République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Sur la première et la deuxième valeur propre du Laplacien conforme

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Boutaiba Amina [1]

Sous la direction de

Dr H. Boughazi

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

Pr. F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
MCA. H. Boughazi	Ecole supérieure de Management de Tlemcen	Encadreur
MCA. M. Hamou Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
MAA. A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : boutaibaamina1@gmail.com

Table des matières

Remerciement

Tout d'abord j'adresse mon grand respect, ma profonde gratitude au Bon Dieu notre seul créateur pour nous avoir donner la bravoure et la résolution pour réalisé ce travaille. Je me permet aussi d'adresser mes sincères et vifs remerciements a mon encadreur Dr H. Boughazi pour l'aide qui m'a apporté et pour sa disponibilité. Son encouragement et ses critiques m'ont été très précieux pour structurer ce travaille, je le remercie vivement.
Je remercie le Professeur F. Hathout pour avoir accepter de présider le jury. Je remercie également les membres de jury monsieur M. Hamou Dida et monsieur A. Zeglaoui d'avoir accepter de lire et d'évaluer ce travail.
Un grand merci au personnel et à tous mes enseignents.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à ma chère mère que Dieu ait pitié d'elle. A mon père Boutaiba, ma chère frangine Fatima zohra et mon cher frère Ayoub Abdelmadjid.
A toute ma famille et toutes mes amies.

0.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans le monde scientifique. Ces équations proviennent naturellement des problèmes de la physique, par exemple en mécanique classique ou quantique, en relativité générale et dans la théorie de la gravitation. On les retrouve aussi dans l'électromagnétisme (équations de Maxwell) et dans la théorie du mouvement brownien mais aussi dans la biologie et dans d'autre branches. Plus généralement la théorie des équations aux dérivées partielles est devenu primordiale dans tous les domaines notamment dans la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Également ces équation apparaissent en mathématique et particulièrement en géométrie différentielle comme l'équation de Yamabe.
Les équations aux Laplacien sont des EDP faisant intervenir l'opérateur Laplacien dont leurs noms est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon de Laplace, l'opérateur Laplacien possède des propriétés intéressantes, par exemple il est elliptique. On retrouve dans la littérature des équations linéaires et non-linéaires, avec un certain exposant où ce dernier pourra être critique. Ce type d'équation est souvent connu sous le nom d'équation du second-ordre, la plus simple est l'équation de Laplace dont les solutions sont appelées fonctions harmoniques. Durant ce siècle, on a développé beaucoup de méthode et d'outils pour résoudre ces EDP et surtout celles qui nous aide à étudier l'existence des solutions, par exemple la méthode variationnelle.
Dans ce travail, on s'intéresse aux valeurs propres d'un opérateur de type Laplacien appelé le Laplacien conforme. En d'autre terme, soit P l'opérateur laplacien conforme, P est donné sous la forme suivante

$$P = \Delta + h \quad \text{où} \quad \Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, $N \geq 3$ et $h \in C^\infty(\Omega)$. Plus précisément, nous allons étudier l'atteignabilité des valeurs propres, particulièrement la première valeur propre et la deuxième. Grosso-modo, il s'agit de trouver des fonctions qui sont solutions des équations correspondantes. Ces dernière sont naturellement appelées fonctions propres associées. Pour cela, nous allons utiliser la fameuse méthode variationnelle qui est fortement relié à la théorie des points critiques qui occupe une place importante dans le vaste champ de l'analyse non-linéaire.
L'approche variationnelle consiste à utiliser un processus de minimisation et le théorème

des multiplicateurs de Lagrange fournit l'existence de la solution.
Ce mémoire comprend trois parties :
1) Dans le chapitre 1, on retrouve les préliminaires et les définitions générales, puis on rappelle quelque résultats sur la théorie des opérateurs. On introduit une notion très importantes en mathématiques qui est la notion des espaces de Sobolev, on parle aussi un peu de la théorie des point critique et particulièrement on rappelle quelques théorèmes spécifiques qui sont nécessaires à ce travail.
2) Dans le chapitre 2, on introduit quelque résultats a développé la démonstration, spécialement le théorème des multiplicateurs de Lagrange et quelques lemmes qui seront utiliser dans la partie suivante.
3) Dans le dernier chapitre on traite en détail l'existence de la première et la deuxième valeur propre du Laplacien conforme.
Le théorème principal de ce mémoire est le suivant :
Théorème principal :

Théorème 0.1.1. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, $n \geq 3$ et soit λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $P = \Delta + h$, alors il existe une fonction $v \in C^2(\Omega)$ strictement positive tel que*

$$\Delta v + hv = \lambda_1 v.$$

On dit aussi que la première valeur propre λ_1 est atteinte par v.

Avec la même méthode on va chercher une fonction w associé à la deuxième valeur propre λ_2, plus précisément on a,

$$\Delta w + hw = \lambda_2 w.$$

Chapitre 1

Préliminaires et généralités

L'objectif de ce chapitre c'est d'introduire les outils de base qui seront utilisés dans les chapitres qui vont suivre. Dans cette section on fait un rappel sur un certain nombre de résultats concernant les espaces de Sobolev qui nous seront utiles dans la suite. On pourra consulter l'ouvrage de Otared Kavian dans [8] intitulé : Introduction à la Théorie des Points Critiques.

1.1 L'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1. *Norme vectorielle.*
Soit X un espace vectoriel. On dit que l'application $\|.\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ définit une norme sur l'espace vectoriel X si, l'application vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in X, \quad \|x\| \geq 0.$

(2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

(3) $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X, \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X.$

Définition 1.1.2. *On dit que l'espace X est un espace de Banach si X est normé et complet. On appelle forme linéaire sur X toute application linéaire de X dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire toute application $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y).$$

L'ensemble des ces formes linéaires sur X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, appelé l'espace dual de X et est noté X'.

Définition 1.1.3. *Soit X un espace de Banach réel. L'espace X est dit réflexif si l'image $I(X) = X$, où $I : X \longrightarrow (X')'$ n'est que l'injection canonique définie comme suit pour*

$$x \in X, \quad I(x)\colon X' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto I(x)(\varphi) = \varphi(x).$$

Définition 1.1.4. *Soit X un espace de Banach réel. L'espace X est dit séparable si, X admet un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.*

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.1.5. *Soit u une fonction définie sur Ω.*

(1) La fonction u est intégrable sur Ω si :

$$\int_\Omega |u(x)|dx < +\infty. \tag{1.1.1}$$

où dx désigne de la mesure de Lebesgue.

(2) La fonction u est dite localement intégrable sur Ω si elle est intégrable sur tout compact $K \subset \Omega$.

(3) Le support de la fonction u est l'ensemble définie par : $Supp(u) = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$.

Définition 1.1.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On désigne par $D(\Omega)$ l'espace de fonction de classe C^∞ sur Ω et à support compact inclus dans Ω.*

Définition 1.1.7. *Soit p un réel avec $1 \leq p < +\infty$. On rappel que l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ (l'espace quotient) est défini par :*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \textit{tel que} \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty\}$$

On munit cet espace de la norme suivante :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1.2}$$

Cette norme est appelée norme usuelle. L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach et de plus, si $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

1.2 Espace de Sobolev

Dans cette définition, on va introduire la notion de la dérivée d'une fonction au sens faible qui est une notion fondamentale pour la construction des espaces de Sobolev.

Définition 1.2.1. *Soit u une fonction localement intégrable sur Ω, un multi indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et la longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. On appelle dérivée au sens faible de u d'ordre α et on note $D^\alpha u$, la fonction qui vérifie*

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u dx = (-1)^n \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

avec

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_{x_1}^{\alpha_1}, \partial x_{x_2}^{\alpha_2}, \ldots, \partial x_{x_n}^{\alpha_n}}$$

où φ est une fonction de classe $C^\infty(\Omega)$ et a support compact dans Ω.
Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées au sens faible sont intégrables, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.2.2. *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad \text{où} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N\}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u au sens faible, plus précisément, la fonction u appartient à $L^p(\Omega)$ est un élément de $W^{1,p}(\Omega)$ si, il existe N fonctions $v_1, \ldots, v_N \in L^p(\Omega)$ tels que :

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

On note $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \forall i = 1, 2, \dots, N$.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.2.1}$$

où

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$$

est le vecteur gradient de la fonction u. *En particulier, pour* $p = 2$, *on pose*

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega), \tag{1.2.2}$$

cet espace est muni du produit scalaire suivant

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \tag{1.2.3}$$

où

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx. \tag{1.2.4}$$

De plus, ce produit scalaire induit la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2.5}$$

Autrement on a,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2.6}$$

Proposition 1.2.1. *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$, *il est réflexif pour* $1 < p < +\infty$ *et séparable pour* $1 \leq p < +\infty$. *Particulièrement l'espace* $\left(H^1(\Omega), \|\|_{H^1(\Omega)}\right)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

Définition 1.2.3. *Soit* $1 \leq p < +\infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable et de plus il est réflexif pour tout réel* p *vérifiant* $1 < p < +\infty$.

Théorème 1.2.1. *Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \quad avec \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u = 0$ *sur* $\Gamma = \partial\Omega$.
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.2.2. *L'espace* $\left(W_0^{1,p}(\Omega), \|\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)$ *est uniformément convexe.*

Lemme 1.2.1. *Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*, alors* u^+, u^- *et* $|u|$ *sont dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *où*

$$u^+ = \max(u(x), 0), \quad u^- = \min(u(x), 0)$$

de telle sorte que $u = u^+ - u^-$ *et* $|u| = u^+ + u^-$*. De plus*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & si \quad u > 0 \\ 0 & si \quad u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & si \quad u \geq 0 \\ \nabla u & si \quad u < 0 \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & si \quad u > 0 \\ 0 & si \quad u = 0 \\ -\nabla u & si \quad u < 0 \end{cases} .$$

Par ailleurs, $(u_{\mid\partial\Omega})^+ = u^+_{\mid\partial\Omega}$ *et* $(u_{\mid\partial\Omega})^- = u^-_{\mid\partial\Omega}$.

1.3 Quelques inégalités

Théorème 1.3.1. *(Inégalité de Poincaré) Soit* p *un réel avec* $1 \leq p < +\infty$ *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*. Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.3.1}$$

De plus, l'application $u \longrightarrow \|u\|_{(L^p(\Omega))^N}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *qui est équivalente à celle induite par* $W^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.3.1. *Soit p et q deux réels vérifiant, $1 < q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On désigne par $W^{-1,q}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

En particulier, on a l'inégalité de Hölder :

Définition 1.3.2. *Etant donné que $L^2(\Omega)$ est le dual de lui même, il suit que*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq (\int_\Omega u^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega v^2 dx)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.2}$$

1.4 Les injections des espaces de Sobolev

Définition 1.4.1. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si et seulement si*

(1) X est un sous-espace de Y.

(2) $\exists C > 0$ tel que pour tout $u \in X$, on a

$$\|u\| \leq C\|u\|_X. \tag{1.4.1}$$

Définition 1.4.2. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si*

(1) X s'injecte de façon continue dans Y.

(2) Toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y.

Théorème 1.4.1. *(Sobolev, Gagliardo et Nirenberg)*
Soit $1 \leq p < N$ alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{où} \quad p^* \quad \text{est donné par} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.4.2}$$

Soit $1 \leq p < N$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})^N \quad \forall q \in [p, p^*]$$

et pour le cas limite $p = N$, on a

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})^N \quad \forall q \in [N, +\infty[.$$

Théorème 1.4.2. *(Morrey) Soit $p > N$. Alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})^N.$$

De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p \quad où \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C est une constante qui dépend seulement de p et N.

Énonçons les théorèmes "d'injection" continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 1.4.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que Ω est de classe C^1, on a*
Si $1 \leq p < N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[\quad où \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}. \tag{1.4.3}$$

Si $p = N$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[. \tag{1.4.4}$$

Si $p > N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \tag{1.4.5}$$

De plus, si $p > N$, alors on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\alpha \quad p.p \quad où \quad x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{1}{N}$ et C dépend seulement de Ω, p et N.
En particulier, on a

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}).$$

Théorème 1.4.3. *(Rellich-Kondrachov) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. On a*
Si $p < N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[\quad où \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Si $p = N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[.$$

Si $p > N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ pour tout p.

Ici, on présente la version de ce théorème pour les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, remarquons d'abord que si on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors les injections précédente sont vérifiées indépendamment de la régularité du domaine Ω.

Théorème 1.4.4. *(Rellich-Kondrachov). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$.*

(1) Si $p < N$, alors pour tout $q \geq 1$ tel que $q < p$, l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

(2) Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

(3) Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1$, alors l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est compacte.

(4) Lorsque Ω est un ouvert borné de classe C^1, les résultats ci-dessus sont vrais en remplaçant $W_0^{1,p}(\Omega)$ par $W^{1,p}(\Omega)$.

(5) Lorsque $N = 1$, l'injection de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ est continue et non compacte, mais toute suite bornée $(u_n)_n$ contient une sous-suite $(u_{n_j})_j$ telle que pour tout $x \in \Omega$, la suite $(u_{n_j}(x))_j$ est convergente.

Théorème 1.4.5. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$ et $1 < p < N$. Alors*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{pour tout} \quad q \in \left[1, \frac{Np}{N-p}\right[.$$

Le nombre $p^* = \frac{Np}{N-p}$ est appelé exposant critique de Sobolev.

1.5 La convergence faible et quelques critères

Dans cette partie, nous allons rappeler la définition de la convergence faible dans un espace de Hilbert. Soit H un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle_H$ et de norme associée notée $\|\cdot\|_H$.

Définition 1.5.1. *On dit que la suite (x_n) de H converge faiblement vers $x \in H$ si*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle_H = \langle x, y \rangle_H \quad \forall y \in H. \tag{1.5.1}$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.
La convergence forte entraîne la convergence faible

Proposition 1.5.1. *Si (x_n) converge fortement vers x, alors (x_n) converge faiblement vers x.*

Démonstration. En effet, pour tout $y \in H$,

$$|\langle x_n, y \rangle_H - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n - x, y \rangle_H| \leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H \longrightarrow 0.$$

□

Remarque 1.5.1. *La réciproque est fausse en général. Par exemple, il est bien connu que dans $H = L^2([0, 2\pi])$, la fonction $x_n(t) = \sin(nt)$ vérifie que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sin(nt) y(t) dt = 0 \quad y \in H.$$

En effet, on vérifie d'abord que c ?est vrai pour les fonctions y de classe C^1 (faire une intégration par parties), puis par densité, pour toutes les fonctions $y \in H$. Cela signifie que (x_n) converge faiblement vers la fonction nulle dans H. Mais (x_n) ne tend pas fortement vers la fonction nulle puisque

$$\|x_n\|_H^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt = \pi$$

où le dernier terme est une constante strictement positive indépendante de n.

Proposition 1.5.2. *(Unicité de la limite faible) Si (x_n) converge faiblement, alors sa limite faible est unique.*

Démonstration. Soient x et x' deux limites faibles de (x_n). Alors par définition de la convergence faible, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H = \langle x', y\rangle_H \quad y \in H$$

soit $\langle x - x', y\rangle = 0$ pour tout $y \in H$. Donc $x = x'$. □

En dimension finie, la convergences faible et forte coïncident :

Proposition 1.5.3. *Si H est de dimension finie et (x_n) est une suite d'éléments de H, alors (x_n) converge faiblement si (x_n) converge fortement.*

Démonstration. Soit (e_k) pour $k = 1, \ldots, N$ une base orthonormée de H. Si (x_n) converge faiblement vers $x \in H$, alors pour tout $k = 1, \ldots, N$, la suite scalaire $(\langle x_n, e_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, e_k\rangle$. Donc

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{N}(\langle x_n, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle)^2 \longrightarrow 0.$$

Cela prouve que (x_n) converge fortement vers x.
La réciproque est toujours vraie, même en dimension infinie. □

En particulier, on a la définition de la convergence faible dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Définition 1.5.2. *Soit v_n une suite de $H_0^1(\Omega)$. On dit que v_n converge faiblement vers v dans $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si*

$$\int_\Omega \langle\nabla v_n, \nabla\varphi\rangle + v_n\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega \langle\nabla v, \nabla\varphi\rangle + v\varphi dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5.2}$$

Théorème 1.5.1. *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $\|f_n\| \leq g$ p.p sur Ω, alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|f - f_n\| = 0, \quad \int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f_n(x)dx. \tag{1.5.3}$$

Proposition 1.5.4. *Soient* $(f_n)_n$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$, *tels que*

$$\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ *et une sous-suite extraite* $(f_{n_i})_{n_i}$ *telles que :*

(1) $f_{n_i}(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p sur* Ω.

(2) $|f_{n_i}(x)| \leq g(x)$ *pour tout* i *et p.p sur* Ω.

Lemme 1.5.1. *(Lemme de Fatou)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions positives. Alors :*

$$\int_\Omega \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf f_n(x)dx \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx. \tag{1.5.4}$$

1.6 Quelques éléments de la théorie des points critiques

Définition 1.6.1. *(Différentiabilité au sens de Fréchet) : Soient* X *un espace de Banach,* Ω *un ouvert de* X, $J \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et soit* X' *le dual de* X. *Considérons* $u \in \Omega$. *On dit que* J *est différentiable au sens de Fréchet au point* u, *s'il existe forme linéaire* $\varphi \in X'$ *tel que*

$$\forall v \in w \quad : J(v) - J(u) = \langle \varphi, v - u \rangle + o(v - u).$$

Posons

$$\varphi = J'(u) \tag{1.6.1}$$

que l'on appelle la différentielle de J *au sens de Fréchet au point* u. *Il est noté aussi que* $\langle \varphi, u \rangle$ *est le crochet de dualité, en d'autre terme, on a*

$$\varphi(u) = \langle \varphi, u \rangle \tag{1.6.2}$$

Définition 1.6.2. *(Dérivée directionnelle). Soient* Ω *une partie d'un espace de Banach* X *et* $J \colon \Omega \longrightarrow R$ *une fonction à valeurs réelles. Si* $u \in \Omega$ *et* $v \in X$ *sont tels que pour* $t > 0$ *assez petit on a* $u + tv \in w$, *on dit que* J *admet (au point* u*) une dérivée dans la direction de* v *si*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \tag{1.6.3}$$

existe. On notera cette limite par $J'_v(u)$.

Définition 1.6.3. *(Différentiabilité au sens de Gâteaux). On dit que la fonction J d'un ouvert Ω d'un espace de Banach X, à valeurs réelles, est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) en $u \in \Omega$, s'il existe $\varphi \in X'$ tel que dans chaque direction $v \in X$ où $J(u+tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_v(u)$ existe et on a,*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \langle \varphi, v \rangle. \tag{1.6.4}$$

L'application φ est appelée la différentielle de J au sens de Gâteaux au point u (ou la G-différentielle de J au point u), on note $J'(u) = \varphi$.

Remarque 1.6.1. *Si J est différentiable au sens de Fréchet, alors J est différentiable au sens de Gâteaux. La réciproque est fausse, mais on a le résultat qui suit :*

Proposition 1.6.1. *Soit J une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}$ et G-différentiable dans un voisinage de $u \in \Omega$. On désigne par $J'(v)$ la G-différentielle de J en v et on suppose que l'application $v \longrightarrow J'(v)$ est continue au voisinage de u. Alors*

$$J(v) = J(u) + \langle J'(u), v-u \rangle + o(v-u) \tag{1.6.5}$$

c'est à dire que J est différentiable au sens de Fréchet et sa différentielle coïncide avec $J'(u)$.

Définition 1.6.4. *Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \Omega$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$ où $J'(u)$ est la G-différentielle de J au point u. Si u n'est pas un point critique alors on dit que u est un point régulier de J. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J s'il existe $u \in w$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique alors on dit que c est une valeur régulière de J.*

Théorème 1.6.1. *(Théorème des fonctions implicites)*
Soient X, Y, Z trois espaces de Banach, Ω un ouvert de $X \times Y$ et $f \in C^1(\Omega, Z)$. On suppose que $(x_0, y_0) \in \Omega$ est tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et que $\partial_y f(x_0, y_0)$ est un homéomorphisme (linéaire) de Y sur Z. Il existe alors $\omega \subset X$ voisinage connexe de x_0 et une unique application $\varphi \in C^1(\omega, Y)$ telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et pour tout $x \in \omega$ on ait $f(x, \varphi(x)) = 0$. De plus si $x \in \omega$ et $f(x, y_*) = 0$ alors $y_* = \varphi(x)$. La dérivée φ' est donnée par :

$$\varphi'(x) = -(\partial_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ (\partial_x f(x, \varphi(x))) \tag{1.6.6}$$

Définition 1.6.5. *Soit X un espace de Banach et Ω est une partie de X. Une fonction $J : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour toute suite $(u_n)_n$ de Ω convergeant faiblement vers $u \in \Omega$, on a*

$$J(u) \leq \varliminf_{n \longrightarrow +\infty} J(u_n). \tag{1.6.7}$$

Proposition 1.6.2. *Soit X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction faiblement séquentiellement (s.c.i). De plus, si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(u_n)_n$ de K telle que $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$, on a $J(u_n) \longrightarrow +\infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum, autrement dit :*

$$\exists u \in K, \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v) \tag{1.6.8}$$

1.7 Régularité

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $a(\cdot) = (a_{ij}(\cdot))_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice, $b(\cdot) = (b_i(\cdot))_{1 \leq i \leq N}$ et $\beta(\cdot) = (\beta_i(\cdot))_{1 \leq i \leq N}$ deux vecteurs, et c une fonction. On considéré A et L deux opérateurs du second ordre définis par :

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \partial_j(\beta_j u) + b \cdot \nabla u + cu$$

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}\partial_{ij} u) + b \cdot \nabla u + cu$$

et avec des hypothèses sur les coefficients on précisera les domaines de ces opérateurs. On dit que A est un opérateur du second ordre a partie principale divergentielle. Remarquons en premier lieu que si par exemple les coefficients a_{ij} et β_i sont dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, l'opérateur A est du même type que L. Il est également a noter que dans l'opérateur L on peut supposer sans perte de généralité que $a_{ij} = a_{ji}$, car $\partial_{ji} u = \partial_{ij} u$ et

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{ij} u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}\partial_{ij} u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \partial_{ij} u.$$

En revanche, il faut bien noter qu'en général les deux opérateurs A et L sont de natures différentes, et qu'en particulier les propriétés (surtout celles qui concernent le spectre) de l'opérateur A dépendent de manière essentielle de la symétrie ou non de la matrice $a(\cdot)$. En règle générale on supposera que la matrice $a(\cdot)$ vérifie la condition de coercivité ou d'ellipticité, en d'autre terme $\exists\alpha > 0$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, on a

$$\langle a(x)\xi, \xi\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha|\xi|^2$$

presque partout sur Ω.

Théorème 1.7.1. *(Théorème de Schauder).*
L'opérateur L étant défini, on suppose que les coefficients a_{ij}, b et c sont dans $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ pour un $\theta \in]0,1[$ et un entier $k \geq 0$, que $c \geq 0$ et que la condition de coercivité (10.3) est satisfaite. Alors si l'ouvert Ω est borné et de classe $C^{k+2,\theta}$ et $\varphi \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$ ainsi que $f \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ sont données, il existe une unique fonction $u \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\begin{cases} Lu = f & dans \quad \Omega, \\ u = \varphi & sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et de plus, pour une constante C dépendant seulement de Ω, θ, α ainsi que des normes des coefficients a_{ij}, b_i, c dans $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, on a

$$\|u\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|f\|_{C^{k}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})}\right), \tag{1.7.1}$$

$$\|D^2u\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|f\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})}\right). \tag{1.7.2}$$

Théorème 1.7.2. *L'opérateur L étant donné, on suppose que les coefficients a_{ij} sont dans $C(\overline{\Omega})$, b et c dans $L^\infty(\Omega)$, que $c \geq 0$ et que la condition de coercivité est satisfaite. Alors si l'ouvert Ω est borné et de classe $C^{1,1}$ et $f \in L^p(\Omega)$ est donnée pour $1 < p < \infty$, il existe une unique fonction $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} Lu = f & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et de plus, pour une constante C indépendante de f et u, on a $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$. En particulier si $p > \frac{N}{2}$ et $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, il existe une unique solution $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ du problème de Dirichlet $Lu = f$ dans Ω et $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$.

Considérons maintenant l'opérateur A défini, en règle générale, lorsque l'on résout une équation du type $Au = f$ dans Ω et $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$, l'équation $Au = f$ est entendue au sens de $D'(\Omega)$ et la condition au bord est interprétée au sens $u - \varphi \in H^1_0(\Omega)$. De plus, contrairement a ce qui se passe pour les opérateurs comme L défini, la condition $c \geq 0$ ne suffit pas a montrer l'existence d'une solution. C'est pourquoi nous énonçons le théorème qui suit sans aborder la question de l'existence de solution (voir D. Gilbarg et N.S. Trudinger [6]).

Théorème 1.7.3. *L'opérateur A étant donné, on suppose que la condition de coercivité est satisfaite et que, pour un entier $k \geq 0$, Ω est de classe C^{k+2}, que les coefficients α_{ij}, β_j sont dans $C^{k,1}(\overline{\Omega})$, b_i, c sont dans $L^\infty(\Omega)$ si $k = 0$ et dans $C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ si $k \geq 1$. Si $f \in H^k(\Omega)$, $\varphi \in H^{k+2}(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ sont telles que $Au = f$ et $u - \varphi \in H^1_0(\Omega)$, alors $u \in H^{k+2}(\Omega)$, et pour une constante C dépendant uniquement de Ω, k, α et des normes de a_{ij}, β_j, b_i, c on a*

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^k(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^{k+2}(\Omega)}).$$

De plus si Ω est de classe $C^\infty(\Omega)$ et f, φ, a_{ij}, β_j, b_i, c sont dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$

Chapitre 2

Quelques outils de base

Dans cette section, on rappelle quelques lemmes qui nous seront utile par la suite et particulièrement le Théorème des Multiplicateurs de Lagrange qui fortement relie le problème de minimisation à l'EDP.

Lemme 2.0.1. *(Brezis-Lieb). Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers f. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et :*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p \right). \tag{2.0.1}$$

Démonstration. Soit $M = \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p$. Remarquons en premier lieu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant de p et de ε telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on ait

$$||s+1|^p - |s|^p - 1| \leq \varepsilon |s|^p + C_\varepsilon. \tag{2.0.2}$$

En effet, pour voir que cette inégalité est vraie, il suffit de remarquer que :

$$\lim_{|s| \longrightarrow +\infty} \frac{|s+1|^p - |s|^p - 1}{|s|^p} = 0$$

On déduit de (2.0.2) que pour a, $b \in \mathbb{R}$ on a :

$$||a+b|^p - |a|^p - |b|^p| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p. \tag{2.0.3}$$

Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, posons :

$$u_n = ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p|, \quad Z_n = (u_n - \varepsilon |f_n - f|^p)^+.$$

On sait que Z_n tend vers zéro p.p et que, grâce a (2.0.3) appliquée à la suite u_n, nous obtenons $0 \leq Z_n \leq C_\varepsilon |f|^p$. Par conséquent, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.5.1), on a $\|Z_n\|_1 \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ puisque par le lemme de Fatou (Lemme 1.5.1), on a $\int_\Omega f dx < +\infty$. De plus on a presque partout : $0 \leq u_n \leq \varepsilon |f_n - f|^p + Z_n$, ce qui donne

$$\|u_n\|_1 \leq \varepsilon \|f_n - f\|_p^p + \|Z_n\|_1 \leq \varepsilon 2^p M^p + \|Z_n\|_1.$$

On en déduit finalement que $\|u_n\|_1$ tend vers zéro, ce qui établit le résultat annoncé. □

Un corollaire immédiat de ce résultat est le suivant :

Corollaire 2.0.1. *Soient* $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ *et* $(f_n)_n$ *une suite de* $L^p(\Omega)$. *On suppose que :*

$$f_n \longrightarrow f \quad p.p. \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p. \tag{2.0.4}$$

Alors on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f - f_n\|_p = 0. \tag{2.0.5}$$

Voici maintenant un lien entre la convergence presque partout et la convergence faible dans les espaces $L^p(\Omega)$. *Remarquons que pour* $1 < p < +\infty$, *les espaces* $L^p(\Omega)$ *étant réflexifs, si la suite* $(f_n)_n$ *est bornée dans* $L^p(\Omega)$, *on peut en extraire une sous-suite* $(f_{n_i})_i$ *convergeant dans* $L^p(\Omega)$ *faible vers une certaine fonction* $g \in L^p(\Omega)$. *Comme le montre le lemme suivant, si on sait que* $f_n \longrightarrow f$ *p.p. on a nécessairement* $g = f$.

Lemme 2.0.2. *Soient* $1 < p < \infty$ *et* $(f_n)_n$ *une suite bornée de* $L^p(\Omega)$ *convergeant p.p. vers* f. *Alors* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $L^p(\Omega)$ *faiblement.*

Démonstration. En effet, d'après ce que nous venons de dire plus haut il existe une sous-suite $(f_{n_i})_i$ convergeant vers $g \in L^p(\Omega)$. Soit alors :

$$\Omega_n = \{x \in \Omega, \quad \forall k \geq n, \quad |f_k(x) - f(x)| \leq 1\}.$$

Si $n \geq 1$ est fixé et $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ est a support compact et telle que $supp(\varphi) \subset \Omega_n$, en utilisant le théorème de la convergence dominée (Théorème (1.5.1)), on voit que :

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = \lim_{i \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f_{n_i}(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on déduit que

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

pour toute fonction φ à support compact dans Ω. On en conclut que $g = f$, et par conséquent c'est toute la suite $(f_n)_n$ qui converge faiblement vers f. $\square$

Proposition 2.0.1. *(Inégalité de Poincaré).*
On suppose que Ω est un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p. \tag{2.0.6}$$

L'inégalité est vraie si on suppose seulement que Ω est de mesure finie.

Démonstration. Si Ω est borné dans une direction, on peut supposer sans perte de généralité qu'il est contenu dans $\mathbb{R}^{N-1}\times]0, a[$. Ainsi, en notant $(x', x_N) = x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pour $u \in C_c^1(\Omega)$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} |u(x', x_N)|^p &= p\int_0^{x_N} |u(x', t)|^{p-2}u(x', t)\partial_N u(x', t)dt \\ &\leq p\int_0^a |u(x', t)|^{p-1}|\partial_N u(x', t)|dt. \end{aligned}$$

En intégrant d'abord en x_N sur $]0, a[$ puis en $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, et utilisant le fait que le support de u est contenu dans Ω, on obtient :

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq pa\int_\Omega |u(x)|^{p-1}|\partial_N u(x)|dx \leq pa\|u\|_p^{p-1}\|\partial_N u\|_p$$

Où, pour la dernière estimation, on a utilisé l'inégalité de Hölder (1.3.2).
Lorsque Ω est de mesure finie, pour $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ on part de l'inégalité de Sobolev (1.4.2) dans $\mathbb{R}^N$ (ou $1^* = \frac{N}{N-1}$) :

$$\|\varphi\|_{L^{1^*}} \leq C(N)\|\nabla\varphi\|_{L^1}$$

Si maintenant $u \in C_c^1(\Omega)$ est donnée, en appliquant cette inégalité à $\varphi = |u|^{p-1}u$, on obtient $\|u\|_p^p = \|\varphi\|_{L^1} \leq mes(\Omega)^{\frac{1}{N}} \|\varphi\|_{L^{1^*}}$ où $mes(\Omega)$ est la mesure de Ω et finalement :

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq (mes(\Omega))^{\frac{1}{N}} \|\varphi\|_{L^{1^*}} \\ &\leq C(p,\Omega)\||u|^{p-1}\nabla u\|_1 \\ &\leq C(p,\Omega)\|u\|_p^{p-1}\|\nabla u\|_p, \end{aligned}$$

Ce qui, joint à l'argument classique de densité, établit l'inégalité de Poincaré. □

2.1 Théorème des Multiplicateurs de Lagrange

Définition 2.1.1. *Soient X un espace de Banach, F et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes*

$$S = \{v \in X, \quad F(v) = 0\}. \tag{2.1.1}$$

Nous supposons que

$$F'(v) \neq 0 \quad \forall v \in S. \tag{2.1.2}$$

où F' n'est que la différentielle de F définie par la formule (1.6.1). On dit que $c \in R$ est valeur critique de J sur S s'il existe $u \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$J(u) = c \quad et \quad J'(u) - \lambda F'(u) = 0. \tag{2.1.3}$$

Le point u est un point critique de J et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c ou le point critique u.

Théorème 2.1.1. *Sous les hypothèses et notations de la définition précédente, on suppose que $u_0 \in S$ est tel que*

$$J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v). \tag{2.1.4}$$

Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$J'(u_0) = \alpha F'(u_0). \tag{2.1.5}$$

Démonstration. Soit $u_0 \in S$, de (2.1.2) on a $F'(u_0) \neq 0$, alors on peut toujours trouver $w \in X$ tel que

$$F'(u_0)(w) = 1$$

Si $X_0 = \ker F'(u_0)$, on pourra écrire $X = X_0 \oplus \mathbb{R}w$.
Soit alors la fonction Φ de $X_0 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (v,t) \in X_0 \times \mathbb{R} : \quad \Phi(v,t) = F(u_0 + v + tw).$$

Puisque $u_0 \in S$, de (2.1.1) on a

$$\Phi(0,0) = F(u_0) = 0 \tag{2.1.6}$$

et

$$\partial_t \Phi(0,0) = F'(u_0)(w) = 1 \neq 0.$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites (1.6.7) à l'application Φ au point $(0,0)$ de $X_0 \times \mathbb{R}$, on obtient l'existence d'un voisinage $V \subset X_0$ de $v = 0$ et une unique application $T \in C^1(V, \mathbb{R})$ telle que $T(0) = 0$ et

$$\forall v \in V \quad \Phi(v, T(v)) = 0. \tag{2.1.7}$$

De plus si pour un $v \in V$ vérifiant $\Phi(v,t) = 0$ alors nécessairement $t = T(v)$ et puisque $\partial_v \Phi(0,0) = F'(u_0)(v) = 0$ car $v \in X_0$, on obtient la dérivé T' au point $v = 0$ par :

$$T'(0) = -(\partial_t \Phi(0,0))^{-1} \circ (\partial_v \Phi(0,0)) = 0. \tag{2.1.8}$$

Donc il existe un voisinage Ω de u_0 dans X, tel que

$$u \in \Omega \quad et \quad F(u) = 0 \Longleftrightarrow u = u_0 + v + T(v)w \quad \text{avec} \quad v \in V.$$

Remarquons que rien de ce qui précède ne fait intervenir J.
Si $I \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$, est définie par $I(v) = J(u_0 + v + T(v)w)$.
Par hypothèse (2.1.4), on voit que le minimum de J est réalisé par u_0, donc I atteint son minimum en $v = 0 \in V$. Par conséquent $I'(0)(v) = 0$ pour tout $v \in X_0$. Or d'après la définition de I et la propriété de T, on sait que si $v \in X_0$ on a $I'(0)(v) = J'(u_0)(v)$. On en conclut que $J'(u_0)(v) = 0$ pour tout $v \in X_0$ et que $ker J'(u_0) \supset ker F'(u_0)$: par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$. $\square$

Chapitre 3

Etude des valeurs propres

3.1 Etude de la première valeur propre

Définition 3.1.1. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, $N \geq 3$ et $h \in C^\infty(\Omega)$. Soit P un opérateur différentiel définit tel que :*

$$P : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$$
$$u \longmapsto Pu$$

On dit que P est de type Laplacien conforme si et seulement si l'opérateur P s'écrit sous la forme suivante :

$$P = \Delta + h \quad \text{où} \quad \Delta u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{3.1.1}$$

et le Laplacien.

Corollaire 3.1.1. *(Formule de Green).*
Soient Ω un ouvert de classe C^1 et u, v deux fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$. Alors on a :

$$\int_\Omega [v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma)v(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial n}(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

et

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma)v(\sigma)d\sigma$$

où $n(\sigma)$ est la normale extérieur à $\partial\Omega$ au un point σ.
En particulier si $v = 0$ sur le bord, on a

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx \tag{3.1.2}$$

Définition 3.1.2. *L'opérateur P est dit coercif si et seulement si il existe une constante c tel que*

$$\int_\Omega |\nabla v^2| + hv^2 dx \quad \geq \quad c\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

Par exemple si $h > 0$, l'opérateur P est coercif, en fait il suffit de voir que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v^2| + hv^2 dx \quad &\geq \quad \min(1, \min_\Omega h) \int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 dx \\ &\geq \quad \min(1, \min_\Omega h)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}\end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. *La première valeur propre λ_1 de l'opérateur P est caractérisée par :*

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v\in H^1_0(\Omega)\\ v\neq 0)}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 + hvdx}{\int_\Omega v^2 dx} \tag{3.1.3}$$

Démonstration. En effet, si $v \in H^1_0(\Omega)$ est une fonction propre non nulle associée à une valeur propre λ de P alors v vérifie la relation suivante :

$$Pv = \lambda v. \tag{3.1.4}$$

Multipliant cette dernière égalité par v puis intégrant, on obtient

$$\int_\Omega vPvdx = \lambda \int_\Omega v^2 dx$$

d'où

$$\lambda = \frac{\int_\Omega vPvdx}{\int_\Omega v^2 dx} \tag{3.1.5}$$

et comme

$$\int_\Omega vPvdx = \int_\Omega v(\Delta v + hv)dx$$

et d'après la formule de Green (3.1.2), il suit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega vPvdx &= \int_\Omega v\Delta v + hv^2dx \\ &= \int_\Omega \langle \nabla v, \nabla v\rangle + hv^2dx\end{aligned}$$

Noter que $v \in H_0^1(\Omega)$, v est nulle sur le bord de Ω, alors le second terme

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}(\sigma)v(\sigma)d\sigma = 0$$

d'où

$$\int_\Omega vPvdx = \int_\Omega |\nabla v|^2 + hv^2dx.$$

Donc la première valeur propre se choisi comme l'infimum de λ dans (3.1.5) :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega) \\ v\neq 0)}} \lambda = \inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega) \\ v\neq 0)}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 + hvdx}{\int_\Omega v^2dx}.$$

□

Théorème principale :

Théorème 3.1.1. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, $N \geq 3$ et soit λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $P = \Delta + h$, alors il existe une fonction $v \in C^2(\Omega)$ strictement positive solution de l'équation suivante*

$$\Delta v + hv = \lambda_1 v.$$

On dit aussi que la première valeur propre est atteinte par la fonction v.

Démonstration. Soit $(v_n)_n$ une suite de minimisante de λ_1, $(v_n)_n$ est une suite de fonctions de $\in H_0^1(\Omega)$ et telle que

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} \frac{\int_\Omega |\nabla v_n|^2 + hv_n^2dx}{\int_\Omega v_n^2dx} = \lambda_1$$

On peut toujours normalisée cette suite, en d'autre termes, on peut prendre

$$\int_\Omega v_n^2 dx = 1$$

En effet, posant $w_n = \alpha v_n$ où α est nombre réel non nul. On remarque facilement que la suite w_n est aussi une suite minimisante car :

$$\begin{aligned}\frac{\int_\Omega |\nabla w_n|^2 + h w_n^2 dx}{\int_\Omega w_n^2 dx} &= \frac{\alpha^2 \int_\Omega |\nabla v_n|^2 + h v_n^2 dx}{\alpha^2 \int_\Omega v_n^2 dx} \\ &= \frac{\int_\Omega |\nabla v_n|^2 + h v_n^2 dx}{\int_\Omega v_n^2 dx}\end{aligned}$$

donc il suffit de prendre

$$\alpha = \frac{1}{(\int_\Omega v_n^2 dx)^{\frac{1}{2}}}$$

alors on obtient

$$\int_\Omega w_n^2 dx = \alpha^2 \int_\Omega v_n^2 dx = (\frac{1}{(\int_\Omega v_n^2 dx)^{\frac{1}{2}}})^2 \int_\Omega v_n^2 dx = 1.$$

Autrement dit la suite vérifie :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 + h v_n dx = \lambda_1. \qquad (3.1.6)$$

A présent pour un rang assez grand, on a

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 + h v_n dx \leq \lambda_1 + 1$$

et comme notre opérateur P est coercif, alors il va exister une constante $c > 0$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 + h v_n^2 dx \geq c \|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

et cela veut dire que

$$\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\lambda_1 + 1}{c}.$$

Il en découle que la suite $(v_n)_n$ est bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ et de la réflexivité de l'espace $H_0^1(\Omega)$, on en déduit que $(v_n)_n$ admet une sous suite notée encore $(v_n)_n$ qui converge faiblement vers un $v \in H_0^1(\Omega)$ et d'après le théorème de Rellich-Kondrachov (Théorème (1.4.8)), on a $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et cette injection est compacte, donc la suite v_n converge fortement ver v dans $L^2(\Omega)$, cela signifie que

$$\int_\Omega v_n^2 dx \longrightarrow \int_\Omega v^2 dx$$

d'où $\int_\Omega v^2 dx = 1$, en conclut que la fonction v n'est pas identiquement nulle. D'autre part, d'après le lemme de Fatou (1.5.9) on a :

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx \\ &\leq \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx + \underline{\lim} \int_\Omega v_n^2 dx \end{aligned}$$

Encore de la convergence forte dans $L^2(\Omega)$ et de la définition de la norme, on retrouve

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 dx &\leq \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 + \lim \int_\Omega v_n^2 dx \\ &\leq \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 + \int_\Omega v^2 dx \end{aligned}$$

cela nous conduit à

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \leq \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx. \tag{3.1.7}$$

De plus, étant donnée que la fonction $h > 0$, alors on obtient immédiatement que

$$\int_\Omega h(v_n - v)^2 dx \leq \sup_{x\in\Omega} h(x) \int_\Omega (v_n - v)^2 dx$$

ce qui implique que

$$\int_\Omega h v_n^2 dx \longrightarrow \int_\Omega h v^2 dx.$$

En revenant à l'inégalité (3.1.7) et en ajoutant la quantité $\int_\Omega hv^2dx$, il suit que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v|^2dx + \int_\Omega hv^2dx &\leq \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 + \int_\Omega hv^2dx \\
&= \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2dx + \lim \int_\Omega hv_n^2dx \\
&= \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2dx + \underline{\lim} \int_\Omega hv_n^2dx \\
&= \underline{\lim} \int_\Omega |\nabla v_n|^2dx + hv_n^2dx \\
&= \lambda_1
\end{aligned}$$

c'est à dire que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + hv^2 \leq \lambda_1. \tag{3.1.8}$$

Étant donnée que λ_1 est l'infimum et en particulier pour la fonction v, on retrouve que

$$\lambda_1 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 + hv^2dx. \tag{3.1.9}$$

De (3.1.8) et (3.1.9), on conclut que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + hv^2dx = \lambda_1.$$

Posant

$$I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \int_\Omega |\nabla v|^2 + hv^2dx$$

et

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \int_\Omega v^2dx.$$

Avec cette nouvelle notation la première valeur propre est donnée par

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega)\\ v \neq 0)}} \frac{I(v)}{J(v)} \tag{3.1.10}$$

et d'après le Théorème des multiplicateurs de Lagrange (2.1.2), il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$DI(v).\varphi = \alpha DJ(v).\varphi \tag{3.1.11}$$

et ceci et pour tout élément $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Notant que l'équation (3.1.11) est appelée équation d'Euler Lagrange associé à notre problème de minimisation. Soit t un réel positif, alors pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, le différentielle de fonctionnelle I est donnée par :

$$\begin{aligned}
DI(v).\varphi &= \frac{d}{dt}_{|t=0} I(v+t\varphi) \\
&= \frac{d}{dt}_{|t=0} \int_\Omega |\nabla(v+t\varphi)|^2 + h(v+t\varphi)^2 dx \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}_{|t=0} |\nabla(v+t\varphi)|^2 + h(v+t\varphi)^2 dx \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}_{|t=0} |\nabla v + t\nabla\varphi|^2 + h(v^2 + t^2\varphi^2 + 2tv\varphi) dx \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}_{|t=0} |\nabla v|^2 + t^2|\nabla v|^2 + 2t\langle \nabla v, \nabla v\rangle + h(v^2 + t^2\varphi^2 + 2tv\varphi) dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$DI(v).\varphi = 2\int_\Omega \langle \nabla v, \nabla v\rangle + hv\varphi) dx \tag{3.1.12}$$

et de même on retrouve,

$$DJ(v)\varphi = 2\int_\Omega v\varphi dx. \tag{3.1.13}$$

Finalement des équations (3.1.11), (3.1.12) et (3.1.13), on obtient

$$\int_\Omega \langle \nabla v, \nabla v\rangle + hv\varphi dx = \alpha \int_\Omega v\varphi$$

Maintenant si on pose $\varphi = v$, il suit que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + hv^2 dx = \alpha \int_\Omega v^2 dx = \alpha,$$

donc

$$\alpha = \lambda_1.$$

On conclut d'après (3.1.11) que pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle + hv\varphi dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi dx$$

ce qui implique

$$\int_\Omega \varphi \Delta v + hv\varphi dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi dx,$$

encore

$$\int_\Omega \varphi(\Delta v + hv\varphi - \lambda_1 v)dx = 0$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Cela signifie exactement que v est une solution faible de l'équation

$$\Delta v + hv - \lambda_1 v = 0.$$

Etant donnée que la solution $v \in H_0^1(\Omega)$ alors comme dans le théorème de régularité (Théorème 1.7.3), il suit de l'équation $Pv = \lambda_1 v$ que $Pv \in H_0^1(\Omega)$ donc $v \in H_0^3(\Omega)$ et ainsi de suite $v \in H_0^k(\Omega)$ avec k très grand et finalement le théorème (1.4.7) assure que

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega) \tag{3.1.14}$$

ce qui signifie que $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. De plus du Lemme (1.2.7), on a $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc on aurais pu choisir la suite minimisante $(v_n)_n$ positive, ce qui entraîne que la fonction $v \geq 0$ et plus précisément la fonction $v > 0$. En effet, on peut toujours trouver un $x_0 \in \Omega$ tel que $v(x_0) = 0$, d'après l'inégalité de Harnack, pour toute fonction propre positive

$$\max_{B_r} v \leq C_{n,p} \min_{B_r} v,$$

où $B_r = B(x_0, r)$ et $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Il en résulte que $v \equiv 0$ dans B_r pour tout $r > 0$. En conclusion $v \equiv 0$, ce qui est impossible car v est une fonction non identiquement nulle. Par conséquent $|v| > 0$ sur Ω, par continuité v est de signe constant.

Conclusion 3.1.1. *On vient de montrer qu'il existe fonction $v > 0$ appartenant à l'espace $C^2(\Omega)$ qui est solution de l'équation*

$$\Delta v + hv = \lambda_1 v.$$

De plus on dit que la première valeur propre λ_1 de l'opérateur P est atteinte par la fonction v.

$\square$

Proposition 3.1.2. *Soit u la solution de notre problème :*

$$\Delta u = \lambda_1 u - hu \tag{3.1.15}$$

où $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors u vérifie l'identité suivante :

$$\int_\Omega \left(\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{2} \right) \lambda_1 u^2 + \left(\frac{n-2}{2} h + \frac{1}{2} \langle x, \nabla h \rangle \right) u^2 \right) dx = - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, v \rangle \langle \nabla u, v \rangle^2 dx.$$

Cette dernière est connu sous le nom de **L'identité de Pohozaev** .

Démonstration. On multiplie l'équation (3.1.15) par $\langle x, \nabla u \rangle$, on obtient

$$\langle x, \nabla u \rangle \Delta u = \langle x, \nabla u \rangle (\lambda_1 u - hu). \tag{3.1.16}$$

Intégrant par partie chaque terme. D'après la formule de Green, le premier terme donne :

$$\int_\Omega \langle x, \nabla u \rangle \Delta u dx = \int_\Omega \langle \nabla \langle x, \nabla u \rangle, \nabla u \rangle dx - \int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx \tag{3.1.17}$$

où v est la normale sortante. Mais vu que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a pour tout $x \in \partial\Omega$

$$\nabla u(x) = \langle \nabla u(x), v \rangle v.$$

Le second terme de droite de (3.1.17) devient alors

$$\int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla u \rangle \langle \nabla u, v \rangle dx = \int_{\partial\Omega} \langle x, v \rangle \langle \nabla u, v \rangle^2 dx.$$

Concernant le premier terme (3.1.17) de la droite, on devra avoir

$$\langle \nabla(\langle x, \nabla u \rangle), \nabla x \rangle = |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \langle x, \nabla(|\nabla u|^2) \rangle. \tag{3.1.18}$$

Pour cette dernière, il est suffisant de donner la preuve de cette égalité en dimension 2, la généralisation de cette formule se fait de la même façon. Commençant d'abord par calculer le terme $\nabla(\langle x, \nabla u\rangle)$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla(\langle x, \nabla u\rangle) &= \nabla\left(x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \\
&= (\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}x_2,\ \ \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}x_2) \\
&= (\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ \frac{\partial u}{\partial x_2}) + (\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}x_2,\ \ \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}x_2) \\
&= \nabla u + (\langle x, \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla u)\rangle,\ \ \langle x, \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla u)\rangle) \\
&= \nabla u + M
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$M = (\langle x, \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla u)\rangle, \langle x, \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla u)\rangle).$$

A présent calculant le terme $\langle\nabla(\langle x, \nabla u\rangle), \nabla x\rangle$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle\nabla(\langle x, \nabla u\rangle), \nabla x\rangle &= \langle\nabla u + M, \nabla u\rangle \\
&= |\nabla u|^2 + \langle\nabla u, M\rangle.
\end{aligned}$$

Pour prouver l'inégalité(3.1.16), il suffit de montrer que

$$\langle\nabla u, M\rangle = \frac{1}{2}\langle\nabla(|\nabla u|^2),\ \ x\rangle.$$

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla u, M\rangle &= \langle x, \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla u)\rangle \frac{\partial u}{\partial x_1} + \langle x, \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla u)\rangle \frac{\partial u}{\partial x_2} \\
&= \langle x\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla u)\rangle + \langle x\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla u)\rangle \\
&= \langle (\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1, \frac{\partial u}{\partial x_1}x_2).(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2})\rangle + \langle (\frac{\partial u}{\partial x_2}x_1, \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2).(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2})\rangle \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1}x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1}x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \\
&= (\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}).(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2}(2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1},\ 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}).(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2}(2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2},\ 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}).(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2}\langle \nabla((\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2),\ x\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \nabla(|\nabla u|^2),\ x\rangle.
\end{aligned}
$$

On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \langle x, \nabla u\rangle \Delta u dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\langle x, \nabla|\nabla u|^2\rangle dx - \int_{\partial\Omega} \langle x, v\rangle\langle \nabla u, v\rangle^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{n}{2}|\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, v\rangle |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} \langle x, v\rangle\langle \nabla u, v\rangle^2 dx \\
&= \frac{2-n}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, v\rangle\langle \nabla u, v\rangle^2 dx.
\end{aligned}
$$

En multipliant par u l'équation et en intégrant par partie, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega (\lambda_1 u^2 - hu^2) dx.$$

Finalement, le premier terme donne

$$\int_\Omega \langle x, \nabla u\rangle \Delta u dx = \frac{2-n}{2}\int_\Omega (\lambda_1 u^2 - hu^2)dx - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, v\rangle \langle \nabla u, v\rangle^2 dx. \tag{3.1.19}$$

D'autre part le second terme de (3.1.16) devient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle x, \nabla u\rangle (\lambda_1 u - hu)dx &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\langle x, \lambda_1 \nabla u^2\rangle - \frac{1}{2}\langle xh, \nabla u^2\rangle\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(-\frac{n}{2}\lambda_1 u^2 + \frac{1}{2}div(xh)u^2\right) dx\end{aligned}$$

On déduit alors de ces dernière égalité,

$$\int_\Omega \left(-\frac{n}{2}\lambda_1 u^2 + \frac{1}{2}div(xh)u^2\right) dx = \frac{2-n}{2}\int_\Omega (\lambda_1 u^2 - hu^2)dx - \int_{\partial\Omega} \langle \frac{x}{2}, v\rangle \langle \nabla u, v\rangle^2 dx.$$

□

3.2 Etude de la deuxième valeur propre

Soit v la solution de l'équation précédente, on définit la deuxième valeur propre de l'opérateur P par :

$$\lambda_2 = \inf \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2 + hwdx}{\int_\Omega w^2 dx}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble

$$E = \{w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{such that } w \neq 0, \int_\Omega w^2 dx = 1 \text{ et } \int_\Omega wvdx = 0\}.$$

Théorème 3.2.1. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, $N \geq 3$ et soit λ_2 la deuxième valeur propre de l'opérateur $P = \Delta + h$, alors il existe une fonction $w \in C^2(\Omega)$ tel que*

$$\Delta w + hw = \lambda_2 w.$$

On dit aussi que la deuxième valeur propre est atteinte par w.

Démonstration. Soit $(w_m)_m$ une suite minimisante de λ_2, avec la même méthode, on trouve un minimiseur non nul w de λ_2 vérifiant

$$P_g(w) = \lambda_2 w$$

au sens faible et $\int_\Omega w^2 dx = 1$. Ecrivant,

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega wvdx &= \int\limits_\Omega w_m v - w_m v + wvdx \\ &= \int\limits_\Omega v(w - w_m)dx + \int\limits_\Omega w_m vdx = 0.\end{aligned}$$

et comme $w_m \in E$, le second terme est

$$\int_\Omega w_m vdx = 0.$$

En utilisant la convergence faible de w_m vers w dans $L^2(\Omega)$ et le faite que $v \in L^2(\Omega)$ sachant que $L^2(\Omega)$ est l'espace dual de $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\int\limits_\Omega v(w - w_m)dx \to 0$$

donc,

$$\int\limits_\Omega wvdx = 0.$$

Etant donnée que la solution $w \in H_0^1(\Omega)$, alors en utilisant un procédé analogue à celle de v, on montre que $w \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

$\square$

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] M. Badiale and E. Serra, Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approch, Springer, 2010.

[3] H. Brézis, Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[4] D. G. De Figueiredo, Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Tata Inst of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1989.

[5] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin, Variational and Topological Methods for Dirichlet Problems with p-Laplacian, Portugaliae Mathematica, Vol 58, Fasc 3, 2001.

[6] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[7] J. H. Chabrowski, Variational Methods for Potential operator equations, De Gruyter Studies in Mathematics 24, 1998.

[8] O. Kavian, Introduction à La Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques, Springer-Verlag, 1993.