République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministèrede l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Les solutions L^p pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida-Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Aicha **D**JERAID [1]

Sous la direction de

Dr. Lamia. Bousmaha

Soutenu le 15/07/2019 devant le jury composé de

Mr.	**M. K**adi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Melle.	**L. B**ousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr.	**L. M**imoune	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme.	**O. B**enzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : aicha.aicha6991@gmail.com

Je dédie ce travail:

A ma chère père *ABD EL KRIM*

Tu représente pour moi les soutiens indéfectibles et sans limite, la source qui m'a aidé à atteindre ce que je suis aujourd'hui.

A ma très chère *mère*

Tu représente pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Spéciale dédicace à mon frères *Abd el Halim* et *Alla Eddine* qui ont tant sacrifié pour moi et qui m'ont encouragé sur le long de mon parcoure universitaire.

A tous les membres de ma *famille* , petits et grands, veuillez trouvez dans ce modeste travail l'expression de mon affection.

Je dédie ce travail à tous mes *amis* en témoignage de mon profond amour

A tous mes collègues de Master 2 ASSPA. Et enfin, à tous ceux qui me sont *chers.*

Remerciement

*Au nom du **Dieu** le clément et le miséricordieux louange à **ALLAH**.*

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu tout puissant de m'avoir donné la santé, la force, la patience, la volonté d'entamer et de terminer ce Modeste travail.

Egalement je remercie chaleureusement mes parents et mes frères, qui m'ont encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.

*Je remercie tout particulièrement mon encadreur, **Dr. Lamia BOUSMAHA**, pour ses conseils, sa patience, sa grande disponibilité et sa générosité.*

La pertinence de ses questions et ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger.

Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

*Je voudrais également remercier tous les membres de jury, **Dr. Mokhtar KADI** de m'avoir honorée en acceptant de présider le jury, **Mme. Ouahiba BENZATOUT** et **Mr. Laouni MIMOUN** d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.*

J'exprime mes remerciements à tous mes enseignants du département de Mathématiques qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect, ainsi que le personnel de l'administration.

Je remercie tous les membres de laboratoire des Modèles Stochastique, Statistique et Application pour leur accueil et leur sympathie.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes amis permanents, qui m'ont toujours entouré et m'ont motivé à continuer à meilleure.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades, notées EDSR ou en anglais BSDE (Backwards stochastics differentials equations) sont une nouvelle classe d'équations différentielles stochastiques, leurs valeur est donnée en temps terminale T. Les EDSR ont recevé une attention considérable dans la recherche en probabilité car les EDSR fournissent une représentation probabiliste pour les solutions de certaine classe d'équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) quasi-linéaires parabolique de second ordre, et ont une relation avec les solutions de viscosité des EDP. La théorie des EDSR a trouvé beaucoup d'applications telles que :

✓ la théorie du contrôle stochastique,

✓ l'économie,

✓ des problèmes de mathématiques financières.

Commencée en 1973, les équations différentielles stochastiques linéaires ont été d'abord introduite par (Bismut, 1973) [1], qui a utilisé ces EDSR pour étudier les problèmes de contrôle optimal stochastique dans la version stochastique du principe de maximum de Pontryagin. Cinq ans plus tard, (Bismut, 1978) [2] a prolongé sa théorie et il a montré l'existence d'une solution unique bornée de l'EDSR de Riccati.

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades, dans le cas non linéaire, ont été introduites par Pardoux et Peng [29], qui ont considéré des EDSR générales de la forme suivante :

$$dY_t = -f(r, Y_r, Z_r)dr + Z_r dB_r, \qquad Y_T = \xi,$$

avec la condition finale $Y_T = \xi$ (c'est pour cela que l'on dit rétrograde) où ξ est une variable aléatoire de carré intégrable. Pardoux et Peng [29] ont prouvé le résultat d'existence et d'unicité sous l'hypothèse suivante : f est Lipschitz continue dans les deux variables y et z et les deux données, ξ et le processus $\{f(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$, sont de carrés intégrables.

Depuis ces premiers résultats d'existence et d'unicité, de nombreux articles ont été consacrés aux résultats d'existence et/ou d'unicité sous des hypothèses plus faibles sur les coefficients pour prolonger le résultat initial de Pardoux-Peng. On peut se référer à Pardoux-Peng [31], El Karoui [13], Lepeltier-San Martin [25], [26], Kobylanski [22], Chen [7], Briand-Delyon-Pardoux-Hu-Stoica [5], Hu-Peng [18], Hu-Yong [19] El Karoui-Kapoudjian-Pardoux-Peng-Quenez [13], Kobylanski-Lepeltier-Quenez-Torres [23], Matoussi [28], Hamadène-Lepeltier- Matoussi [15], Hamadène [17], Hamadène-Lepeltier-Wu [16] et les références là-dedans. Parmi ces articles, on peut distinguer deux classes différentes : les EDSRs scalaires et les EDSRs multidimensionnelles. Dans le premier cas, nous pouvons bénéficier du théorème de comparaison : on se réfère à El Karoui et autre. [13] pour ce résultat. Dans cet esprit, citons les contributions de Kobylanski [21] et de Lepeltier et San Martin [26], qui traitent des générateurs de croissance quadratique en z. Pour les EDSRs multidimensionnelles, il n'y a pas de théorème de comparaison et pour surmonter cette difficulté, une hypothèse de monotonicité sur le générateur f de la variable y est utilisée. Cette condition est essentielle dans l'étude des EDSRs avec temps terminal aléatoire et apparaît pour la première fois dans ce contexte dans un article de Peng [33]. Lorsque le temps terminal est déterministe, cette condition permet de se éliminer la condition de croissance dans la variable y : voir les travaux de Briand et Carmona [3] pour une étude de la croissance polynomiale de L^p avec $p \geq 2$ et les travaux de Pardoux [32] pour une croissance arbitraire.

Signalons également que lorsque le générateur est Lipschitz continue, le résultat de El Karoui et autre. [13], fournit l'existence d'une solution lorsque les données ξ et $\{f(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$ sont dans L^p même pour $p \in (1,2)$. Notre travail est consacrée à une généralisation de ce résultat au cas d'un générateur monotone, à la fois pour des équations sur un intervalle de temps fixe et aléatoire.

L'objectif de ce mémoire est d'établir l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des conditions faibles dans L^p, lorsque ξ et le processus $\{f(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$ ne sont que intégrables avec f seulement monotone dans la variable y, du type suivant :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

où B est un mouvement brownien standard et ξ est une variable aléatoire mesurable par rapport au passé de B jusqu'au temps T, avec la condition terminale ξ et le coefficient f (appelé aussi le générateur) sont dans L^p. Les inconnues sont les processus $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ et $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$, qui doivent être adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien : c'est un point crucial.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

✓ **Le premier chapitre :** On introduit quelque notions préliminaires sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades, puis on va présenter un résultat classique d'existence et d'unicité pour les solutions des EDSR.

✓ **Le deuxième chapitre :** On étudie l'existence et l'unicité des équations différentielles stochastiques rétrogrades dans L^p avec $p \in (1, 2)$ sur un intervalle de temps fixe. On le termine par une étude sur l'existence et l'unicité des solutions dans le cas $p = 1$ où une hypothèse supplémentaire sur le coefficient est requise.

✓ **Le troisième chapitre :** On démontre le résultat d'existence et d'unicité où les données sont dans L^p sur un intervalle de temps aléatoire.

Chapitre 1

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Le but de ce chapitre est de présenter le résultat d'existence et d'unicité des équations différentielles stochastiques rétrogrades dont les coefficients sont globalement lipschitziens, et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité qui a été obtenu par Pardoux et Peng [29] avec un générateur non linéaire et une donnée terminale de carré intégrable.

Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition finale $Y_T = \xi$ où ξ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme les EDS, ces équations doivent être comprise au sens intégral i.e.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Depuis de nombreux travaux qui ont été effectués ; la théorie n'a cessé de se développer en raison de ses relations étroites avec les équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) et les mathématiques financières. Nous allons donner deux exemples empruntés pour chacun des deux sujets précédents.

En finance, une question importante est de déterminer le prix d'option d'un produit financier. Prenons le cas le plus simple, celui du modèle de Black-Scholes et d'un "call européen".

Le prix de ce produit financier, $(V_t)_{0\leq t\leq T}$ satisfait l'équation :

$$dV_t = (rV_t + \theta Z_t)dt + Z_t dB_t,$$

où θ est la prime de risque (premium risk en anglais) et r est le taux d'intérêt à court terme, avec la condition finale $V_T = (S_T - K)^+$ où S_t est le prix de l'action sous-jacente et K une constante, un prix fixé à l'avance. Nous voyons dans ce modèle simple que l'EDSR est linéaire mais que dans les modèles financiers plus complexes elle peut être non linéaire.

Quant au deuxième exemple. Considérons l'EDP suivante

$$\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\partial^2_{x,x}u(t,x) + f(u(t,x)) = 0, \qquad u(T,x) = g(x).$$

Supposons que cette équation possède une solution régulière, u. Appliquons la formule d'Itô à $u(r,B_r)$; on obtient

$$\begin{aligned} du(r,B_r) &= \{\partial_r u(r,B_r) + \frac{1}{2}\partial^2_{x,x}u(r,B_r)\}dr + \partial_x u(r,B_r)dB_r \\ &= -f(u(r,B_r))dr + \partial_x u(r,B_r)dB_r. \end{aligned}$$

Nous obtenons encore une EDSR qui est non-linéaire si f l'est- en posant $Y_r = u(r,B_r)$ et $Z_r = \partial_x u(r,B_r)$ puisque

$$-dY_r = f(Y_r)dr - Z_r dB_r \qquad \text{avec} \qquad Y_T = g(B_T).$$

1.1 Vocabulaire et notations

1.1.1 Présentation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$.

Considérons l'équation suivante :

$$-\frac{dY_t}{dt} = f(Y_t), \quad t \in [0,t] \qquad \text{avec} \qquad Y_T = \xi. \tag{1.1}$$

Supposons que pour tout $t \in [0,T]$, le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ soit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$; c.à.d pour tout $t \in [0,T]$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ ne dépend pas du futur après l'instant t (ne dépend que de l'information connue jusqu'à l'instant t). Si $f \equiv 0$, la solution de l'équation précédente est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe.

Mais ξ est aléatoire par hypothèse donc la solution n'est pas adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et la meilleure approximation de la solution, adapté qu'on peut prendre (par exemple dans L^2) est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_t)$ ce qui implique que $Y_0 = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\xi)$, le théorème de représentation des martingales browniennes, prouve l'existence d'un processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ de carré intégrable, tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_r dB_r.$$

On peut écrire ceci autrement, en effet :

$$Y_t = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_r dB_r, \qquad \forall t \in [0,T]$$

d'où

$$\begin{aligned} Y_T &= \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T Z_r dB_r \\ \xi &= \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_r dB_r + \int_t^T Z_r dB_r \\ \xi &= Y_t + \int_t^T Z_r dB_r \end{aligned}$$

On a alors

$$Y_t = \xi + \int_t^T Z_r dB_r, \quad i.e. \quad -dY_t = -Z_t dB_t, \quad avec, \quad Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z; l'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \qquad avec, \qquad Y_T = \xi.$$

En pratique, dans le domaine financier par exemple, ξ peut présenter une fonction du prix d'une action à l'instant T et la filtration représente dans ce cas les informations existantes sur le marché à chaque instant t.

Résoudre l'équation (1.1), c'est trouver une stratégie de couverture en utilisant un actif sans risque [8]. Si cette équation admet une solution, elle ne sera qu'aléatoire, car il dépend de ξ et à un instant $t \in [0,T]$, elle est $\mathcal{F}_T$ mesurable c'est à dire il dépend du futur T, ce qui est contre les règles dans les marchés financiers, d'où la nécessité de trouver des solutions avec la condition supplémentaire tel que ces dernières n'anticipent pas sur le futur c'est-à-dire qu'elles soient adaptées à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, c'est pour cela qu'on a introduit les EDSR.

Remarque : Cette appellation (rétrograde), provient de fait que le processus (contrairement à d'autres EDS) est déterminé à partir de la condition terminale $Y_t = \xi$.

1.1.2 Notations et définition d'une solution

Dans toute la suite nous considérerons un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien (MB) de dimension d défini sur cet espace avec T est un réel strictement positif. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle augmentée, c'est-à-dire la σ-algèbre générée par le mouvement brownien $(B_t)_{t\in[0,T]}$ et les ensembles de probabilitée nulle. Nous allons définir deux espaces fonctionnels de processus $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^{n\times d})$.

1. $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^n)$: est l'espace vectoriel formé par des processus $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telles que :

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.

2. $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{n\times d})$: désigne l'espace vectoriel formé par des processus $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$, telles que :

$$\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = trace(zz^*)$. $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{(r\times d)}$.

$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis ; les espaces $\mathcal{S}^p$, $\mathcal{S}^p_c$ et M^p sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^p$ l'espace de Banach $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans tout ce chapitre, l'application aléatoire f est défini sur $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ et sera toujours supposé mesurable par rapport à $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k\times d})$. De plus pour tout $(Y,Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad Y_T = \xi,$$

ou, de la même manière, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.2}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR (1.2).

Définition 1.1.1. *Une solution de l'EDSR* (1.2) *est un couple de processus* $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *tel que*

1. $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *est à trajectoires continues* $\mathbb{P}$*-p.s. et adapté,* $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ *est prévisible,*
2. $\int_0^T \{|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\}dr < \infty, \qquad \mathbb{P} - p.s.,$
3. $\mathbb{P} - p.s.$; *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 1.1.1. *Nous nous souviendrons les deux points suivants car ils sont importants : comme les intégrales de l'équation précédente sont bien définies,* $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *est une semi-martingale continue ; ensuite, comme* $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *est un processus progressivement mesurable, il est adapté, et en particulier* Y_0 *est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ appartient à $\mathcal{S}^2$.

Proposition 1.1.1. *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$*, positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et une constante positive* λ *tels que*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \ |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR* (1.2) *telle que* $Z \in M^2$ *alors* Y *appartient à* $\mathcal{S}_c^2$.

Preuve. Nous allons conclure le résultat principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)dr + \int_0^t Z_r dB_r,$$

en utilisant l'hypothèse sur f; on obtient :

$$\begin{aligned}|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^T |f(r,Y_r,Z_r)|dr + \left|\int_0^T Z_r dB_r\right| \\ &\leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda\|Z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right| + \lambda\int_0^t |Y_r|dr.\end{aligned}$$

posons

$$\varsigma = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda\|Z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ς est une variable aléatoire de carré intégrable.

Comme Y est un processus continu qui vérifié,

$$|Y_t| \leq \varsigma + \lambda\int_0^t |Y_r|dr.$$

Par le lemme de Grönwall, on aura

$$|Y_t| \leq \varsigma e^{\lambda t},$$

et donc

$$\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t| \leq \varsigma e^{\lambda T},$$

comme ς est de carré intégrable, ce qui prouve que Y est dans $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$.

□

Remarque 1.1.2. *Le résultat est encore valable lorsque $\|f.\|_1$ est une variable aléatoire de carré intégrable.*

Lemme 1.1.1. *Soient $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\left\{\int_0^t Y_r.Z_r dB_r,\, t\in[0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. En effet les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG) donnent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}$$

et par suite, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t \langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\Big|\Big] &\leq \tfrac{C}{2}\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big]\Big)\\ &\leq C^{'}\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big]\Big) < \infty.\end{aligned}$$

Puisque cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat.

□

1.2 Le cas Lipschitz

1.2.1 Le résultat de Pardoux-Peng.

Ce résultat est dû à E. Pardoux et S. Peng [29] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire et lipschitzien par rapport aux deux variables y et z, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Nous travaillerons plus tard sous les hypothèses suivantes :

(L) Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}$-p.s.,

1. condition de Lipschitz en (y, z) : pour tout y, $y^{'} \in \mathbb{R}^k$, z, $z^{'} \in \mathbb{R}^{k\times d}$.

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda(|y - y'| + \|z - z'\|),$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\Big[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr\Big] < \infty.$$

Commençons par le cas simple où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.3}$$

Lemme 1.2.1. *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. l'EDSR* (1.3) *possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Un outil-clé dans la démonstration est le théorème de représentation des martingales browniennes (voir [20] théorème III.4.15).

Preuve.

1. L'existence : Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution de (1.3) qui vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t \backslash \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\bigg[\xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r \backslash \mathcal{F}_t\bigg], \qquad 0 \le t \le T.$$

puisque $\int_0^T Z_r dB_r$ est une martingale on a $\mathbb{E}\bigg(\int_0^T Z_r dB_r \backslash \mathcal{F}_t\bigg) = 0$. On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$ en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\bigg[\xi + \int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr \backslash \mathcal{F}_t\bigg] - \mathbb{E}\bigg[\int_0^T Z_r dB_r - \int_0^t Z_r dB_r \backslash \mathcal{F}_t\bigg] \\ &= \mathbb{E}\bigg[\xi + \int_0^T F_r dr \backslash \mathcal{F}_t\bigg] - \int_0^t F_r dr. \end{aligned}$$

on pose :

$$M_t = \mathbb{E}\bigg[\xi + \int_0^T F_r dr \backslash \mathcal{F}_t\bigg]$$

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr,$$

M_t est une martingale brownienne carré intégrable.

D'après le théorème de représentation des martingales il existe un processus prévisible Z carré intégrable appartenant à M^2. tel que

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t Z_r dB_r, \qquad t \in [0, T].$$

Donc

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr,$$

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) est une solution de l'EDSR comme $Y_T = \xi$,

$$Y_t - Y_T = Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - \bigg(M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr\bigg),$$

$$Y_t - \xi = \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r.$$

2. L'unicité : est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in \mathcal{S}^2$.

   Si $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ est une autre solution,

$$\tilde{Y} = Y_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^T F_r dr \setminus \mathcal{F}_t\Big).$$

   d'où l'unicité de Y.

   En ce qui concerne l'unicité de Z, elle est garantie par le théorème de représentation des martingales.

□

Nous montrons à présent le théorème d'existence de Pardoux et Peng.

Théorème 1.2.1. *(Pardoux-Peng 90) On considère l'EDSR suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r.$$

*avec l'hypothèse **(L)**, l'EDSR admet une solution unique (Y, Z) telle que $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.*

Preuve. On utilise l'argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2 = \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (1.2) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ. Pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$, on définit $(Y, Z) = (U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$. En effet, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$. Ce processus appartient à $M^2(\mathbb{R}^k)$ puisque, f étant Lipschitz,

$$\begin{aligned} |F_r| &\le |f(r, U_r, V_r) - f(r, 0, 0)| + |f(r, 0, 0)| \\ &\le |f(r, 0, 0)| + \lambda|U_r| + \lambda\|V_r\|, \end{aligned}$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (1.2.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2(\mathbb{R}^k)$. (Y, Z) appartient à $\mathcal{B}^2$.

l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition (1.1.1), Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$.

L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même est donc bien définie.

Soient (U_1, V_1) et (U_2, V_2) deux éléments de $\mathbb{B}^2$; et $(Y_1, Z_1) = \Psi(U_1, V_1), (Y_2, Z_2) = \Psi(U_2, V_2)$. Notons $\hat{y} = Y_1 - Y_2$, $\hat{z} = Z_1 - Z_2$ et $\hat{y}_T = \xi - \xi = 0$ et

$$d\hat{y}_t = -\{f(t, U_1, V_1) - f(t, U_2, V_2)\}dt + \hat{z}_r dB_r.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|\hat{y}|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2) &= \alpha e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 dt + 2e^{\alpha t}|\hat{y}_t| d\hat{y}_t + \langle e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\rangle dt \\ &= \alpha e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 dt + e^{\alpha t}\|\hat{z}_t\|^2 dt + 2e^{\alpha t}|\hat{y}_t| dt[f(t, U_1, V_1) - f(t, U_2, V_2)dt + \hat{z}_t dB_t] \\ &= \alpha e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 dt + 2e^{\alpha t}|\hat{y}_t|\hat{z}_t dB_t + e^{\alpha t}\|\hat{z}_t\|^2 dt - 2e^{\alpha t}|\hat{y}_t| dt[f(t, U_1, V_1) - f(t, U_2, V_2)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|\hat{y}_r|^2 + 2|\hat{y}_r| f(r, U_1, V_1) - f(r, U_2, V_2))dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}|\hat{y}_r|\hat{z}_r dB_r.$$

Et comme f est Lipschitz il vient, notant u et v pour $U_1 - U_2$ et $V_1 - V_2$ respectivement,

$$e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|\hat{y}_r|^2 + 2\lambda|\hat{y}_r||\hat{u}_r| + 2\lambda|\hat{y}_r|\|\hat{v}_r\|)dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}|\hat{y}_r|\hat{z}_r dB_r.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ et donc, l'inégalité précédente donne

$$|f(t, U_1, V_1) - f(t, U_2, V_2)| \leq k[|U_1 - U_2| + |V_1 - V_2|].$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha}t|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha + 2\lambda^2/\varepsilon)|\hat{y}_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}\hat{y}_r.\hat{z}_r dB_r \\ &\quad + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(|\hat{u}_r|^2 + \|\hat{v}\|^2)dr, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \displaystyle\int_0^T e^{\alpha r}(|\hat{u}_r|^2 + \|\hat{v}_r\|^2)dr$,

$$\forall t \in [0, T], \qquad e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r}\hat{y}_r.\hat{z}_r dB_r. \tag{1.4}$$

D'après le Lemme (1.1.1), la martingale locale $\left(\displaystyle\int_0^t e^{\alpha r}\hat{y}_r.\hat{z}_r dB_r\right)_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y_1, Y_2 appartiennent à $\mathcal{S}^2$ et Z_1, Z_2 appartiennent à M^2.
En particulier, prenant l'espérance - ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente -, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\right] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon]. \tag{1.5}$$

Revenant à l'inégalité (1.4), les inégalités BDG fournissent - avec C universelle -,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\Big] &\le \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T e^{2\alpha r}|\hat{y}_r|^2\|\hat{z}_r\|^2dr\Big)^{1/2}\Big]\\ &\le \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t/2}|\hat{y}_t|\Big(\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big)^{1/2}\Big],\end{aligned}$$

puis, comme $ab \le a^2/2 + b^2/2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\Big] &\le \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\Big] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big]\\ \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\Big] &\le \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big]\\ \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\Big] &\le 2\mathbb{E}[R_\varepsilon] + C^2\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big]\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big] \le 2\mathbb{E}[R_\varepsilon] + C^2\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big].$$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\Big] + C\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big] \le 3\mathbb{E}[R_\varepsilon] + C^2\mathbb{E}[R_\varepsilon]$$

Prenant en considération l'inégalité (1.5), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big] \le (3 + C^2)\mathbb{E}[R_\varepsilon],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_\varepsilon] &= \mathbb{E}\Big[\varepsilon\int_0^T e^{\alpha r}(|\hat{u}_r|^2 + \|\hat{v}_r\|^2)dr\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\varepsilon\int_0^T e^{\alpha r}|\hat{u}_r|^2dr\Big] + \mathbb{E}\Big[\varepsilon\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{v}_r\|^2)dr\Big].\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2dr\Big] &\le \varepsilon(3 + C^2)\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha t}|\hat{u}_t|^2dr + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{v}_r\|^2dr\Big]\\ &\le \varepsilon(3 + C^2)\mathbb{E}\Big[T(\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha r}|\hat{u}_r|^2) + 1\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{v}_r\|^2dr\Big]\\ &\le \varepsilon(3 + C^2)(1\vee T)\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{u}_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{v}_r\|^2dr\Big].\end{aligned}$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\|(U_1, V_1)\|_\alpha = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|(U_1)_r|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|(V_1)_r\|^2 dr\right]^{1/2},$$

qui en fait un espace de Banach. Cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (1.2) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la Proposition (1.1.1) implique qu'un telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$.

Remarque 1.2.1. À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression "la solution de l'EDSR " signifiera la solution de l'EDSR vérifiant $Z \in M^2$.

1.2.2 Le rôle de Z.

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\displaystyle\int_t^T Z_r dB_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 1.2.1. *Soit $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ la solution de l'EDSR (1.2). Supposons que pour un temps d'arrêt $\tau \le T$ p.s, outre l'hypothèse **(L)**, que ξ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et que $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \ge \tau$.*

Alors $Y_t = Y_{t\wedge t}$ et $Z_t = 0$ si $t \ge \tau$.

En bref si Z n'est pas nécessaire pour adapter la solution, Z est nul.

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. On a $\mathbb{P} - p.s.$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \le t \le T,$$

et donc, pour $t = \tau$ comme $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \ge \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dB_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r.$$

Il vient alors $Y_\tau = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_r dB_r = 0$ d'où l'on tire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_r dB_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr\right] = 0,$$

et finalement que $Z_r \mathbb{1}_{r\geq\tau} = 0$.

Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau, Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$\begin{aligned} Y_\tau &= \varepsilon + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dB_r \\ &= \varepsilon + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dB_r - \int_t^T Z_r dB_r \\ &= \varepsilon + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dB_r \\ &= Y_t + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dB_r \\ &= Y_t. \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

□

Donc, le rôle de $(Z_t)_{t\geq 0}$ est de rendre le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ adapté.

Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0), \qquad Y_t = \xi.$$

1.3 EDSRs linéaires et théorème de comparaison

1.3.1 EDSR linéaires

Nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y est donc un réel et Z est une matrice de dimension $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 1.3.1. *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ progressivement mesurable et borné. Soient $\{C_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable, à valeur réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + C_r\}dr - \int_t^T Z_r dB_r,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\Big(\xi\Gamma_T + \int_t^T C_r\Gamma_r dr \setminus \mathcal{F}_t\Big), \qquad \forall t \in [0,T],$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\Big\{\int_0^t b_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\Big\}.$$

Preuve : les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y,Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f(r,B,Y_r,Z_r) = a_rY_r + b_rZ_r + C_r$ est Lipschitzien et de vérifier que **(L)** est satisfaite. Y appartient à $\mathcal{S}^2$ par la Proposition (1.1.1)

$$\begin{aligned}
\Big|f(r,Y_t,Z_t) - f(r,\grave{Y}_t,\grave{Z}_t)\Big| &= \Big|a_t(Y_t - \grave{Y}_t) + b_t(Z_t - \grave{Z}_t)\Big| \\
&\leq |a_t|\Big|Y_t - \grave{Y}_t\Big| + |b_t|\Big|Z_t - \grave{Z}_t\Big| \\
&\leq M_1\Big|Y_t - \grave{Y}_t\Big| + M_2\Big|Z_t - \grave{Z}_t\Big| \\
&\leq (M_1 + M_2)\Big(\Big|Y_t - \grave{Y}_t\Big| + \Big|Z_t - \grave{Z}_t\Big|\Big) \\
&\leq L\Big(\Big|Y_t - \grave{Y}_t\Big| + \Big|Z_t - \grave{Z}_t\Big|\Big),
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
|f(r,Y_t,Z_t)| &\leq |a_t||Y_t| + |b_t||Z_t| + |C_t| \\
&\leq M_1|Y_t| + M_2|Z_t| + |C_t|,
\end{aligned}$$

$$|Y_t||f(r,Y_t,Z_t)| \leq M_1|Y_t|^2 + M_2|Y_t||Z_t| + |Y_t||C_t|.$$

Donc f et ξ vérifiant les conditions du Théorème de l'existence et l'unicité.

D'autre part, commençons par remarquer que le processus Γ vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t d_t + b_t dB_t), \qquad \Gamma_0 = 1.$$

Comme a_t et b_t sont F_t^B adapté et borné alors l'EDSR linéaire

$$\Gamma_t = 1 + \int_0^t \Gamma_r b_r dB_r + \int_0^t \Gamma_r a_r dr.$$

l'inégalité de Doob montre que Γ appartient à $\mathcal{S}^2$. Posséde une unique solution dans $\mathcal{S}^2$ telle que :

$$\Gamma_t \in \mathcal{S}^2, \qquad \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\Gamma_t|^2\right] < \infty.$$

On pose : $\Gamma_r b_r = \sigma(r,\Gamma_r)$ et $\Gamma_r a_r = \mu(r,\Gamma_r)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\Big|\sigma(r,\Gamma_r) - \sigma(r,\grave{\Gamma}_r)\Big| &= \Big|b_r\Big(\Gamma_r - \grave{\Gamma}_r\Big)\Big| \\
&\le |b_r|\Big|\Gamma_r - \grave{\Gamma}_r\Big| \le M_1\Big|\Gamma_r - \grave{\Gamma}_r\Big|. \\
\Big|\mu(r,\Gamma_r) - \mu(r,\grave{\Gamma}_r)\Big| &= \Big|a_r\Big(\Gamma_r - \grave{\Gamma}_r\Big)\Big| \\
&\le |a_r|\Big|\Gamma_r - \grave{\Gamma}_r\Big| \le M_2\Big|\Gamma_r - \grave{\Gamma}_r\Big|.
\end{aligned}$$

Donc σ et μ sont Lipschitz, on écrit Γ sous la forme :

$$\Gamma_t = \exp\Big(\int_0^t b_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\Big).$$

On a $\Gamma_t Y_t$ est $\mathcal{F}_t$ adapté puisque Y_t existe et $\mathcal{F}_t$ adapté et Γ_t existe et $\mathcal{F}_t$ adapté. La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
d(\Gamma Y)_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t \\
&= -\Gamma_t C_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + \Gamma_t Y_t b_t dB_t.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \displaystyle\int_0^t C_r \Gamma_r dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $C \in M^2$ et Γ, Y sont dans $\mathcal{S}^2$.

Par suite, on intégrer de 0 à t

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_r C_r dr = \mathbb{E}\Big(\Gamma_T Y_T + \int_0^T \Gamma_r C_r dr / \mathcal{F}_t\Big)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_t Y_t &= \mathbb{E}\Big[\Big(\Gamma_T Y_T + \int_0^T \Gamma_r C_r dr - \int_0^t \Gamma_r C_r dr\Big)/\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\Gamma_T Y_T + \int_t^T \Gamma_r C_r dr\Big)/\mathcal{F}_t\Big] \\
Y_t &= \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\Big[\Big(\Gamma_T Y_T + \int_t^T \Gamma_r C_r dr\Big)/\mathcal{F}_t\Big].
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule annoncée.

□

Remarque. Notons que si $\xi \geq 0$ et si $C_t \geq 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$. Cette remarque va nous permettre d'obtenir le théorème de comparaison au paragraphe suivant.

Pour illustrer ce résultat prenons le cas où a et C sont nuls. On a alors

$$Y_t = \mathbb{E}\Big[\xi \exp\Big(\int_t^T b_r dB_r - \frac{1}{2}\int_t^T |b_r|^2 dr\Big)|\mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}^*(\xi|\mathcal{F}_t),$$

où $\mathbb{P}^*$ est la mesure de densité par rapport à $\mathbb{P}$

$$L_T = \exp \int_0^T b_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^T |b_r|^2 dr.$$

Une autre façon de voir cela, plus dans l'esprit « probabilité risque neutre », est de regarder l'EDSR sous $\mathbb{P}$. En effet, sous $\mathbb{P}$. $A_t = B_t - \int_0^t b_r dr$ est un MB -c'est le théorème de Girsanov. Or l'équation peut s'écrire

$$-dY_t = Z_t b_t dt - Z_t dB_t = -Z_t dA_t, \qquad Y_T = \xi.$$

Donc, sous $\mathbb{P}$, Y est une martingale, ce qui montre aussi la formule.

On retrouve ainsi les changements de mesures de probabilité du type « transformation de Girsanov ».

1.3.2 Théorème de comparaison

Ce paragraphe est consacré au « théorème de comparaison » qui permet de comparer les solutions de deux EDSR (dans $\mathbb{R}$) dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théorème est dû à l'origine à S. Peng [34].

Théorème 1.3.1. *Supposons que $k = 1$ et que $(\xi, f), (\xi^{'}, f^{'})$ vérifient l'hypothèse (L). On note (Y, Z) et $(Y^{'}, Z')$ les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que :*

$$\mathbb{P} - p.s., \qquad \xi \leq \xi^{'} \text{ et } f(t, Y_t, Z_t) \leq f^{'}(t, Y_t, Z_t),$$

$m \otimes \mathbb{P}$-P.s. (m mesure de Lebesgue). Alors,

$$\mathbb{P} - p.s \qquad \forall t \in [0, T] \qquad Y_t \leq Y_t^{'}.$$

Si de plus, $Y_0 = Y_0^{'}$, alors $\mathbb{P}$-p.s, $Y_t = Y_t^{'}$, $0 \leq t \leq T$ et $f(t, Y_t, Z_t) = f^{'}(t, Y_t, Z_t)$, $m \otimes \mathbb{P}$-p.s. En particulier, dès que $\mathbb{P}(\xi \leq \xi^{'}) > 0$ ou $f(t, Y_t, Z_t) \leq f^{'}(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de $m \otimes \mathbb{P}$-mesure strictement positive alors : $Y_0 \leq Y_0^{'}$.

Preuve La preuve s'effectue par linéarisation. On cherche une équation satisfaite par : $S_t = Y' - Y, E_t = Z' - Z$ et $\zeta = \xi' - \xi$,

$$S_t = \zeta + \int_t^T (f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r))dr - \int_t^T E_r dB_r.$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant

$$\begin{aligned} f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r) &= f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r) + f'(r, Y_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z_r) \\ &\quad + f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r) \quad (qui \ \ est \ \ positif \ \ ici). \end{aligned}$$

On introduit deux processus a et b : a est à valeurs réelles et b est un vecteur (colonne) de dimension d. On pose :

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r)}{S_r} & \text{si} \quad S_r \neq 0 \\ \\ a_r = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour définir b, on doit introduire une autre notation : pour $0 \leq i \leq d$, $Z_r^{(i)}$ est la ligne dont les $d - i$ dernières composantes sont celles de Z'_r et les i premières celles de Z_r. Pour $1 \leq i \leq d$, on pose :

$$\begin{cases} b_r^i = \dfrac{f'(r, Y_r, Z_r^{i-1}) - f'(r, Y_r, Z_r^i)}{E_r^i} & \text{si} \quad E_r^i \neq 0 \\ \\ b_r^i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que, puisque f' est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables et bornés.

Avec ces notations, on a,

$$S_t = \zeta + \int_t^T (a_r S_r + b_r E_r + c_r)dr - \int_t^T E_r dB_r,$$

où : $c_r = f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r)$. Par hypothèse, on a $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$. Utilisant la formule «explicite» pour les EDSR linéaires- Proposition (1.3.1), on a,

$$S_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left(\zeta \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \backslash \mathcal{F}_t \right), \qquad t \in [0, T],$$

avec, pour $0 \leq n \leq T$,

$$\Gamma_r = \exp\left\{ \int_0^n b_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^n |b_s|^2 ds + \int_0^n a_s ds \right\}.$$

Cette formule montre que $S_t \geq 0$ dès que $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$.

Pour la seconde partie du résultat, si de plus $S_0 = 0$ on a :

$$0 = \mathbb{E}\left(\zeta\Gamma_T + \int_0^T c_r\Gamma_r dr\right),$$

et la variable aléatoire intégrée est positive. Par conséquent, elle est nulle $\mathbb{P}-p.s.$ ce qui termine la preuve de ce théorème en remarquant que dans ce cas $\zeta = 0$ et $c_r = 0$.

$\square$

Remarque.

On peut supposer que $f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'}) \leq f^{'}(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})$ au lieu de $f(t, Y_t, Z_t) \leq f^{'}(t, Y_t, Z_t)$ pour obtenir le résultat précédent. Il suffit de faire une linéarisation en partant de l'écriture :

$$\begin{aligned} f^{'}(r, Y_r^{'}, Z_r^{'}) - f(r, Y_r, Z_r) &= f^{'}(r, Y_r^{'}, Z_r^{'}) - f(r, Y_r^{'}, Z_r^{'}) + f(r, Y_r^{'}, Z_r^{'}) - f(r, Y_r, Z_r^{'}) \\ &\quad + f(r, Y_r, Z_r^{'}) - f(r, Y_r, Z_r). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Les solutions L^p des EDSRs sur un intervalle de temps fixe

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux équations différentielles stochastiques rétrogrades du type suivant :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

où les données ξ et $\{f(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$ sont dans L^p avec $p \in (1,2)$. Notre activité principale est de trouver l'existence et l'unicité des processus inconnues $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ et $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$, qui doivent être adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien : c'est un point crucial.

Nous fournissons également ce résultat dans le cas d'un générateur monotone pour des équations sur un intervalle de temps fixe.

Notre objectif dans ce chapitre est de prouver le résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades dans $\mathbb{R}^d$ lorsque ξ et le processus $\{f(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$ ne sont que intégrables avec f seulement monotone dans la variable y.

Avant de présenter le résultat d'existence et d'unicité, nous allons donné quelques notations et identités de base et les hypothèses nécessaire.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Notations et définition d'une solution

Tout d'abord, $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard avec des valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle augmentée de B qui satisfait les conditions usuelles. Dans ce chapitre, nous utiliserons toujours cette filtration.

Dans la plupart de ce travail, les processus stochastiques seront définis pour $t \in [0, T]$, où T est un nombre réel positif et prendront leurs valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour certains entier positif n. Si $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ est un tel processus, nous écrirons simplement X_* ou $\sup_t |X_t|$ au lieu de $\sup_{t\in[0,T]} |X_t|$ où $|x|$ dénote la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Pour n'importe quel réel $p > 0$, $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des processus $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$, adaptés et càd-làg à valeur dans $\mathbb{R}^n$, tels que :

$$\|X\|_{\mathcal{S}^p} = \mathbb{E}\left[\sup_t |X_t|^p\right]^{1\wedge 1/p} < \infty.$$

   Si $p \geq 1$, $\|.\|_{\mathcal{S}^p}$ est une norme sur $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ et si $p \in (0, 1), (X, X') \mapsto \|X - X'\|_{\mathcal{S}^p}$ définit une distance sur $\mathcal{S}^p$. Sous cette métrique, $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ est complet.

2. $M^p(\mathbb{R}^n)$ dénote l'ensemble de (classes équivalentes) de processus prévisible $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ avec des valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\|X\|_{M^p} = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |X_r|^2 dr\right)^{p/2}\right]^{1\wedge 1/p} < \infty.$$

   Pour $p \geq 1, M^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach muni de cette norme et pour $p \in (0, 1), M^p$ est un espace métrique complet avec la distance résultante.

On considére une fonction aléatoire $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \mapsto \mathbb{R}^k$ mesurable par rapport à $Prog \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k\times d})$, où Prog dénote le sigma algèbre de sous-ensembles progressive sur $[0, T] \times \Omega$, et ξ un vecteur aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

$\mathbb{R}^{k\times d}$ est identifié avec l'espace des matrices réelles avec k lignes et d colonnes. Si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, nous avons $|z|^2 = trace(zz^*)$.

On rappele ce que nous entendons par une solution d'une EDSR (2.1).

Définition 2.1.1. *Une solution de l'EDSR* (2.1) *est un couple de processus* (Y, Z) *progressivement mesurables avec des valeurs dans* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *telles que :*

$\mathbb{P}$*-p.s.,* $t \mapsto Z_t$ *appartient à* $L^2(0,T)$, $t \mapsto f(t, Y_t, Z_t)$ *appartient à* $L^1(0,T)$ $\mathbb{P}$*-p.s., et*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

2.1.2 Une identité de base

Comme expliqué dans l'introduction, nous voulons traiter les EDSRs avec des données dans L^p avec $p < 2$ et utiliser la formule d'Itô appliquée à la fonction $x \mapsto |x|^p$ qui n'est pas assez lisse. C'est pourquoi nous commençons par une généralisation au cas multidimensionnel de la formule de Tanaka. Introduisons maintenant la notation $\hat{x} = |x|^{-1}x\mathbb{1}_{x\neq 0}$. Le lemme suivant sera notre outil principal dans le traitement des solutions dans L^p. Il est très probable que ce résultat est déjà apparu quelque part, mais nous avons pas vu, donc nous fournir une preuve.

Lemme 2.1.1. *Soient* $\{K_t\}_{t\in[0,T]}$ *et* $\{H_t\}_{t\in[0,T]}$ *deux processus progressivement mesurables avec des valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$ *telles que* $\mathbb{P}$*-p.s.,*

$$\int_0^T (|K_t| + |H_t|^2)dt < +\infty.$$

Nous considérons la semi-martingale $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^k$ *définie par*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \qquad 0 \le t \le T.$$

Donc, pour tout $p \ge 1$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
|X_t|^p - \mathbb{1}_{p=1}L_t \;\; = \;\; & |X_0|^p + p\int_0^t |X_s|^{p-1}\langle \hat{X}_s, K_s\rangle ds + p\int_0^t |X_s|^{p-1}\langle \hat{X}_s, H_s dB_s\rangle \\
& + \frac{p}{2}\int_0^t |X_s|^{p-2}\mathbb{1}_{X_s\neq 0}\{(2-p)(|H_s|^2 - \langle \hat{X}_s, H_s H_s^* \hat{X}_s\rangle) \\
& + (p-1)|H_s|^2\}ds,
\end{aligned}$$

où $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ *est un processus croissant continu avec* $L_0 = 0$, *ce qui n'augmente que sur la limite de l'ensemble aléatoire* $\{t \in [0,T], X_t = 0\}$.

Preuve.

Puisque la fonction $x \mapsto |x|^p$ n'est pas assez lisse (pour $p \in [1, 2)$) pour appliquer la formule d'Itô, nous utilisons une approximation. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons la fonction $u_\varepsilon(x) = (|x|^2 +$

$\varepsilon^2)^{1/2}$. C'est une fonction lisse et nous avons, notant I la matrice d'identité de $\mathbb{R}^k$. On a $u_\varepsilon^p(x) = (|x|^2 + \varepsilon^2)^{p/2}$

$$\begin{aligned}
\nabla u_\varepsilon^P(x) &= \frac{p}{2}\Big(2|x|\Big)\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)^{\frac{p}{2}-1} \\
&= p|x|\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)^{\frac{p-2}{2}} \\
&= p|x|\Big((|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\Big)^{p-2} \\
&= pu_\varepsilon^{p-2}(x)x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2u_\varepsilon^p(x) &= p\Big[\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^{p-2} + px\frac{p-2}{2}\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)^{\frac{p-2}{2}-1} \\
&= p\Big[\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)\Big]^{p-2} + p(p-2)x^2\Big[\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^{p-4} \\
&= p\Big[\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^{p-2} + p(p-2)x^2\Big[\Big(|x|^2+\varepsilon^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^{p-4} \\
&= pu_\varepsilon^{p-2}(x) + p(p-2)u_\varepsilon^{p-4}(x)x^2 \\
&= pu_\varepsilon^{p-2}(x)I + p(p-2)u_\varepsilon^{p-4}(x)(x\otimes x).
\end{aligned}$$

La formule d'Itô conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^p(X_t) &= u_\varepsilon^p(X_0) + p\int_0^t u_\varepsilon^{p-2}(X_s)\langle X_s, K_s\rangle ds + p\int_0^t u_\varepsilon^{p-2}(X_s)\langle X_s, H_s dB_s\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t trace(D^2u_\varepsilon^p(X_s)H_sH_s^*)ds.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Il reste essentiellement à passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ dans cette identité. Pour faire ça, remarquons d'abord que

$$\int_0^t u_\varepsilon^{p-2}(X_s)\langle X_s, K_s\rangle ds \to \int_0^t |X_s|^{p-1}\langle \hat{X}_s, K_s\rangle ds,$$

$\mathbb{P}$-p.s., et que, au moins uniformément sur $[0,T]$ $\mathbb{P}$-probabilité $\mathbb{P}$-p.s., nous avons

$$\int_0^t u_\varepsilon^{p-2}(X_s)\langle X_s, H_s dB_s\rangle \to \int_0^t |X_s|^{p-1}\langle \hat{X}_s, H_s dB_s\rangle;$$

cette convergence des intégrales stochastiques découle de la convergence suivante :

$$\int_0^T |X_s|^2 \mathbb{1}_{X_s\neq 0}|H_s|^2(|X_s|^{p-2} - u_\varepsilon^{p-2}(X_s))^2 ds \to 0,$$

ce qui ressort clairement du théorème de convergence dominé.

Il reste à étudier la convergence du terme incluant la dérivée seconde de u_ε. On écrivons

$$\begin{aligned} trace(D^2u_\varepsilon^p(X_s)H_sH_s^*) &= p(2-p)(|X_s|u_\varepsilon^{-1}(X_s))^{4-p}|X_s|^{p-2}\mathbb{1}_{X_s\neq 0}(|H_s|^2 - \langle \hat{X}_s, H_sH_s^*\hat{X}_s\rangle) \\ &\quad + p(p-1)(|X_s|u_\varepsilon^{-1}(X_s))^{4-p}|X_s|^{p-2}\mathbb{1}_{X_s\neq 0}|H_s|^2 + C_s^\varepsilon(p), \end{aligned}$$

où $C_s^\varepsilon(p) = p\varepsilon^2|H_s|^2u_\varepsilon^{p-4}(X_s)$.

On a

$$|H_s|^2 \geq \langle \hat{X}_s, H_sH_s^*\hat{X}_s\rangle. \tag{2.3}$$

En outre,

$$\frac{|X_s|}{u_\varepsilon(X_s)} \nearrow \mathbb{1}_{\{X_s\neq 0\}},$$

comme $\varepsilon \to 0$. Donc par convergence monotone, comme $\varepsilon \to 0$,

$$\int_0^t (|X_s|u_\varepsilon^{-1}(X_s))^{p-4}|X_s|^{p-2}\mathbb{1}_{X_s\neq 0}\{(2-p)(|H_s|^2 - \langle \hat{X}_s, H_sH_s^*\hat{X}_s\rangle) + (p-1)|H_s|^2\}ds,$$

converge vers

$$\int_0^t |X_s|^{p-2}\mathbb{1}_{X_s\neq 0}\{(2-p)(|H_s|^2 - \langle \hat{X}_s, H_sH_s^*\hat{X}_s\rangle) + (p-1)|H_s|^2\}ds,$$

$\mathbb{P}$-p.s., pour tous $0 \leq t \leq T$.

Il découle maintenant de (2.2) que $\left(L_t^\varepsilon(p) := \int_0^t C_s^\varepsilon(p)ds\right)_{t\in[0,T]}$ converge comme $\varepsilon \to 0$ vers un processus croissant continu $\{L_t(p)\}_{t\in[0,T]}$, et le résultat suit.

Pour $p \geq 4$, $L(p) \equiv 0$ puisque $C^\varepsilon(p)$ converge vers 0 dans $L^1(0,T)$. Maintenant, si $p \in (1,4)$, on écrit

$$C_s^\varepsilon(p) = p(\varepsilon^2|H_s|^2u_\varepsilon^{-3}(X_s))^\theta(\varepsilon^2|H_s|^2)^{1-\theta},$$

où $\theta = (4-p)/3 \in (0,1)$, et puis, nous obtenons, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$L_T^\varepsilon(p) \leq pL_T^\varepsilon(1)^\theta\left(\int_0^T \varepsilon^2|H_s|^2ds\right)^{1-\theta},$$

qui tend vers 0 comme $\varepsilon \to 0$ de sorte que $L(p) \equiv 0$.

Notons par L le processus $L(1)$ et posons $A = \{t \in [0,T], X_t = 0\}$.

1. Si t est à l'intérieur de A, alors il existe $\delta > 0$ tel que $X_s = 0$ à chaque fois que $|t-s| \leq \delta$; la variation quadratique de X est constante sur l'intervalle $[t-\delta, t+\delta]$ et donc $H_s = 0$ presque partout sur cet intervalle.

2. Si t est dans le complément de l'ensemble A, il existe $\delta > 0$ tel que $X_s \neq 0$ si $|t-s| \leq \delta$.

Dans les deux cas, $C^\varepsilon(1)$ converge vers 0 en $L^1(t-\delta, t+\delta)$ et

$$L_{t+\delta} - L_{t-\delta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t-\delta}^{t+\delta} C_s^\varepsilon(1) ds = 0.$$

Ceci conclut la preuve du lemme.

□

Corollaire 2.1.1. *Si* (Y, Z) *est une solution de l'EDSR* (2.1), $p \geq 1$, $c(p) = p[(p-1) \wedge 1]/2$ *et* $0 \leq t \leq u \leq T$, *alors*

$$\begin{aligned} |Y_t|^p + c(p) \int_t^u |Y_s|^{p-2} \mathbb{1}_{Y_s \neq 0} |Z_s|^2 ds \quad &\leq \quad |Y_u|^p + p \int_t^u |Y_s|^{p-1} \langle \hat{Y}_s, f(s, Y_s, Z_s) \rangle ds \\ &\quad - p \int_t^u |Y_s|^{p-1} \langle \hat{Y}_s, Z_s dB_s \rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Preuve. La preuve découle de la conséquence suivante du lemme précédent.

$$\begin{aligned} |X_u|^p \quad &\geq \quad |X_t|^p + p \int_t^u |X_s|^{p-1} \langle \hat{X}_s, K_s \rangle ds + p \int_t^u |X_s|^{p-1} \langle \hat{X}_s, H_s dB_s \rangle \\ &\quad + c(p) \int_t^u |X_s|^{p-2} \mathbb{1}_{X_s \neq 0} |H_s|^2 ds. \end{aligned}$$

□

2.2 Estimations à priori

Tout d'abord, nous présentons quelques estimations concernant les solutions de l'EDSR (2.1). Dans ce qui suit, nous supposons que $p > 1$, ξ est un vecteur aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$ et f est une fonction aléatoire de $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$ dans $\mathbb{R}^k$, qui est mesurable par rapport à *prog* $\times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k \times d})$. Nous allons utiliser l'hypothèse suivante : $\mathbb{P}$-p.s.,

$$(t, y, z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, \qquad \langle \hat{y}, f(t,y,z) \rangle \leq f_t + \mu|y| + \lambda|z|, \qquad (\mathbf{A})$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ et $\{f_t\}_{t \in [0,T]}$ est un processus progressivement mesurable positif.

Posons $F = \displaystyle\int_0^T f_r dr$.

Ici, nous souhaitons obtenir des estimations pour des solutions de l'EDSR dans L^p dans l'esprit du travail (El Karoui et autre, [13]), ce qui montre que ces estimations sont très utiles pour l'étude de l'existence et l'unicite des solutions. La difficulté provient ici de deux faits : premièrement, la fonction f n'est pas supposée être continuement Lipschitz et deuxièmement, nous voulons obtenir des estimations L^p pour $p \in (1, 2)$.

Nous commençons par montrer comment contrôler le processus Z en termes de données et Y.

Lemme 2.2.1. *Soit l'hypothèse* $(\boldsymbol{A})$ *vérifiée et soit* (Y, Z) *une solution de l'EDSR* (2.1). *Supposons de plus que, pour certaines* $p > 0$, F^p *soit intégrable.*

Si $Y \in \mathcal{S}^p$ *alors* Z *appartient à* M^p *et qu'il existe une constante* C_p *ne dépendant que de* p *telle que pour tout* $\mu + \lambda^2 \leq a$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2at}|Z_r|^2 dr\right)^{p/2}\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\sup_t e^{apt}|Y_t|^p + \left(\int_0^T e^{ar} f_r dr\right)^p\right].$$

Preuve. Fixons $\mu + \lambda^2 \leq a$ et définissons $\tilde{Y}_t = e^{at}Y_t$, $\tilde{Z}_t = e^{at}Z_t$. $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ résout l'EDSR

$$\tilde{Y}_t = \tilde{\xi} + \int_t^T \tilde{f}(r, \tilde{Y}_r, \tilde{Z}_r)dr - \int_t^T \tilde{Z}_r dB_r, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

où $\tilde{\xi} = e^{at}\xi$ et $\tilde{f}(t, y, z) = e^{at}f(t, e^{-at}y, e^{-at}z) - ay$ qui satisfait l'hypothèse $(\mathbf{A})$ avec $\tilde{f}_t = e^{at}f_t$, $\tilde{\lambda} = \lambda$ et $\tilde{\mu} = \mu - a$. Puisque nous travaillons sur un intervalle de temps compact, les conditions d'intégrabilité sont équivalentes avec ou sans le superscript $\sim$. Ainsi, avec ce changement de variable, nous réduisons au cas $a = 0$ et $\mu + \lambda^2 \leq 0$. Nous oublions le superscript $\sim$ pour la convenable de la notation.

Pour chaque entier $n \geq 1$, introduisons le temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\left\{t \in [0, T], \int_0^t |Z_r|^2 dr \geq n\right\} \wedge T.$$

La formule d'Itô nous donne

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_r f(r, X_r)dr + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_{x_i} f(r, X_r)dX_r^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i, x_j} f(r, X_r)d\langle X^i, X^j\rangle_r, \end{aligned}$$

$$f(t, X_t) = Y_{\tau_n};$$

$$f(0, X_0) = Y_0;$$

$$\int_0^t \partial_r f(r,X_r)dr = \int_0^t \partial_r f(t,Y_t)dr = \int_0^{\tau_n} \langle Y_r, f_r(r,Y_r,Z_r)\rangle dr;$$
$$\int_0^t \partial_r f_i(r,X_r)dX_r^i = \int_0^t \partial_{r_i} Y(t,X_t)dX_i = \int_0^{\tau_n} \langle Y_r, Z_r\rangle dB_r;$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i,x_j} f(r,X_r)d\langle X^i,X^j\rangle_r \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i,x_j} Y(t,X_t)d\langle X^i,X^j\rangle_r = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_n} Z_r d_r,$$

$$Y_{\tau_n} = Y_0 - \int_0^{\tau_n}\langle Y_r, f(r,Y_r,Z_r)\rangle dr + \int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r\rangle dB_r + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_n} Z_r dr,$$

$$|Y_{\tau_n}|^2 = |Y_0|^2 - 2\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, f(r,Y_r,Z_r)\rangle dr + 2\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r\rangle dB_r + \int_0^{\tau_n} |Z_r|^2 dr,$$

alors
$$|Y_0|^2 + \int_0^{\tau_n} |Z_r|^2 dr = |Y_{\tau_n}|^2 + 2\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, f(r,Y_r,Z_r)\rangle dr - 2\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle.$$

Mais, à partir de l'hypothèse sur f, nous avons, puisque $\mu + \lambda^2 \leq 0$,

$$\begin{aligned} 2\langle y, f(r,y,z)\rangle &\leq 2|y|f_r + 2\mu|y|^2 + 2\lambda^2|y|^2 + |z|^2/2 \\ &\leq 2|y|f_r + |z|^2/2. \end{aligned}$$

Donc, puisque $\tau_n \leq T$, nous déduirons que

$$|Y_0|^2 + \int_0^{\tau_n} |Z_r|^2 dr \leq |Y_{\tau_n}|^2 + 2Y_* \int_0^T f_r dr + \frac{1}{2}\int_0^T |Z_r|^2 dr - 2\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle,$$

et on a
$$\frac{1}{2}\int_0^{\tau_n} |Z_r|^2 dr \leq Y_*^2 + 2Y_* \int_0^T f_r dr + 2\left|\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\right|.$$

Il s'ensuit que
$$\int_0^{\tau_n} |Z_r|^2 dr \leq 4\left[Y_*^2 + \left(\int_0^T f_r dr\right)^2 + \left|\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\right|\right],$$

et donc que
$$\left(\int_0^{\tau_n} |Z_r|^2 dr\right)^{p/2} \leq c_p\left[Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p + \left|\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\right|^{p/2}\right]. \tag{2.5}$$

Mais par l'inégalité BDG, nous obtenons

$$\begin{aligned} c_p\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\right|^{p/2}\right] &\leq d_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n} |Y_r|^2|Z_r|^2 dr\right)^{p/4}\right] \\ &\leq d_p\mathbb{E}\left[Y_*^{p/2}\left(\int_0^{\tau_n} |Z_r|^2 dr\right)^{p/4}\right], \end{aligned}$$

et ainsi

$$c_p\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\right|^{p/2}\right] \leq \frac{d_p^2}{2}\mathbb{E}[Y_*^p] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right].$$

En revenant à l'estimation (2.5), nous obtenons, pour chaque $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right] &\leq c_p\mathbb{E}\left[Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p + \left|\int_0^{\tau_n}\langle Y_r, Z_r dB_r\rangle\right|^{p/2}\right] \\
&\leq c_p\mathbb{E}\left[Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p + \frac{d_p^2}{2}Y_*^p + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\tau_n}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right] \\
&\leq c_p\mathbb{E}\left[\left(1+\frac{d_p^2}{2}\right)Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\tau_n}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right], \\
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right] &\leq c_p\mathbb{E}\left[\left(1+\frac{d_p^2}{2}\right)Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p\right] \\
&\leq \left[1 \vee \left(1+\frac{d_p^2}{2}\right)\right]c_p\mathbb{E}\left[Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p\right] \\
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right] &\leq C_p\mathbb{E}\left[Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p\right],
\end{aligned}$$

et le lemme de Fatou implique que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{T}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[Y_*^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p\right].$$

Ce qui terminer la preuve.

□

Nous gardons cette étude en énonçant l'estimation standard dans notre contexte. La difficulté vient du fait que f n'est pas Lipschitz dans y et aussi du fait que la fonction $y \mapsto |y|^p$ n'est pas $\mathcal{C}^2$ puisque nous allons travailler avec $p \in (1, 2)$.

Proposition 2.2.1. *Soit l'hypothèse* ($\boldsymbol{A}$) *satisfaite et supposons que, pour certains* $p > 1$, F *appartient à* L^p. *Soit* (Y, Z) *une solution de l'EDSR* (2.1) *où* Y *appartient à* $\mathcal{S}^p$. *Donc, il existe une constante* C_p, *ne dépend que de* p, *telle que pour tout* $a \geq \mu + \lambda^2/[1 \wedge (p-1)]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_t e^{apt}|Y_t|^p + \left(\int_0^T e^{2ar}|Z_r|^2dr\right)^{p/2}\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[e^{apT}|\xi|^p + \left(\int_0^T e^{ar}f_r dr\right)^p\right].$$

Preuve. On fixe $a \geq \mu + \lambda^2/[1 \wedge (p-1)]$. Comme dans la preuve du lemme précédent, nous fait le changement de variables $\tilde{Y}_t = e^{at}Y_t$, $\tilde{Z}_t = e^{at}Z_t$. Cela réduit la preuve aux cas $a = 0$ et $0 \geq \mu + \lambda^2/[1 \wedge (p-1)]$; omettant le superscript $\sim$, nous devons prouver que

$$\mathbb{E}\left[Y_*^p + \left(\int_0^T |Z_r|^2 dr\right)^{p/2}\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[|\xi|^p + \left(\int_0^T f_r dr\right)^p\right].$$

À partir du Corollaire (2.1.1) nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|Y_t|^p + c(p)\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2 dr \leq |\xi|^p + p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, f(r, Y_r, Z_r)\rangle dr - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_r dB_r\rangle.$$

L'hypothèse sur f engendre l'inégalité

$$\langle \hat{y}, f(r, y, z)\rangle \leq f_r + \mu|y| + \lambda|z|,$$

a partir de laquelle nous déduisons, avec probabilité un, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}|Y_t|^p + c(p)\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2 dr &\leq |\xi|^p + p\int_t^T \Big(|Y_r|^{p-1}(f_r + \mu|Y_r| + \lambda|Z_r|)\Big) dr \\ &\quad - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_r dB_r\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Y_t|^p + c(p)\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2 dr &\leq |\xi|^p + p\int_t^T (|Y_r|^{p-1} f_r + \mu|Y_r|^p) dr + p\lambda\int_t^T |Y_r|^{p-1}|Z_r| dr \\ &\quad - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_r dB_r\rangle. \qquad (\mathbf{B})\end{aligned}$$

Tout d'abord, nous déduisons de l'inégalité précédente que, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\int_0^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2 dr < +\infty.$$

De plus, nous avons

$$p\lambda|Y_r|^{p-1}|Z_r| \leq \frac{p\lambda^2}{1\wedge(p-1)}|Y_r|^p - \frac{c(p)}{2}|Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2.$$

Revenant à l'équation ($\mathbf{B}$)

$$\begin{aligned}|Y_t|^p + c(p)\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2 dr &\leq |\xi|^p + p\int_t^T (|Y_r|^{p-1} f_r + \mu|Y_r|^p) dr + \frac{p\lambda^2}{1\wedge(p-1)}\int_t^T |Y_r|^p dr \\ &\quad - \frac{c(p)}{2}\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2 dr - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_r dB_r\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Y_t|^p + \frac{c(p)}{2}\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2dr &\leq |\xi|^p + p\int_t^T (|Y_r|^{p-1}f_r + \mu|Y_r|^p)dr \\ &+\frac{p\lambda^2}{1\wedge(p-1)}\int_t^T |Y_r|^pdr - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_rdB_r\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Y_t|^p + \frac{c(p)}{2}\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2dr &\leq |\xi|^p + p\int_t^T |Y_r|^{p-1}f_rdr + p\int_t^T \mu|Y_r|^pdr \\ &+\frac{p\lambda^2}{1\wedge(p-1)}\int_t^T |Y_r|^pdr - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_rdB_r\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Y_t|^p + \frac{c(p)}{2}\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2dr &\leq |\xi|^p + p\int_t^T |Y_r|^{p-1}f_rdr + p\int_t^T |Y_r|^pdr\Big[\mu + \frac{p\lambda^2}{1\wedge(p-1)}\Big] \\ &-p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_rdB_r\rangle,\end{aligned}$$

et donc, puisque $\mu + \lambda^2/[1\wedge(p-1)] \leq 0$, nous obtenons l'inégalité

$$|Y_t|^p + \frac{c(p)}{2}\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2dr \leq |\xi|^2 + p\int_t^T |Y_r|^{p-1}f_rdr - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_rdB_r\rangle.$$

Posons $X = |\xi|^p + p\int_0^T |Y_r|^{p-1}f_rdr$; alors, nous avons, p.s., pour chaque $t \in [0,T]$,

$$|Y_t|^p + \frac{c(p)}{2}\int_t^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2dr \leq X - p\int_t^T |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_rdB_r\rangle. \tag{2.6}$$

Il découle de l'inégalité BDG que $\left(M_t := \int_0^t |Y_r|^{p-1}\langle \hat{Y}_r, Z_rdB_r\rangle\right)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale uniformément intégrable. En effet, nous avons, par l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_T^{1/2}] &\leq \mathbb{E}\Big[Y_*^{p-1}\Big(\int_0^T |Z_r|^2dr\Big)^{1/2}\Big] \\ &\leq \frac{(p-1)}{p}\mathbb{E}[Y_*^p] + \frac{1}{p}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |Z_r|^2dr\Big)^{p/2}\Big],\end{aligned}$$

le dernier terme étant fini puisque Y appartient à $\mathcal{S}^p$ et alors Z appartient à M^p par le lemme (2.2.1).

Revenons à l'inégalité (2.6), et en prenant l'esperence pour $t = 0$, nous obtenons à la fois

$$\frac{c(p)}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^T |Y_r|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_r\neq 0}|Z_r|^2dr\Big] \leq \mathbb{E}[X], \tag{2.7}$$

et,

$$\mathbb{E}[Y_*^p] \leq \mathbb{E}[X] + k_p \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T^{1/2}]. \tag{2.8}$$

D'autre part, nous avons aussi,

$$\begin{aligned} k_p \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T^{1/2}] &\leq k_p \mathbb{E}\left[Y_*^{p/2} \left(\int_0^T |Y_r|^{p-2} \mathbb{1}_{Y_r \neq 0} |Z_r|^2 dr \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}[Y_*^p] + \frac{k_p^2}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^T |Y_r|^{p-2} \mathbb{1}_{Y_r \neq 0} |Z_r|^2 dr \right]. \end{aligned}$$

Revenant aux inégalités (2.7) et (2.8), on obtient

$$\mathbb{E}[Y_*^p] \leq d_p \mathbb{E}[X].$$

En appliquant encore une fois l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned} p d_p \mathbb{E}\left[\int_0^T |Y_r|^{p-1} f_r dr \right] &\leq p d_p \mathbb{E}\left[Y_*^{p-1} \int_0^T f_r dr \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}[Y_*^p] + d_p' \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f_r dr \right)^p \right], \end{aligned}$$

à partir de la quelle on déduit, en venant à la définition de X, que

$$\mathbb{E}[Y_*^p] \leq C_p \mathbb{E}\left[|\xi|^p + \left(\int_0^T f_r dr \right)^p \right].$$

Le résultat découle du le lemme (2.2.1).

□

2.3 Existence et unicité d'une solution

Avec l'aide des estimation à priori ci-dessus, nous pouvons obtenir un résultat d'existence et d'unicité.

Comme précédemment, considérons un vecteur aléatoire ξ mesurable par rapport $\mathcal{F}_T$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$ et une fonction aléatoire $f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ qui est $prog \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k\times d})$ mesurable.

Nous allons travailler sous les hypothèses suivantes : pour certains $p > 1$,

(**H1**) : $$\mathbb{E}\left[|\xi|^p + \left(\int_0^T |f(s,0,0)| ds \right)^p \right] < +\infty,$$

il existe des constantes $\lambda \geq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ telles que, $\mathbb{P}$-p.s. pour chaque

$(t, y, y', z, z') \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^{k\times d}$:

(**H2**) : $$|f(t, y, z) - f(t, y, z')| \le \lambda |z - z'|,$$

(**H3**) : $$\langle y - y', f(t, y, z) - f(t, y', z)\rangle \le \mu |y - y'|^2.$$

Nous supposons aussi que,

(**H4**) : $\mathbb{P}$-p.s., $\forall (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{k\times d}$, $y \mapsto f(t, y, z)$ est continue

et enfin que

(**H5**) : $\forall r > 0, \quad \psi_r(t) := \sup_{|y|\le r} |f(t, y, 0) - f(t, 0, 0)| \in L^1([0, T] \times \Omega, m \otimes \mathbb{P})$.

Nous voulons obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour l'EDSR (2.1) sous les hypothèses précédentes pour tous $p > 1$.

Rappelons tout d'abord le résultat de Pardoux ([32], Théorème 2.2). Pour cela, introduisons l'hypothèse suivante :

(**H5'**) : $\mathbb{P}-p.s., \quad \forall (t, y) \in [0, T]\times\mathbb{R}^k, \quad |f(t, y, 0)| \le |f(t, 0, 0)| + \varphi(|y|)$, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction déterministe croissante continue.

Théorème 2.3.1. *Soit* $p = 2$. *Sous les hypothèses* (***H1***) – (***H4***) *et* (***H5'***), *l'EDSR* (2.1) *a une unique solution dans* $\mathcal{S}^2 \times M^2$.

Nous prouvons maintenant notre résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèses* (***H1***) – (***H5***), *l'EDSR* (2.1) *a une unique solution dans* $\mathcal{S}^p \times \mathcal{M}^p$.

Preuve. Commençons par étudier la partie unicité.

Considérons (Y, Z) et (Y', Z') deux solutions de notre EDSR dans l'espace approprié. Nous notons par (U, V) le processus $(Y - Y', Z - Z')$; ce processus est la solution de l'EDSR suivante :

$$U_t = \int_t^T g(s, U_s, V_s)ds - \int_t^T V_s dB_s, \qquad 0 \le t \le T,$$

où g représente la fonction aléatoire

$$g(t, y, z) = f(t, y + Y'_t, z + Z'_t) - f(t, Y'_t, Z'_t).$$

Grâce aux hypothèses (**H2**) et (**H3**), la fonction g vérifie l'hypothèse (**A**) avec $f \equiv 0$. En effet

$$\langle \hat{y}, g(t, y, z)\rangle \le 0 + \mu|y| + \lambda|z|,$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{y}, f(t, y+Y_t^{'}, z+Z^{'}) - f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})\rangle &= \langle \hat{y}, f(t, y+Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) \\ &\quad + f(t, Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})\rangle \\ &= \langle \hat{y}, f(t, y+Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, z+Z_t^{'})\rangle \\ &\quad + \langle \hat{y}, f(t, Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})\rangle \\ &= \langle \hat{y}+Y_t^{'}-Y_t^{'}, f(t, y+Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, z+Z_t^{'})\rangle \\ &\quad + \langle \hat{y}, f(t, Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{y}, f(t, y+Y_t^{'}, z+Z^{'}) - f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})\rangle &= \langle \hat{y}, f(t, y+Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, z+Z_t^{'}) \\ &\quad \langle \hat{y}, f(t, Y^{'}, z+Z_t^{'}) - f(t, Y_t^{'}, Z_t^{'})\rangle \\ &\leq 0 + \mu|y| + \lambda|z|.\end{aligned}$$

Par la Proposition (2.2.1), nous obtenons immédiatement que $(U, V) = (0, 0)$.

Passons à la partie existence. Afin de simplifier les calculs, nous supposerons toujours que la condition (**H3**) est satisfaite avec $\mu = 0$. S'il n'est pas vrai, le changement de variables $\tilde{Y}_t = e^{\mu t} Y_t$, $\tilde{Z}_t = e^{\mu t} Z_t$ se réduit à ce cas . Nous mettons $f_t^0 = f(t, 0, 0)$.

La preuve sera divisé en deux étapes.

Première étape : Nous supposons que ξ et $\sup_t |f_t^0|$ sont des variables aléatoires bornées. Soit r un réel positif tel que

$$\sqrt{e^{(1+\lambda^2)T}}(\|\xi\|_\infty + T\|f^0\|_\infty) < r.$$

Soit θ_r une fonction lisse telle que $0 \leq \theta_r \leq 1$, $\theta_r(y) = 1$ pour $|y| \leq r$ et $\theta_r(y) = 0$ dès que $|y| \geq r+1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note $q_n(z) = zn/(|z| \vee n)$ et on définit

$$h_n(t, y, z) = \theta_r(y)(f(t, y, q_r(z)) - f_t^0)\frac{n}{\psi_{r+1}(t) \vee n} + f_t^0.$$

Cette fonction encore satisfait la condition quadratique (**H3**) mais avec une constante positive. En effet, choisissons y et $y^{'}$ dans $\mathbb{R}^k$. Si $|y| > r+1$ et $|y^{'}| > r+1$, l'inégalité est trivialement satisfaite et nous réduisons donc au cas où $|y^{'}| \leq r+1$. Nous écrivons

$$\begin{aligned}\langle y-y^{'}, h_n(t, y, z) - h_n(t, y^{'}, z)\rangle &= \theta_r(y)\frac{n}{n \vee \psi_{r+1}(t)}\langle y-y^{'}, f(t, y, q_n(z)) - f(t, y^{'}, q_n(z))\rangle \\ &\quad + \frac{n}{n \vee \psi_{r+1}(t)}(\theta_r(y) - \theta_r(y^{'}))\langle y-y^{'}, [f(t, y^{'}, q_n(z)) - f_t^0]\rangle.\end{aligned}$$

Le premier terme du côté droit de l'égalité précédente est négatif puisque la condition (**H3**) est en force pour f avec $\mu = 0$. Pour le second terme, on peut utiliser le fait que θ_r est $C(r)$-

Lipschitz, pour obtenir, puisque $|y^{'}| \leq r+1$,

$$\begin{aligned}(\theta_r(y)-\theta_r(y^{'}))\langle y-y^{'},[f(t,y^{'},q_n(z))-f_t^0]\rangle &\leq C(r)|y-y^{'}|^2|f(t,y^{'},q_n(z))-f_t^0| \\ &\leq C(r)(\lambda n+\psi_{r+1}(t))|y-y^{'}|^2,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{n}{n\vee\psi_{r+1}(t)}(\theta_r(y)-\theta_r(y^{'}))\langle y-y^{'},[f(t,y^{'},q_n(z))-f_t^0]\rangle &\leq \frac{n}{n\vee\psi_{r+1}(t)}C(r)(\lambda n+\psi_{r+1}(t))|y-y^{'}|^2 \\ &\leq C(r)(\lambda+1)n|y-y^{'}|^2.\end{aligned}$$

Alors le couple (ξ,h_n) satisfait les hypothèses du Théorème (2.3.1). Par conséquent, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, l'EDSR associé à (ξ,h_n) a une solution unique (Y^n,Z^n) dans l'espace $\mathcal{S}^2\times M^2$.

Puisque

$$\langle y,h_n(t,y,z)\rangle \leq |y|\|f^0\|_\infty+\lambda|y||z|,$$

et ξ est borné, le Lemme (2.1.1) de Briand et Carmona [3] montre que le processus Y^n vérifie l'inégalité $\|Y^n\|_\infty\leq r$. De plus, à partir de la Proposition (2.2.1),

$$\|Z^n\|_{M^2}\leq r^{'}, \tag{2.9}$$

où $r^{'}$ est une autre constante. En tant que sous-produit (Y^n,Z^n) est une solution de l'EDSR associé à (ξ,f_n) où

$$f_n(t,y,z)=(f(t,y,q_n(z))-f_t^0)\frac{n}{\psi_{r+1}(t)\vee n}+f_t^0,$$

pour cette fonction (**H3**) est satisfaite avec "$\mu=0$".

Nous avons maintenant, pour $i\in\mathbb{N}$, réglage de $U=Y^{n+i}+Y^n$, $V=Z^{n+i}+Z^n$, en utilisant les hypothèses (**H2**) et (**H3**) sur f_{n+i}

$$\begin{aligned}e^{2\lambda^2t}|U_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^T e^{2\lambda^2s}|V_s|^2ds &\leq 2\int_t^T e^{2\lambda^2s}\langle U_s,f_{n+i}(s,Y_s^n,Z_s^n)-f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\rangle ds \\ &\quad -2\int_t^T e^{2\lambda^2s}\langle U_s,V_sdB_s\rangle.\end{aligned}$$

Mais $\|U\|_\infty\leq 2r$ donc

$$\begin{aligned}e^{2\lambda^2t}|U_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^T e^{2\lambda^2s}|V_s|^2ds &\leq 4r\int_0^T e^{2\lambda^2s}|f_{n+i}(s,Y_s^n,Z_s^n)-f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)|ds \\ &\quad -2\int_t^T e^{2\lambda^2s}\langle U_s,V_sdB_s\rangle,\end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de BDG, nous obtenons, pour une constante C ne dépendant que de λ et T,

$$\mathbb{E}\left[\sup_t |U_t|^2 + \int_0^T |V_s|^2 ds\right] \leq Cr\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_{n+i}(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)|ds\right].$$

D'autre part, puisque $\|Y^n\|_\infty \leq r$, nous avons

$$|f_{n+i}(s, Y_s^n, Z)_s^n - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)| \leq 2\lambda|Z_s^n|\mathbb{1}_{|Z_s^n|>n} + 2\lambda|Z_s^n|\mathbb{1}_{\psi_{r+1}(s)>n} + 2\psi_{r+1}(s)\mathbb{1}_{\psi_{r+1}(s)>n},$$

dont on déduit, à l'aide de l'inégalité (2.9) et de l'hypothèse (**H5**), que (Y^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{S}^2 \times M^2$. Il est facile de passer à la limite dans l'équation d'approximation, pour donner une solution de EDSR (2.1).

Deuxième étape : nous traitons maintenant le cas général. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$\xi_n = q_n(\xi), \qquad f_n(t, y, z) = f(t, y, z) - f_t^0 + q_n(f_t^0).$$

Pour chaque couple (ξ_n, f_n), l'EDSR (2.1) a une solution unique (Y^n, Z^n) en L^2 grâce à la première étape de cette preuve, mais en fait aussi dans tout L^p, $p > 1$ d'après le Lemme (2.2.1). Maintenant de la Proposition (2.2.1), pour $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_t |Y_t^{n+i} - Y_t^n|^p + \left(\int_0^T |Z_s^{n+i} - Z_s^n|^2 ds\right)^{p/2}\right] \leq C\mathbb{E}\left[|\xi_{n+i} - \xi_n|^p + \left(\int_0^T |q_{n+i}(f_t^0) - q_n(f_t^0)|dt\right)^p\right],$$

où C dépend de T et λ.

Le côté droit de la dernière inégalité clairement tend vers 0, comme $n \to \infty$, uniformément dans i, nous avons donc de nouveau une suite de Cauchy et la limite est une solution de l'EDSR (2.1).

$\square$

Remarque 2.3.1. *Dans le cas $k = 1$, le Théorème* (2.3.2) *reste valable si l'on remplace* (***H5***) *par la condition faible*

$$\psi_r \in L^1(0, T), \qquad p.s. \qquad \forall r > 0.$$

L'estimation supplémentaire dans ce cas, ce qui permet que la généralisation est la suivante :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|ds\right)^p\right] \leq c\mathbb{E}\left[|\xi|^p + \left(\int_0^T |f_t^0|dt\right)^p\right],$$

pour une certaine constante c ne dépendant que de T, μ et λ. En effet, il résulte de (2.4), *que*

$$e^{\mu t}|Y_t| + \int_t^T e^{\mu s}|f(s, Y_s, 0) - f_s^0 - \mu Y_s|ds \leq e^{\mu T}|\xi| + \int_t^T e^{\mu s}|f_s^0|ds + \lambda \int_t^T e^{\mu s}|Z_s|ds$$

$$- \int_t^T e^{\mu s} sgn(Y_s) Z_s dB_s,$$

et il reste à combiner cette dernière inégalité avec la Proposition (2.2.1).

2.4 Paramètres intégrables

Dans cette section, nous traiterons du cas $p = 1$ qui semble très différent du précédent. Nous supposons ici que T est un temps terminal fixè. Notons Σ_T l'ensemble de tous les temps d'arrêt τ tels que $\tau \leq T$; nous rappelons que, pour un processus $Y = \{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$, Y appartient à la classe (D) si la famille $\{Y_\tau, \tau \in \Sigma_T\}$ est uniformément intégrable.

Pour un processus Y en classe (D), on met

$$\|Y\|_1 = \sup\{\mathbb{E}[|Y_\tau|], \tau \in \Sigma_T\}.$$

L'espace des processus continus progressivement mesurables qui appartiennent à la classe (D) est complet sous cette norme, voir Dellacherie et Meyer ([11], p. 90).

Nous aurons besoin d'une autre hypothèse sur la fonction f : nous supposerons qu'il existe deux constantes $\gamma \geq 0$, $\alpha \in (0,1)$ et un processus progressivement mesurable non négatif $\{g_t\}_{t \in [0,T]}$ tel que

(**H7**) : $$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}, \qquad |f(t,y,z) - f(t,y,0)| \leq \gamma(g_t + |y| + |z|)^\alpha.$$

Notez que cette hypothèse est trivialement satisfaite si f ne dépend pas de z.

Nous supposerons également que

(**H1"**) : $$\mathbb{E}\left[|\xi| + \int_0^T (f_t + g_t)dt\right] < +\infty.$$

Tout d'abord, rappelons-nous le résultat suivant qui se trouve dans Revuz et Yor [36] avec une constante différente, mais dans un contexte plus général.

Lemme 2.4.1. *Soit* $\{M_t\}_{t \in [0,T]}$ *une martingale. Alors, pour tout* $\beta \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}[M_*^\beta] \leq \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[|M_T|]^\beta.$$

Preuve. Notons $c = \mathbb{E}[|M_T|]$. Nous avons, par l'inégalité de Doob, pour chaque $x > 0$, $x\mathbb{P}(M_* > x) \leq c$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_*^\beta] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{M_* > x} \beta x^{\beta-1} dx\right] \\ &\leq \int_0^{+\infty} \min(1, c/x) \beta x^{\beta-1} dx = c^\beta/(1-\beta). \end{aligned}$$

Nous principaux résultats sont les Théorèmes (2.4.1) et Théorèmes (2.4.2) ci-dessous.

□

Théorème 2.4.1. *Soient les hypothèses* (***H1"***), (***H2***)−(***H5***) *and* (***H7***) *satisfaite. Alors l'EDSR* (2.1) *comporte au plus une solution* (Y, Z) *de telle sorte que* Y *appartient à la classe* (D) *et* Z *appartient à l'espace* $\bigcup_{\beta>\alpha} M^\beta$.

Preuve. On peut supposer sans perte de généralité que $\mu = 0$.

Considérons (Y, Z) et (Y', Z') deux solutions de l'EDSR (2.1) avec les conditions appropriées. Nous introduisons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tau_n = \inf \left\{ t \in [0, T], \quad \int_0^t (|Z_r|^2 + |Z_r'|^2) dr \geq n \right\} \wedge T.$$

Fixer $y_t = Y_t - Y_t'$, $z_t = Z_t - Z_t'$, la formule (2.4) donne l'inégalité

$$|y_{t\wedge\tau_n}| \leq |y_{\tau_n}| + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} \langle \hat{y}_r, f(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r', Z_r') \rangle dr - \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} \langle \hat{y}_r, z_r dB_r \rangle.$$

Ainsi, en utilisant la monotonicité de f en y, nous obtenons

$$|y_{t\wedge\tau_n}| \leq |y_{\tau_n}| + \int_0^T |f(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r')| dr - \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} \langle \hat{y}_r, z_r dB_r \rangle,$$

et le conditionnement par rapport à $\mathcal{F}_t$ nous avons

$$|y_{t\wedge\tau_n}| \leq \mathbb{E}\left(|y_{\tau_n}| + \int_0^T |f(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r')| dr | \mathcal{F}_t \right).$$

Bien sûr, Enfait tendre n à l'infini. Pour ce faire, mentionnons que le processus y est continu et appartient à la classe (D). Il en résulte que, $\mathbb{P}$-p.s., $y_{\tau_n} = y_{T\wedge\tau_n} \to y_T = 0$ et, par ailleurs, cette convergence a lieu en L^1. En tant que sous produit, nous en déduisons que la martingale continue $\mathbb{E}(y_{\tau_n}|\mathcal{F}_t)$ converge vers 0 dans ucp. En extrayant une sous-suite, on obtient, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\forall t \in [0, T], \qquad |y_t| \leq \mathbb{E}\left(\int_0^T |f(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r')| dr | \mathcal{F}_t \right), \tag{2.10}$$

et de l'hypothèse (**H7**) nous obtenons, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\forall t \in [0, T], \qquad |y_t| \leq 2\gamma \mathbb{E}\left(\int_0^T (g_r + |Y_r| + |Z_r| + |Z_r'|)^\alpha dr | \mathcal{F}_t \right).$$

Comme il existe $\beta > \alpha$ tel que Z et Z' appartiennent à M^β et puisque Y est de classe (D), on déduit immédiatement de l'inégalité précédente et l'hypothèse (**H3**) que y appartient à l'espace $\mathcal{S}^q$ pour certain $q > 1$. Le Lemme (2.2.1) et la Proposition (2.2.1) impliquent que $(y, z) = (0, 0) \in \mathcal{S}^q \times M^q$.

□

2.4.1 Existence et unicité de la solution

Nous passons maintenant au cas où le générateur est indépendant de la variable z.

Proposition 2.4.1. *Soient les hypothèses (**H1"**), (**H3**) – (**H5**) satisfaite et supposons que f ne dépend pas de z. Donc, l'EDSR* (2.1) *a une solution* (Y, Z) *de telle sorte que Y appartient à la classe (D). De plus, pour chaque $\beta \in (0,1)$, (Y, Z) appartient à l'espace $\mathcal{S}^\beta \times M^\beta$.*

Preuve. Nous utilisons une méthode de troncature standard en supposant toujours que $\mu = 0$. Introduisons, pour chaque entier $n \geq 1$, $\xi^n = q_n(\xi)$ et $f^n(t,y) = f(t,y) - f(t,0) + q_n(f(t,0))$ avec $q_n(y) = yn/(|y| \vee n)$. Nous savons de notre résultat précédent (Théorème (2.3.2)) que l'EDSR associé au paramètre (ξ^n, f^n) a une unique solution dans l'espace $\mathcal{S}^2 \times M^2$.

Nous mettons $\delta Y = Y^{n+i} - Y^n$, $\delta Z = Z^{n+i} - Z^i$. En utilisant le même calcul que dans la partie unicité, voir (2.10), nous avons

$$|\delta Y_t| \leq \mathbb{E}\left(|\delta\xi| + \int_0^T |f^{n+i}(r, Y_r^n) - f^n(r, Y_r^n)|dr|\mathcal{F}_t\right),$$

à partir de laquelle nous tirons l'inégalité

$$|\delta y_t| \leq \mathbb{E}\left(|\xi|\mathbb{1}_{|\xi|>n} + \int_0^T |f(r,0)|\mathbb{1}_{|f(r,0)|>n}dr|\mathcal{F}_t\right). \tag{2.11}$$

On déduit immédiatement de cette inégalité que

$$\|\delta Y\|_t \leq \mathbb{E}\left[|\xi|\mathbb{1}_{|\xi|>n} + \int_0^T |f(r,0)|\mathbb{1}_{|f(r,0)|>n}dr\right],$$

et du lemme (2.4.1) que, pour tout $\beta \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_t |\delta Y_t|^\beta\right] \leq \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}\left[|\xi|\mathbb{1}_{|\xi|>n} + \int_0^T |f(r,0)|\mathbb{1}_{|f(r,0)|>n}dr\right]^\beta.$$

Ainsi $(Y^n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$ et pour la distance naturelle sur $\mathcal{S}^\beta$ pour chaque $\beta \in (0,1)$. Soit Y la limite de processus continue progressivment mesurable de cette suite : Y appartient à la classe (D) et à $\mathcal{S}^\beta$ pour chaque $\beta \in (0,1)$.

Maintenant, $(\delta Y, \delta Z)$ résout l'EDSR suivante :

$$\delta Y_t = \xi^{n+i} - \xi^n + \int_t^T F(r, \delta Y_r)dr - \int_t^T \delta Z_r dB_r,$$

où F représente la fonction aléatoire

$$F(t,y) = f^{n+i}(t, y + Y_t^n) - f^n(t, Y_t^n);$$

puisque f^{n+i} est monotone, F satisfait l'inégalité

$$\langle y, F(t,y)\rangle \leq |y||f(t,0)|\mathbb{1}_{|f(t,0)|>n}.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme (2.1.1), on en déduit que, pour $\beta \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\delta Z_r|^2 dr\right)^{\beta/2}\right] \leq C_\beta \mathbb{E}\left[\sup_t |\delta Y_t|^\beta + \left(\int_0^T |f(r,0)|\mathbb{1}_{|f(r,0)|>n} dr\right)^\beta\right].$$

Il en résulte que, pour chaque $\beta \in (0,1), (Z^k)_k$ est une suite de Cauchy dans M^β pour la métrique naturelle et converge ensuite dans cet espace vers un processus progressivement mesurable Z.

Puisque $\int_0^t Z_r^n dB_r$ converge vers $\int_0^t Z_r dB_r$ dans ucp et puisque l'application $y \mapsto f(t,y)$ est continue, nous vérifions facilement en prenant une limite dans ucp que (Y,Z) résout l'EDSR correcte .

□

Avec cette Proposition entre les mains, nous pouvons donner la partie d'existence de notre étude. Nous allons prouver le résultat suivant.

Théorème 2.4.2. *Soient les hypothèses (**H1"**), (**H2**)* $-$ *(**H5**) et (**H7**) satisfaite. Donc, l'EDSR* (2.1) *a une solution* (Y,Z) *telle que* Y *appartient à la classe* (D).

De plus, pour chaque $\beta \in (0,1)$, (Y,Z) *appartient à l'espace* $\mathcal{S}^\beta \times M^\beta$.

Preuve. Encore une fois, nous pouvons supposer que $\mu = 0$ sans perte de généralité. Nous allons utiliser une sorte de procédure itérative de Picard. Posons comme d'habitude $(Y^0, Z^0) = (0,0)$ et définissons récursivement, compte tenu de la proposition précédente, pour chaque $n \geq 0$,

$$Y_t^{n+1} = \xi + \int_t^T f(r, Y_r^{n+1}, Z_r^n) dr - \int_t^T Z_r^{n+1} dB^r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Pour chaque n, Y^n appartient à la classe (D) et (Y^n, Z^n) appartient à $\mathcal{S}^\beta \times M^\beta$ pour tous $\beta \in (0,1)$.

Pour $n \geq 1$, en faisant valoir que la preuve de l'unicité, on en déduit que

$$\forall t \in [0,T], \qquad |Y_t^{n+i} - Y_t^n| \leq 2\gamma \mathbb{E}\left(\int_0^T (g_r + |Y_r^n| + |Z_r^n| + |Z_r^{n-1}|)^\alpha dr | \mathcal{F}_t\right).$$

Z^n et Z^{n-1} appartiennent à M^β pour chaque $\beta \in (0,1)$, Y^n appartient à la classe (D) et $\{g_t\}_{t\in[0,T]}$ est intégrable. Ainsi la variable aléatoire

$$I_n = \int_0^T (g_r + |Y_r^n| + |Z_r^n| + |Z_r^{n-1}|)^\alpha dr,$$

appartient à l'espace L^q dès que $\alpha q < 1$. Fixons $q \in (1,2)$ tel que $\alpha q < 1$. Alors, pour $n \geq 1$, $y^n = Y^{n+1} - Y^n$ appartient à l'espace $\mathcal{S}^q$. Posons $z^n = Z^{n+1} - Z^n$.(y^n, z^n) est la solution de l'EDSR suivante :

$$y_t^n = \int_t^T f_n(r, y_r^n)dr - \int_t^T z_r^n dB_r,$$

où

$$f_n(r,y) = f(r, y + Y_r^n, Z_r^n) - f(r, Y_r^n, Z_r^{n-1}).$$

Puisque f est satisfait à la condition (**H3**) avec $\mu = 0$, f_n satisfait hypothèse à (**A**) et, en utilisant (**H7**), nous avons l'inégalité

$$\langle \hat{y}, f_n(r,y)\rangle \leq |f(r, Y_r^n, Z_r^n) - f(r, Y_r^n, Z_r^{n-1})| \leq 2\gamma(g_r + |Y_r^n| + |Z_r^n| + |Z_r^{n-1}|)^\alpha.$$

Le lemme (2.2.1) montre que z^n est dans l'espace M^q puisque I_n est dans L^q.

La Proposition (2.2.1) implique qu'il existe une constante C_q ne dépendant que de q telle que pour $n \geq 1$,

$$\|(y^n, z^n)\|^q \leq C_q \left[\left(\int_0^T |f(r, Y_r^n, Z_r^n) - f(r, Y_r^n, Z_r^{n-1})|dr \right)^q \right],$$

où $\|.\|$ représente la norme suivante sur $\mathcal{S}^q \times M^q$:

$$\|(Y,Z)\| = \left(\mathbb{E}\left[\sup_t |Y_t|^q + \left(\int_0^T |Z_r|^2 dr \right)^{q/2} \right] \right)^{1/q}.$$

Pour $n \geq 2$, nous utilisons le fait que f est λ-Lipschitz dans z pour obtenir, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|(y^n, z^n)\|^q \leq c\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |z_r^{n-}|^2 dr \right)^{q/2} \right],$$

où $c = C_q \lambda^q T^{q/2}$. Ainsi, nous avons, pour $n \geq 2$,

$$\|(y^n, z^n)\|^q \leq c^{n-1} \|(y^1, z^1)\|^q.$$

Supposons d'abord que $c = C_q \lambda^q T^{q/2} < 1$. Etant donné que $\|(y^1, z^1)\|^q$ est fini, il s'ensuit immédiatement que $(Y^n - Y^1, Z^n - Z^1)$ converge dans l'espace $\mathcal{S}^q \times M^q$ vers certains (U, V). On en déduit que (Y^n, Z^n) converge vers $(Y = U + Y^1, Z = V + Z^1)$ dans $\mathcal{S}^\beta \times M^\beta$ pour chaque $\beta \in (0,1)$ puisque (Y^1, Z^1) qui lui appartient. De plus, Y^n converge vers Y pour la norme $\|.\|_1$ puisque Y^1 appartient à la classe (D) et la convergence dans $\mathcal{S}^q$ avec $q \geq 1$ est plus forte que la convergence en $\|.\|_1$.

Pour conclure la preuve dans ce cas, il reste à passer à la limite dans l'équation satisfaite par (Y^n, Z^n) pour voir que (Y, Z) de résoudre l'EDSR (2.1). Cela se fait facilement dans ucp.

Pour le cas général, il suffit de subdiviser l'intervalle de temps $[0, T]$ en un nombre fini de petits intervalles. Ceci complète la preuve.

Chapitre 3

Les solution L^p des EDSRs avec un temps terminal aléatoire

Nous allons affaiblir la condition de Lipschitz de f dans la variable y pour la remplacer par une condition de monotonie. Ce type d'hypothèse est apparu dans l'article de S. Peng [32] pour traiter le cas des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec un temps terminal aléatoire c'est à dire des EDSR pour lesquelles on impose la condition $Y_\tau = \xi$ avec τ temps d'arrêt. Le résultat que nous présentons ici est dû à R. Darling et E. Pardoux [10]. L'hypothèse de monotonie est très employée : elle permet, comme déjà dit, de traiter les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec temps final aléatoire, voir par exemple [33], [5] et d'autre part d'affaiblir l'hypothèse de croissance sur f en y, voir [3] et surtout le résultat de E. Pardoux [32].

3.1 Formulation du problème

Considérons B un mouvement brownien d-dimensionnel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ complet. Soit $f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction aléatoire telle que pour tout (y,z), le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable et soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable ($\mathcal{F}_t$ est, comme au chapitre précédent, la filtration augmentée de B).

Les hypothèses $(\mathbf{H2}) - (\mathbf{H4})$ sont toujours valables. Nous supposerons dans ce chapitre que $p > 1$. Nous suivrons de près l'approche de Pardoux [32] qui traite le même problème dans le cas $p = 2$.

L'hypothèse (**H1**) sera remplacée par la condition suivante. Pour certain

$$\rho > v := \mu + \frac{\lambda^2}{2(p-1)},$$

(où μ et λ sont les constantes qui apparaissant dans les conditions (**H3**) et (**H2**), respectivement),

(**H1'**) : $$\mathbb{E}\Big[e^{p\rho T}|\xi|^p + \int_0^T e^{p\rho t}|f(t,0,0)|^p dt\Big] < +\infty.$$

L'hypothèse (**H5**) est remplacée par

(**H5"**) : $$\psi_r \in L^1((0,n)\times\Omega, m\otimes\mathbb{P}) \qquad \forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \forall r>0,$$

et nous aurons besoin de l'hypothèse supplémentaire suivante : ξ est $\mathcal{F}_T$-mesurable et

(**H6**) : $$\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{p\rho t}|f(t, e^{-vt}\bar{\xi}_t, e^{-vt}\bar{\eta}_t)|^p dt\Big] < +\infty,$$

où $\bar{\xi} = e^{vT}\xi, \bar{\xi}_t = \mathbb{E}(e^{vT}\xi|\mathcal{F}_t)$ et $\bar{\eta}$ est prévisibles et tels que

$$\bar{\xi} = \mathbb{E}[\bar{\xi}] + \int_0^{+\infty} \bar{\eta}_t dB_t, \qquad \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^{+\infty}|\bar{\eta}_t|^2 dt\Big)^{p/2}\Big] < +\infty.$$

3.2 Définition d'une solution

Définition 3.2.1. *Un couple $(Y_t, Z_t)_{t\geq 0}$ de processus progressivement mesurables avec des valeurs dans $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ est une solution de l'EDSR avec un temps terminal aléatoire T avec des données (ξ, f) si sur l'ensemble $\{t\geq T\}$ $Y_t = \xi$ et $Z_t = 0$, $\mathbb{P}-p.s.$, $t\to \mathbb{1}_{t\leq T} f(t,Y_t,Z_t)$ appartient à $L^1_{loc}(0,\infty)$, $t\mapsto Z_t$ appartient à $L^2_{loc}(0,\infty)$ et, $\mathbb{P}$-p.s., pour tout $0\leq t\leq T$,*

$$Y_{t\wedge T} = Y_{u\wedge T} + \int_{t\wedge T}^{u\wedge T} f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_{t\wedge T}^{u\wedge T} Z_s dB_s. \tag{3.1}$$

Une solution est dite en L^p si nous avons d'ailleurs

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\rho t}|Y_t|^p + \int_0^T e^{p\rho t}|Y_t|^p dt + \int_0^T e^{p\rho t}|Y_t|^{p-2}|Z_t|^2 dt\Big] < +\infty.$$

3.3 Existence et unicité

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses (**H1'**), (**H2**)-(**H4**), (**H5"**) et (**H6**), l'EDSR* (3.1) *avec un temps terminal aléatoire a une solution unique satisfaisant*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\rho t}|Y_t|^p + \int_0^T e^{p\rho s}|Y_t|^{p-2}\{|Y_t|^2+|Z_t|^2\}dt\Big] \leq c\mathbb{E}\Big[e^{p\rho t}|\xi|^p + \int_0^T e^{p\rho t}|f(t,0,0)|^p dt\Big],$$

pour certain constante c dépendant de p, λ, ρ et μ.

Preuve. La preuve suit les étapes de la preuve de Pardoux ([32], Théorème (2.3.1)).

D'abord, nous faisons le changement de variable $\hat{Y}_t = e^{vt}Y_t$ pour réduire à la condition terminale $\bar{\xi}$ qui appartient à L^p. Nous dérivons l'estimation à priori en L^p avec $p \in (1, 2)$, qui est la seule différence avec la preuve dans Pardoux [32]. Il en résulte facilement de l'inégalité (2.4) que, pour

Il en résulte facilement de l'inégalité suivante : pour $0 \le t \le u$,

$$\begin{aligned} |Y_t|^p + c(p)\int_t^u |Y_s|^{p-2}\mathbb{1}_{Y_s\neq 0}|Z_s|^2 ds &\le |Y_u|^p + p\int_t^u |Y_s|^{p-1}\langle \hat{Y}_s, f(s, Y_s, Z_s)\rangle ds \\ &\quad -p\int_t^u |Y_s|^{p-1}\langle \hat{Y}_s, Z_s dB_s\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &e^{p\rho(t\wedge T)}|Y_{t\wedge T}|^p + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\left(\frac{p-1}{2}|Y_s|^{p-2}|Z_s|^2 + \rho|Y_s|^p\right)ds \le e^{p\rho(u\wedge T)}|Y_{u\wedge T}|^p \\ &+p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|Y_s|^{p-1}\langle \hat{Y}_s, f(s, Y_s, Z_s)\rangle ds - p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|Y_s|^{p-1}\langle \hat{Y}_s, Z_s dB_s\rangle. \end{aligned}$$

Les hypothèses sur f ainsi que l'inégalité de Young mène à l'inégalité, et en déduire comme précédemment $f_s^0 = f(s, 0, 0)$, pour tout $0 < \delta < (p-1)/2$,

$$\begin{aligned} |y|^{p-1}\langle \hat{y}, f(s, y, z)\rangle &\le \left(\mu + \delta + \tfrac{\lambda^2}{2(p-1-2\delta)}\right)|y|^p + \left(\tfrac{p-1}{2} - \delta\right)|y|^{p-2}|z|^2 \\ &\quad + \frac{1}{p}|f_s^0|^p\left(\frac{p\delta}{p-1}\right)^{1-p}. \end{aligned}$$

Nous choisissons $\delta > 0$ assez petit donc que $\mu + 2\delta + \lambda^2/(2(p-1-2\delta)) \le \rho$ et déduisons des inégalités précédentes que

$$e^{p\rho(t\wedge T)}|Y_{t\wedge T}|^p + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\left(\frac{p-1}{2}|Y_s|^{p-2}|Z_s|^2 + \rho|Y_s|^p\right)ds \le \beta,$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &= e^{p\rho(u\wedge T)}|Y_{u\wedge T}|^p + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\left[\left(\mu + \delta + \frac{\lambda^2}{2(p-1-2\delta)}\right)|y|^p + \left(\frac{p-1}{2} - \delta\right)|y|^{p-2}|z|^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p}|f_s^0|^p\left(\frac{p\delta}{p-1}\right)^{1-p}\right]ds + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|Y_s|^{p-1}\langle \hat{Y}_s, Z_s dB_s\rangle, \end{aligned}$$

on a

$$\beta = e^{p\rho(u\wedge T)}|Y_{u\wedge T}|^p + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\Big(\mu+\delta+\frac{\lambda^2}{2(p-1-2\delta)}\Big)|y|^p ds$$

$$+p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\Big(\frac{p-1}{2}-\delta\Big)|y|^{p-2}|z|^2 ds + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\frac{1}{p}|f_s^0|^p\Big(\frac{\delta}{p-1}\Big)^{1-p} ds$$

$$-p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|Y_s|^{p-1}\langle\hat{Y}_s, Z_s dB_s\rangle,$$

par suite

$$e^{p\rho(t\wedge T)}|Y_{t\wedge T}|^p + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\frac{p-1}{2}|Y_s|^{p-2}|Z_s|^2 ds + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\rho|Y_s|^p ds$$

$$+p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\Big(\mu+\delta+\frac{\lambda^2}{2(p-1-2\delta)}\Big)|y|^p ds + p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}\Big(\frac{p-1}{2}-\delta\Big)|y|^{p-2}|z|^2 ds$$

$$\leq e^{p\rho(u\wedge T)}|Y_{u\wedge T}|^p + \Big(\frac{p\delta}{p-1}\Big)^{1-p}\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|f_s^0|^p ds - p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|Y_s|^{p-1}\langle\hat{Y}_s, Z_s dB_s\rangle.$$

$$e^{p\rho(t\wedge T)}|Y_{t\wedge T}|^p + p\delta\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}(|Y_s|^p + |Y_s|^{p-2}|Z_s|^2)ds \leq e^{p\rho(t\wedge T)}|Y_{u\wedge T}|^p$$
$$+C(p,\delta)\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|f_s^0|^p ds - p\int_{t\wedge T}^{u\wedge T} e^{p\rho s}|Y_s|^{p-1}\langle\hat{Y}_s, Z_s dB_s\rangle.$$

En prenant l'espérance et faisant tendre u à l'infini dans la dernière inégalité, nous obtenons

$$\mathbb{E}\Big[e^{p\rho(t\wedge T)}|Y_{t\wedge T}|^p + \delta\int_0^T e^{p\rho s}(|Y_s|^p + |Y_s|^{p-2}|Z_s|^2)ds\Big] \leq C(p,\delta)\mathbb{E}\Big[e^{p\rho T}|\xi|^p + \int_0^T e^{p\rho s}|f_s^0|^p ds\Big].$$

En utilisant un argument standard basé sur l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, nous pouvons en outre inclure un $\sup_t$ dans l'esperence du côté gauche.

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\rho t}|Y_t|^p + \int_0^T e^{p\rho s}|Y_s|^{p-2}\{|Y_s|^2 + |Z_s|^2\}ds\Big] \leq c\mathbb{E}\Big[e^{p\rho t}|\xi|^p + \int_0^T e^{p\rho s}|f(s,0,0)|^p ds\Big].$$

□

Remarque 3.3.1. *Dans la plupart des applications intéressantes, en particulier à les EDPs elliptiques, si T est un temps d'arrêt non borne (i.e., $\equiv +\infty$), (**H1'**) ne peut pas être satisfait* *que si* $\rho < 0$. *Cela implique, en particulier que* $\mu < 0$, *qui devrait être prévu, de la relation avec PDEs elliptiques, voir Pardoux [32].*

Dans le cas $p = 2$, *la condition* $\rho > \mu + (2(p-1))^{-1}\lambda^2$ *réduit à* $\rho > \mu + \lambda^2/2$, *qui est la condition dans Pardoux [32]. D'autre part, comme* $p \to 1$, *la condition*

$$\mu + \frac{\lambda^2}{2(p-1)} < \rho < 0;$$

μ *nécessite d'être négatif, avec une valeur absolue plus grande et plus large. Aucun résultat pour le cas* $p = 1$ *peut être déduit de ce qui précède.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on a réalisée une étude sur les solutions L^p pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

En premier lieu, on a présenté quelque notions des bases sur les EDSR, Puis, on a étudie le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où le générateur est non-linéaire et lipschitzien par rapport aux deux variables y et z.

Ensuite, on a effectué une étude sur l'existence et d'unicité pour les EDSR dans $\mathbb{R}^d$ lorsque ξ et le processus $\{f_t\}_{t\geq 0}$ ne sont que intégrables avec $p \in (1,2)$ sur un intervalle de temps fixe. Egalement, on a étudié l'existence et l'unicite des solutions L^p dans le cas $p = 1$.

Enfin, on a exécuté une étude sur les solutions des EDSR sur un intervalle de temps aléatoire.

Annexe

Théorème .1. *(Représentation des martingales browniennes) Soit M une martingale (càd-làg) de carré intégrable pour la filtration $\{\mathcal{F}_t^w\}_{t\in[0,T]}$. Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$ appartenant à $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^k)$, tel que*

$$\mathbb{P}-p.s. \qquad \forall t \in [0,T] \qquad M_t = M_0 + \int_0^t H_r.dB_r.$$

On déduit de ce résultat que si ξ est une variable aléatoire de carré intégrable, $\mathcal{F}_T^B$-mesurable, il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]} \in M^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T H_r dB_r.$$

Preuve : voir [4].

Théorème .2. *(Inégalité de Doob) Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue a droite, alors*

$$\forall p > 1, \quad \Big(\mathbb{E}[|\sup_{0\leq r\leq t} X_r|^p]\Big) \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0\leq r\leq t} \Big(\mathbb{E}[|X_r|^p]\Big).$$

Soit (M_t) une martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_T)$) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s. Alors

1. $\mathbb{P}(\sup_{0\leq r\leq t} |M_r| \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|M_t|)}{\lambda}, \qquad \forall\, t > 0,\ \lambda > 0.$
2. $\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t} |M_r|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_t|^2), \qquad \forall\, t > 0.$

Preuve : voir [37].

Lemme .1. *(De Gronwall) Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(r)dr \qquad a \in \mathbb{R},\ b \geq 0.$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = ae^{bt}.$$

Preuve : voir [14].

Théorème .3. *(Inégalité Burkholder-Davis-Gundy (BDG)) Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p\mathbb{E}\Big[\langle X,X\rangle_\infty^{p/2}\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\Big] \leq C_p\mathbb{E}\Big[\langle X,X\rangle_\infty^{p/2}\Big].$$

Remarque. *En particulier, si $T > 0$,*

$$c_p\mathbb{E}\Big[\langle X,X\rangle_T^{p/2}\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\Big] \leq C_p\mathbb{E}\Big[\langle X,X\rangle_T^{p/2}\Big].$$

Preuve : voir [4].

Théorème .4. *(Formule d'Itô) La formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Cette formule offre un moyen de manipuler le mouvement Brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).*

Soit X un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: pour $i = 1, ..., n$,

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_r^i dr + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_r^{i,k} dB_r^k.$$

Si f est deux fois différentiable en x et une fois en t on a :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_r f(r, X_r) dr + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_{x_i} f(r, X_r) dX_r^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i, x_j} f(r, X_r) d\langle X^i, X^j \rangle_r, \end{aligned}$$

avec $dX_r^i = K_r^i dr + \sum_{k=1}^d H_r^{i,k} dB_r^k$ et $d\langle X^i, X^j\rangle_r = \sum_{k=1}^d H_r^{i,k} H_r^{i,k} dr$.

Le résultat est plus simple à retenir sous forme vectorielle. Pour cela, on note X le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées X^i, K le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées K^i et W le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de coordonnée W^j. On introduit alors la matrice de taille $n \times d$, $H = (H^{i,j})_{i \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$. Avec ces notations, on a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_r dr + \int_0^t H_r dB_r,$$

où $H_r dB_r$ est un produit matrice-vecteur colonne. La formule d'Itô s'écrit sous la forme, notant $x.y$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et H^* la transposée de H

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_r f(r, X_r) dr + \int_0^t \nabla f(r, X_r).dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t trace(D^2 f(r, X_r) H_r H_r^*) d_r^i,$$

soit encore

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t (\partial_r f(r, X_r) + \nabla f(r, X_r).K_r) dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t trace(D^2 f(r, X_r) H_r H_r^*) d_r^i + \int_0^t D f(r, X_r) H_r dB_r. \end{aligned}$$

Preuve : voir [4].

Théorème .5. *(Girsanov) Soit $(h_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{P}$-p.s. $\int_0^T |h_r|^2 dr < +\infty$. On suppose que le processus $(D_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par*

$$D_t = \exp\left(\int_0^t h_r.dB_r - \frac{1}{2} \int_0^t |h_r|^2 dr \right)$$

est une martingale. Soit $\mathbb{P}^*$ la mesure de densité D_T par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$. Introduisons le processus $B_t = W_t - \int_0^t h_r dr$. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}$, B est un mouvement brownien standard.

Preuve : voir [24].

Théorème .6. *(Théorème stochastique de Fubini) Supposons que $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable et soit*

$$\Phi : (t, \omega, x) \to \Phi(t, \omega, x)$$

une application mesurable de $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ dans $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$. On suppose en outre que

$$\int_E |||\Phi(\cdot, \cdot, x)|||_T \mu(dx) < +\infty$$

alors $\mathbb{P}$-P.s.

$$\int_E \left[\int_0^T \Phi(t, x) dB(t)\right] \mu(dx) = \int_0^T \left[\int_E \Phi(t, x)\mu(dx)\right] dB(t).$$

Preuve : voir [12].

Théorème .7. *(inégalité de Young) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement croissante et surjective, vérifiant $f(0) = 0$. On note $g = f^{-1}$, F et G, respectivement, les applications qui à x associent $\int_0^t f(t)dt$ et $\int_0^t g(t)dt$. On a alors*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F(x) + G(y) \geq x.y$$

et l'égalité est vérifiée pour $y = f(x)$.

Preuve : voir [38].

Théorème .8. *(Formule de Tanaka) Soit X une semimartingale continue. Il existe $(L_t^a)_{t\geq 0}, a \in \mathbb{R}$ processus croissant continu, appelé temps local en a de la semimartingale X, tel que*

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a$$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a) dX_s + L_t^a$$

où

$$sgn = \begin{cases} -1 & x \leq 0\,; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

De plus, la mesure (de Stieltjes) dL_t^a associée L_t^a est portée par $\{t \in \mathbb{R} : X_t = a\}$.

Preuve : voir [4].

Théorème .9. *(De convergence monotone (TCM)) Soit $\{f_n\}$ une suite de fonction mesurables telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad |f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{pour tout } x \in X,$$

où g est une fonction intégrable. Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f_n d\mu.$$

Preuve : voir [9].

Théorème .10. *(Inégalité de Hölder) Pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{C}^n$ on a :*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

L'inégalité de Hölder s'écrit, en notant $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$,

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

et cette inégalité est encore valable pour $p = 1$ et $q = +\infty$.

Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Preuve : voir [9].

Lemme .2. *(De Fatou). Soit $f_n \geq 0$ une suite. Alors*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Preuve : voir [6].

Bibliographie

[1] J. M. Bismut, Conjugate convex functions in optimal stochastic control, *J. Math. Anal. Appl.* **44** (1973), 384-404.

[2] J. M. Bismut, *Contrôle des systèmes linéaires quadratiques :* applications de l'intégrale stochastique, sémin. Proba. XII., Lect Notes in Maths, **649**, (1978), 180-264, Springer.

[3] P. Briand, R. Carmona, BSDEs with polynomial growth generators. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **13** (3), (2000), 207-238.

[4] P. Briand, *Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades*, pp 12, Mars 2001

[5] P. Briand, B. Delyon, Y. Hu, E. Pardoux and L. Stoica, *LP solutions of BSDEs, Stochastic process.* Appl. **108**, (2003), 109-129.

[6] N. L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000 (lire en ligne [archive]), p. 321

[7] Z. Chen, *Existence and uniqueness for BSDE with stopping time*, Chinese Sci. Bull., *43*, 2,Chen, Z., Chi- nese Sci. Bull., *43*, 2, 96-99, (1998), 96-99.

[8] F. Coquet, V. Mackevicius et J. Mémin. *Stability in D of martigales and backward equations under discretigation of filtration.* Stochastic Processus and their Application, **75**, (1998), 235-248.

[9] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, CUP, 2004 (ISBN 9780521603720, lire en ligne [archive]), p. 120.

[10] R. W. R. Darling, E. Pardoux. *Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE.* Ann. Probab. **25** (1997), no. 3, 1135-1159.

[11] C. Dellacherie, P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel. Théorie des Martingales.* Hermann, Paris (1980)(Chapitres V Pa VIII).

[12] E. DiBenedetto, *Real Analysis*, Springer, 2002, p. 147

[13] N. El Karoui, S. Peng, M. C. Quenez, *Backward stochastic differential equations in finance.* Math. Finance **7** (1997), 1-71.

[14] T. H. Gronwell, Note on the dervaatives with respect to a parameter of the solution of a systeme of differential equations, Ann. of Math, **20(2)** : 292-296, (1919).

[15] S. Hamadène, J.P. Lepeltier, A. Matoussi, *Double barrier backward sdes with continuous coefficients.* Pitman Research Notes in Mathematics Series (editors : El karoui and Mazliak), **364**, 1997, 161-177.

[16] S. Hamadène, J. P. Lepeltier and Z. Wu, *Infinite horizon reflected BSDEs and applications in mixed control and games problems*, Probability and mathematical statistics, **19**, 1999, 211-234.

[17] S. Hamadène, *Reflected BSDE's with discontinuous barrier and application*, Stochastics and Stochastic Reports, **74**, 2002, 571-596.

[18] Y. Hu, S. Peng, *Solution of forward backward stochastic differential equations*, Probab. Theory Related Fields, **103**, 1995, 273-283.

[19] Y. Hu, J. Yong, *Forward backward stochastic differential equations with nonsmooth coefficients*, Stochastic processes and their applications, **87**, 2000, 93-106.

[20] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New-York, (1988).

[21] M. Kobylanski, *Résultats d'existence et d'unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des générateurs Pa croissance quadratique.* C. R. Acad. Sci. Paris SXer. I Math. **324** (1997), 81-86.

[22] M. Kobylanski, *Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth*, Ann. Probab., **18**, (2000), 256-276.

[23] M. Kobylanski, J. P. Lepeltier, M. C. Quenez, and S. Torres, *Reflected BSDE with superlinear quadratic coefficient*, Probability and mathematical Statistics, **22**, (2002), 51-83.

[24] E. Lenglart, *Transformation des Martingales locales par changement absolument continu de probabilities [archive]*, dans Zeitschrift für Wahrscheinlichkeit, vol. **39**, 1977, p. 65-70

[25] J. P. Lepeltier, J. San Martin, *Backward stochastic equations with continuous coefficient*, Statistics and Probability Letters, **32**, (1997), 425-430.

[26] J. P. Lepeltier, J. San Martin, *Existence for BSDE with superlinear-quadratic coeffcient.* Stochastics Stochastics Rep. **63**. (1998), (3,4), 227-240.

[27] X. Mao, *Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Stochastic processes and their Applications*, **58**, 1995, 281-292.

[28] A. Matoussi, *Reflected solutions of backward stochastic differential equations with continuous coefficient*. Statist. Probab. Lett., **14**, 1997, 51-61.

[29] E. Pardoux and S. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Systems Control Lett. **14** (1990), no. 1, 55-61.

[30] E. Pardoux, S. Peng, *Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations*, Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991) (B. L. Rozovskii and R. B. Sowers, eds.), *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Sci., vol. **176**, Springer, Berlin, 1992, pp. 200-217.

[31] E. Pardoux and S. Peng, *Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDE's*, Probab. Theory Related Fields **98** (1994), no. 2, 209-227.

[32] E. Pardoux, *weak convergence and homogenization of semilinear PDE's*, BSDE's, Clarke, F.H., Stern, R.J. (Eds.), Nonlinear analysis, Differential equations and control, Kluwer Acad. Pub., (1999), 503-549.

[33] S. Peng, *Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations*. Stochastics Rep. **37** (1,2), (1991), 61-74.

[34] S. Peng, *Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, SIAM J. Control Optim. **30** (1992), no. 2, 284-304.

[35] S. Peng, *Backward SDE and related g-expectation*. In : El Karoui, N., Mazliak, L. (Eds.), *Backward Stochastic Differential Equations*, Pitman Research Notes Mathematical Series, Vol. **364**. (1997) Longman, Harlow, pp. 141-159.

[36] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*. In : Grundlehren Math. Wiss, Vol. **293**. (1991) Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[37] D. Revuz, M. Yor, *continouus martingales and Browiaan motion (Third ed.)*, Berlin : springer (1999).

[38] W. H. Young, *On classes of summable functions and their Fourier series*, Proc. Roy. Soc. Lond. Series A, vol. **87**, 1912, p. 225-229