République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année univ.: 2019/2020

Problèmes aux limites pour certaines equations différentielles

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Abdelli Marwa-Yassamina [1]

Sous la direction de

Pr. Abbas **S**aïd

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

M. Bennihi Omar	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. Abbas Saïd	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mlle. Mostefai Fatima-Zohra	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mlle. Mekkaoui Imane	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : marwaabdelliyassamina@gmail.com

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à **ALLAH** qui m'a donné la force et le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis sur mon chemin les bonnes personnes et m'a confiée aux bonnes mains.

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur S. Abbas, mon promoteur, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité.

Je remercie aussi les professeurs de mathématiques et à tout ce qui m'ait enseigné au long de ma vie scolaire.

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail à :

Mes parents, qui ne m'ont jamais laissé tomber dans toutes les circonstances.

Mes frères que j'aime beaucoup.

Tous mes amis.

Monsieur S. Abbas qui a dirigé ce travail.

Tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction

Le calcul différentiel est un outil dont tout mathématicien, quelle que soit spécialité, doit en posséder les rudiments.

Pour celui qui ne les a rencontrées qu'au lycée et en première année d'université, les équations différentielles sont généralement synonymes de calcul très peu conceptuels aboutissant à des expressions algébriques ou analytiques constituant la " solution générale " de l'équation considérée. Au moment d'abord un enseignement spécifique d'équations différentielles, il est donc fondé à croire (et à redouter) que ledit enseignement va consister à lui inculque de nouvelles méthodes (dites de résolution par quadrature) qui lui permettront de déterminer les solutions de classes de plus en plus larges d'équations différentielles.

Il convient donc d'unique tout de suite que très rares sont les équations différentielles dont les solutions peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles telles que $\sin x$ ou $\log x$, ou de primitive (= quadratures) de telles fonctions. Aussi sera-t-on intéressé à formuler des théorèmes d'existence et d'unicité de solution : l'unique solution constitue alors une (nouvelle) fonction dont on peut envisager d'étudier les propriétés (périodicité, monotonie, comportement à l'infini) aussi bien que les fonctions trigonométriques par exemple.

Un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution prenant des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.
Contrairement au problème de Cauchy, où une ou plusieurs conditions en un même endroit sont imposées, auquel le théorème de Cauchy-Lipschitz apporte une réponse générale, les problèmes aux limites sont souvent des problèmes difficiles, et dont la résolution peut à

chaque fois conduire à des considérations différentes.

l'objectif de ce travail consiste a étudier un ensemble de résultats concernant les problèmes aux limites associées à certaines équations différentielles du second ordre.

Ce mémoire comporte trois chapitres organisés comme suit :

Tout d'abord de ce premier chapitre intitulé " Préliminaires" est d'introduire quelque notions et résultats utilisés dans les chapitres suivants (Quelques résultats sur les E.D.O. linéaires du second ordre, Définition d'un problème avec condition initiale (probléme de Cauchy), Définition du problèmes aux limites avec des exemples simples, Définition de l'action de Green avec des exemples simples,...) qui nous permettra d'étudier les problèmes aux limites pour les EDO et EDP.

Dans le deuxième chapitre est consacré aux problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires. Nous commençons par discuter les différents types de conditions aux bords, des conditions qui ne sont pas les mêmes que celles intervenant dans le problème de Cauchy et qui ont des propriétés particulières (l'alternative de Fredholm). Ensuite, nous donnons la définition ainsi que les propriétés d'une fonction qui joue un rôle fondamental dans la représentation des solutions de tels problèmes. Cette fonction est appelée fonction de Green qui porte le nom du mathématicien anglais George Green (1793-1841). Nous présentons aussi des méthodes pratiques permettant le calcul de cette fonction. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude d'une EDO associée à des conditions aux bords linéaires séparées.

Dans le dernier chapitre nous étudions certains résultats et théorèmes sur l'existence et l'unicité des solutions de problèmes aux limites pour les EDP. La premiere section traite de l'équation des ondes. Le deuxième chapitre traite l'équation de la chaleur unidimensionnelle (Diffusion). La derniere section traite de l'équation bidimensionnelle l'équation de Laplace et l'équation de Poisson.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, des définitions et certaines lemmes préliminaires qui seront utilisées dans le reste de ce mémoire.

1.1 Notations et Définitions

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. *Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. On dira que la suite $(x_n)_n$ converge vers un élément $a \in E$, si :*

$$\forall \; \varepsilon > 0, \exists \; N_0 \in \mathbb{N} : \forall \; n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Rightarrow \| \; x_n - a \; \| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.1.2. *La suite $(x_n)_n$ est dite de Cauchy, si :*

$$\forall \; \varepsilon > 0, \exists \; N_0 \in \mathbb{N} : \forall \, p, q \in \mathbb{N}, \;\; p, q \geqslant N_0 \Rightarrow \| \; x_p - x_q \; \| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.1.3. *On dit qu'un espace métrique $(E, \| \,.\, \|)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.*

Définition 1.1.4. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Exemples

1 - Pour tout ensemble non vide X, L'ensemble $B(X, \mathbb{R})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

2 - $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ est complet.

3 - $B(A, F)$ l'espace des applications bornées de $A \to F$ où A est un ensemble muni de la norme du sup :

$$\| f \|_B = \sup_{x \in A} | f(x) |_F$$

1.1.2 Equations différentielles

Définition 1.1.5. *Une équation différentielle est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. C'est un cas particulier d'équation fonctionnelle.*

On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

1) les équations différentielles ordinaires (EDO) où la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable.

2) les équations différentielles partielles, plutôt appelées équations aux dérivées partielles (EDP), où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Définition 1.1.6. *Une équation différentielle est une équation contenant une ou des dérivées d'une fonction à une ou plusieurs variables.*

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation.

Une équation différentielle linéaire homogène est une équation différentielle linéaire dans laquelle $F(x) = 0$. On dit aussi qu'elle est « sans second membre ».

Exemple

- $x^2 y'' + 2 = 5x \quad$ avec $\quad y(1) = 3 \quad y'(1) = -1$
- $y'' + xy' - y = 0$

- $y'' + 2y' + 4y = cosx$

Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \quad a_0(x) \neq 0.$$

telle que $a_i = \overline{0, \ldots, n}$ est une composante d'équation différentielle d'ordre n.

1.2 Quelques résultats sur les E.D.O. linéaires du second ordre

(Voir : [1] **page** 35, [2],[7]**).**

Soit l'équation différentielle du second ordre à coefficient variable suivante :

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in [a, b], \tag{1.1}$$

où $p(x) > 0,\ q(x)\ et\ r(x)$ sont continues sur $[a, b]$.

Théorème 1.2.1. *Il existent exactement deux solutions y_1 et y_2 de l'équation* (1.1) *qui sont linéairement indépendantes sur $[a, b]$, i.e. il n'existe pas une constante c tel que $y_1(x) = cy_2(x),\ \forall x \in [a, b]$.*

Théorème 1.2.2. *Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation* (1.1)*. Alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $[a, b]$ si et seulement si leurs Wronskien défini par*

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 1.2.3. *(**l'identité d'Abel ou formule d'ostrogradsky-Liouville**) Pour tout $x \in [a, b]$, on a*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{p(t)} dt\right),\ x_0 \in [a, b].$$

Par conséquent, si le Wronskien s'annule en un point x_0 de $[a, b]$ alors il s'annule sur tout l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 1.2.4. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1.1), c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires alors $c_1y_1 + c_2y_2$ est aussi solution de l'équation (1.1). De plus si y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes alors toute solution y de (1.1) peut s'écrire sous la forme*

$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x),\ x \in [a, b]$ et k_1, k_2 sont des constantes.

Remarque 1.2.1. *Si on connait une solution y1 de l'equation (1.1) alors on peut déterminer une solution y_2 telles que, y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes ; en utilisant la méthode de la variation de la constante. On obtient une solution de la forme*

$$y_2(x) = y_1(x) \int^{x} \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(\int^{t} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right) dt \tag{1.2}$$

Exemple 1.2.1. *Soit l'équation*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ x \in \mathbb{R}^*$$

Il est facile de vérifier que $y_1(x) = x^2$ est une solution de l'équation donnée et d'après la formule (1.2) sa deuxième solution est

$$y_2(x) = x^2 \int_a^x \frac{1}{t^4} \exp\left(-\int_a^t \frac{(-2s)}{s^2} ds\right) dt = \frac{x^2}{a^2} \int_a^x \frac{1}{t^4} t^2 dt = -\frac{1}{a^2}x + \frac{x^2}{a^3},\ a > 0$$

Remarque 1.2.2. *Considérons l'équation*

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x),\ x \in [a, b]. \tag{1.3}$$

Soient y_1 *et* y_2 *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* (1.1). *En utilisant de variation des constantes on trouve que la fonction* y_p *définie par*

$$y_p(x) = \int^x H(x,t)\frac{f(t)}{p(t)}dt$$

où

$$H(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}$$

est une solution particulière de l'équation (1.3), *donc la solution de cette dernière est*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_g(x) + y_p(x) \\ &= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \textstyle\int^x H(x,t)\frac{f(t)}{p(t)}dt. \end{aligned}$$

Formule de dérivation d'une intégrale

Si u, v *et* f des fonctions dérivables, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = v'(x)f(x,x) - u'(x)f(x,x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$$

Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Théorème 1.2.5. *Soit* X *un espace métrique compact,* Y *un espace de Banach et* $H \subset C(X,Y)$ *un sous-espace muni de la norme* sup. *Alors* H *est relativement compact si et seulement si :*

1. H *est uniformément borné, i.e.*

   $\forall x \in X$, *l'ensemble* $\{f(x) : f \in H\}$ *est borné dans* Y .

2. H *est équicontinu, i.e.*

   $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \upsilon(x), \forall y \in X; y \in V \Longrightarrow \| f(y) - f(x) \|_Y \leq \varepsilon, \forall f \in H.$

Dans le cas où $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ *et* $Y = \mathbb{R}$, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2.6. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ *une suite vérifiant :*

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément borné,i.e.*$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \| f_n \| \leq c$.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équicontinue, i.e.* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x, y \in [a,b]$:

   $\mid x - y \mid \leq \delta \Longrightarrow \mid f_n(x) - f_n(y) \mid \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente. (i.e.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est relativement compacte).*

Corollaire 1.2.1. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $C^{k+1}([a,b],\mathbb{R}^n)$*, i.e.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(f')_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bornées dans* $C([a,b],\mathbb{R}^n)$*, indépendamment de n, alors elle admet une sous-suite convergente dans* $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$*.*

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.2.7. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions appartenant à* $L^1(\Omega)$ *avec* $\Omega \in \mathbb{R}$*. On suppose que :*

1. $(f_n)(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω *;*
2. *Il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \mid f_n(x) \mid \leq g(x)$ *p.p sur* Ω*. Alors,*

   $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\| f_n - f \|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.2.8. *Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E. Supposons que* $f : C \to C$ *une application continue et compacte. Alors f admet un point fixe dans C.*

Théorème de contraction de Banach

Théorème 1.2.9. ***(Principe de contraction de Banach,** 1992**)** Soient* (X,d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une application contractante. Alors f admet un unique point fixe* $y \in X$*.*

1.3 Probléme de Cauchy

En analyse, un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Pour une condition initiale adaptée à la forme de l'équation différentielle, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 1, de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$, la condition initiale adaptée sera la donnée d'une valeur initiale pour la fonction inconnue y, et prendra la forme d'une équation $y(t_0) = y_0$. Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz exigent une certaine régularité de la fonction f.

Dans le cas des équations d'ordre supérieur, la condition initiale portera sur une hypersurface du domaine de définition : par exemple, dans le cas réel, les conditions se porteront non seulement sur une valeur initiale pour y, mais aussi pour toutes ses dérivées jusqu'à la dérivée $n-1^e$ pour une équation d'ordre n. Ainsi, pour une équation d'ordre 2 de la forme $y''(t) = f(t, y'(t), y(t))$ seront imposées la valeur initiale de y sous la forme d'une équation $y(t_0) = y_0$, mais aussi la valeur initiale de sa dérivée sous la forme d'une équation $y'(t_0) = y_{0,1}$. Ceci ne généralise toutefois pas réellement le point précédent dans le sens que toute équation d'ordre supérieur se ramène à une équation d'ordre 1 en prenant pour inconnue une fonction à valeurs vectorielles.

Des problèmes analogues, qui ne font toutefois pas l'objet d'une réponse aussi générale que le problème de Cauchy, sont les problèmes aux limites.

Définition 1.3.1. *Soit $f(t, x)$ une application continue de $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $x(t) \in C^1([0, T] \to \mathbb{R}^n)$.*

On appelle problème de Cauchy ou à valeurs initiales le problème différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Les hypothèses peuvent être adaptée à des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Énonçons le théorème fondamental d'existence locale d'une solution de (1.4) sous une forme simplifiée.

Théorème 1.3.1. ***(Cauchy-Lipschitz)*** *Si $f(t,x)$ est une fonction continue par rapport à (t,x) et C^1 par rapport à x, alors le problème (1.4) admet au plus une solution et il existe $\theta \leqslant T$ tel qu'il existe une solution sur $[0,\theta[$.*

On peut compléter cet énoncé par la proposition :

Proposition 1.3.1. *Si la solution $x(t)$ de (1.4) est bornée sur $[0,\theta]$, cette solution peut être prolongée sur $[0,\theta'[$ avec $\theta' > \theta$. (intuitivement, ou bien la solution explose en θ ou bien elle peut être prolongée) on en déduit le théorème :*

Théorème 1.3.2. *Si $f(t,x)$ est continue par rapport à $(t,x), C^1$ par rapport à x, et à croissance au plus linéaire en $x(i.e.; \exists M, c : \|f(t,x)\| \leqslant M\|x\|+c)$, alors le problème (1.4) admet une solution et une seule sur $[0,T]$.*

On montre également que la solution de (1.4) dépend continûment de x_0 ainsi que de tout paramètre par rapport auquel $f(t,x)$ est continu.
Autrement dit la solution de(1.4) est stable vis à vis des données du problème. La solution "générale" d'un système différentiel dans R_n existe donc localement sous des hypothèses très faibles et elle dépend de n paramètres que l'on peut choisir comme les valeurs initiales d'un problème de Cauchy. Le deuxième théorème de cette section est un outil puissant pour montrer l'existence globale de la solution. Nous n'aurons pas de résultat aussi général pour les équations aux dérivées partielles.

1.4 Les problèmes aux limites

Quelques définitions

On note $J(v)$ une fonction définie sur un espace normé V , de norme $\|v\|$.

Définition 1.4.1. *La fonction $J(v)$ est coercive si*

$$\forall v \in V \qquad \lim_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$$

Définition 1.4.2. *La fonction $J(v)$ est convexe si*

$$\forall u, v \in V,\ \forall t,\ t \in [0,1] \Longrightarrow J(tu + (1-t)v) \leqslant tJ(u) + (1-t)J(v)$$

Définition 1.4.3. *La fonction $J(v)$ est strictement convexe si*

$$\forall u, v \in V,\ \forall t \in [0,1], J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v)$$

Définition 1.4.4. *On suppose que V est un espace préhilbertien (c'est à dire muni d'un produit scalaire).*
Une application $f(u)$ de V dans V est monotone (resp. uniformément monotone) si

$$< f(v) - f(u), v - u > \geqslant 0$$

(resp.s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$(f(v) - f(u), v - u) \geqslant \alpha(v - u, v - u)$$

La monotonie de la différentielle caractérise les fonctions convexes :

Théorème 1.4.1. *Sur un espace de Hilbert une fonction $J(v)$ différentiable est convexe si et seulement si $(fv) = \nabla J(v)$ est monotone.*

Les problèmes aux limites

Les problèmes qui nous intéressent ici modélisent l'état d'un système représenté par p fonction $u_i(x)$ qui dépendent de la position d'un point x. L'état du système est déterminé par un système d'équations aux dérivées partielles, et par les échanges éventuels du système avec l'extérieur. Traduisons cela en termes mathématiques : soit un domaine de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ ; on note $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal unitaire extérieur en un point du bord, $\overrightarrow{t}$ le vecteur tangent.

Problème aux limites pour une équation du second ordre à une inconnue :
Commençons par le cas particulier d'une équation du second ordre à une fonction inconnue. Le problème de référence est le problème de Poisson . L'inconnue est une fonction $u(x)$ de n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ et, bien sûr, on aura normalement $n = 2$ *ou* $n = 3$! Nous utilisons parfois la notation u_{xi}, u_{xixj}... pour les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ Nous écrivons l'équation aux dérivées partielles générale du second ordre sous la forme

$$f(u, ..., u_{xi}, ..., u_{xixj}, ...) = 0 \tag{1.5}$$

Nous définissons un problème aux limites sous la forme

$$\begin{cases} f(u, ..., u_{xi}, ..., u_{xixj}, ...) = 0 \quad si \quad x \in \Omega \\ g(u, ..., u_{xi}, ...) = 0 \quad si \quad x \in \Gamma \end{cases} \tag{1.6}$$

où $g(u, ..., u_{xi}, ...)$ est une fonction connue. La condition sur le bord la plus générale fait intervenir toutes les dérivées mais elle s'exprime souvent en fonction de la dérivée normale d'une fonction auxiliaire. En pratique l'expression de la condition aux limites peut différer entre les parties du bord. Définissons certaines conditions aux limites particulières :

Définition 1.4.5. *Les conditions de Dirichlet sont les conditions aux limites du type* $u = u_0$.
Les conditions de Neumann sont les conditions aux limites du type $k\dfrac{\partial u}{\partial n} = g_0$ *o* g_0 *est fixé.*
Les conditions mixte ou de Robin sont les conditions aux limites du type $k\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_0$.

Si les constantes u_0 et g_0 sont nulles les conditions aux limites sont dites homogènes.

1.5 Fonction de Green.

Les fonctions de Green constituent une méthode assez général de résolution d'équation différentielles, ou de transformation d'équations différentielles en équations intégrales. Elles sont extrêmement utilisées en mécanique quantique, où on les appelle des propagateurs, et en théorie des processus stochastiques. Nous n'aborderons ce sujet que très légèrement ici, juste pour rappeler les grands principes de la méthode. Supposons que nous voulons résoudre l'équation différentielle

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t) \tag{1.7}$$

avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = \tilde{x}_0$. Ceci est par exemple l'équation du mouvement d'une particule soumise à une force $f(t)$. a *et* b peuvent être fonction du temps. Pour résoudre cette équation différentielle, il nous faut trouver la solution de l'équation homogène, et lui ajouter une solution particulière. Nous cherchons justement une solution particulière. Supposons que nous savons calculer la réponse de la particule à une force impulsionnelle (genre δ de Dirac) appliquée au temps t'. Saurions nous calculer la réponse de la particule à une force générale $f(t)$? La réponse est oui : la force $f(t)$ peut être vue comme une superposition d'impulsions appliquées à différent temps. Il suffit donc de superposer les réponses aux divers impulsions pour obtenir la réponse à la force $f(t)$. Plus exactement, on peut écrire

$$f(t) = \int_0^\infty f(t')\delta(t-t')dt' \tag{1.8}$$

ce qui veut dire que la force $f(t)$ est la superposition d'impulsions appliquées au temps t', avec le poids $f(t')$. Revenons à notre équation différentielle, et appelons $G_{t'}(t)$ la réponse à l'impulsion appliquée au temps t'. Comme mettre les indices est un peu lourd comme notation, nous noterons cette fonction plutôt $G(t,t')$. De par sa définition, elle doit satisfaire à

$$a\frac{d^2G(t,t')}{dt^2}+b\frac{dG(t,t')}{dt}+cG(t,t')=\delta(t-t')$$

Notez que toutes les dérivations sont faites par rapport à t. Multiplions les deux côtés de l'équation par $f(t')$. Comme $f(t')$ ne dépend pas de t, on peut la rentrer à l'intérieur de l'opérateur différentiel, et écrire :

$$a\frac{d^2[f(t')G(t,t')]}{dt^2}+b\frac{d[f(t')G(t,t')]}{dt}+cf(t')G(t,t')=\delta(t-t')f(t')$$

Intégrons maintenant les deux cotés par rapport à t'. Comme la dérivation est par rapport à t, nous pouvons (jetant par dessus bord la décence et l'exigence à priori de la convergence uniforme) échanger la dérivation et l'intégration.

$$a\frac{d^2}{dt^2}\int_0^\infty f(t')G(t,t')dt'+b\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(t')G(t,t')dt'+c\int_0^\infty f(t')G(t,t')dt'=\int_0^\infty \delta(t-t')f(t')dt' \tag{1.9}$$

Nous remarquons, d'après (1.8), que le côté droit de l'équation ci-dessus est juste $f(t)$. Appelons

$$y(t)=\int_0^\infty f(t')G(t,t')dt' \tag{1.10}$$

et nous voyons, d'après (1.9), que $y(t)$ est solution de l'équation (1.7) ! Remarquez l'élégance,nous devons calculer une seule fois la fonction de green pour une équation différentielle. Ensuite, quelque soit le membre de droite, la solution s'obtient par une simple intégration. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit maintenant

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+y(t)$$

où C_1 *et* C_2 sont choisit pour satisfaire les conditions initiales.

Nous avons occulté pas mal de point important. Voyons quelques exemples. Soit l'équation

$$dx/dt+\alpha x=f(t)$$

La fonction de Green est la solution de

$$dG(t,t')/dt + \alpha G(t,t') = \delta(t-t')$$

Prenons la transformée de Fourier des deux côtés de l'équation (par rapport à t bien sûr)

$$\tilde{G}(\omega,t') = \frac{e^{-i\omega t'}}{i\omega + \alpha}$$

$H(t)$ étant la fonction de Heaviside, nulle pour $t < 0$ *et* 1 *pour* $t > 0$. Comme vous vous souvenez, la transformée de Fourier de $H(t)e^{-\alpha t}$ est justement $1/(i\omega + \alpha)$. Donc,

$$G(t,t') = H(t-t')e^{-\alpha(t-t')}$$

Comme vous le remarquez, $G(t,t') = 0$ *si* $t' > t$. Cela est normal, puisque $G(t,t')$ est la réponse, au temps t, à une impulsion au temps t'. Si t' est plus tard que t, la réponse est nulle. Prenons maintenant plusieurs formes de f.

1. $f(t) = H(t)t$. Alors,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty H(t')t'H(t-t')e^{-\alpha(t-t')}dt' \\ &= \int_0^\infty t'H(t-t')e^{-\alpha(t-t')}dt' \\ &= \int_0^t t'e^{-\alpha(t-t')}dt \\ &= (1/\alpha^2)(e^{-\alpha t}-1) + (1/\alpha)t \end{aligned}$$

2. $f(t) = H(t)\sin\beta t$. Alors, en suivant les même étapes,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \sin(t')e^{-\alpha(t-t')}dt \\ &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\beta e^{-\alpha t} + \beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)\right] \end{aligned}$$

Vous voyez ici comment on résout une fois l'équation différentielle pour la fonction de Green, et qu' ensuite, il suffit d'appliquer une intégration pour trouver la solution générale. En langage opératoriel, on écrirai une équation différentielle comme

$$L[x] = f$$

où L est un opérateur différentiel (dans l'exemple ci-dessus $d/dt + \alpha$), c'est à dire qui transforme une fonction en une autre fonction. La solution de cette équation s'écrira

$$x = L^{-1}[f]$$

Trouver la fonction de Green revient à trouver l'opérateur L^{-1} et ce n'est pas un hasard donc qu'il comporte une intégration. Si on s'est donné une base, on peut représenter L par une matrice (infinie) et trouver la fonction de Green revient à inverser cette matrice.

Nous n'avons pas fini avec les fonctions de Green. Supposons que notre équation est un peu plus compliquée :

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t, x)$$

Le membre de droite comporte explicitement un terme en x, comme par exemple $t.x^{1/2}$ ce qui rend la résolution de l'équation nettement plus ardue par les techniques classiques. Mais cela ne change rien pour les fonctions de green. La solution s'écrira toujours

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \int_0^\infty f(t', x)G(t, t')dt' \qquad (1.11)$$

Chapitre 2

Problèmes aux Limites pour les Equations Différentielles Ordinaires

2.1 Introduction

Lorsqu'on considère une équation différentielle ordinaire linéaire homogène du second ordre,

$$(E_H) \qquad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad ; \quad a < x < b;$$

où $p\,,q\,et\,r$ sont des fonctions continues sur $[a;b]$ tel que $[a,b]$ un intervalle (de $\mathbb{R}$) ouvert , et $y : [a,b] \longrightarrow E$, avec E est un espace de Banach réel (de norme notée $\|\ .\ \|$). On sait très bien qu'il y-à 2 fonctions linéairement indépendantes, qui génèrent la solution générale de cette équation, c'est-à-dire n'importe quelle solution de l'équation considérée est une combinaison linéaire de telles fonctions. Quand une équation non homogène

$$(E) \qquad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x) \quad ; \quad x \in [a,b];$$

est considérée, nous devons trouver une solution particulière, pour chaque fonction f donnée. En l'ajoutant à l'expression générale de la solution de l'équation homogène, nous obtenons la solution générale de l'équation non homogène.

Si nous fixons les valeurs de y et de sa première dérivée au point de départ a , sous des conditions de régularité appropriées sur les données, nous savons qu'un tel problème de Cauchy est uniquement soluble. De plus, nous aurons l'expression de sa solution unique en obtenant les valeurs uniques des coefficients dans l'expression donnée pour le cas général. Quand les coefficients dans l'EDO linéaire (E) sont des constantes, de telles valeurs sont calculées en résolvant un système algébrique linéaire d'ordre 2.

Cependant, lorsque nous traitons le problème dans lequel la fonction y, et/ou sa première dérivée , atteignent leurs valeurs en deux points extrêmes a *et* b, nous savons que l'existence de solution d'un tel problème aux limites à deux points, en général, n'est pas assurée. Pour cette raison il est très important de développer des outils qui nous permettent d'assurer l'existence et l'unicité de la solution de ce type de problèmes, et encore de calculer son expression exacte.

Parmi les méthodes utilisées pour résoudre ce type de problèmes, on trouve l'Alternative de Fredholm et le calcul de la fonction de Green : en général, si l'équation (E) associée à des conditions aux bords homogènes, a seulement la solution triviale $y \equiv 0$ pour $f \equiv 0$, La solution du problème posé est appelé fonction de Green G(t ; s) donnée par :

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds, \quad x \in [a,b]$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au équations différentielles ordinaire du second ordre

$$(E) \qquad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x) \quad ; \quad x \in [a,b];$$

où $p\,,q\,,r$ et f sont des fonctions continues sur $[a,b]$, associée à des conditions aux bords linéaires non séparées :

$$(L) \qquad \begin{cases} U_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \gamma \\ U_2(y) = \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \delta \end{cases}$$

où $\alpha_i\,,\ \beta_i\,, i = 1,4\,et\,\gamma,\delta.$ sont des constantes réelles données.

Définition 2.1.1. *On appelle problème aux limites homogène associé au problème* (E)+(L)

le problème $(E_H) + (L_H)$ *tel que*

$$(E_H) \qquad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad ; \quad a < x < b;$$

$$(L_H) \qquad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Si $(f \neq 0$ *et* $\gamma = \delta = 0)$ *ou* $(f = 0$*et*$(\gamma \neq 0$ *ou* $\delta \neq 0))$, *on dit que le problème* $(E) + (L)$ *est semi homogène.*

Remarques 2.1.1. 1. *Le problème aux limites* $(E) + (L)$ *est dit régulier si* a *et* b *sont des nombres finis et* p, q , r *sont des fonctions bornées sur* $[a, b]$ *et* $p(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$, *sinon on dit qu'il est singulier.*

2. *Une solution d'un problème aux limites est une fonction qui satisfait l'équation et les conditions aux limites associées.*

3. *Les conditions aux bords linéaires* (L) *sont générales, en particulier elles comprennent :*

   (a) *les conditions de Dirichlet :* $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$;

   (b) *les conditions de Neuman :*$y'(a) = \alpha, y'(b) = \beta$;

   (c) *les conditions mixte :* $y(a) = \alpha$, $y'(b) = \beta$ *ou* $y'(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$;

   (d) *les conditions aux limites linéaires séparées*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

   où $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ *et* $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$

   (e) *les conditions aux limites linéaires périodiques*

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b). \end{cases}$$

2.2 Existence de solutions

L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des problèmes aux limites est plus difficile que celle des problèmes à valeurs initiales (problèmes de Cauchy). En fait, dans le cas des problèmes aux limites, une légère modification dans les conditions aux limites ou dans la longeur de l'intervalle d'étude peut conduire à des changements significatifs dans le comportement des solutions.Par exemple, le problème à valeurs initiales

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad ; \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = \alpha \quad , \quad y'(0) = \beta; \end{cases}$$

a pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ une unique solution définie par $y(x) = \alpha cosx + \beta sinx$. Cependant, le problème aux limites

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad ; \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = \alpha; \quad (\alpha \neq 0) \end{cases}$$

n'admet pas de solutions et le problème

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad ; \quad 0 < x < b \quad (0 < b < \pi), \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(b) = \alpha; \end{cases}$$

a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ une unique solution définie par $y(x) = \alpha \dfrac{sinx}{sinb}$

Alors que le problème

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad ; \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0, ; \end{cases}$$

admet une infinité de solutions définies par $y(x) = csinx$, $c \in \mathbb{R}$.

Le problème homogène $(E_H) + (L_H)$ admet toujours la solution triviale $y \equiv 0$. D'après l'exemple précèdent il peut avoir une solution non triviale. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème $(E_H) + (L_H)$ n'admet pas des solutions non triviales.

Théorème 2.2.1. *Soient σ et ψ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (E_H) Alors le problème homogène $(E_H)+(L_H)$ a uniquement la solution triviale $y \equiv 0$ si et seulement si*

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\sigma) & U_1(\psi) \\ U_2(\sigma) & U_2(\psi) \end{vmatrix} \neq 0$$

Démonstration . Toute solution de l'équation (E_H) peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = c\sigma(x) + d\psi(x) \; ; \; c, d \in \mathbb{R}$$

y est solution du problème $(E_H) + (L_H)$ si et seulement si

$$\begin{cases} U_1(c\sigma + d\psi) = 0 \\ U_2(c\sigma + d\psi) = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne le système linéaire

$$(S) \qquad \begin{cases} c\, U_1(\sigma) + d\, U_1(\psi) = 0 \\ c\, U_2(\sigma) + d\, U_2(\psi) = 0. \end{cases}$$

Par suite, le système (S) admet uniquement la solution triviale si et seulement si son déterminant Δ est non nul.

Corollaire 2.2.1. *Le problème aux limite homogène $(E_H) + (L_H)$ dispose d'un nombre infini de solutions non triviales si et seulement si $\Delta = 0$.*

Exemple 2.2.1. *Considérons le problème de Dirichlet*

$$(PD_1) \qquad \begin{cases} xy''(x) - y'(x) - 4x^3 y(x) = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ U_1(y) = y(1) = 0 \\ U_2(y) = y(2) = 0 \end{cases}$$

On a $y_1(x) = cosh(x^2 - 1)$ et $y_2(x) = \frac{1}{2} sinh(x^2 - 1)$ deux solutions linéairement indépen-

dantes de l'équation $xy''(x) - y'(x) - 4x^3y(x) = 0$ *avec*

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1(2) & y_2(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh 3 & \frac{1}{2}\sinh 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sinh 3 \neq 0$$

Donc le problème (PD_1) *n'admet que la solution triviale* $y \equiv 0$*.*

Exemple 2.2.2. *Considérons le problème de Dirichlet*

$$(PD_2) \qquad \begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ U_1(y) = y(0) = 0 \\ U_2(y) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

On a $y_1(x) = e^{-x}\cos(x2)$ *et* $y_2(x) = e^{-x}\sin(x2)$ *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$ *avec*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -e^{\frac{-\pi}{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

le problème (PD_2) *en plus d'avoir la solution triviale a aussi des solutions non triviales. En effet, il existe un nombre infini de solutions* $y(x) = ce^{-x}\sin 2x$ *, où c est une constante arbitraire.*

Maintenant, nous présentons un résultat, appelé Alternative de Fredholm, qui assure l'existence et l'unicité des solutions du problème non homogène $(E) + (L)$ dans le cas où le problème homogène n'admet pas de solutions non triviales.

Théorème 2.2.2. *(Alternative de Fredholm) Le problème non homogène* $(E) + (L)$ *admet une solution unique si et seulement si le problème homogène* $(E_H)+(L_H)$ *admet uniquement la solution triviale* $y \equiv 0$*.*

Démonstration Soient σ_1 *et* σ_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (E_H) *et* ψ une solution particulière de l'équation non homogène (E) Alors la solution générale de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y(x) = c_1\sigma_1(x) + c_2\sigma_2(x) + \psi(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

y est solution du problème non homogène $(E) + (L)$ si et seulement si

$$\begin{cases} U_1(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \psi) = \gamma \\ U_2(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \psi) = \delta \end{cases}$$

ce qui donne le système linéaire

$$(S') \qquad \begin{cases} c_1U_1(\sigma_1) + c_2U_1(\sigma_2) + U_1(\psi) = \gamma \\ c_1U_2(\sigma_1) + c_2U_2(\sigma_2) + U_2(\psi) = \delta \end{cases}$$

Le système (S') admet une unique solution si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\sigma) & U_1(\psi) \\ U_2(\sigma) & U_2(\psi) \end{vmatrix} \neq 0$$

Par conséquent, le théorème 2.0.1 assure que le problème homogène admet que la solution triviale.

Fonction de Green associée

Parmis les caractéristiques les plus importantes de la solution du problème aux limite ,Les fonctions de Green ont été introduites par George Green en 1828, ces fonctions interviennent dans la résolution de certaines équations linéaires ainsi que dans la transformation d'équations différentielles non linéaires en équations intégrales.

Dans ce qui suit on considère l'équation différentielle du second ordre (E) associée aux conditions aux bords linéaires non séparées (L).

Définition 2.2.1. *Soit le problème aux limites homogène*

$$(PL) \qquad \begin{cases} (E_H) & p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad ; \quad a < x < b; \\ (L_H) & \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

On appelle fonction de Green associée au problème (PL) toute fonction $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) G *est continue sur* $[a,b] \times [a,b]$

(ii) $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ *est continue en tout point* $(x,s) \in [a,b] \times [a,b]$ *tel que* $x \neq s$.

(iii) $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) - \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^+) = \frac{1}{p(x)} \forall x \in [a,b]$
Où $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) = \lim\limits_{s \longrightarrow x^-} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,s)$ *et* $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^+) = \lim\limits_{s \longrightarrow x^+} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,s)$ *;*

(iv) $\forall s \in (a,b)$ *la fonction* $x \mapsto G(x,s)$ *vérifie l'équation homogène* (E_H) *sur chacun des intervalles* $[a,s)$ *et* $(s,b]$ *;*

(v) $\forall s \in (a,b)$ *la fonction* $x \mapsto G(x,s)$ *vérifie les conditions homogènes* (L_H).

Théorème 2.2.3. *Supposons que le problème homogène (PL) a seulement la solution triviale. Alors il existe une unique fonction de Green G, associée à (PL). De plus, pour toute fonction continue f, la solution unique du problème semi-homogène $(E) + (L_{H)}$ est donnée par l'expression*

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds$$

Démonstration : "Existence, unicité et construction de la fonction G" :
Soient σ_1, σ_2 deux solutions indépendantes de (E_H). Par définition, la fonction partielle $x \mapsto G(x,s)$ est une solution de l'équation (E_H) dans chacun des intervalles $[a,s[\ et\ ]s,b]$,il existe donc quatre fonctions dépendantes de la variable s telles que :

$$G(x,s) = \begin{cases} \eta_1(s)\sigma_1(x) + \eta_2(s)\sigma_2(x) \ si \ a < x < s \\ \mu_1(s)\sigma_1(x) + \mu_2(s)\sigma_2(x) \ si \ s < x < b \end{cases}$$

Ensuite, les propriétés (i) *et* (iii) *de* G donnent le système :

$$G(x,s)= \begin{cases} \eta_1(s)\sigma_1(x)+\eta_2(s)\sigma_2(x)=\mu_1(s)\sigma_1(x)+\mu_2(s)\sigma_2(x) \\ \mu_1(s)\sigma'(x)+\mu_2(s)\sigma'(x)-\eta_1(s)\sigma'(x)+\eta_2(s)\sigma'(x)=\dfrac{1}{p(x)} \end{cases} \tag{2.1}$$

Posant $v_1(s)=\mu_1(s)-\eta_1(s) et v_2(s)=\mu_2(s)-\eta_2(s)$, le système (2.1) devient

$$\begin{cases} v_1(s)\sigma_1(x)+v_2(s)\sigma_2(x)=0 \\ v_1(s)\sigma'(x)+v_2(s)\sigma'(x)=\dfrac{1}{p(s)} \end{cases} \tag{2.2}$$

Comme $W(\sigma_1;\sigma_2)(x)\neq 0$ pour tout $s\in[a,b]$ le système 2.2 admet une unique solution $(v_1(s);v_2(s))$. En utilisant les relations$\mu_1(s)=\eta_1(s)+v_1(s)$ *et* $\mu_2(s)=\eta_2(s)-v_2(s)$, la fonction de Green G devient :

$$G(x,s)= \begin{cases} \eta_1(s)\sigma_1(x)+\eta_2(s)\sigma_2(x)\ si\ a\leq x\leq s\leq b \\ \eta_1(s)\sigma_1(x)+\eta_2(s)\sigma_2(x)+v_1(s)\sigma_1(x)+v_2(s)\sigma_2(x)\ si\ a\leq s\leq x\leq b \end{cases}$$

Ensuite,la propriété (v) nous donne le système

$$\begin{cases} U_1(\sigma_1)\eta_1(s)+U_1(\sigma_2)\eta_2(s)=k_1(s) \\ U_2(\sigma_1)\eta_1(s)+U_2(\sigma_2)\eta_2(s)=k_2(s) \end{cases} \tag{2.3}$$

oú

$$\begin{cases} k_1(s)=-v_1(s)[\alpha_3\sigma_1(b)+[\alpha_4\sigma'(b)]-v_2(s)[\alpha_3\sigma_2(b)+[\alpha_4\sigma'(b)] \\ k_2(s)=-v_1(s)[\beta_3\sigma_1(b)+[\beta_4\sigma'(b)]-v_2(s)[\beta_3\sigma_2(b)+[\beta_4\sigma'(b)] \end{cases} \tag{2.4}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
G(a,s) &= \eta_1(s)\sigma_1(a) + \eta_2(s)\sigma_2(a), \quad (a \leq s)\\
\frac{\partial G}{\partial x}(a,s) &= \eta_1(s)\sigma'(a) + \eta_2(s)\sigma'(a)\\
G(b,s) &= \eta_1(s)\sigma_1(b) + \eta_2(s)\sigma_2(b) + v_1(s)\sigma_1(b) + v_2(s)\sigma_2(b), \quad (t \leq b)\\
\frac{\partial G}{\partial x}(b,s) &= \eta_1(s)\sigma'(b) + \eta_2(s)\sigma'(b) + v_1(s)\sigma'(b) + v_2(s)\sigma'(b)
\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto G(x,s)$ vérifie les conditions aux bords (L_H) pour tout $s \in [a,b]$, alors

$$\alpha_1 G(a,s) + \alpha_2 \frac{\partial G}{\partial x}(a,s) + \alpha_3 G(b,s) + \alpha_4 \frac{\partial G}{\partial x}(b,s) = 0,$$

ce qui donne l'équation

$$\eta_1(s)[\alpha_1\sigma_1(a) + \alpha_2\sigma'(a) + \alpha_3\sigma_1(b) + \alpha_4\sigma'(b)] + \eta_2(s)[\alpha_1\sigma_2(a) + \alpha_2\sigma'(a) + \alpha_3\sigma_2(b)+$$

$$\alpha_4\sigma'(b)] + v_1(s)[\alpha_3\sigma_1(b) + \alpha 4\sigma'(b)] + v_2(s)[\alpha_3\sigma_2(b) + \alpha 4\sigma'(b)] = 0,$$

ce qui est équivalente à

$$\eta_1(s)[\alpha_1\sigma_1(a) + \alpha_2\sigma'(a) + \alpha_3\sigma_1(b) + \alpha_4\sigma'(b)] + \eta_2(s)[\alpha_1\sigma_2(a) + \alpha_2\sigma'(a) + \alpha_3\sigma_2(b)+$$

$$\alpha_4\sigma'(b)] = -v_1(s)[\alpha_3\sigma_1(b) + \alpha 4\sigma'(b)] - v_2(s)[\alpha_3\sigma_2(b) + \alpha 4\sigma'(b)] = k_1(s),$$

De même on aura

$$\beta_1 G(a,s) + \beta_2 \frac{\partial G}{\partial x}(a,s) + \beta_3 G(b,s) + \beta_4 \frac{\partial G}{\partial x}(b,s) = 0,$$

ce qui donne la deuxième équation du système (2.3). Par hypothèse, le problème homogène (PL) n'admet que la solution triviale donc, d'après le théorème 2.0.1 le déterminant du système (2.3) est non nul. Ce qui entraîne que ce système admet une unique solution $(\eta_1(s);\eta_2(s))$. Maintenant, pour montrer l'unicité de la fonction de Green, nous supposons que R est une autre fonction vérifiant les conditions $(i)-(v)$, puis pour tout $t \in [a;b]$ et toute fonction continue f, on aura

$$\int_a^b G(x,s)f(s)ds = \int_a^b R(x,s)f(s)ds$$

Alors

$$\int_a^b [G(x,s) - R(x,s)]f(s)ds = \int_a^b G(x,s)f(s)ds - \int_a^b R(x,s)f(s)ds = 0$$

Pour x fixé, posons $f(s) = G(x,s) - R(x,s)$, on obtient $\int_a^b [G(x,s) - R(x,s)]^2 ds = 0, \forall x \in [a,b]$ Ce qui entraîne que $G(x,s) = H(x,s)$ pour tout $(x,s) \in [a,b] \times [a,b]$.

Existence et unicité de la solution : Soit la fonction y définie par :

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds = \int_a^x G(x,s)f(s)ds + \int_x^b G(x,s)f(s)ds$$

1. y est solution du problème $(E) + (L_H)$, En effet, grâce à la dérivabilité de G par rapport à x dans chacun des intervalles $(a,x]; [x,b)$ et de la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,s)ds) = v'(x)f(x,x) - u'(x)f(x,x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x} ds$$

   on aura

$$\begin{aligned} y'(x) &= G(x,x)f(x) + \int_a^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)f(s)ds - G(x,x)f(x) + \int_x^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)f(s)ds \\ &= \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)f(s)ds \end{aligned}$$

   Soit (z,z) un point de la diagonale du carré $[a,b] \times [a,b]$. Par hypothèse $\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)$ est continue en (x,s) dans les deux triangles $a \leqslant s \leqslant x \leqslant b \; et \; a \leqslant x \leqslant s \leqslant b$. Par conséquent, les deux limites suivantes sont égales :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow z} \frac{\partial G}{\partial x}(x,z) = \frac{\partial G}{\partial x}(z^+, z) \; si \; z < x \\ \lim\limits_{x \longrightarrow z} \frac{\partial G}{\partial x}(x,z) = \frac{\partial G}{\partial x}(z, z^-) \; si \; x < z \end{cases}$$

Calculons y''

$$\begin{aligned} y''(x) &= \int_a^x \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x}(x,s)f(s)ds + f(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) + \int_x^b \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x}(t,s)f(s)ds - f(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+) \\ &= \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x}(x,s)f(s)ds - f(x)\left[\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-)\right] \end{aligned}$$

Or $\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) = -\frac{1}{p(x)}$ (propriété (iii) *de* G) on en déduit l'expression

$$y''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x}(x,s)f(s)ds + \frac{f(s)}{p(x)}$$

par suite,
$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = \int_a^b \left[p(x)\frac{\partial^2 G}{\partial^2 x}(x,s) + q(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,s) + r(x)G(x,s)\right] f(s)ds +$ $f(x) = f(x)$ (car la fonction $t \mapsto G(x,s)$ est solution de l'équation (E_H) pout tout $x \neq s$).

2. La fonction y vérifie les conditions aux bords homogène. En effet,

$$\begin{aligned} U_1(y) &= \alpha_0^1 y(a) + \beta_0^1 y(b) + \alpha_1^1 y'(a) + \beta_1^1 y'(b) \\ &= \int_a^b [\alpha_0^1 G(a,s) + \beta_0^1 G(b,s) + \alpha_1^1 \frac{\partial G}{\partial x}(a,s) + \beta_1^1 \frac{\partial G}{\partial x}(b,s)] f(s)ds \\ &= \int_a^b U_1(G(.,s))f(s)ds \\ &= 0 \ (car\ U_1(G(.,s)) = 0). \end{aligned}$$

d'où l'existence de la solution y. L'unicité de la solution y résulte de l'hypothèse sur le problème homogène ainsi que de l'alternative de Fredholm.

2.3 Exemple

Considérons le problème aux limites périodique :

$$(\Omega) \qquad \begin{cases} y'' + k^2 y = 0, \quad 0 < x < \omega, \quad k > 0 \\ y(0) - y(\omega) = 0 \\ y'(0) - y'(\omega) = 0; \quad \omega > 0. \end{cases}$$

Ici

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y(0) - y(\omega), \qquad (\alpha_0^1 = 1, \alpha_1^1 = 0, \beta_0^1 = -1, \beta_1^1 = 0 \\ U_2(y) &= y'(0) - y'(\omega), \qquad (\alpha_0^2 = 0, \alpha_1^2 = 1, \beta_0^2 = 1, \beta_1^2 = -1) \end{aligned}$$

Cherchons la fonction de Green sous la forme :

$$G(x,s) \quad = \quad \begin{cases} r_1(x-s), \quad si \quad 0 \le s \le x \le \omega, \\ r_1(\omega + x - s), \quad si \quad 0 \le x \le s \le \omega, \end{cases}$$

où r_1 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} z''(s) + k^2 z(s) = 0 \\ z(0) - z(\omega) = 0 \\ z'(0) - z'(\omega) = 1 \end{cases}$$

$$r_1''(s) + k^2 r_1(s) = 0 \quad \Longrightarrow r_1(s) = c_1 \cos ks + c_2 \sin ks; \quad c_1; c_2 \in \mathbb{R}.$$

Puis

$$\begin{cases} r_1(0) - r_1(\omega) = 0 \\ r_1'(0) - r_1'(\omega) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1(1 - c_1 \cos k\omega) - c_2 \sin k\omega = 0 \\ kc_1 \sin k\omega + c_2(k - k\cos k\omega) = 1, \end{cases}$$

on obtient

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\sin k\omega \\ 1 & (k - k\cos k\omega) \end{vmatrix}}{2k(1 - \cos k\omega)} = \frac{\sin k\omega}{2k(1 - \cos k\omega)},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} (1-\cos k\omega) & 0 \\ \sin k\omega & 1 \end{vmatrix}}{2k(1-\cos k\omega)} = \frac{(1-\cos k\omega)}{2k(1-\cos k\omega)} = \frac{1}{2k},$$

Donc

$$r_1(s) = \frac{\sin k\omega}{2k(1-\cos k\omega)}\cos ks + \frac{1}{2k}\sin ks = \frac{\cos\frac{k}{2}\omega}{2k\sin\frac{k}{2}\omega}\cos ks + \frac{1}{2k}\sin ks$$

D'où

$$\begin{aligned}
G(x,s) &= \frac{1}{2k\sin\frac{k}{2}\omega}\begin{cases}\cos\frac{k}{2}\omega\cos k(x-s) + \sin\frac{k}{2}\omega\sin k(x-s), & si\ 0 \le s \le x \le \omega \\ \cos\frac{k}{2}\omega\cos k(\omega+x-s) + \sin\frac{k}{2}\omega\sin k(\omega+x-s), & si\ 0 < x < s \le \omega\end{cases} \\
&= \frac{1}{2k\sin\frac{k}{2}\omega}\begin{cases}\cos(\frac{k}{2}\omega - k(x-s)), & si\ 0 \le s \le x \le \omega \\ \cos(\frac{k}{2}\omega - k(\omega-s+x)), & si\ 0 < x < s \le \omega\end{cases} \\
&= \frac{1}{2k\sin\frac{k}{2}\omega}\begin{cases}\cos(\frac{k}{2}\omega - k(x-s)), & si\ 0 \le s \le x \le \omega \\ \cos(k(x-s+\frac{\omega}{2})), & si\ 0 < x < s \le \omega\end{cases} \\
&= \frac{1}{2k\sin\frac{k}{2}\omega}\begin{cases}\cos(k(-x+s+\frac{\omega}{2})), & si\ 0 \le s \le x \le \omega \\ \cos(k(x-s+\frac{\omega}{2})), & si\ 0 < x < s \le \omega\end{cases} \\
&= \frac{1}{2k}\begin{cases}\csc(\frac{k}{2}\omega)\cos(k(s-x+\frac{\omega}{2})), & si\ 0 \le s \le x \le \omega \\ \csc(\frac{k}{2}\omega)\cos(k(x-s+\frac{\omega}{2})), & si\ 0 < x < s \le \omega\end{cases}
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Problèmes aux Limites pour les Equations Différentielles aux Dérivées Partielles

3.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé "EDP" dans la suite, constituent une branche importante des mathématiques appliquées. Elles sont utilisées dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes.

Il est bien connu que la plupart des phénomènes physiques et d'ingénierie peuvent être décrits dans des modèles mathématiques constitués d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

Les EDP linéaires du second ordre peuvent être classées en trois types, les équations hyperboliques,les équations paraboliques et les équations elliptiques. Les trois types d'équations peuvent être réduits aux formes canoniques. Les équations hyperboliques se réduisent à une forme coïncidant avec l'équation des ondes dans les termes principaux, les équations paraboliques se réduisent à une forme modélisée par l'équation de la chaleur, et l'équation de Laplace modélise la forme canonique des équations elliptiques.

Ainsi, l'équation des ondes, la chaleur et les équations de Laplace servent de modèles canoniques pour toutes les EDP de second ordre à coefficient constant. Pour cela, nous devons étudier certains résultats et théorèmes sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes aux limites pour les EDPs linéaires du second ordre de type elliptique, parabolique et hyperbolique.

3.2 EDP Hyperboliques

Dans cet section, on s'intéresse au l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad -\infty < x < \infty, \tag{3.1}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde. C'est l'équation d'onde unidimensionnelle qui modélise les ondes sonores, les ondes d'eau, les vibrations dans les solides et les vibrations de torsion dans une tige.

3.2.1 L'équation d'onde sur $\mathbb{R}$

On peut écrire l'equation (3.1) comme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})u = 0 \quad -\infty < x < \infty \tag{3.2}$$

Théorème 3.2.1. *La solution générale de l'équation d'onde est donnée par*

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{3.3}$$

où f et g sont deux fonctions rélles définie sur $\mathbb{R}$.

Preuve Pour obtenir la formule (3.3), nous introduisons les coordonnées caractéristiques

$$\xi = x + ct,$$
$$v = x - ct.$$

Selon la règle de la chaîne , nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial \xi} - c\frac{\partial u}{\partial v}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial v}$$

Lors la substitution, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})u = \left(-2c\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(2c\frac{\partial}{\partial \xi}\right)u = 0$$

ce qui veut dire que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial v} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = F(\xi) \longrightarrow u(\xi, v) = f(\xi) + g(v)$$

Nous revenons aux variables initiales $x \; et \; t$, on obtient

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

3.2.2 Problème de valeur initiale

Le problème de valeur initiale consiste à résoudre l'équation d'onde avec des conditions initiales

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad , -\infty < x < \infty \, , \; t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{3.4}$$

où ϕ et ψ sont deux fonctions réelles de x. $u(x,0) = \phi(x)$ définit la position initiale de la chaîne, alors $u_t(x,0) = \psi(x)$ est la vitesse initiale.

Théorème 3.2.2. ***(La solution d'Alembert** 1746) La solution unique au problème de valeur initiale (3.4)est donnée par*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

Preuve :

Premièrement, en fixant $t = 0$ en l'equation (3.3)on obtient

$$\phi(x) = f(x) + g(x), \tag{3.6}$$

Puis,en utilisant la règle de la chaîne,nous différencions l'equation (3.3) ce qui concerne t pour obtenir

$$\psi(x) = cf'(x) - cg'(x). \tag{3.7}$$

Résoudre les équations (3.6)-(3.7) pour f' et g'

$$f' = \frac{1}{2}\left(\phi' + \frac{\psi}{c}\right)$$
$$g' = \frac{1}{2}\left(\phi' - \frac{\psi}{c}\right)$$

En intégrant, nous obtenons

$$\begin{cases} f(s) = \frac{1}{2}\phi(s) + \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\tau)d\tau + A \\ g(s) = \frac{1}{2}\phi(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\tau)d\tau + B \end{cases}$$

où A et B sont des constantes, à cause de Eq(3.6), on a $A + B = 0$. En remplaçant $s = x + ct$ dans la formule de f et $s = x - ct$ dans celui de g , on obtient

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x+ct) + g(x-ct) \\ &= \left[\tfrac{1}{2}\phi(x+ct) + \tfrac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(\tau)d\tau + A\right] + \left[\tfrac{1}{2}\phi(x-ct) - \tfrac{1}{2c}\int_0^{x-ct}\psi(\tau)d\tau + B\right] \\ &= \tfrac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

3.2.3 L'équation des ondes avec une source

L'objectif de cette section est de résoudre

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{3.8}$$

avec $f(x,t)$ est une fonction donnée.

Théorème 3.2.3. *La solution unique du problème(3.8) est donnée par :*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)d\tau + \frac{1}{2c}\int_t^0 \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau \tag{3.9}$$

Preuve : Soit Ω un intervalle bornné par un triangle avec une limite lisse dans le plan xt avec des sommets sur $(x_0, t_0), (x_0 - ct_0, 0)$ *et* $(x_0 + ct_0, 0)$, et laisser $\partial\Delta$ être une limite de Δ telle que $\partial\Delta = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (voir figure 1) donc,

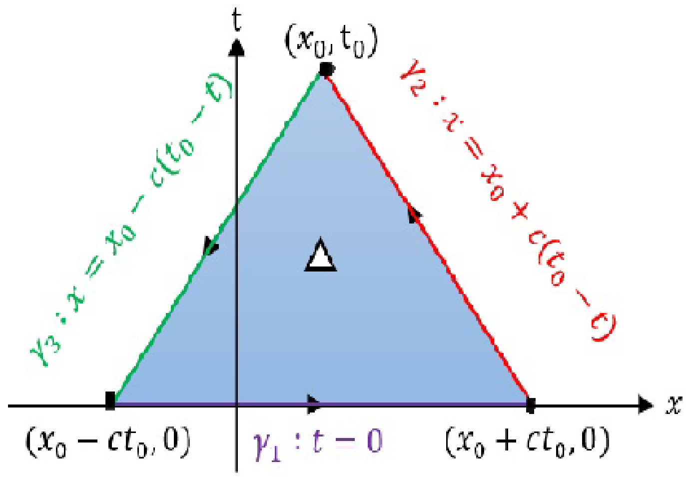

Figure 1

$$\begin{aligned}
\int\int_\Delta f dtdx &= \int\int_\Delta(-c^2u_{xx} + u_{tt})dtdx \\
\text{1.png} \\
&= \int\int_\Delta(-c^2(u_x)_x - (-u_t)_t)dtdx \\
&= \int_{\partial\Delta}(-c^2u_xdt - u_tdx) \qquad \text{(en utilisant le Théorème de Green)} \\
&= \int_{\gamma_1}(-c^2u_xdt - u_tdx) + \int_{\gamma_2}(-c^2u_xdt - u_tdx) + \int_{\gamma_3}(-c^2u_xdt - u_tdx)
\end{aligned}$$

– Sur $\gamma_1 : t = 0 \to dt = 0$. donc,

$$\int_{\gamma_1}(-c^2u_xdt - u_tdx) = -\int_{\gamma_1} u_t(x, 0)dx = -\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(x)dx.$$

– Sur $\gamma_2 : x + ct = x_0 + ct_0 \to dx + cdt = 0$. donc,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2}(-c^2u_xdt - u_tdx) &= c\int_{\gamma_2}(u_xdx - u_t)dt \\
&= c\int_{\gamma_2} du. \qquad \text{(la dérivée totale de} u(x,t)), \\
&= cu(x_0, t_0) - c\phi(x_0 + ct_0).
\end{aligned}$$

– Sur $\gamma_3 : x - ct = x_0 - ct_0 \to dx - cdt = 0$. donc,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3}(-c^2u_x dt - u_t dx) &= c\int_{\gamma_3}(-u_x dx - u_t)dt\\ &= -c\int_{\gamma_3} du.\\ &= cu(x_0,t_0) - c\phi(x_0 - ct_0).\end{aligned} \qquad ,$$

En additionnant ces trois résultats, on obtient

$$\int\int_{\Delta} f dxdt = 2cu(x_0,t_0) - c\left[\phi(x_0+ct_0) + \phi(x_0-ct_0)\right] - \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(x)dx.$$

Par conséquent, nous avons

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)d\tau + \frac{1}{2c}\int_t^0 \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\, dyd\tau.$$

3.2.4 Problème de Goursat

Le problème de Goursat est donné sous la forme

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2u_{xx}(x,t) = h(x,t), \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0,\\ u(x,t) = f(x), pour\ x = ct,\\ u(x,t) = g(x), pour\ x = -ct. \end{cases} \tag{3.10}$$

Théorème 3.2.4. *La solution unique du problème de Goursat (3.10) est donnée par*

$$u(x,t) = f\left(\frac{x+ct}{2}\right) + g\left(\frac{x-ct}{2}\right) - u(0,0) - \frac{1}{4c^2}\int_0^{x+ct}\int_0^{x-ct} h\left(\frac{s+v}{2}, \frac{s-v}{2}\right) dv\, ds$$

Preuve :

Ici,les conditions sont données sur les caractéristiques (voir figure 2)

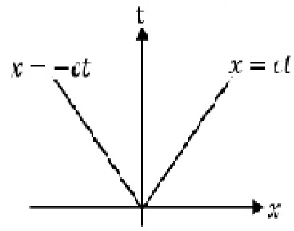

Figure 2

2.png

Introduire les coordonnées caractéristiques

$$\xi = x + ct \quad et \quad v = x - ct.$$

Ensuite, (3.10) peut être transformé en le problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} -4c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial v} = h\left(\dfrac{\xi + v}{2}, \dfrac{\xi - v}{2c}\right) & -\infty < \xi + v < \infty,\ \xi > v, \\ u(\xi, 0) = f(\frac{\xi}{2}), u(0, v) = g(\frac{v}{2}), \\ u(0,0) = f(0) = g(0). \end{cases} \tag{3.11}$$

La solution de (3.11) est donné sous la forme

$$u(\xi, v) = f\left(\frac{\xi}{2}\right) + g\left(\frac{v}{2}\right) - u(0,0) - \frac{1}{4c^2}\int_0^{\xi}\int_0^{v} h\left(\frac{\xi + v}{2}, \frac{\xi - v}{2}\right) dv\, ds$$

Retournez aux variables indépendantes originales

$$u(x, t) = f\left(\frac{x + ct}{2}\right) + g\left(\frac{x - ct}{2}\right) - u(0,0) - \frac{1}{4c^2}\int_0^{x+ct}\int_0^{x-ct} h\left(\frac{s + v}{2}, \frac{s - v}{2}\right) dv\, ds$$

3.2.5 L'équation d'onde dans $\mathbb{R}_+$:

Essayons maintenant avec le même type de problème pour l'équation d'onde

Le problème de Dirichlet sur $\mathbb{R}_+$

Considérez le problème de Dirichlet sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

de la même manière que précédemment ,

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_x^0 \psi(\tau)d\tau + A$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_x^0 \psi(\tau)d\tau + B, \qquad avec\ A + B = 0$$

Il faut connaître la fonction $g(x-ct)$ *pour* $x-ct<0$. Pour cela, en tenant en considération la condition limite

$$u(0,t) = 0, \qquad \forall t \geqslant 0.$$
$$f(ct) + g(-ct) = 0\ ou\ g(y) = -f(-y), \qquad \forall y < 0,$$

c'est-à-dire,

$g(x-ct) = -f(-(x-ct)) = -f(ct-x)$, qui a défini sur $\mathbb{R}^-$.

Ensuite, la solution est donnée par

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)d\tau, & x > ct \\ \frac{1}{2}(\phi(x+ct) - \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)d\tau, & x < ct \end{cases}$$

Le problème de Neumann sur $\mathbb{R}_+$

Considérez le problème de Neumann sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \\ u_x(0,t) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Encore, pour $x - ct$, nous utilisons la condition limite $u_x(0,t) = 0$, et à partir de l'equation(3.3), nous obtenons

$$f'(ct) + g'(-ct) = 0.$$

Maintenant, en fixant $y = -ct$, on obtient

$$g'(y) = -f'(-y), \quad \forall y < 0.$$

Alors,

$$g(y) = f(-y) + C.$$

Par conséquent,

$$g(x-ct) = f(ct-x) + C = \frac{1}{2}\phi(ct-x) + \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} \psi(\tau)d\tau + A + C$$

Depuis,

$$B + \frac{1}{2}\phi(0) = g(0) = f(0) + C = \frac{1}{2}\phi(0) + A + C,$$

nous avons $A + C = B \, et \, A + B = 0$

Par conséquent, la solution est trouvée comme :

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)d\tau, \quad x > ct \\ \frac{1}{2}(\phi(x+ct) - \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} \psi(\tau)d\tau + \int_0^{ct-x} \psi(\tau)d\tau\right), \quad x < ct \end{cases}$$

3.2.6 Existence de solutions

Soit H l'espace de toutes les fonctions ϕ définies sur $\mathbb{R}^2$ et de classe C^2 qui sont nulles à l'extérieur d'un intervalle bornnée de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.2.5. *Soit $u \in C^2$, alors*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right]dxdt = \int\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,t)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]dxdt$$

Preuve : Soit $\phi \in H$, il existe un rectangle $\Omega = (-a,a) \times (-b,b)$ telle que ϕ est égal

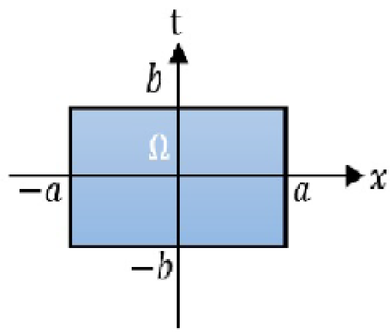

Figure 3

3.png

à zéro à l'extérieur Ω (voir figure 3) Laissez

$$\int\int_{\Omega} u(x,t)\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right]dxdt = \int\int_{\Omega} u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt - c^2\int\int_{\Omega} u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dxdt$$

mais ,

$$\int\int_{\Omega} u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$

avec double Intégration par parties par rapport à t de $-b$ à b et en prenant en compte $\phi(x,t) \in H$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^{-b} u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dt &= \left[u(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_b^{-b} - \int_{-b}^{b}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}dt \\
&= \left[u(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_b^{-b} - \left[\frac{\partial u}{\partial t}\phi(x,t)\right]_b^{-b} + \int_{-b}^{-b}\phi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt \\
&= \int_{-b}^{-b} u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dt.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\int\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\phi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdt = \int\int_\Omega \phi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdt$$

De même,

$$\int\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dxdt = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dxdt$$

Par une intégration par parties par rapport à x de $-a$ à a,

$$\int\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dxdt = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\phi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt = \int\int_\Omega \phi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt$$

Donc,

$$\int\int_\Omega u(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)dxdt = \int\int_\Omega \phi(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)dxdt$$

Par conséquent,

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)dxdt = \int\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)dxdt$$

Remarque 3.2.1. *Si u est une solution de $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ alors,* $\int\int_\Omega u(\phi_{tt}-c^2\phi_{xx})dtdx = 0.$

Corollaire 3.2.1. *Pour l'équation d'onde*

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0. \tag{3.14}$$

Une fonction de classe C^2 est une solution de l'équation (3.14) si et seulement si

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)dxdt = 0, \quad \forall\phi \in H$$

Définition 3.2.1. *Une solution de l'équation (3.14), telle que*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)dxdt = 0, \quad \forall\phi\in H$$

est appelé une solution faible.

3.2.7 Énergie et unicité

Énergie

Soit u une solution de l'équation d'onde (3.1). En multipliant des deux côtés de l'équation (3.1)par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et d'intégration par rapport à x, sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, on obtient

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx - c^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = 0 \tag{3.15}$$

depuis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,\\
\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\\
\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (3.15) devient

$$\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx = c^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}||_{x=a}^{x=b} \tag{3.16}$$

Soit

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{3.17}$$

Cette intégrale s'appelle l'intégrale de l'énergie de u.**(Loi sur l'économie de l'énergie)**

.

Proposition 3.2.1. *Soit* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx = c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}||_{x=a}^{x=b}$$

Unicité de la solution

Nous allons établir le théorème de l'unicité

Théorème 3.2.6. *Soient* u_1 *et* u_2 *sont deux solutions au problème suivant :*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad a < x < b, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(a,t) = \alpha(t), \quad u(b,t) = \beta(t), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Alors $u_1(x,t) = u_2(x,t), \quad x \in [a,b], \quad \forall t \geqslant 0.$

Preuve

Soit $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ est une solution de problème (3.18), alors nous avons $v(a,t) = 0 \quad et \quad v(b,t) = 0,$

$$\frac{d}{dt}v(a,t) = 0 \quad et \quad \frac{d}{dt}v(b,t) = 0$$

On Utilise la proposition (3.2.1),

$$\frac{dE}{dt} = c^2\left[\frac{\partial}{\partial x}v(b,t)\frac{\partial}{\partial t}v(b,t) - \frac{\partial}{\partial x}v(a,t)\frac{\partial}{\partial t}v(a,t)\right] = 0.$$

où E est l'intégral de l'énergie de v, c'est-à-dire

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\right)^2\right] dx = A,$$

où A est une constante,depuis $v(x,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}v(x,0) = 0$ $\frac{\partial}{\partial t}v(x,0) = 0$, en évaluant $E(0)$

pour obtenir

$$E(0) = 0 = A.$$

Ansi,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\right)^2\right] dx = 0,$$

Il s'agit de

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)\right)^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\right)^2 dx = 0,$$

D'oú

$$\frac{d}{dt}v(x,t) = 0 \quad et \quad \frac{d}{dx}v(x,t) = 0$$

c'est-à-dire

$$v(x,t) = B.$$

En utilisant $v(x,0) = 0$, on obtient $B = 0$. Cela signifie que

$$v(x,t) = 0 \to u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

3.3 EDP Paraboliques

Dans cette section, nous commençons notre étude de l'équation unidimensionnelle de la chaleur (Diffusion)

$$\frac{\partial u}{\partial x} - k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.19}$$

où k est appelé la diffusion thermique. L'équation parabolique générale peut être formulée comme suit : Trouvez une solution générale $u(x,t)$ de l'équation (3.19) qui satisfait

(i) CI : la valeur de u à $t = 0$ est une fonction connue.

(ii) CB : on nous donne pour tout t la valeur de u et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ à $x = a$ et $x = b$.

La solution (3.19) dans le rectangle $\Omega = (a, b) \times (0, T)$ atteint son maximum ou son minimum sur

$$\partial\Omega = (x = a, 0 \leqslant t \leqslant T) \cup (x = b, 0 \leqslant t \leqslant T) \cup (t = 0, a \leqslant x \leqslant b).$$

3.3.1 Le principe du maximum

1. Soient u_1 *et* u_2 sont deux solutions de

$$\frac{\partial u}{\partial x} - k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad sur\ \Omega \setminus \partial\Omega$$

   si $u_1 \leqslant u_2\ dans\ \partial\Omega,\ alors\ u_1 \leqslant u_2\ on\ \Omega.$

2. $u(x, t)$ atteint son extermum sur $\partial\Omega$ si $m \leqslant u(x, t) \leqslant M\ sur\ \partial\Omega$, alors $m \leqslant u(x, t) \leqslant M\ sur\, \Omega.$

   En particulier, si $u(x, t) = 0\, sur\ \partial\Omega$, alors $u(x, t) = 0\ sur\ \Omega.$

3.3.2 La solution fondamentale

La solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0,$$

est donnée par

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Lemme 3.3.1. *Si $a > 0$, alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Preuve :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-ar^2}drd\theta = \frac{\pi}{a},$$

$$\to I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

3.3.3 L'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$:

On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{3.20}$$

Théorème 3.3.1. *La solution unique du problème (3.20) est donnée par*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} \varphi(y)dy, \quad t > 0. \tag{3.21}$$

Preuve :

Soient $\hat{u}_t(\omega,t)$ et $\hat{u}_{xx}(\omega,t)$ être la transformée de Fourier de $u_t(x,t)$ *et* $u_{xx}(x,t)$ respectivement. Ainsi

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(\omega,t) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)e^{i\omega x}dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{i\omega x}dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) \end{aligned}$$

on impose $u(x,t) \to 0 \quad quand \quad x \longrightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} \hat{u}_{xx}(\omega,t) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t)e^{i\omega x}dx \\ &= \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)e^{-i\omega x} \mid_{-\infty}^{+\infty} + i\omega\left[u(x,t)e^{-i\omega x} \mid_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx\right] \\ &= -\omega^2\hat{u}(\omega,t) \end{aligned}$$

en prenant la transformation de Fourier des deux côtés de (3.20) on obtient une EDO en t

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) + k\omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0, \quad t > 0 \\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{\phi}(\omega), \end{cases}$$

avec

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{\phi}(\omega)e^{-k\omega^2 t}.$$

Maintenant , soit $\hat{\theta}(\omega,t) = e^{-k\omega^2 t}$ nous essayons de trouver $\theta(x,t)$ par Fourier inverse

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}(\omega,t)e^{ix\omega}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}(\omega,t)e^{-kt\omega^2+ix\omega}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}(\omega,t)e^{-kt\left[\left(\omega-\frac{ix}{2kt}\right)^2-\left(\frac{ix}{2kt}\right)^2\right]}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}(\omega,t)e^{-kt\left(\omega-\frac{ix}{2kt}\right)^2}e^{-\frac{x^2}{4kt}}d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \qquad (Lemme(3.2.1)). \end{aligned}$$

Maintenant, par convolution, nous obtenons le résultat

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x-y,t)\varphi(y)dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)dy. \end{aligned}$$

3.3.4 La chaleur en demi-ligne

Le problème de Dirichlet sur $\mathbb{R}_+$

Le problème est

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Théorème 3.3.2. *La solution unique du problème (3.22) est donnée par*

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_0^{+\infty}\left[e^{\dfrac{-(x-y)^2}{4kt}}-e^{\dfrac{-(x+y)^2}{4kt}}\right]\varphi(y)dy,\qquad t>0. \tag{3.23}$$

Preuve :

Prolongez φ à $\mathbb{R}$

$$\varphi_{impaire}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ 0, & x=0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}$$

Alors la solution sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x-y,t)\varphi_{impaire}(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{0}\theta(x-y,t)\varphi_{impaire}(y)dy+\int_0^{+\infty}\theta(x-y,t)\varphi_{impaire}(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{0}\theta(x-y,t)(-\varphi(-y))dy+\int_0^{+\infty}\theta(x-y,t)\varphi(y)dy,\\ &= \int_0^{+\infty}\left[-\theta(x+y,t)+\theta(x-y,t)\right]\varphi(y)dy\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_0^{+\infty}\left[e^{\dfrac{-(x-y)^2}{4kt}}-e^{\dfrac{-(x+y)^2}{4kt}}\right]\varphi(y)dy\end{aligned}$$

Le problème de Neumann sur $\mathbb{R}_+$

Considérez le problème de Neumann

$$\begin{cases}u_t(x,t)-ku_{xx}(x,t)=0, & 0<x<+\infty, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\\ u_x(0,t)=0.\end{cases} \tag{3.24}$$

Théorème 3.3.3. *La solution unique du problème (3.22) est donnée par*

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_0^{+\infty}\left[e^{\dfrac{-(x-y)^2}{4kt}}+e^{\dfrac{-(x+y)^2}{4kt}}\right]\varphi(y)dy,\qquad t>0. \tag{3.25}$$

Preuve :

Prolongez φ à $\mathbb{R}$

$$\varphi_{paire}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Alors la solution sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-y,t)\varphi_{paire}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} \theta(x-y,t)\varphi_{paire}(y)dy + \int_{0}^{+\infty} \theta(x-y,t)\varphi_{paire}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} \theta(x-y,t)(\varphi(-y))dy + \int_{0}^{+\infty} \theta(x-y,t)\varphi(y)dy, \\ &= \int_{0}^{+\infty} \left[\theta(x+y,t) + \theta(x-y,t)\right]\varphi(y)dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{0}^{+\infty} \left[e^{\dfrac{-(x-y)^2}{4kt}} + e^{\dfrac{-(x+y)^2}{4kt}} \right] \varphi(y)dy \end{aligned}$$

3.3.5 L'unicité :

Le principe du maximum peut être utilisé pour donner une preuve d'unicité pour le problème de Dirichlet.

Théorème 3.3.4. *Si u_1 et u_2 sont deux solutions aux problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = h(x,t), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ u(a,t) = f(x), \quad u(b,t) = g(x), \end{cases} \tag{3.26}$$

pour quatre fonctions données f, φ, g et h Alor,$u_1 = u_2$

Preuve :

Soit $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ être une solution au problème (3.26), nous avons alors $v_t(x,t) - kv_{xx}(x,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v(a,t) = 0, \quad v(b,t) = 0.$

Cela signifie que $v(x,t)=0$ sur Γ, **par le principe de maximum** $v(x,t)=0$ sur Ω, de sorte que $u_1(x,t)=u_2(x,t), \quad \forall a \leqslant x \leqslant b, \quad t \geqslant 0$.

3.4 EDP Elliptiques

L'équation de Laplace

L'équation de Laplace, également appelée équation potentielle, peut être écrite comme suit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{3.27}$$

qui est l'équation bidimensionnelle de Laplace. aussi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$$

sont respectivement l'équation de Laplace à trois et à n dimensions. Pour l'équation de Laplace sur Ω , un problème complet bien posé consiste en une équation potentielle avec des conditions limites appropriées sur $\partial\Omega$.

3.4.1 L'équation de Laplace en coordonnées polaires :

On peut écrire l'equation(3.27) en coordonnées polaires $u(x,y)\rightarrow u(r,\theta)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \\
&= \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right]\frac{\partial u}{\partial r}\\ &+\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right]\frac{\partial u}{\partial \theta}+\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\\ &=0\end{aligned}$$

Maintenant, nous calculons les dérivés de $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$,pour obtenir

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

On obtient l'équation de Laplace en coordonnées polaires

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0<r<\infty \tag{3.28}$$

3.4.2 L'equation de Laplace sur un rectangle

Le problème de Dirichlet

Considérez $\Omega=(a,b)\times(s,d)$.Le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0, & \textit{sur } \Omega\\ u_x(a,y)=\phi(y), u_x(b,y)=\psi(x), & c<y<d,\\ u_y(x,c)=\alpha(x), u_y(x,d)=\beta(x), & a<x<b,\end{cases} \tag{3.29}$$

Le problème de Neumann

Considérez $\Omega = (a, b) \times (s, d)$.Le problème de Neumann

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & sur\ \Omega \\ u(a,y) = \phi(y), u(b,y) = \psi(x), & c < y < d, \\ u(x,c) = \alpha(x), u(x,d) = \beta(x), & a < x < b, \end{cases} \tag{3.30}$$

3.4.3 Le principe du maximum

Soit $u(x, y)$ est une solution de l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad sur\ \Omega \setminus \partial\Omega.$$

Ensuite, $u(x, y)$ atteint ses bornes sur $\partial\Omega$, si $m \leqslant u(x, y) \leqslant M$ alors $m \leqslant u(x, y) \leqslant M$ sur Ω. En particulier, si $u(x, y) = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u(x, y) = 0$ sur Ω.

3.4.4 Unicité

Théorème 3.4.1. *Soit $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, si u_1 et u_2 sont deux solutions aux problème suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & sur\ \Omega \setminus \partial\Omega. \\ u(x,y) = 0, & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.31}$$

Alors $u_1 = u_2$, cela signifie que la solution au problème du Laplace est unique.

Preuve :

Soit $v(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ être une solution au problème (3.31) , puis en multipliant les deux côtés de $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ par v et intégrant sur Ω.

$$\begin{aligned}
0 &= \int \int_\Omega v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dxdy \\
&= \int_c^d \left[\int_a^b v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dy + \int_a^b \left[\int_c^d v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dx \\
&= - \int \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy + \int_c^d v \frac{\partial v}{\partial x} \mid_a^b dy + \int_a^b v \frac{\partial v}{\partial y} \mid_c^d dx.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\int \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \int_c^d v \frac{\partial v}{\partial x} \mid_a^b dy + \int_a^b v \frac{\partial v}{\partial y} \mid_c^d dx$$

Pour le problème de Dirichlet (3.29) et le problème de Neumann (3.30), nous avons

$$\int_c^d v \frac{\partial v}{\partial x} \mid_a^b dy + \int_a^b v \frac{\partial v}{\partial y} \mid_c^d dx = 0$$

d'où

$$\int \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = 0$$

on trouve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \; et \; \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies v(x,y) = c,$$

$$c = 0 \text{ parce que } v(x,y) = 0 \; sur \; \partial\Omega.$$

Par conséquent,

$$v(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1(x,y) = u_2(x,y).$$

Le problème (3.31) est un cas particulier du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad sur\ \Omega \setminus \partial\Omega. \\ u(x, y) = g(x, y), \quad sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.32}$$

Théorème 3.4.2. *Le problème (3.32) a une seule et unique solution sur* Ω.

Preuve :

Soit $v(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ être une solution au problème (3.32) nous avons alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f - f = 0 \quad sur\ \Omega \setminus \partial\Omega. \\ u(x, y) = g - g = 0, \quad sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

$v(x, y) = 0\ sur\ \partial\Omega$, par **le principe du maximum** $v(x, y) = 0\ sur\ \Omega$ de sorte que $u_1(x, y) = u_2(x, y)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté un ensemble de résultats concernant les problèmes aux limites associés aux E.D.O et E.D.P du second ordre.
Nous avons trouvé de manière progressive des résultats permettant de bien maitriser quelques outils de base notamment la théorie fondamentale de la fonction de Green, nécessaires à une étude plus approfondie des problèmes aux limites. Il présente aussi quelques résultats d'existence classiques datant, pour certains, des années 70. Pour montrer ces résultats, ce travail fait appel à la théorie du point fixe.
Ainsi, nous avons pris en compte l'équation d'onde, de la chaleur et l'équation de Laplace. Nous avons démontré que la solution exacte peut être obtenue de manière simple en utilisant une méthode directe.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal et D. O'Regan, An Introduction to Ordinary Differential Equations, Springer, 2000.

[2] R. P. Agarwal et M. Meehan et D. O'Regan, Fixed Point Theory and applications, Combring Tracts in Mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press 2001.

[3] R. P. Agarwal et D. O'Regan, Ordinary and Partiel Differential Equations. Universitext, Springer Science + Business Media, LLC 2009.

[4] R. P. Agarwal et D. O'Regan, Infinite Interval Problems For Differential, Difference and Integral Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001.

[5] F. Hidousse et S. Amar, Calcul de la fonction de Green de certains problèmes aux limites associés aux E.D.O. avec Mathematica, mémoire de Master,U.Bejaia, juin 2014.

[6] D. Guo, Y.J. Cho et J. Zhu, Partial ordering methods in nonlinear problems, Tatiana Shohov, Susan Boriotti and Donna Dennis, 2004.

[7] E. Zeidler, Nonlineair Functional Analysis and its Applications, vol. I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.

[8] L. Toudjihounde, Calcul Differentiel, Université d'Abomey-Calavi.

[9] Walter, A. Stranss, Partial Differential Equations, An Introduction, Wiley, 1992

[10] T. Hillen,I. Eleonard and H. Van Roessel, Partial Differential Equations, Theory and Completely Solved Problem, Wiley, 2012.