République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

méthodes variationelle et application

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Rafika **d**jebli [1]

Sous la direction de

Mme. N. Bekkouche

Soutenue le 16/09/2020 devant le jury composé de

Mr. A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mme. N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mme. S. Benmansour	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme. F. Dib	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : rafika.djebli97@gmail.com

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord je remercie « ALLAH » le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail. Je remercie mon encadreur Madame Bekkouche pour le sujet proposé qui ma permit de découvrir un vaste domaine, pour son encouragement et soutien dans les moments difficiles. Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Je remercie les membres de jury, chacun à son nom, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes remerciements vont particulièrement à Monsieur le chef de département de mathématiques et le doyen de la faculté des sciences, chacun à son nom. Sans oublier mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, ma famille mes tantes surtout mes amis, qui m'ont soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce mémoire
A Allah le tout puissant et à son Prophète Mohamed (P.S.L).
A mes chers parents
Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragements.
A ma soeur et mon frère.
A mes tantes et mes cousines
A mes amies et mes camarades.
A toute ma promotion 2019_2020
Sans oublier tous les enseignants de mon cursus.

Abreviations

EDP	Equation aux dérivées partielles.
$p.p.$	Presque partout.

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ N fois.
∇u	Gradient de u défini par $\nabla u \overset{def}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.
Δu	Laplacien de u.
$\Delta_p u$	p-Laplacien de u défini par $\Delta_p u = div\left(\lvert \Delta u \rvert^{p-2} \Delta u \right)$.

0.1 Introduction Générale

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont l'inconnue est une
fonction et qui fait intervenir non seulement cette fonction mais aussi ses dérivées partielles. L'ordre maximal de dérivation intervenant dans l'équation est appelé ordre de l'EDP. Il existe des centaines d'EDP dont l'étude nécessite des théories différentes, souvent spécifiques. On tente néanmoins de classifier les EDP en catégories, selon les outils généraux qui permettent de les analyser, ou encore selon leurs propriétés qualitatives et les problèmes qu'elles modélisent. En effet, les EDP sont les objets mathématiques qui permettent de modéliser les phénomènes naturels et il ne faut jamais oublier cet aspect.
Les EDP que nous rencontrerons dans ce mémoire seront toujours placées au préalable dans
un contexte : physique, mécanique, chimie, biologie, économie, sociologie, ...
On distingue trois grandes catégories d'EDP :

i Les équations de type elliptique qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Le prototype d'équation elliptique est l'équation de Laplace

$$-\Delta u = f \tag{1}$$

d'inconnue $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et de donnée f.

ii Les équations de type parabolique, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion. L'équation de la chaleur en est un prototype :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \tag{2}$$

d'inconnue $u(t, x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ et de donnée f.

iii Les équations de type hyperbolique qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. On identifie deux prototypes pour cette classe d'EDP :

– L' ́equation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

d'inconnue $u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.

– L' ́equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \tag{4}$$

d'inconnue $u(t, x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ et de donnée f.

- D'où vient le nom “elliptique”, “parabolique”, “hyperbolique” ?
Plaçons nous dans le cas particulier des équations de deuxième ordre dans $\mathbb{R}^2$.
L'inconnue est la fonction $u(x,y)$, qui satisfait l'équation

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g. \tag{5}$$

Pour simplifier, on suppose les coefficients a, b, ..., g constants.
On dit que (5) est:
Elliptique si $b^2 - 4ac < 0$,
Parabolique si $b^2 - 4ac = 0$,
Hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$.
Dans cette thèse nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données.
L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle.
Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle.
Le but de ce mémoire, basé essentiellement sur les articles [7], [1] et [8], est l'étude mathématique de quelques équations aux dérivées partielles elliptiques.
Ce mémoire comporte trois chapitres :
Dans le premier chapitre, nous introduisons les outils nécessaires à la suite de notre travail.
Le second chapitre, est consacrée au théorème de Lax-Milgram qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions de formulation variationnelle.
Dans le dernier chapitre, nous abordons un problème elliptiques non-linéaires nous appliquerons une methode variationnelle par application du lemme du col.
Finalement, parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisi à la fin de ce travail un nombre assez consistant permettant au lecteur interéssé d'avoir accès à quelques sources que nous avons utilisées pour réaliser ce mémoire.

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations et outils utilisés tout au long de ce mémoire. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte. Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie et seront utilisés dans le texte de manière transparente. Les ouvrages de base utilisés dans ce chapitre sont [6], et [10].

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Nous commençons par introduire les espaces de Lebesgue.
Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, $D(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.
L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

L^p est muni de la norme $\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Cette norme le rend complet, c'est donc un espace de Banach.
Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } ess \sup |u| < +\infty\},$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme suivante: $\|u\|_\infty = ess\sup_\Omega |u|$; avec

$$ess \sup |u| = \inf \{C > 0; \ \ |u(x)| \leq C \quad p.p \text{ dans } \Omega\}.$$

$L^p(\Omega)$ est reflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^q(\Omega)$ avec q le conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hôlder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et q le conjugué de p alors :

$$f.g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |f.g| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

lemme de Fatou

Lemme 1.1.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telle que, pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω.Si $f(x) := \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$, pour tout $x \in \Omega$; alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega f(x) \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx,$$

i.e.

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx.$$

Définition 1.1.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et ω une fonction poids. Pour $1 < p < \infty$, on définit $L^p(\Omega, \omega)$, l'espace de Banach de toutes les fonctions mesurables u définies sur Ω , telles que*

$$||u||_{L^p(\Omega,\omega)} = \left(\int_\Omega |u(t)|^p \, \omega(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

1.1.2 Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Kavian [8] et de Brezis [6], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev se référer à [9].
Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_J} \in L^p(\Omega),\ \text{pour } J \in \{1, ..., N\} \right\},$$

où les dérivées sont au sens des distributions.
$W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{J=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_J} \right\|_p, \tag{1.1}$$

est un espace de Banach.
L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ denote la complétion de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, pour $1 \leq p < +\infty$. Où $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, ensemble des fontions de classe C^∞ a support compact dans Ω. Comme, l'espace $D(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (pour $1 \leq p < +\infty$), le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ peut être identifié à un sous-espace de l'espace des distributions $D'(\Omega)$ par:

$$W^{1,q}(\Omega) = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)';\ q \text{ conjugué de } p.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 1.1.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :*
1. un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. il est réflexif pour $1 < p < \infty$.
3. il est separable pour $1 \leq p < \infty$.

Les injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue. Pour l'espace $W^{k,p}(\Omega)$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Soit Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soient $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty)$. Alors*
a). Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$;

b). Si $\frac{1}{p}-\frac{k}{N}=0$*, on a* $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ *pour tout* $q\in[p;+\infty[$*, (mais pas pour* $q=+\infty$*);*
c). Si $\frac{1}{p}-\frac{k}{N}<0$*, on a* $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$*.*

Toutes ces injections sont continues.
Sans hypothèse de régularité sur Ω, les injections sont vraies localement : $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}_{loc}(\Omega)$ elles restent globalement vraies si on remplace $W^{k,p}(\Omega)$ par $W^{k,p}_{0}(\Omega)$. Concernant la compacité des injections précédentes, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2 ***(Rellich-Kondrachov*** ([6])***):****Si* Ω *un domaine ouvert borné de classe* C^{1} *dans* $\mathbb{R}^{N}$*, alors*
a). Si $p<N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ *pour tout* $q\in[1,p^{*}[$*, où* $p^{*}=\frac{N.p}{N-p}$*;*
b). Si $p>N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ *pour tout* $q\in[1,+\infty[$*;*
c). Pour tout $q\in]1,+\infty[$*,* $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$*.*

Remarque 1 ***a)*** *La condition sur le domaine* Ω *est nécessaire, si* Ω *n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général comme le démontre le contre exemple suivant: Soit* $\phi\in C_{0}^{\infty}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$ *tel que,* $\phi\geq 0$*, on pose* $\phi_{n}(x)=\phi(x+ne)$*,* $e=(1,1,1,...,1)$*, il est facile de voir que* $\phi_{n}\to 0$ *p.p. Et* $\|\phi_{n}\|_{L^{q}}=\|\phi\|_{L^{q}}>0$*.*
b) *On note* $\alpha(N,q)>0$*, la constante de Sobolev de l'injection compacte de* $W_{0}^{1,p}(\Omega)\circlearrowleft L^{q}(\Omega)$*, avec* $q\in[1,p^{*})$ *où* $p^{*}=\frac{Np}{(N-p)}$*. Ainsi, pour chaque* $u\in W_{0}^{1,p}$*, nous avons*

$$\|u\|_{L^{q}}\leq\alpha(N,q)\|u\|. \tag{1.2}$$

Inégalitè de Poincaré

L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.
Soit p, tel que $1\leq p<\infty$ et Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_{0}^{1,p}(\Omega)$, nous avons

$$\|u\|_{p}\leq C\|\nabla u\|_{p}. \tag{1.3}$$

Remarque 1.1.1 *L'inégalité de Poincaré permet d'établir l'équivalence sur* $W_{0}^{1,p}(\Omega)$ *entre la norme* 1.1 *et celle définie par*

$$\|u\|=\sum_{k=0}^{m}\left\|\nabla^{k}u\right\|_{p}.$$

Il est évident que l' inégalité (1.3) *ne peut être généralisée à* $W^{m,p}(\Omega)$*. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur* Ω *borné (ou de mesure finie).*

Remarque 1.1.2 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ *équivalente à la norme usuelle induite par celle de* $H^1(\Omega)$*.*

1.2 Quelques définitions et théorèmes

1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory

Définition 1.2.1 *Nous rappelons que* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction* L^p*-Carathéodory si*
a). $f(x,u)$ *est dans* $L^p(\Omega)$ *pour chaque* $u \in \mathbb{R}$*;*
b). $f(x,u)$ *est continue presque par tous* $x \in \Omega$*;*
c). Pour chaque $\rho > 0$ *il existe une fonction* $l_\rho \in L^p(\Omega)$ *telle que p.p* $x \in \Omega$*.*

$$\sup_{|u| \leq \rho} |f(x,u)| \leq l_\rho(x).$$

1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela

Définition 1.2.2 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. On dit que la suite* $(f_n)_n$ *est équicontinue ssi :*

$$\forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in I,\ \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Autrement dit, toutes les fonctions (f_n) sont continues sur I, et elles sont continues "de la même façon".
La notion d'équicontinuité intervient notamment dans le théorème d'Ascoli-Arzela:

Théorème 1.3 ***(Théorème d'Ascoli-Arzela)***

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle fermé borné I, à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue, et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f_n(x)| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$. Alors on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction continue f.

Théorème 1.4 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de* L^p*et* $f \in L^p$, *tels que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0 \text{ lorsque } u \to \infty.$$

Alors il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que*
a). $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω;
b). $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *pour tout* k *et p.p sur* Ω *avec* $h \in L^p(\Omega)$.

1.2.3 Convergence forte et Convergence faible

Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $(u_n)_n$ une suite dans X.

Définition 1.2.1 *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *converge fortement vers* u *dans* X *si* $\|u_n - u\|_E \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Définition 1.2.3 $(u_n)_n$ *est dite convergente faiblement vers* u *si* $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ $\forall v \in X'$ *dual de* X *et elle est notée par* $u_n \rightharpoonup u$.

Définition 1.2.4 *On dit que* $C \subset X$ *est faiblement fermé si pour toute suite* $(u_n) \subset C$ *telle que:* $u_n \rightharpoonup u$ *alors* $u \in C$.

Théorème 1.5 *Un convexe* C *de* X *est faiblement fermé si et seulement si il est fortement fermé.*

Dans le cas particulier de $X = W_T^{1,p}$, nous avons le résultat suivant

Proposition 1.2.1 *Si une suite* $(u_k)_k$ *converge faiblement vers* u *dans* $W_T^{1,p}$, *alors* $(u_k)_k$ *converge uniformement vers* u *sur* $[0, T]$. *Et il existe* $C > 0$ *telle que pour* $u \in W_T^{1,p}$,

$$\|u\|_\infty \leq C\,\|u\|_{W_T^{1,p}(\Omega)} \text{ où } \|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|.$$

Théorème 1.6 ***(Eberlein–Šmulian)*** *Un espace de Banach* X *est réflexif si et seulement si de toute suite bornée* (x_n) *de* X, *on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans* X.

1.3 Approche variationnelle

Dans cette thèse, nous nous sommes basées sur une approche variationnelle pour étudier la solvabilité de problèmes de Dirichlet associés à des EDP elliptiques. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.4}$$

où Δ est un opérateur uniformément elliptique, Ω est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$. Les solutions de (1.4) sont cherchées comme points critiques de fonctionnelles réelles définies sur un espace de Banach X.
Dans le cas où f est minorée ou majorée, il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum ou le maximum est atteint. Pour plus de détails, nous référons le lecteur à [8] et [10].

1.3.1 Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test.

Formules de Green

Dans toute cette sous-section est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^N$ (borné ou non), dont le bord (ou la frontière) est noté $\partial\Omega$. Nous supposons aussi que est un ouvert régulier de classe C^1.

Théorème 1.3.1 (*Green*) *Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit W une fonction de $C^1\overline{(\Omega)}$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} W(x)\, \eta_i(x)\, ds, \tag{1.5}$$

où η_i est la i-ème composante de la normale extérieure unité de Ω.

Corollaire 1.3.1 (Formule d'intégration par parties) *Soit un ouvert régulier de classe $C^{1\cdot}$ Soit u et v deux fonctions de $C^1\overline{(\Omega)}$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties*

$$\int_{\Omega} u(x)\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_{\Omega} v(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, \eta_i(x)\, ds \tag{1.6}$$

Preuve: *Il suffit de prendre $w = uv$ dans le Théorème* (1.3.1). ■

Corollaire 1.3.2 *Soit un ouvert régulier de classe C^1. Soit u une fonction de $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et v une fonction de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, toutes deux à support borné dans le fermé .Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties.*

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\, v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)\, ds, \tag{1.7}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$.

Preuve: On applique le Corollaire (1.3.1)à v et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et on somme en i. ■

Formulation variationnelle

Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

Proposition 1.3.1 *Soit u une fonction de $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Soit X l'espace défini par*

$$X = \left\{\phi \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega.\right\}$$

Alors u est une solution du problème aux limites (1.4) *si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \quad \text{pour toute fonction } \; v \in X. \tag{1.8}$$

L'égalité (1.8) *est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites* (1.4).

Preuve: *Si u est solution du problème aux limites* (1.4), *on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule d'intégration par parties du Corollaire* (1.3.2)

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\, v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)\, ds,$$

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in X$, donc

$$\int_\Omega \nabla u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx$$

qui n'est rien d'autre que la formule (1.8). *Réciproquement, si $u \in X$ vérifie* (1.8), *en utilisant "à l'envers" la formule d'intégration par parties précédente on obtient*

$$\int_\Omega \left(\Delta u(x) + f(x)\right) v(x)\, dx = 0 \quad \text{pour toute fonction } \; v \in X.$$

Comme $(\Delta u + f\ )$ *est une fonction continue, grâce au Lemme* 1.2.9 *on conclut que* $-\Delta u(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in \Omega$. *Par ailleurs, comme* $u \in X$, *on retrouve la condition aux limites* $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *c'est-à-dire que* u *est solution du problème aux limites* (1.4). ■

Lemme 1.3.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Soit* $g(x)$ *une fonction continue dans* Ω. *Si pour toute fonction* ϕ *de* $C^\infty(\Omega)$ *à support compact dans* Ω, *on a*

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = 0,$$

alors la fonction g *est nulle dans* Ω.

Preuve: *Supposons qu'il existe un point* $x_0 \in \Omega$ *tel que* $g(x_0) \neq 0$. *Sans perte de généralité, on peut supposer que* $g(x_0) > 0$ *(sinon on prend* $-g$*). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert* $\omega \subset \Omega$ *de* x_0 *tel que* $g(x) > 0$ *pour tout* $x \in \omega$. *Soit alors une fonction test positive, non nulle,* ϕ *à support inclus dans* ω. *On a*

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = \int_\omega g(x)\phi(x)dx = 0,$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur g. *Donc* $g(x) = 0$ *pour tout* $x \in \Omega$. ■

Corollaire 1.3.3 *Soit* $f \in L^2(\Omega)$. *Si pour toute fonction* ϕ *de* $C_c^\infty(\Omega)$ *on a*

$$\int_\Omega f\ (x)\phi(x)dx = 0,$$

alors $f\ (x) = 0$ *presque partout dans* Ω.

Remarque 1.3.1 *En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle* (1.8) *sous la forme : trouver* $u \in X$ *tel que*

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in X,$$

avec

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L\,(v) = \int_\Omega f\ (x)v(x)dx,$$

où $a(\cdot,\cdot)$*est une forme bilinéaire sur* X *et* $L(\cdot)$ *est une forme linéaire sur* X. *C'est sous cette forme abstraite que nous résoudrons (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle dans la prochaine section.*

Théorie de Lax-Milgram

Cadre abstrait Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel V . Nous considérons une formulation variationnelle du type

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \tag{1.9}$$

Les hypothèses sur a et L sont

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est-à-dire que $v \to L(v)$ est linéaire de$V$ dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que
$$|L(v)| \leq C \|v\| \text{ pour tout } v \in V.$$
2. $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $w \to a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \to a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$.
3. $a(\cdot,\cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que
$$|a(w,v)| \leq M \|w\| \|v\| \text{ pour tout } w, v \in V \tag{1.10}$$
4. $a(\cdot,\cdot)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que
$$a(v,v) \geq \nu \|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V. \tag{1.11}$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (1.9). En particulier, la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ est essentielle.

Théorème 1.3.1 *Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V, $a(\cdot,\cdot)$une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle* (1.9) *admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.*

Preuve: Pour tout $w \in V$, l'application $v \to a(w,v)$ et une forme linéaire continue sur V : par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V, noté $A(w)$, tel que

$$a(w,v) = \langle A(w), v \rangle, \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(w,v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \to A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité (1.10) de $a(w,v)$ montre que

$$\|A(w)\| = a(w, A(w)) \leq M \|w\| \|A(w)\|$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M\|w\|$ et donc $w \to A(w)$ est continue. Une autre application du Théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V, noté f, tel que $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$ et

$$L(v) = \langle f, v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (1.9) est équivalent à :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } A(u) = f. \tag{1.12}$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L).
La coercivité (1.11) de $a(w, v)$ montre que

$$\nu\|w\|^2 \leq a(w,w) = \langle A(w), w\rangle \leq \|A(w)\|\,\|w\|\,,$$

ce qui donne

$$\nu\|w\| \leq \|A(w)\| \text{ pour tout } w \in V \tag{1.13}$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $Im(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $Im(A)$ est fermé dans V et que $Im(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^\perp = (Im(A)^\perp)^\perp = \overline{Im(A)} = Im(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans $Im(A)$ qui converge vers b dans V . En vertu de (1.13) on a

$$\nu\|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V , c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in Im(A)$ et $Im(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in Im(A)^\perp$; la coercivité (1.11) de $a(w, v)$ implique que

$$\nu\|v\|^2 \leq a(v,v) = \langle A(v), v\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $Im(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (1.13) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution u dépend continûment de f. ■
Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (1.9) réalise le minimum d'une énergie (très naturelle en physique ou en mécanique).

Points critiques

Au problème (1.4) on associé une fonctionnelle dite fonctionnelle d'énergie, définie par $J : X \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u) \, dx,$$

où $F(x,u) = \int\limits_0^u f(x,s) \, ds$.

Définition 1.3.1 *Soit J une fonctionnelle de classe C^1 définie sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $u \in X$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.*
La valeur c est dite valeur critique de J s'il existe un point critique $u \in X$ tel que : $J(u) = c$.

Solution faible

Définition 1.3.1 *u est dite solution faible du problème (1.4) si*

$$\int_\Omega Lu.\varphi(x) \, dx = \int_\Omega f(x) . \varphi(x) \, dx \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Définition 1.3.2 *Une fonction $J : X \to \mathbb{R}$, est dite semi-continue inférieurement et on la note (s.c.i), en $x \in X$ si, pour toute suite $\{x_k\} \in X$ convergente vers x,*

$$\liminf_{x_k \to x} J(x_k) \geq J(x).$$

Définition 1.3.3 *Une fonctionnelle J est dite coercive si:* $\lim\limits_{\substack{\|u\| \to +\infty \\ u \in E}} J(u) = +\infty$.

Théorème 1.7 ***(minimisation directe** [11]) Si X est réflexif, $M \subset X$ un sous ensemble faiblement fermé de X. et $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, coercive et faiblement semi continue inférieurement sur M, alors J est borné inférieurement dans M et atteint son minimum dans M.*

Définition 1.3.4 ***(Suite minimisante)** Une suite minimisante pour une fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ est une suite $(w_k)_k$ telle que $J(w_k) \to \inf J$ quand $k \to \infty$.*

Remarque 2 *L'existence d'une suite minimisante est assurée en particulier quand J est coercive. Un outil essentiel dans le calcul de la variation est la compacité des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier pour chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un outil essentiel pour montrer cette existence dans plusieurs cas.*

Conditions de Palais-Smale

Définition 1.3.5 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$ et le note $(PS)_c$, si de toute suite (u_n) de X telle que*

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X',$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 1.8 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 bornée inférieurement et $c = \inf J$. Si J satisfait la condition $(PS)_c$, alors c est atteint en un point $x_0 \in X$ telle que $J'(x_0) = 0$.*

Théorème 1.3.2 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 bornée inferieurement et $c = \inf J$. Si la condition $(PS)_c$ est satisfaite, alors c est minimum de J.*

La preuve est basée sur le principe Ekeland appliqué à l'espace X équipé de distance géodésique.

Le théorème du Col (Mountain Pass Theorem)

Le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de minmax est le théorème du Col de la montagne (en anglais Mountain Pass Theorem) qui exprime très bien le contenu du résultat et sa démonstration: si on se trouve en un point A dans une cuvette à une altitude h_0, entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$; si on veut aller à un point B située en dehors de la cuvette au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B. Pour le trouver il suffit de prendre parmis tous les chemins allant de A à B, celui qui monte le moins haut.

Théorème 1.9 [2] *Soit $J \in C^{1}(X, \mathbb{R})$ supposons que J satisfait la condition (PSC), et*

(i) $J(0) = 0$,
(ii) il existe des constantes $\rho > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que* $J(x) > \alpha$ *si* $\|x\| = \rho$,
(iii) il existe $e \in X$, $\|e\| > \rho$, *tel que* $J(e) < 0$.
Alors J *admet une valeur critique* $c > \alpha$ *qui peut être caractérisée comme suit*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [01]} J(\gamma(t)),$$

où,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([01], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Remarque 3 *a) Nous comprenons mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du Col, quand nous interprètons géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions (i) à (iii) dans le cas où* $X = \mathbb{R}^2$ *et* $J(u)$ *représente l'altitude d'un point* u (*dans* $\mathbb{R}^3$). *Les conditions (i) et (ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins* α. *La condition iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point e situé moins haut que les dites montagnes, disons dans une vallée. Par conséquent, il est intuitivement clair que l'on peut joindre continûment* 0 *à* e *en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.*
b) Il faut toute fois faire attention à l'intuition montagnarde. Ainsi, le théorème du Col est vrai même si J *ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand* $X = \mathbb{R}$, *par contre il est faux quand* $X = \mathbb{R}^2$, *c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte. Ainsi, par exemple, la fonction*

$$J(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_2)^3 + x_2^4,$$

n'a clairement qu'un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$, *à savoir l'origine où* $J = 0$. *Ce point critique est un minimum local, donc une cuvette entourée de montagnes, et l'on peut descendre encore plus bas à l'extérieur de la cuvette car* $\inf_{\mathbb{R}^2} J = -\infty$. *C'est donc un exemple de fonction présentant un seul point critique, qui est un minimum local mais pas global. Comme il n'y a pas d'autre point critique que le minimum local, c'est donc qu'il n'existe pas de col pour sortir de la cuvette. Cela ne peut se produire que si les chemins minimisants partent vers l'infini. Cette perte de compacité est évidemment liée au fait que* J *ne satisfait pas la condition de Palais-Smale au niveau de l'inf-max.*

Théorème 1.10 *(de trace)*
Soit Ω *un ouvert borné régulier de classe* C^1, *ou bien* $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. *On définit l'application trace* γ_0

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) \cap C(\Omega) & \to & L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega) \\ v & \to & \gamma_0(v) = v_{|\partial\Omega} \end{array} \tag{1.14}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C \geq 0$ tell que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.15}$$

Théorème 1.11 *(Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$,elles vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\;dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\;dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)\;ds, \tag{1.16}$$

où $\eta = (\eta_i)_{1\leq i\leq N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Preuve: Rappelons que la formule (1.16) a été établie pour des fonctions de classe C^1. On utilise à nouveau un argument de densité. Par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, il existe des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ dans $C_c^\infty(\Omega)$ qui convergent dans $H^1(\Omega)$ vers u et v, on a

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v_n\frac{\partial u_n}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u_n v_n\eta_i\;ds. \tag{1.17}$$

On peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans les deux premiers termes de (1.17) car u_n et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ (respectivement, v_n et $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}$) convergent vers u et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (respectivement, v et $\frac{\partial v}{\partial x_i}$) dans $L^2(\Omega)$. Pour passer à la limite dans la dernière intégrale de (1.17), on utilise la continuité de l'application trace γ_0, c'est-à-dire l'inégalité (1.15), qui permet d'affirmer que $\gamma_0(u_n)$ (respectivement, $\gamma_0(v_n)$) converge vers $\gamma_0(u)$ (respectivement, $\gamma_0(v)$) dans $L^2(\partial\Omega)$. On obtient ainsi la formule (1.16) pour des fonctions u et v de $H^1(\Omega)$. ■

Comme conséquence du Théorème de trace (1.10) on obtient une caractérisation très simple de l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 1.3.2 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^2. Si $u \in H^2(\Omega)$ et ,$v \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\;dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\;dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}(x)v(x)ds. \tag{1.18}$$

Comme (1.18) est vraie pour des fonctions de classe C^2 et queles fonctions régulières sont denses dans $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$, on utilise un argument de densité. Nous renvoyons à la démonstration du Théorème (1.11) pour plus de détails.

Chapitre 2

Etude mathématique des problèmes elliptiques

Sommaire

2.1 Application du Théorème de Lax-Milgram

2.1.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solvabilité le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, et f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(\Omega)$.
Dans cette étude, notre objectif principal inspiré par [7], est de montrer l'existence d'au moins une solution en utilisant le Théorème du Lax-Milgrame (1.3.1).
L'approche variationnelle pour étudier (2.1) est constituée de trois étapes que nous détaillons.
Etape 1 : établissement d'une formulation variationnelle.
Dans une première étape il faut proposer une formulation variationnelle du problème aux limites (2.1), c'est-à-dire qu'il faut trouver une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, une forme linéaire $L(\cdot)$, et un espace de Hilbert V tels que (2.1) soit équivalent à :

Trouver

$$u \in V \quad \text{tel que } a(u,v) = L(v) \text{ pour tout} v \in V. \tag{2.2}$$

Le but de cette première étape est seulement de trouver la formulation variationnelle
(2.2); on vérifiera l'équivalence précise avec (2.1) plus tard au cours de la troisième étape.
Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie l'équation (2.1) par une fonction test régulière v et on intègre par parties. Ce calcul est principalement formel au sens où l'on suppose l'existence et la régularité de la solution u afin que tous les calculs effectués soient licites. A l'aide de la formule de Green (1.7) (voir aussi (1.7)) on trouve

$$\int_\Omega fv\ dx = -\int_\Omega \Delta uv\ dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v\ ds. \tag{2.3}$$

Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, l'égalité (2.3) devient

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ dx = \int_\Omega f(x)v(x)\ dx \tag{2.4}$$

Pour que le terme de gauche de (2.4) ait un sens il suffit que ∇u et ∇v appartiennent à $L^2(\Omega)$ (composante par composante), et pour que le terme de droite de (2.4) ait aussi un sens il suffit que v appartienne à $L^2(\Omega)$ (on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$).
Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$, le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les éléments s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.
En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour (2.1) est trouver

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega fv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Évidemment, nous avons fait un certain nombre de choix pour arriver à (2.5) ; d'autres choix nous auraient conduit à d'autres formulations variationnelles possibles. La justification de (2.5) s'effectuera donc a posteriori : tout d'abord, la deuxième étape consiste à vérifier que (2.5) admet bien une unique solution, puis la troisième étape que la solution de (2.5) est aussi une solution du problème aux limites (2.1) (dans un sens à préciser).
Etape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.
Dans cette deuxième étape nous vérifions que la formulation variationnelle (2.5) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram (1.3.1) dont nous vérifions les hypothèses avec les notations

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ dx \text{ et } L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\ dx.$$

On voit facilement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.
De plus, en vertu de l'inégalité de Poincaré (voir le Corollaire (1.1.2)); on utilise ici le caractère borné de l'ouvert Ω), la forme bilinéaire a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a(u,v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx \geq \nu\, \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram (1.3.1) sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (2.5).
Etape 3: Équivalence avec l'équation.
La troisième étape (la dernière et la plus délicate) consiste à vérifier qu'en résolvant la formulation variationnelle (2.5) on a bien résolu le problème aux limites (2.1), et à préciser dans quel sens la solution de (2.5) est aussi une solution de (2.1). En d'autres termes, il s'agit d'interpréter la formulation variationnelle et de retourner à l'équation. Pour cela on procède aux mêmes intégrations par parties qui ont conduit à la formulation variationnelle, mais en sens inverse, et en les justifiant soigneusement.
Cette justification est très facile si l'on suppose que la solution u de la formulation variationnelle (2.5) est régulière (précisément si $u \in H^2(\Omega)$) et que l'ouvert Ω est aussi régulier, ce que nous faisons dans un premier temps. En effet, il suffit d'invoquer la formule de Green (1.18) qui nous donne, pour $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx = -\int_\Omega v\ \Delta u\ dx,$$

puisque $v = 0$ sur le bord $\partial\Omega$. On en déduit alors

$$\int_\Omega (\Delta u + f\ )v\ dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

ce qui implique, en vertu du Corollaire (1.3.3), que $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$ et on a l'égalité

$$-\Delta u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega \tag{2.6}$$

De plus, si est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors le Théorème de trace (1.10) affirme que toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ a une trace sur $\partial\Omega$ nulle dans

$L^2(\Omega)$. On en déduit, en particulier, que

$$u = 0 \text{ presque partout sur } \partial\Omega. \tag{2.7}$$

On a donc bien retrouvé l'équation et la condition aux limites de (2.1).

Si l'on ne suppose plus que la solution u de (2.5) et l'ouvert Ω sont réguliers, il faut travailler davantage (on ne peut plus utiliser la formule de Green (1.18) qui nécessite que $u \in H^2(\Omega)$). On note $\sigma = \nabla u$ qui est une fonction à valeurs vectorielles dans $L^2(\Omega)^N$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit de la formulation variationnelle (2.5) que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\left| \int_\Omega \sigma \cdot \nabla v \, dx \right| = \left| \int_\Omega f v \, dx \right| \leq C \, \|v\|_{L^2(\Omega)} \, . \tag{2.8}$$

Comme $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, (2.8) n'est rien d'autre que le critère d'existence d'une divergence faible de σ dans $L^2(\Omega)$ qui vérifie, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \sigma \cdot \nabla v \, dx = - \int_\Omega \operatorname{div} \sigma v \, dx.$$

On en déduit donc que

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \sigma \ + f) \ v \, dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

ce qui implique, en vertu du Corollaire (1.3.3), que $-\operatorname{div} \sigma = f$ dans. Par conséquent $\operatorname{div} \sigma = \Delta u$ appartient à $L^2(\Omega)$ (rappelons que $\operatorname{div} \nabla = \Delta$), et on retrouve l'équation (2.6). On retrouve la condition aux limites (2.7) comme précédemment si l'ouvert Ω est régulier de classe C^1. Si Ω n'est pas régulier, alors on ne peut pas invoquer le Théorème de trace (1.10) pour obtenir (2.7). Néanmoins, le simple fait d'appartenir à $H_0^1(\Omega)$ est une généralisation de la condition aux limites de Dirichlet pour un ouvert non régulier, et on continuera à écrire formellement que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.
En conclusion nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ dela formulation variationnelle* (2.5)*. De plus, u vérifie*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \textit{ presque partout dans } \Omega, \\ u &= 0 \textit{ presque partout sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On appelle la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (2.5) solution variationnelle du problème aux limites (2.1). Par un raccourci de langage bien commode, on dira que l'unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (2.5) est l'unique solution du problème aux limites (2.1).

Cette appellation est bien sûr justifiée par le Théorème(2.1). La solution de (2.1), que nous venons d'obtenir, ne vérifie a priori l'équation et la condition aux limites que dans un sens “faible”, c'est-à-dire presque partout (ou même pire pour la condition aux limites si l'ouvert n'est pas régulier). On parle alors de solution faible par opposition aux solutions fortes qu'on aurait pu espérer obtenir dans une formulation classique de (2.1). De même, on appelle parfois la formulation variationnelle formulation faible de l'équation.

Remarque 4 *En fait, la solution faible peut être une solution forte si le second membre f est plus régulier. Autrement dit, l'équation et la condition aux limitesde* (2.1) *peuvent être vérifiées en un sens classique, c'est-à-dire pour tout $x \in \Omega$, et tout $x \in \partial\Omega$, respectivement. C'est ce qu'on appelle un résultat de régularité pour la solution.*

Pour que le problème aux limites (2.1) soit bien posé (au sens de Hadamard, il faut en plus de l'existence et de l'unicité de sa solution, montrer que la solution dépend continûment des données. C'est une conséquence immédiate du Théorème de Lax-Milgram (1.3.1) mais nous en donnons un nouvel énoncé et une nouvelle démonstration.

Proposition 2.1.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et soit $f \in L^2(\Omega)$ L'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle de* (2.1) *est linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier,il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega).} \tag{2.9}$$

Remarque 5 *L'inégalité* (2.9) *est ce qu'on appelle une estimation d'énergie. Elle garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée. Les estimations d'énergie sont très naturelles d'un point de vue physique et très utiles d'un point de vue mathématique.*

Preuve: *La linéarité de $f \to u$ est évidente. Pour obtenir la continuité on prend $v = u$ dans la formulation variationnelle* (2.5)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega fu \; dx$$

On majore le terme de droite à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on minore celui de gauche par la coercivité de la forme bilinéaire

$$v \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où l'on déduit le résultat. ■

Nous avons déjà dit que la formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique (c'est, par exemple, le principe des travaux virtuels en mécanique). En fait, la solution de la formulation variationnelle(2.5) réalise le minimum d'une énergie (très naturelle en physique ou en mécanique).

Proposition 2.1.2 *Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $H_0^1(\Omega)$ par*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \; - \int_\Omega fv \; dx.$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution unique de la formulation variationnelle (2.5). *Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que*

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1} \; J(v)$$

Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (2.5)

Exemple 2.1.1 *A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & x \in \Omega \\ \quad u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

où Ω est un ouvert quelconque de l'espace $\mathbb{R}^N$, et $f \in L^2(\Omega)$. Montrer en particulier que l'ajout d'un terme d'ordre zéro au Laplacien permet de ne pas avoir besoin de l'hypothèst que Ω est borné.
1èr étape. *Recherche de la formulation variationnelle.*
On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v nulle sur $\partial\Omega$. Par intégration par partie, on obtient que

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v \; + uv)\, dx = \int_\Omega fv \; dx.$$

Afin que cette expression ait un sens, il sufit de choisir u et v dans $H_0^1(\Omega)$. Le problème variationnel associée à l'équation (2.5) *consiste donc a déterminer $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$a(u,v) = L\,(v) \quad \textit{pour tout} \;\; v \in H_0^1(\Omega),$$

2ème étape. *Résolution du problème variationnel.*
La continuit e de $a(.,.)$ et $L(,)$est evidente de mme que la coercivité de la forme bilinéaire $a(,)$. En effet,

$$a\,(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}\,.$$

Les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont réunies. Il existe donc une solution unique au problème variationnel. On vérifie enfin en effectuant les meme integrations par partie que lors de la première étape que ∇u est un élément de $H(div)$ et que $-\Delta u + u = f$ en tant qu' éléments de $L^2(\Omega)$ et donc presque partout dans Ω. Enfin, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, et que Ω est un ouvert régulier, la trace de u est bien définie et $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$.

Exemple 2.1.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant de convection diffusion*

$$\begin{cases} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et V est une fonction régulière à valeurs vectorielles telle que $divV = 0$ dans Ω.

1èr étape. *Recherche de la formulation variationnelle.*

On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v nulle sur $\partial\Omega$. Par intégration par partie, on obtient la formulation variationnelle suivante :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \textit{pour tout} \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + (V(x) \cdot \nabla u(x))\, v(x) \ dx \\ L(v) &= \int_\Omega f(x) v(x) \ dx \end{aligned}$$

2 ème étape. *Résolution du problème variationnel.*

Affin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à

vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(,)$.

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) + (V(x) \cdot \nabla u(x))\, u(x) \ dx \ .$$

La diveregnce de V étant nulle, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega (V(x) \cdot \nabla u(x))\, u(x) \ dx &= \int_\Omega \left(\operatorname{div}(u\,\mathrm{V})\, u - \operatorname{div}(V)\, |u|^2\right) dx \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(u\,\mathrm{V})\, u dx. \end{aligned}$$

Par intégration par partie et comme $u = 0$, il vient

$$\int_{\Omega} (V(x) \cdot \nabla u(x))\, u(x)\ dx \ = - \int_{\Omega} (V(x) \cdot \nabla u(x))\, u(x)\ dx.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} (V(x) \cdot \nabla u(x))\, u(x)\ dx \ = 0$$

et

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

La coercivité de $a(,)$*se déduit alors de l'inégalit e de Poincaré.*
<u>3 ème Etape</u>*. Equivalence avec l'équation.*

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x)\, v(x) - (V(x) \nabla u(x)\, v(x))\, dx.$$

Ainsi, en majorant le membre de droite,

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx \right| \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|V\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

et ∇u *est un élément de* $H(div)$*. On en déduit donc par intégration par partie que*

$$-\Delta u + V \cdot \nabla u = f \quad \textit{en tant qu'éléments de } L^2(\Omega).$$

Enfin, comme $u \in H^1_0(\Omega)$, on a $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Chapitre 3

Problèmes elliptiques non-linéaires

Sommaire

3.1 Le Lemme du Col

3.1.1 Application du lemme du col

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solvabilité du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \Delta u = g(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, et g une fonction vérifier les hypothèses suivantes

1

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = 0 \tag{3.2}$$

En particulier $g(0) = 0$ et g dérivable en 0 de dérivée nulle.

2 Il existe $2 < p \leq 2^*$ tel que :

$$|g(t)| \leq (1 + |t|^{p-1}), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

où $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev de l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$

3 Soit, pour $t \in \mathbb{R}, G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Il existe $q > 2$, et $R_0 > 0$ tels que :

$$0 < qG(t) < g(t)t \ \text{ si } \ |t| \geq R_0 \tag{3.4}$$

L'hypothèse (3.3) exprime le fait qu' à l'infini. L'hypothèse (3.4) en revenche montre (d'une certaine façon) que g croît au moins aussi vite qu'une fonction de la forme

$$t \rightarrow C\,|t|^{q-2}\,t; \quad C \quad \text{constante et} \quad 2 < q < 2^*.$$

Proposition 3.1.1 *Les solutions* $u \in H_0^1\ (\Omega)$ *sont les points critiques de la fonctionnelle* F *, de classe* C^1 *sur* $H_0^1\ (\Omega)$ *définie par:*

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Afin de pouvoir appliquer les théorèmes du calcul des variations, il est tout d'abord important de se demander comment se comportent les suites de Palais-Smale de F*.*

Proposition 3.1.2 *Les suites de Palais-Smale de* F *sont bornées dans* H_0^1 (Ω) *.*

Preuve: *Soit* u_n *une suite de Palais-Smale de* F*, i.e telle qu'il existe* $C > 0$ *vérifiant*

$$|F(u_n)| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

$$|dF(u_n)| \longrightarrow 0 \qquad \textit{dans } H^{-1}, \textit{lorsque} \ \ n \longrightarrow +\infty \tag{3.6}$$

La relation (3.6)*signifie que :*

$$\Delta u_n + g(u_n) \rightarrow 0, \textit{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \tag{3.7}$$

En multipliant par u_n *et en intégrant on trouve :*

$$\langle dF(u_n), u_n\rangle = \langle -\Delta u_n - g(u_n), u_n\rangle$$

$$= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega g(u_n)u_n$$

Par (3.6)

$$\langle dF(u_n), u_n\rangle = o(1)\,\|u_n\|_{H_0^1}\,, \textit{où} \lim_{n\longrightarrow+\infty} o(1) = 0$$

et par (3.4)

$$\int_\Omega g(u_n)u_n \geq q\int_\Omega G(u_n).$$

On a donc

$$-\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + q\int_\Omega G(u_n) \leq o(1)\,\|u_n\|_{H_0^1}\,.$$

Par ailleurs par (3.5) *on a*

$$\left|\frac{q}{2}\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2 - q\int_{\Omega}G(u_n)\right| \leq C_q.$$

En ajoutant ces deux derniéres relations, le terme $q\int_{\Omega}G(u_n)$ *disparaît et on obtient*

$$\left(\frac{q}{2}-1\right)\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2 \leq C_q + o(1)\left\|u_n\right\|_{H_0^1}.$$

Comme $q > 2$, $\left(\frac{q}{2}-1\right) > 0$, *et il résulte de l'inégalité ci-dessus que:*

$$\left\|u_n\right\|_{H_0^1} = \left(\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

reste borné lorsque $n \longrightarrow +\infty$. ■

Nous sommes maintenant prêts pour etudier la condition de Palais-Smale.

Théorème 3.1.1 *Si* $p < 2^*$ *alors* F *vérifie la condition de Palais-Smale.*

Preuve: *Soit* u_n *une suite de Palais-Smale. D'aprés la proposition* (3.1.2), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$. *On peut donc extraire une suite qui converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *vers un élément* $u \in H_0^1(\Omega)$, *i.e*

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } H_0^1(\Omega)(\text{pour une sous-suite, encore notée } u_n)$$

Afin de prouver le théorème, montrons que si $u_n \longrightarrow u$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *et* $p < 2$, *alors*

$$g(u_n)u_n \longrightarrow g(u)u \text{ fortement dans } L^1(\Omega) \tag{3.8}$$

En effet par injection compacte de Sobolev

$$u_n \longrightarrow u \text{ fort dans } L^p(\Omega)(p < 2^*)$$

Par ailleurs, $\forall\varphi \in C_0^1(\Omega)$ *on a par* (3.6)

$$\int_{\Omega}\nabla u_n\nabla\varphi = \int_{\Omega}g(u_n)\cdot\varphi + o(1)\left\|\varphi\right\|_{H_0^1} \tag{3.9}$$

On peut passer à la limite dans (3.9) *pour conclure que*

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla\varphi = \int_{\Omega}g(u)\varphi, \forall\varphi \in C_0^1(\Omega) \tag{3.10}$$

et donc

$$-\Delta u = g(u) \text{ dans } \Omega \tag{3.11}$$

En fait, on peut prendre $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *dans* (3.9) *et* (3.10)*. En prenant* $\varphi = u_n$ *(res.*$\varphi = u$*) dans* (3.9) *(resp.* (3.10)*), on a*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega g(u_n)u_n + o(1)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega g(u)u$$

Par (3.8)*il vient*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2$$

et donc $u_n \longrightarrow u$ *fortement dans* $H_0^1(\Omega)$. ■

Remarque 3.1.1 *Dans l'énoncé du théorème* (3.1.1)*, le cas* $p = 2^*$ *est exclu. C'est l'assertion* (3.8)*qui n'est plus valable, car l'injection* $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ *n'est pas compacte.*
En fait, dans le cas où

$$g(t) = |t|^{2^*-2}\, t$$

nous montrerons que la condition de Palais-Smale n'est pas satisfaite. Nous ferons en particulier une étude détaillée du mécanisme de perte de compacité dans ce cas-là.
Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un résultat d'existence.

Théorème 3.1.2 *Si* g *vérifie* (3.2)*, pour* $p < 2^*$ *et* (3.4) *alors il existe une solution positive* u^+*, non nulle, dans* $H_0^1(\Omega)$ *à l'équation* (3.1)*.*

Preuve: *Nous allons appliquer le lemme du col (théorème 10.1.1) à la fonctionnelle* F*. Il s'agit alors de trouver une "cuvette", et un point bas.*
1**^{ère} **etape *Existence d'une cuvette.*
Il est clair, comme $g(0) = 0$*, que la fonction nulle* $u = 0$ *est solution de l'équation et donc point critique. Afin de voir s'il y a une cuvette autour de* 0*, nous étudions le développement à l'ordre* 2 *autour de* 0*, de la fonctionnelle* F *(en fonction de la norme* $\|\|_{H_0^1}$ *).*
Comme $\frac{g(t)}{t} \longrightarrow 0$ *lorsque* $t \longrightarrow 0$*, on vérifie par* (3.2) *et* (3.3) *que, pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une constante* $C(\varepsilon)$ *telle que*

$$|g(t)| \leq \varepsilon\, |t| + C(\varepsilon)\, |t|^{p-1}$$

d'où il résulte que

$$|G(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\, |t|^2 + \frac{C(\varepsilon)}{p}\, |t|^p$$

On a donc

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\, \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\, \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p}C(\varepsilon)\, \|u\|_{L^p}^p$$

Comme $2 < p < 2^*$ *, on a par injection de Sobolev*

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{H_0^1}$$

et par inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon C_2 \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{p} C_p C(\varepsilon) \|u\|_{H_0^1}^p \\ &\geq \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon C_2\right) - \frac{1}{p} C_p C(\varepsilon) \|u\|_{H_0^1}^{p-2}\right] \|u\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir ε *tel que*

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} C_2 \varepsilon = \frac{1}{4}$$

Comme $p > 2$*, il existe* $\rho_0 > 0$ *tel que si* $\|u\| < \rho_0$*, alors:*

$$\frac{1}{p} C_p C(\varepsilon) \|u\|_{H_0^1}^{p-2} \leq \frac{1}{S}$$

Ainsi

$$F(u) \geq \frac{1}{S} \|u\|_{H_0^1}^2, \ \ si \ \ \|u\| \leq \rho_0$$

En particulier, si $\|u\| = \rho_0$,

$$F(u) \geq \frac{1}{S}\rho_0^2 = \alpha$$

*Cela établit le point **1** du lemme du col.*
2ème etape *Existence du point bas.*
Nous allons établir que F *n'est pas minorée, ce qui fournit automatiquement le point bas* u_1.
Montrons tout d'abord que G *croît au moins aussi vite que* $|t|^q$*, c'est-à-dire qu'il existe* $C > 0$ *tel que*

$$|G(t)| \geq C \ \ |t|^q \tag{3.12}$$

Cela résulte en fait de l'hypothèse (3.4)*. En effet:*

$$0 < qG(t) \leq G(t)t \quad si \ \ |t| \geq R_0$$

qui implique

$$\frac{d}{dt}(|t|^{-q} G(t) \ \ \geq 0 \ \ si \ \ |t| \geq R_0$$

(3.12)*en découle aisément.*
On peut alors utiliser un argument d'homogènéité. On a, pour $u \in H_0^1$,

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G(\lambda v) \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - |\lambda|^q \int_\Omega |u|^q \end{aligned}$$

Comme $q < 2$, *si* $v \neq 0$, *on voit que*

$$\lim_{|\lambda| \longrightarrow +\infty} F(\lambda v) = -\infty$$

Il suffit alors de choisir un vecteur v *non nul, quelconque, et de poser* $u_1 = \lambda v$, *pour* λ *assez grand.*
***3**^{ème} **étape** Application du lemme du col.*
Par le théorème (3.1.1), *F satisfait (P.S). Nous venons de vérifier que les hypothèses **1, 2** du théorème 10.1.1 sont satisfaites. On peut donc appliquer ce résultat, qui nous dit que* $\beta \geq \alpha > 0$ *est une valeur critique. Nous avons donc obtenu une solution non triviale de l'équation* (3.1). ■

Conclusion

Une étude variationnelle de certains problèmes faisant intervenir l'opérateur Laplacien a été présentée dans cette thèse. Nous avons été essentiellement concernées par l'étude de l' existence et la multiplicité de solutions de problème de Dirichlet [8]. Les résultats ont été établis par minimisation variationnelle en utilisant le Théorème du Lax-Milgrame.
Dans une autre direction nous avons abordé un problème elliptiques non-linéaires. Nous avons déterminé des conditions suffisantes permettant l'existence de solutions en utilisant le lemme du col.

Bibliographie

[1] G. Allaire, F. Alouges, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles. Polycopié du cours. MAP 431, école Polytechnique, 16 janvier (2015) .

[2] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. 14(1973), $p.349 - 381$.

[3] D. Arcoya, L. Boccardo, Some remarks on critical point theory for non-differentiable functionals. NoDEA Nonlinear Differential Equations and Appl. 6(1999), $p.\ 79 - 100$.

[4] H. Brezis, E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc. Amer. Math. Soc. 88(1983), $p.\ 486 - 490$.

[5] H. Brezis, J. L. Vazquez, Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. Rev. Univ. Complutense. 10(1997), $p.\ 443 - 469$.

[6] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, (1983) .

[7] A. ERN, J. LGUERMOND, Eléments finis : théorie applications, mise en oeuvre, Mathématiques et Applications 36, Springer, Paris (2002).

[8] O. Kavian, Introductiona la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, (1983).

[9] A. Munnier., Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan. $2007 - 2008$.

[10] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS. Reg Conf ser. Math. 65MS, Providence, R.I, (1986).

[11] M. Struve, Variationnel methods applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlags. (1999) .