme de Krasnoselskii $N$ admet un point fixe. $\square$

## 2.3 Exemples

**Exemple 2.3.1.** *Pour appliquer le résultat de ce chapitre, on considère l'équation différentielle impulsive suivante :*

$$y^{'}(t) = \frac{1}{(t+1)(t+2)}y^2(t), t \in [0,\infty) \setminus \{t_1, t_2, \ldots\}, \tag{2.22}$$

$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = b_k y(t_k^-), \tag{2.23}$$

$$y(0) = 0. \tag{2.24}$$

*Soit* $R > 0$ *et* $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *telle que* $\|x\|, \|\overline{x}\| \leq R$

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t,\overline{x})\| &= \|\frac{1}{(t+1)(t+2)}(x^2 - \overline{x}^2)\| \\ &\leq \frac{1}{(t+1)(t+2)}\|x+\overline{x}\|\|x-\overline{x}\| \\ &\leq \frac{2R}{(t+1)(t+2)}\|x-\overline{x}\| \end{aligned}$$

*Soit* $l_R(t) = \frac{2R}{(t+1)(t+2)}$, *pour* $t \in [0,\infty), l_R \in L^1_{loc}([0,\infty), \mathbb{R}^n)$.
*Il est claire que* $\|I_k(x) - I_k(\overline{x})\| \leq b_k\|x - \overline{x}\|$ *pour tout* $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$
*Si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k < 1$, *alors d'aprés le théorème (2.2.2), le problème (2.22)-(2.24) admet une solution unique.*

# Chapitre 3

# Système d'équations différentielles impulsive

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions d'un système d'équations différentielles impulsives.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x,y), t \in J := [0,\infty), t \neq t_k,\ k = 1,\ldots, \\ y'(t) & = & g(t,x,y), t \in J, \quad t \neq t_k,\ k = 1,\ldots, \\ x(t_k^+) - x(t_k^-) & = & I_k(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 1,\ldots, \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) & = & \overline{I}_k(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 1,\ldots, \\ x(0) & = & x_0, \\ y(0) & = & y_0, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Où $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $f, g : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, $I_k, \overline{I}_k \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les notations $x(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} x(t_k + h)$ et $x(t_k^-) = \lim_{h\to 0^+} x(t_k - h)$ sont les limites à droite et à gauche des fonctions $y$ à $t = t_k$, respectivement.

Le résultat de ce chapitre est basé sur les Théremes du point fixe de Perov et Krasnoselskii .

## 3.1 Existence des solutions

dans le but de définir une solution pour le problème (3.1), considerons l'espace des fonctions suivant :

$$PC_b = \{y \in PC([0,\infty), \mathbb{R}) :\ y \text{ est bornée}\}$$

Où $PC([0,\infty), \mathbb{R}) = \{y : [0,\infty) \to \mathbb{R}, y_k \in C((t_k, t_{k+1}], \mathbb{R}),\ k = 0, \ldots, y(t_k^-)$ et $y(t_k^+)$ existent et satisfaits $y(t_k) = y(t_k^-)$ pour $k = 1, \ldots\}$.

$PC_b$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|y\|_b = \sup\{|y(t)| :\ t \in [0,\infty)\}.$$

**Lemme 3.1.1.** *Une fonction* $(x,y) \in PC_b(J,\mathbb{R}) \times PC_b(J,\mathbb{R})$ *est dite une solution de (3.1) si et seulement si*

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + \int_0^t f(s,x(s),y(s))ds + \sum\limits_{0<t_k<t} I_k(x(t_k),y(t_k)), t \in J, \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t g(s,x(s),y(s))ds + \sum\limits_{0<t_k<t} \overline{I}_k(x(t_k),y(t_k)), t \in J. \end{cases}$$

Dans cette section nous allons établir l'existence des solutions du problème (3.1). En vue d'obtenir un tel résultat, on propose les hypothèses suivantes :

**(**$H_1$**)** Il existe des functions $l_i \in L^1(J,\mathbb{R}^+), i = 1,\ldots,4$, tel que

$$|f(t,x,y) - f(s,\overline{x},\overline{y})| \leq l_1(t)|x-\overline{x}| + l_2(t)|y-\overline{y}|, \text{ pour tout } x,\overline{x},y,\overline{y} \in \mathbb{R}$$

et

$$|g(t,x,y) - g(s,\overline{x},\overline{y})| \leq l_3(t)|x-\overline{x}| + l_4(t)|y-\overline{y}|, \text{ pour tout } x,\overline{x},y,\overline{y} \in \mathbb{R}.$$

**(**$H_2$**)** Il existe des constantes $a_{1k}, a_{2k} \geq 0,\ k = 1,\ldots,$ tal que

$$|I_k(x,y) - I_k(\overline{x},\overline{y})| \leq a_{1k}|x-\overline{x}| + a_{2k}|y-\overline{y}|, \text{ pour tout } x,\overline{x},y,\overline{y} \in \mathbb{R}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k(0,0)| < \infty.$$

($H_3$) Il existe des constantes $b_{1k}, b_{2k} \geq 0,\ k = 1,\ldots,$ tel que

$$|\overline{I}_k(x,y) - \overline{I}_k(\overline{x},\overline{y})| \leq b_{1k}|x-\overline{x}| + b_{2k}|y-\overline{y}|, \text{ pour tout } x,\overline{x},y,\overline{y} \in \mathbb{R}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{I}_k(0,0)| < \infty.$$

On utilise le théorème de Perov pour montrer que la solution du problème (3.1) est bornée et tends vers zero quand $t \to \infty$.

**Théorème 3.1.1.** *Supposons que les conditions* $(H_1) - (H_3)$ *sont vérifiées. Si la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} \|l_1\|_{L^1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{1k} & \|l_2\|_{L^1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k} \\ \|l_3\|_{L^1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{1k} & \|l_4\|_{L^1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{2k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}^+) \tag{3.2}$$

*Où*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} < \infty \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} < \infty, i = 1,2,$$

*converge vers zero et $f(\cdot,0,0), g(\cdot,0,0) \in L^1(J,\mathbb{R})$. Alors le probleme (3.1) a une solution unique. Si de plus*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} < 1,$$

*alors l'unique solution de (3.1) est bornée.*

*Démonstration.* Considerons l'opérateur $N : PC \times PC \to PC \times PC$ défini par

$$N(x,y) = (N_1(x,y), N_2(x,y))$$

Où

$$N_1(x,y)(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s),y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k),y(t_k)), t \in [0,\infty)$$

et

$$N_2(x,y)(t) = y_0 + \int_0^t g(s,x(s),y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \overline{I}_k(x(t_k),y(t_k)), t \in [0,\infty).$$

Nous montrons que l'opérateur $N$ est bien défini.
Soient $(x,y) \in PC_b \times PC_b, t \in [0,\infty)$, alors

$$\begin{aligned}
\|N_1(x,y)\|_b &\leq |x_0| + \int_0^t |f(s,x(s),y(s))|ds + \sum_{0<t_k<t} |I_k(x(t_k),y(t_k))| \\
&\leq \|l_1\|_{L^1}\|x\|_b + \|l_2\|_{L^1}\|y\|_b + \sum_{0<t_k<t} (a_{1k}\|x\|_b + a_{2k}\|y\|_b) \\
&\quad + \|f(\cdot,0,0)\|_{L^1} + \sum_{0<t_k<t} (|I_k(0,0)| + |\bar{I}_k(0,0)|).
\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on trouve

$$\begin{aligned}
\|N_2(x,y)\|_b &\leq \|l_3\|_{L^1}\|x\|_b + \|l_4\|_{L^1}\|y\|_b + \sum_{0<t_k<t} (b_{1k}\|x\|_b + b_{2k}\|y\|_b) \\
&\quad + \|g(\cdot,0,0)\|_{L^1} + \sum_{0<t_k<t} (|I_k(0,0)| + |\bar{I}_k(0,0)|).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \|N_1(x,y)\|_b \\ \|N_1(x,y)\|_b \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} \|l_1\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} & \|l_2\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \\ \|l_3\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} & \|l_4\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k}\|x\| + b_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|x\|_b \\ \|y\|_b \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \|f(.,0,0)\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty}(\|I_k(0,0)\|_b + \|\bar{I}_k(0,0)\|_b) \\ \\ \|g(.,0,0)\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty}(|I_k(0,0)| + |\bar{I}_k(0,0)|) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que l'opérateur $N$ est bien défini.
Il est claire que les points fixes de l'opérateur $N$ sont les solutions du probleme (3.1).

On montre que $N$ est une contraction.
Soient $(x,y),(\overline{x},\overline{y}) \in PC_b \times PC_b$. Alors $(H_1)$ et $(H_2)$ implique

$$\begin{aligned}
|N_1(x,y)(t) - N_1(\overline{x},\overline{y})(t)| &\leq \int_0^t |f(s,x(s),y(s)) - f(s,\overline{x}(s),\overline{y}(s))|ds \\
&+ \sum_{0<t_k<t}^{\infty} |I_k(x(t_k),y(t_k)) - I_k(\overline{x}(t_k),\overline{y}(t_k))| \\
&\leq \int_0^t (l_1(s)|x(s)-\overline{x}(s)| + l_2(s)|y(s)-\overline{y}(s)|)\, ds \\
&+ \sum_{0<t_k<t} (a_{1k}|x(t_k)-\overline{x}(t_k)| + a_{2k}|y(t_k)-\overline{y}(t_k)|).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|N_1(x,y) - N_1(\overline{x},\overline{y})\|_b &\leq (\|l_1\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k})\|x-\overline{x}\|_b \\
&+ (\|l_2\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k})\|y-\overline{y}\|_b.
\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on trouve

$$\begin{aligned}
\|N_2(x,y) - N_2(\overline{x},\overline{y})\|_b &\leq (\|l_3\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k})\|x-\overline{x}\|_b \\
&+ (\|l_4\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k})\|y-\overline{y}\|_b.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|N(x,y) - N(\overline{x},\overline{y})\|_b \leq M \begin{pmatrix} \|x-\overline{x}\|_b \\ \|y-\overline{y}\|_b \end{pmatrix}, \text{ pour tout } (x,y),(\overline{x},\overline{y}) \in PC_b \times PC_b.$$

Alors, par le théoreme (1.2.4), l'opérateur $N$ a un point fixe unique qui est solution du probleme (3.1).

Nous montrons maintenant que la solution $(x,y)$ est bornée.
Soit $t \in [0,\infty)$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |f(s,x(s),y(s))|ds + \sum_{0<t_k<t} |I_k(x(t_k),y(t_k))| \\
&\leq |x_0| + \int_0^t (l_1(s)|x| + l_2(s)|y|)ds + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}|x(t_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}|y(t_k)| \\
&\quad + \|f(.,0,0)\|_{L^1} + \|g(.,0,0)\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} |I_k(0,0) + \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{I}_k(0,0)|
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |y_0| + \int_0^t (l_3(s)|x(s)| + l_4(s)|y(s)|)ds + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k}|x(t_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}|y(t_k)| \\
&\quad + \|f(.,0,0)\|_{L^1} + \|g(.,0,0)\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} |I_k(0,0) + \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{I}_k(0,0)|.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
|x(t)| + |y(t)| &\leq |x_0| + |y_0| + \int_0^t ((l_1(s) + l_3(s))|x(s)| + (l_2(s) + l_4(s))|y(s)|)ds \\
&+ (\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k})(|x(t_k)| + |y(t_k)|) \\
&\quad + 2\|f(.,0,0)\|_{L^1} + 2\|g(.,0,0)\|_{L^1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} |I_k(0,0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{I}_k(0,0)|.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in(0,t)} (|x(s)| + |y(s)|) &\leq |x_0| + |y_0| + \int_0^t (l_1(s) + l_3(s) + l_2(s) + l_4(s)) \times \\
&\quad \sup_{s\in[0,t]} (|x(s)| + |y(s)|)ds \\
&+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\right) \sup_{s\in[0,t]} (|x(t_k)| + |y(t_k)|) \\
&+ 2\|f(.,0,0)\|_{L^1} + 2\|g(.,0,0)\|_{L^1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} |I_k(0,0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{I}_k(0,0)|.
\end{aligned}
$$

Ceci implique que

$$
\sup_{s\in(0,t)} (|x(s)| + |y(s)|) \leq \alpha + \int_0^t l(s) \sup_{s\in[0,t]} (|x(s)| + |y(s)|)ds
$$

Où

$$
\alpha = \frac{|x_0| + |y_0| + 2\|f(.,0,0)\|_{L^1} + 2\|g(.,0,0)\|_{L^1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} |I_k(0,0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{I}_k(0,0)|}{1 - (\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k})}
$$

et

$$
l(s) = \frac{l_1(s) + l_2(s) + l_3(s) + l_4(s)}{1 - (\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k})}.
$$

Par application de l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$
\sup_{s\in[0,t]} (|x(s)| + |y(s)|) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t l(s)ds\right).
$$

Alors

$$\|x\|_b + \|y\|_b \leq \alpha \exp\left(\int_0^{\infty} l(s)ds\right).$$

Ceci implique que la solution $(x, y)$ est bornée. $\square$

# Chapitre 4

# Équations aux Différences Impulsives

Les équations aux différences sont devenues un outil de valeur et ont beaucoup d'importance dans plusieurs domaines et disciplines scientifiques et ceci par leurs nombreuses applications dans les sciences appliquées telles que l'économie, la biologie, la théorie des probabilités, l'ecologie,...etc. D'une part, elles sont utilisées pour la simulation des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, dans l'ana- lyse numérique pour la résolution des équations à l'aide des suites, avec la recherche de la valeur approchée de la solution par exemple le schéma numérique d'Euler ou de Runge-Kutta. D'autre part, elle sont utilisées en modélisation des phénomènes de la vie réelle, notamment en dyna- mique des populations.

## 4.1 Équations aux Différences

## 4.2 Notions sur le calcul aux différences

**Définition 4.2.1.** *On définit l'opérateur de différence $\Delta$ et l'opérateur de décalage $E$ respectivement par*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n), n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.1}$$

$$Ex(n) = x(n+1), n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.2}$$

**Remarque 4.2.1.**
1. *$\Delta$ et $E$ sont des opérateurs linéaires.*
2. *$\Delta$ et $E$ commuttent, c'est à dire $\Delta E = E\Delta$.*
3. *$\Delta = E - I$ où $I$ est l'opérateur identité, c'est à dire $Ix(n) = x(n), \forall x \in \mathbb{N}_{n_0}$*

**Définition 4.2.2.** *En général, on définit $\Delta^r$ et $E^r$ respectivement par*

$$\Delta^r x(n) = \Delta(\Delta^{r-1} x(n)), n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.3}$$

$$E^r x(n) = x(n+r), n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.4}$$

**Lemme 4.2.1.** *De la remarque (4.2.1) on peut montrer facilement les égalités suivantes*

$$\Delta^r = (E - I)^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} C_i^r E^i \tag{4.5}$$

$$E^r = (\Delta + I)^r = \sum_{i=0}^{r} C_i^r \Delta^i \tag{4.6}$$

*où $C_0^0 = 1$ et $C_i^0 = 0$ si $i \neq 0$.*

**Théorème 4.2.1.** *Soit $\{x(n)\}_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $x(0) = x_0$. Alors*

$$x(n) = x(0 + n) = E^n x_0 = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \Delta^i x_0 \tag{4.7}$$

$$\Delta^n x_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_i^n E^i x_0 \tag{4.8}$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer les égalitées (4.5) et (4.6) à $x_0$ □

**Proposition 4.2.1.** *On a les propriétés suivantes pour $\Delta$.*

**(a)**

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) = x(n) - x(n_0), n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.9}$$

**(b)**

$$\Delta(\sum_{i=n_0}^{n-1}) = x(n)n, n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.10}$$

**(c)**

$$\Delta(x(n)y(n)) = Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n), n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.11}$$

**(d)**

$$\Delta\Big(\frac{x(n)}{y(n)}\Big) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}, n \in \mathbb{N}_{n_0} \text{ et } y(n) \text{ est non nulle sur } \mathbb{N}_{n_0} \tag{4.12}$$

**(e)** *Soit $P(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^{k-i}$ un polynôme de degré $k$ (i.e $a_0 \neq 0$) où $a_i, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ sont des réels. Alors*

$$\Delta^k P(n) = a_0 \ k!. \tag{4.13}$$

$$\Delta^{k+i} P(n) = 0, \forall i \geq 1. \tag{4.14}$$

*Démonstration.* En utilisant (4.1) et (4.2) on trouve.

**(a)**

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{n-1}\Delta x(i) &= \sum_{i=n_0}^{n-1}(x(i+1)-x(i))\\ &= \sum_{i=n_0+1}^{n}x(i)-\sum_{i=n_0}^{n-1}(x_i)\\ &= x(n)-x(n_0).\end{aligned}$$

**(b)**

$$\begin{aligned}\Delta(\sum_{i=n_0}^{n-1}) &= \sum_{i=n_0}^{n}x(i)-\sum_{i=n_0}^{n-1}x(i)\\ &= x(n).\end{aligned}$$

**(c)**

$$\begin{aligned}\Delta(x(n)y(n)) &= x(n+1)y(n+1)-x(n)y(n)\\ &= x(n+1)\Big(y(n+1)-y(n)\Big)+y(n)\Big(x(n+1)-x(n)\Big)\\ &= Ex(n)\Delta y(n)+y(n)\Delta x(n).\end{aligned}$$

**(d)**

$$\begin{aligned}\Delta\Big(\frac{x(n)}{y(n)}\Big) &= \frac{x(n+1)}{y(n+1)}-\frac{x(n)}{y(n)}\\ &= \frac{x(n+1)y(n)-x(n)y(n+1)}{y(n+1)y(n)}\\ &= \frac{y(n)\Big(x(n+1)-x(n)\Big)-x(n)\Big(y(n+1)-y(n)\Big)}{y(n+1)y(n)}\\ &= \frac{y(n)\Delta x(n)-x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}\end{aligned}$$

**(e)**

$$\Delta P(n)=\sum_{i=0}^{k}a_i(n+1)^{k-i}-\sum_{i=0}^{k}a_in^{k-i}$$

D'autre part on a

$$(n+1)^k=\sum_{i=0}^{k}C_i^kn^i=1+kn+\frac{k(k-1)}{2!}n^2+\cdots+kn^{k-1}+n^k$$

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{k-1} &= 1+(k-1)n+\frac{(k-1)(k-2)}{2!}n^2+\cdots+(k-1)n^{k-2}+n^{k-1}\\
&\vdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Donc

$$\Delta P(n) = a_0 k n^{k-1} + P_1(n)$$

Où $P_1$ est un polynôme de degré inférieur strictement à $k-1$, c'est à dire $degP_1 < k-1$.
De la même manière on peut montrer que

$$\Delta^2 P(n) = a_0 k(k-1)n^{k-2} + P_2(n) \; avec \; degP_2 < k-2,$$

$$
\begin{aligned}
\Delta^3 P(n) &= a_0 k(k-1)(k-2)n^{k-3} + P_3(n) \; avec \; degP_3 < k-3,\\
&\vdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

D'ou (4.13)
Pour montrer (4.14) il suffit d'utiliser (4.4) et (4.13)

□

**Proposition 4.2.2.** *Soit*

$$P(E) = \sum_{i=0}^{k} a_i E^{k-i} \tag{4.15}$$

*où $E$ est l'opérateur défini par (4.2) et $a_i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ sont des réels. Alors*

**1.** *Pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a*

$$P(E)b^n = P(b)b^n, n \in \mathbb{N}^* \tag{4.16}$$

**2.** *Pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a*

$$P(E)(b^n x(n)) = b^n P(bE)x(n), n \in \mathbb{N}^* \tag{4.17}$$

*Démonstration.* En utilisant ( 4.4) et ( 4.15) on trouve

**1.**

$$
\begin{aligned}
P(E)b^n &= (a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI)b^n\\
&= a_0b^{n+k} + a_1b^{n+k-1} + \cdots + a_kb^n\\
&= (a_0b^k + a_1b^{k-1} + \cdots + a_k)b^n\\
&= P(b)b^n.
\end{aligned}
$$

**2.**

$$\begin{aligned}
P(E)(b^n x(n)) &= (a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI)(b^n x(n)) \\
&= a_0E^k b^n x(n) + a_1E^{k-1}b^n x(n) + \cdots + a_kIb^n x(n)) \\
&= a_0b^{n+k}x(n+k) + a_1b^{n+k-1}x(n+k-1) + \cdots + a_kb^n x(n)) \\
&= b^n(a_0b^k x(n+k) + a_1b^{k-1}x(n+k-1) + \cdots + a_kx(n)) \\
&= b^n P(bE)x(n).
\end{aligned}$$

□

## 4.3 Équations aux Différences impulsives

On considère Équations aux Différences impulsives suivante :

$$\Delta x(n) = f(n, x(n)), n \neq n_k, \tag{4.18}$$

$$\Delta x(n_k) = B_k x(n_k), n = n_k \tag{4.19}$$

$$x(0) = x_0, \tag{4.20}$$

Où $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n), x(n) \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction, $B_k$ est une constante pour tout $k \in \mathbb{N}$. Les moments $\{n_k\}_1^\infty$ sont des entiers naturels et satisfaits $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots, n_k \to \infty$ quand $k \to \infty$

**Définition 4.3.1.** *Une fonction $y \in PC(\mathbb{N}(0,b), \mathbb{R})$ est dite une solution du probleme (4.18-4.18) si $y$ satisfait l'équation (4.18) et les conditions (4.19-4.20)*

**Lemme 4.3.1.** *Une fonction $x \in PC(\mathbb{N}(0,b), \mathbb{R})$ est dite une solution du probleme (4.18-4.20) si et seulement si.*

$$\begin{aligned}
x(n_j+k+1) &= \sum_{i=1}^{k} f(x(n_j+i)) + (1+B_j)\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} f(x(n_{j-1}+i)) + \prod_{i=0}^{j}(1+B_i)x(0) \\
&+ \prod_{i=0}^{j}(1+B_i)\sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i)) + \prod_{i=1}^{j}(1+B_i)\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i)) \\
&+ \prod_{i=2}^{j}(1+B_i)\sum_{i=1}^{n_2-n_1-1} f(x(n_1+i)) + \cdots + (1+B_j)\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} f(x(n_{j-1}+i)) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} f(x(n_j+i)), j = -1, 0, \ldots; k = 0, \ldots; n_{-1} = 0.
\end{aligned}$$

*Démonstration.* • Si $n \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$, donc

$$\begin{aligned}\Delta x(0) &= x(1) - x(0)\\ &= f(x(0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x(1) &= x(2) - x(1)\\ &= f(x(1))\\ &\vdots\\ \Delta x(n-1) &= x(n) - x(n-1)\\ &= f(x(n-1))\end{aligned}$$

Donc.

$$x(n) = x(0) + \sum_{1 \le i \le n-1} f(x(i))$$

• Si $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_1 - 1\}$, thus

$$\begin{aligned}\Delta x(n_0+1) &= x(n_0+2) - x(n_0+1)\\ &= f(x(n_0+1))\\ \Delta x(n_0+2) &= x(n_0+3) - x(n_0+2)\\ &= f(x(n_0+2))\\ &\vdots\\ \Delta x(n_0+k) &= x(n_0+k+1) - x(n_0+k)\\ &= f(x(n_0+k))\\ &= f(n_0+k)\end{aligned}$$

Alors

$$x(n_0+k+1) = \sum_{i=1}^{k} f(x(n_0+i)) + x(n_0+1)$$

De la définition de $\Delta x(n_0)$, on obtient.

$$\begin{aligned}\Delta x(n_0) &= x(n_0+1) - x(n_0)\\ &= B_0 x(n_0)\end{aligned}$$

Donc

$$x(n_0+1) = (1 + B_0) x(n_0)$$

on a

$$\begin{array}{rcl}\Delta x(n_0-1) & = & x(n_0)-x(n_0-1)\\ & = & f(x(n_0-1))\end{array}$$

Alors

$$x(n_0)=x(n_0-1)+f(x(n_0-1))$$

Donc

$$x(n_0+k+1)=\sum_{i=1}^{k}f(x(n_0+i))+(1+B_0)\left(x(0)+\sum_{i=1}^{n_0-2}f(x(i))+f(x(n_0-1))\right)$$

Alors

$$x(n_0+k+1)=\sum_{i=1}^{k}f(x(n_0+i))+(1+B_0)\left(x(0)+\sum_{i=0}^{n_0-1}f(x(i))\right),k=1,\dots,n_1-n_0-2$$

- Si $n\in\{n_1+1,\dots,n_2-1\}$, alors

$$\begin{array}{rcl}\Delta x(n_1+1) & = & x(n_1+2)-x(n_1+1)\\ & = & f(x(n_1+1))\\ \Delta x(n_1+2) & = & x(n_1+3)-x(n_1+2)\\ & = & f(x(n_1+2))\\ & \vdots & \\ \Delta x(n_1+k) & = & x(n_1+k+1)-x(n_1+k)\\ & = & f(n_1+k)\end{array}$$

Donc

$$x(n_1+k+1)=\sum_{i=1}^{k}f(x(n_1+i))+x(n_1+1)$$

on a

$$\begin{array}{rcl}\Delta x(n_1) & = & x(n_1+1)-x(n_1)\\ & = & B_1x(n_1)\end{array}$$

Donc

$$x(n_1+1)=(1+B_1)x(n_1)$$

$$\begin{array}{rcl}\Delta x(n_1-1) & = & x(n_1)-x(n_1-1)\\ & = & f(x(n_1-1))\end{array}$$

Alors

$$x(n_1) = x(n_1-1) + f(x(n_1-1))$$
$$x(n_1) = \sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i)) + (1+B_0)\left(x(0) + \sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i))\right)$$
$$x(n_1) = x(n_1-1) + f(x(n_1-1))$$
$$x(n_1+1) = (1+B_1)\left(\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i)) + (1+B_0)\left(x(0) + \sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i))\right)\right)$$

$$\begin{aligned} x(n_1+1) &= (1+B_1)\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i)) + (1+B_1)(1+B_0)\sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i)) \\ &+ (1+B_1)(1+B_0)x(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n_1+k+1) &= \sum_{i=1}^{k} f(x(n_1+i)) + (1+B_1)\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i)) \\ &+ (1+B_0)(1+B_1)x(0) + (1+B_0)(1+B_1)\sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i)), k = 1, \dots, n_2-n_1-1 \end{aligned}$$

- Si $n \in \{n_2+1, \dots, n_3-1\}$, alors

$$\begin{aligned} \Delta x(n_2+1) &= x(n_2+2) - x(n_2+1) \\ &= f(x(n_2+1)) \\ \Delta x(n_2+2) &= x(n_2+3) - x(n_2+2) \\ &= f(x(n_2+2)) \\ &\vdots \\ \Delta x(n_2+k) &= x(n_2+k+1) - x(n_2+k) \\ &= f(n_2+k) \end{aligned}$$

Donc

$$x(n_2+k+1) = \sum_{i=1}^{k} f(x(n_2+i)) + x(n_2+1)$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta x(n_2) &= x(n_2+1) - x(n_2) \\ &= B_2 x(n_2) \end{aligned}$$

Donc

$$x(n_2+1) = (1+B_2)x(n_2)$$

$$\begin{aligned}\Delta x(n_2-1) &= x(n_2) - x(n_2-1)\\ &= f(x(n_2-1))\end{aligned}$$

Alors

$$x(n_2) = x(n_2-1) + f(x(n_2-1))$$

$$\begin{aligned}x(n_2) &= \sum_{i=1}^{n_2-n_1-1} f(x(n_1+i)) + (1+B_1)\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i))\\ &+ (1+B_0)(1+B_1)x(n_0) + (1+B_0)(1+B_1)\sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(n_2+1) &= (1+B_2)\sum_{i=1}^{n_2-n_1-1} f(x(n_1+i)) + (1+B_2)(1+B_1)\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i))\\ &+ (1+B_2)(1+B_0)(1+B_1)x(n_0) + (1+B_2)(1+B_0)(1+B_1)\sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i))\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}x(n_2+k+1) &= \prod_{i=0}^{2}(1+B_i)x(0) + \prod_{i=0}^{2}(1+B_i)\sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i))\\ &+ \prod_{i=1}^{2}(1+B_i)\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i)) + (1+B_2)\sum_{i=1}^{n_2-n_1-1} f(x(n_1+i)\\ &+ \sum_{i=1}^{k} f(x(n_2+i), k = 1,\ldots,n_3-n_2-1.\end{aligned}$$

- On continue le processus, on obtient pour $,j = 3,4,\ldots; k = 1,\ldots$

$$\begin{aligned}x(n_j+k+1) &= \sum_{i=1}^{k} f(x(n_j+i)) + (1+B_j)\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} f(x(n_{j-1}+i)) + \prod_{i=0}^{j}(1+B_i)x(0)\\ &+ \prod_{i=0}^{j}(1+B_i)\sum_{i=0}^{n_0-1} f(x(i)) + \prod_{i=1}^{j}(1+B_i)\sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(x(n_0+i))\\ &+ \prod_{i=2}^{j}(1+B_i)\sum_{i=1}^{n_2-n_1-1} f(x(n_1+i)) + \cdots + (1+B_j)\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} f(x(n_{j-1}+i))\\ &+ \sum_{i=1}^{k} f(x(n_j+i))\end{aligned}$$

$\square$

## 4.4 Système d'Équations aux Différences impulsives

On considere le système d'Équations aux Différences impulsives suivant :

$$\begin{cases} \Delta x(n) &= f(n, x(n), y(n)), n \neq n_k, \\ \Delta y(n) &= g(n, x(n), y(n)), n \neq n_k, \\ \Delta x(n_k) &= B_k x(n_k), n = n_k \\ \Delta y(n_k) &= \bar{B}_k y(n_k), n = n_k \\ x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{4.21}$$

$f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions ; $B_k, \bar{B}_k$ sont des constantes pour tout $k \in \mathbb{N}$. Les moments $\{n_k\}_1^\infty$ sont des entiers naturels et satisfaits $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$.
$\mathbb{N}(0, b) = \{1, 2, \ldots, n_0-1, n_0, n_0+1, n_1-1, n_1, n_1+1, \ldots, n_m-1, n_m, n_m+1, \ldots, b+1\}$ où $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m < b+1$.

**Lemme 4.4.1.** *Une fonction $(x, y) \in PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R})$ est dite une solution du probleme (4.21) si $(x, y)$ satisfait les équations et les conditions du probleme (4.21).*

**Définition 4.4.1.** $(x, y) \in PC(J, \mathbb{R}) \times PC(J, \mathbb{R})$ *est une solution du probleme (4.21)si et seulement si $(x, y)$ satisfait*

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x(n_j+k+1) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f(n_j+i, x(n_j+i), y(n_j+i)) + \prod_{i=0}^{j}(1+B_i)x(0) \\
& + & (1+B_j) \displaystyle\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} f(n_{j-1}+i, x(n_{j-1}+i), y(n_{j-1}+i)) \\
& + & \displaystyle\prod_{i=0}^{j}(1+B_i) \sum_{i=0}^{n_0-1} f(i, x(i), y(i)) + \prod_{i=1}^{j}(1+B_i) \sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} f(n_0+i, x(n_0+i), y(n_0+i)) \\
& + & \displaystyle\prod_{i=2}^{j}(1+B_i) \sum_{i=1}^{n_2-n_1-1} f(n_1+i, x(n_1+i), y(n_1+i)) + \cdots \\
& + & (1+B_j) \displaystyle\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} f(n_{j-1}+i, x(n_{j-1}+i), y(n_{j-1}+i)) \\
& + & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f(n_j+i, x(n_j+i), y(n_j+i)), j=-1,0,1,\ldots, k=0,1,\ldots, n_{-1}=0 \\
y(n_j+k+1) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} g(n_j+i, x(n_j+i), y(n_j+i)) + \prod_{i=0}^{j}(1+\bar{B}_i)y(0) \\
& + & (1+\bar{B}_j) \displaystyle\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} g(n_{j-1}+i, x(n_{j-1}+i), y(n_{j-1}+i)) \\
& + & \displaystyle\prod_{i=0}^{j}(1+\bar{B}_i) \sum_{i=0}^{n_0-1} g(i, x(i), y(i)) + \prod_{i=1}^{j}(1+\bar{B}_i) \sum_{i=1}^{n_1-n_0-1} g(n_0+i, x(n_0+i), y(n_0+i)) \\
& + & \displaystyle\prod_{i=2}^{j}(1+\bar{B}_i) \sum_{i=1}^{n_2-n_1-1} g(n_1+i, x(n_1+i), y(n_1+i)) + \cdots \\
& + & (1+\bar{B}_j) \displaystyle\sum_{i=1}^{n_j-n_{j-1}-1} g(n_{j-1}+i, x(n_{j-1}+i), y(n_{j-1}+i)) \\
& + & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} g(n_j+i, x(n_j+i), y(n_j+i)), j=-1,0,1,\ldots, k=0,1,\ldots, n_{-1}=0
\end{array}
\right.
$$

## 4.5 Existence des solutions

Considérons le système d'Équations aux Différences suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\Delta x(k) & = & f(k, x(k), y(k)),\ k \in \mathbb{N}(a, b-1) = \{a, a+1, \ldots, b-1\}, \\
\Delta y(k) & = & g(k, x(k), y(k)),\ k \in \mathbb{N}(a, b-1), \\
\\
x(a) & = & x_0, \\
y(a) & = & y_0,
\end{array}
\right.
\tag{4.22}
$$

Où $f, g : \mathbb{N}(a, b-1) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sont des fonctions données.

Dans cette section, nous allons établir l'existense des solutions du problème (4.22). En vue d'obtenir un tel résultat, on propose les hypothèses suivantes :

$(H_1)$ Il existe des nombres non nuls $a_i$ et $b_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{cases} |f(k,x,y) - f(k,\overline{x},\overline{y})| \leq a_1|x-\overline{x}| + b_1|y-\overline{y}| \\ |g(k,x,y) - g(k,\overline{x},\overline{y})| \leq a_2|x-\overline{x}| + b_2|y-\overline{y}| \end{cases}$$

pour tout $x$, $y$, $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$.

Pour montrer l'existense et l'unicité des solutions du problème (4.22), on utilise le théorème du point fixe de Perov.

**Théorème 4.5.1.** *Supposons que la condition $(H_1)$ est vérifiée et la matrice*

$$M \ = (b-1)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}_+).$$

*Si $M$ converge vers zero. Alors le problème* (4.22) *a une solution unique.*

*Démonstration.* Considerons l'opérateur $N\colon\ C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m) \times C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m)\times \to C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m)$ defined for $(x,y) \in C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m) \times C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m)$ by

$$N(x,y) = (N_1(x,y), N_2(x,y)), \quad (x,y) \in C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m) \times C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m) \tag{4.23}$$

où

$$N_1(x(k),y(k)) = x_0 + \sum_{l=a}^{k-1} f(l,x(l),y(l)),\ \ k \in \mathbb{N}(a,b-1)$$

et

$$N_2(x(k),y(k)) = y_0 + \sum_{l=a}^{k-1} g(l,x(l),y(l)),\ \ k \in \mathbb{N}(a,b-1).$$

Soient $(x,y),(\overline{x},\overline{y}) \in C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m) \times C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m)$. Alors on a pour tout $k \in \mathbb{N}(a,b-1)$

$$\begin{aligned} & |N_1(x(k),y(k)) - N_1(\overline{x}(l),\overline{y}(l))| \\ = \ & \left|\textstyle\sum_{l=a}^{l=k-1}[f(l,x(l),y(l)) - f(l,\overline{x}(l),\overline{y}(l))]\right|. \end{aligned}$$

Alors

$$\|N_1(x,y) - N_1(\overline{x},\overline{y})\|_\infty \ \ \leq \ \ (b-1)a_1\|x-\overline{x}\|_\infty + (b-1)b_1\|y-\overline{y}\|_\infty.$$

D'une manière similaire, on a

$$\|N_2(x,y) - N_2(\overline{x},\overline{y})\|_\infty \leq (b-1)a_2\|x-\overline{x}\|_\infty + (b-1)b_2\|y-\overline{y}\|_\infty.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|N(x,y)-N(\overline{x},\overline{y})\|_\infty &= \begin{pmatrix}\|N_1((x,y)-N_1(\overline{x},\overline{y})\|_\infty\\ \|N_2(x,y)-N_2(\overline{x},\overline{y})\|_\infty\end{pmatrix}\\ &\le (b-1\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|x-\overline{x}\|_\infty\\ \|y-\overline{y}\|_\infty\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alors

$$\|N(x,y)-N(\overline{x},\overline{y})\|_\infty \le M\begin{pmatrix}\|x-\overline{x}\|_\infty\\ \|y-\overline{y}\|_\infty\end{pmatrix},\ \text{for all}, (x,y),(\overline{x},\overline{y})\in C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m)\times C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m).$$

Par le théorème du point fixe de Perov, l'opérateur $N$ a un point fixe unique $(x,y)\in C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m)\times C(\mathbb{N}(a,b-1),\mathbb{R}^m)$ qui est solution unique pour le problem (4.22). □ □

# Conclusion et Perspective

Au terme de cette recherche, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles impulsives, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité de certains problèmes différentiels d'ordres impulsifs. Tout d'abord, nous avons établi des résultats d'existence globale et d'unicité d'un problème différentiel impulsif en utilisant les techniques de points fixes, l'existence des résultats dans le cas discret sont également discutés.

Les résultats présentés dans cette thèse offrent naturellement de nombreuses perspectives. La première est l'étude des stabilités des solutions des équations différentielles impulsives d'ordre discret.

# Bibliographie


[1] C. Avramescu and C. Vladimirescu, *Fixed point theorems of Krasnoselskii*

[2] J.P. Aubin and H. Frankowska, *Set Valued Analysis, Birkhauser Boston*, 1990.

[3] C. Avramescu, A fixed point theorem for multivalued mapping, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* No. **17** (2004), 1-10.

[4] C. Avramescu, Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires, *Ann. Mat. Pura Appl.* (**81**) (1969), 147–168.

[5] T.A. Burton, T. Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability. *Nonlinear Anal.*,**49**, (2002), 445-454.

[6] T. A. Burton, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, *Nonlinear Analysis* **49**(2002)445-454.

[7] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[8] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, NewYork, 2003.

[9] L. Gorniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 495 1999.

[10] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2003.

[11] J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford Univ. Press, New York, 1985.

[12] H. Berrezoug, J. Henderson and A. Ouahab , Existence and uniqueness of solutions for a system of impulsive differential equations on the half-line, *J. Nonl. Funct. Anal.*, Vol.2017(2017), Article ID **38**, pp.1-16.

[13] H. Berrezoug, Stability of impulsive differential equations and inclusions, *Ph.D. thesis.*, University of Sidi Bel Abbes, Algeria, (2018.)

[14] V. Lakshmikantham, D. Bainov and P.S. Simenov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Syngapore, 1989.

[15] Y. C. Liu and Z. X. Li, Schaefer type theorem and periodic solutions of evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **316** (2006), 237-255.

[16] V.D. Milman and A.A. Myshkis, On the stability of motion in the presence of impulses, *Sib. Math. J. (in Russian)*, **1** (1960), 233-237.

[17] O. Nica and R. Precup, On the nonlocal initial value problem for first order differential systems, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.* **56** (2011), No. 3, 125-137.

[18] O. Nica, Existence results for second order three point boundary value problems, *Differ. Equ. Appl.* **4** (2012), 547–570.

[19] O. Nica, Initial-value problems for first-order differential systems with general nonlocal conditions, *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2012 (2012), No. 74, pp. 1–15.

[20] L. Pan, Existence of periodic solutions for second order delay differential equations with impulses, *Electronic journal of differential equations*,**37** (2011), 1-12.

[21] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] N. Perestyuk, V. Plotnikov, M. Samoilenko and V.Skripnik, *Differential equations with impulse effects : Multivalued right-hand sides with discontinuities*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin/Boston, 2011.

[23] A.I. Perov and A.V. Kibenko, On a certain general method for investigation of boundary value problems, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **30** (1966), 249-264 (in Russian).

[24] R. Precup, The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems, *Math. Comp. Modelling* **49** (2009), 703–708.

[25] R. Precup and A. Viorel, Existence results for systems of nonlinear evolution equations, *Int. J. Pure Appl. Math. IJPAM* **47** (2008), 199–206.

[26] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, 27. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[27] A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations,* World Scientific, Singapore, 1995.

[28] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, London, 1974.

[29] A. Viorel, *Contributions to the Study of Nonlinear Evolution Equations*, Ph.D. thesis, Babeş-Bolyai University Cluj-Napoca, Department of Mathematics, 2011.

[30] Xinzhi Liu, Qing Wang, On stability in terms of two measures for impulsive systems of functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **326**(2007)252-265.

[31] K. Yosida, *Functional Analysis,* $6^{\text{th}}$ ed. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

**الملخص** ا لهدف من هذه المذكرة هو دراسة المعادلات التفاضلية للدفعة المنفصلة .تنقسم المذكرة إلى أربعة فصول .يحتوي الفصل الأول على مجموعة من التعاريف والنتائج التي ستكون مفيدة لبقية هذه المذكرة .في الفصل الثاني ، سنتعامل مع وجود الحلول من خلال نظرية باناخ ونظرية كراسنوسيلسكي للمعادلات التفاضلية المندفعة .في الفصل الثالث ، ندرس وجود وتفرد الحلول للأنظمة الاندفاعية ، طريقة الحل تعتمد على مبدأ النقطة الثابتة لبيروف .الفصل الأخير مكرس لمفاهيم التفاضل والتكامل ووجود مشكلة اندفاعية منفصلة وتفردها.

**الكلمات المفتاحية** المعادلات التفاضلية المندفعة ، نظرية النقطة الثابتة متعددة الوظائف ، مساحة مترية معممة.

**Résumé** : Le but de ce mémoire est d'étudier les équations différentielles impulsives discrètes. Le mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre contient un ensemble de définitions et résultats qui seront utiles pour la suite de cette étude. Dans le deuxième chapitre, on traitera l'existence des solutions par le théorème de Banach et par le théorème de Krasnoselskii pour les équations différentielles impulsives. Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour les systèmes impulsifs, la méthode de résolution est basée sur le principe du point fixe de Perov. Le dernier chapitre est consacré aux notions sur le calcul aux différences et à l'existence et l'unicité d'un problème impulsif discret.

**Mots clés** : Equations différentielles Impulsives, multifonction, théorèmes du point fixe, espace métrique généralisé.

**Abstract**: The aim of this dissertation is to study discrete impulse differential equations. The dissertation is divided into four chapters. The first chapter contains a set of definitions and results which will be useful for the rest of this study. In the second chapter, we will treat the existence of solutions by Banach's theorem and by Krasnoselskii's theorem for impulsive differential equations. In the third chapter, we study the existence and uniqueness of solutions for impulsive systems, the solving method is based on Perov's fixed point principle. The last chapter is devoted to notions of difference calculus and to the existence and uniqueness of a discrete impulse problem.

**Keywords**: Impulsive differential equations, multifunction, fixed point theorems, generalized metric space.