République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Sur le groupe de Lorentz et ses représentations

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie différentielle

par

Allou Abderahmane [1]

Sous la direction de

Dr K. Djerfi

Soutenue le 16/09/2020 devant le jury composé de

A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
M. Hamou Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
R. Nasri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : allouabderahmane1997@gmail.com

Remerciement

Voilà enfin, aprés de longues années de travail avec l'aide d'Allah, j'ai réussi à mettre en forme le manuscrit que vous avez entre les mains.

Un énorme remerciement que dois présenter en premier lieu à mon encadreur **K.Djerfi** qui m'a soutenue et m'a guidée au cours de la réalisation de ce mémoire, merci pour leur temps qu'elle m'a consacré.

J'adresse un garnd merci a les membres du jury d'avoir bien voulu présider mes jury et d'avoir examiner ce travail.

Mes remerciments s'adressent également à tout mes enseignants de l'université Dr.Moulay Tahar de Saida.

Je remercie mon père, ma mère, mes soeurs, mes frères et mes amies pour leur soutien durant toute la péroide de ma préparation de mon mémoire.

Allou Abderahmane

Table des matières

Introduction **5**

1 Théorie des représentations des groupes **7**
- 1.1 Représentations des groupes finis 7
  - 1.1.1 Généralités 7
  - 1.1.2 Représentations irréductibles 9
- 1.2 Opérations sur les représentations 10
  - 1.2.1 Somme directe de représentations 10
  - 1.2.2 Produit tensoriel 11
  - 1.2.3 Opérateurs d'entrelacement et lemme de Schur 11
- 1.3 Caractères et relations d'orthogonalité 13
  - 1.3.1 Fonctions sur un groupe, coefficients matriciels 13
  - 1.3.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité 14
- 1.4 Représentations des groupes compacts 16
  - 1.4.1 Mesure de Haar 17
  - 1.4.2 Complète réductibilité 19
  - 1.4.3 Relations d'orthogonalité 20

2 Groupe de Lorentz **23**
- 2.1 Groupe de Lorentz 23
  - 2.1.1 Définition 23
  - 2.1.2 Systèmes de coordonnées orthogonales 27
  - 2.1.3 le groupe général Lorentz 39

3 Représentations des groupes de Lorentz **45**
- 3.1 Les algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ 45

3.1.1 Base de $\mathfrak{su}(2)$ . . . 45
3.1.2 Base de $\mathfrak{so}(3)$ . . . 46
3.1.3 Le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $SO(3)$ . . . 47
3.2 Le groupe de Lie SO(3) . . . 47
3.3 Le groupe de Lie $SU(2)$ . . . 48
3.3.1 Projection de $SU(2)$ sur $SO(3)$ . . . 48
3.4 les représentations de $SU(2)$ et $SO(3)$ . . . 49
3.4.1 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . 49
3.4.2 Représentations de $SU(2)$ . . . 50
3.5 Représentations de $SO(3)$ . . . 51
3.6 Définition des représentations du groupe de Lorentz et concepts fondamentaux de la théorie des représentations . . . 51
3.7 La relation entre les représentations du propre groupe de Lorentz et les représentations du groupe de matrices complexes . 53
3.7.1 Représentations à deux valeurs du Groupe générale Lorentz . . . 54
3.8 Groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ . . . 57
3.9 Algèbre de Pauli $\mathcal{P}$ . . . 59
3.10 Représentation dans $\mathcal{P}$ du groupe de Lorentz . . . 60
3.11 Représentation dans $\mathcal{P}$ de l'algèbre de Lie de $\mathcal{L}^+$ . . . 63
3.11.1 Algèbre de Lie des matrices de $\mathcal{P}$ . . . 63

Bibliographie **65**

Introduction

La géométrie lorentziéne est est champ particulier et spécifique de la géométrie pseudo-riemannienne. Son importance vient du fait qu'elle aborde d'une façon rigoureuse les questions qui dépassent la mécanique classique, cela s'agit bien de la mécanique relativiste et la théorie générale de l'optique. Une variété lorentzienne est une variété m-dimensionnelle munie d'un tenseur symétrique g tel que la forme quadratique g_x soit en tout point de type $(m-1,1)$. L'exemple le plus Simple est 1'exemple des espaces de Minkowski. Leur importance vient de ce qu'elles modélisent 1'espace temps de la relativité générale.
II y a des différences importantes avec le cas riemannien : une variété donnée n'a pas forcément de structure lorentzienne la restriction du tenseur g a une sous-variété est suivant les cas riemannienne, lorentzienne ou singulière. Par centre, les variétés riemanniennes, lorentziennes et plus généralement les variétés Pseudo-riemanniennes ont en commun trois propriétés importantes :

1. Le tenseur g définit une mesure (plus précisément une densité) sur la variété.

2. Il définit un isomorphisme de fibres entre TM et T^*M, qui permet d'identifier formes différentielles et champs de vecteurs. Cet isomorphisme est utilisé par exemple dans le cas euclidien, pour définir le gradient d'une fonction. Le gradient se définit plus généralement dans le cadre pseudo-riemannien.

3. Le tenseur g permet enfin de définir canoniquement une connexion sur le fibré tangent, c'est-a-dire une dérivée directionnelle des champs de vecteurs.

Ainsi, l'étude de ces variétés impose l'étude de leurs groupes de symétrie, il s'agit dans notre cas particulier du groupe de Lorentz (noté généralement $O(3,1)$ ou bien L dans ce document). C'est le groupe des automorphismes de la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. C'est un groupe de Lie non compact, non connexe. Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ possède quatre composantes connexes. L'étude de ce groupe et son algèbre de Lie passe obligatoirement par la théorie de représentation des groupes. Notre mémoire envisage cet étude, et la décompose en trois chapitre :
Le premier chapitre traite les généralités de la théorie des représentations, une attention spéciale est donnée au cas des groupes finis et compacts, le cas des groupes de Lie localement compacts hérite bien de cette théorie. Dans le deuxième chapitre on définit explicitement le groupe de Lorentz L. Le troisième chapitre est consacré à l'étude des représentations du groupe de Lorentz a partir de celles des groupes $SO(3)$ et $SU(2)$ et de leurs algèbres de Lie.

Chapitre 1

Théorie des représentations des groupes

1.1 Représentations des groupes finis

1.1.1 Généralités

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), On désigne par $GL(E)$ le groupe des isomorphismes $\mathbb{K}$-linéaire de E.

Définition 1.1.1. *Une représentation d'un groupe G (fini ou non) est la donnée d'un espace vectoriel complexe de dimension finie E, et d'un morphisme de groupes, $\rho : G \longrightarrow GL(E)$.*

Donc, pour tous $g, g' \in G$,

$$\rho(gg') = \rho(g)\rho(g'), \rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}, \rho(e) = Id_E$$

.

L'espace vectoriel E est appelé le support de la représentation et sa dimension s'appelle la dimension de la représentation. On désigne une telle représentation par (E, ρ) ou simplement ρ.

Si en particulier, $E = \mathbb{C}^n$, on dit que la représentation est une représentation matricielle de dimension n.

la représentation standard ou fondamentale d'un sous groupe G de $GL(E)$ est la représentation de G dans E définie par l'injection canonique de G dans $GL(E)$.

On appelle représentation triviale toute représentation telle que $\rho(g) = Id_E$ pour tout $g \in G$.

Exemple 1.1.1. *(Groupe de permutations).*
Soit $G = \mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et $t \in \mathcal{S}_3$ la transposition $123 \longmapsto 132$ et c la permutation circulaire $123 \longmapsto 231$ qui engendrent $\mathcal{S}_3$. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On peut représenter $\mathcal{S}_3$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\rho(e) = I, \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

Définition 1.1.2. *Soit $<,>$ un produit scalaire sur E. On dit que la représentation est unitaire si $\rho(g)$ est unitaire $\forall g$, c'est-à-dire,*

$$\forall g \in G, \forall x, y \in E, \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle = \langle x, y \rangle$$

. Une représentation est dite unitarisable s'il existe un produit scalaire sur E tel que $(\rho, \langle , \rangle)$ est unitaire.

Lemme 1.1.1. *Soit G un groupe fini. Pour toute fonction φ sur G à valeurs dans un espace vectoriel*

$$\forall g \in G, \sum_{h \in G} \varphi(gh) = \sum_{h \in G} \varphi(hg) = \sum_{k \in G} \varphi(k). \tag{1.1}$$

Démonstration *En effet, g est fixé, tout élément de G s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme gh (resp., hg), ou $h \in G$.*

Théorème 1.1.1. *Toute représentation d'un groupe fini G est unitarisable.*
Démonstration *Soit (E, ρ) une représentation d'un groupe fini, G, et soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E considérons :*

$$\langle , \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle$$

qui est un produit scalaire sur E. En effet, supposons $\langle , \rangle' = 0$,
$\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle = 0 \quad \forall g \in G$

en particulier pour g=e $\rho(g) = id_E$ *donc :* $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Montrons que $\langle , \rangle'$ *est invariant par* ρ *(*ρ *unitaire par rapport à* $\langle , \rangle'$*)*

En effet :

$$\begin{aligned} \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle' &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle \rho(h)\rho(g)x, \rho(h)\rho(g)y \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle \rho(hg)x, \rho(hg)y \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \langle \rho(k)x, \rho(k)y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle' \end{aligned}$$

donc ρ *est unitaire par rapport à* $\langle , \rangle'$

1.1.2 Représentations irréductibles

Définition 1.1.3. *Soit* (E, ρ) *une représentation d'un groupe* G*,* $F \subset G$ *un sous espace vectoriel de* E*, On dit que* F *est invariant par* ρ *(stable) si est seulement si :*

$$\rho(g)F \subset F, \forall g \in G$$

ce qui entraine $\rho(g)F = F, \forall g$

Donc on peut parler d'une représentation ρ *restreinte à* F *: c'est une représentation de* G *dans* F

$\rho|_F$ *est appelée sous représentation.*

Définition 1.1.4. *Une représentation* (E, ρ) *de* G *est dite irréductible.*
Si $E \neq \{0\}$ *et les seules sous espaces vectoriels de* E *invariants par* ρ *sont 0 et* E

Exemple *La représentation de dimension 2 de* $\mathcal{S}_3$ *dans l'exemple précédent 1.1.1 est irréductible, car les sous espaces propres de* $\rho(t)$ *et de* $\rho(c)$ *sont d'intersection nulle.*

Proposition 1.1.1. *Toute représentation irréductible d'un groupe fini* G *est de dimension finie.*

Démonstration *Soit (E, ρ) une représentation irréductible d'un groupe fini G et soit $x \in E$. Le sous ensemble $\{\rho(g)x/g \in G\}$ étant fini, Cette ensemble engendre un sous espace vectoriel de dimension fini de E. Si $x \neq 0$, ce sous-espace vectoriel de E n'est pas réduit à $\{0\}$ et c'est un espace invariant par ρ. il coincide donc avec E, qui est donc $dimE < \infty$.*

1.2 Opérations sur les représentations

1.2.1 Somme directe de représentations

Définition 1.2.1. *Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de G. Alors on définit $(E_1 \oplus E_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$ par :*

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x_1, x_2) = (\rho_1(g)x_1, \rho_2(g)x_2), \forall g \in G, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$$

Exemple 1.2.1. *Si ρ_1 et ρ_2 sont matricielles, Alors la matrice de $\rho_1 \oplus \rho_2(g)$ est :*

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

Plus généralement si $m > 0$ on définit $\rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_m$
En particulier : Si (E, ρ) est une représentation de G, On note :

$$\underbrace{\rho \oplus \rho \oplus ... \oplus \rho}_{mfois} = \oplus_m \rho = m\rho$$

Définition 1.2.2. *Une représentation est dite complètement réductible si elle est somme directe de représentation irréductible.*

Lemme 1.2.1. *Soit ρ une représentation unitaire d'un groupe G dans $(E, \langle, \rangle)$. Si $F \subset E$ est invariant par ρ.*

Démonstration *Soit $y \in F^{\perp} = \{y \in E/\langle x, y\rangle\}$*
$\langle x, \rho(g)y\rangle = \langle \rho(g^{-1})x, y\rangle = 0, \quad \forall x \in F, \forall g$
car F est invariant par ρ
$\Rightarrow \rho(g)y \in F^{\perp}$
$\Rightarrow F^{\perp}$ *est invariant par ρ*

Théorème 1.2.1. *(**Théorème de Maschke**) Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible.*

Démonstration *Soit (E, ρ) une représentation de G d'après le théorème 1.1.1, ρ est supposé unitaire. Si ρ n'est pas irréductible.*
Soit F un sous espace vectoriel invariant par ρ avec $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$
Alors : $E = F \oplus F^{\perp}$
$F^{\perp}$ aussi invariant par ρ et $dimF < dimE$ et $0 < dimF^{\perp} < dimE$
par récurrence sur la dimension de E, on obtient le résultat :
$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_m$
Remarque *Le théorème de Maschke est aussi vrai dans le cas des groupes compacts, mais il faut signaler que la démonstration nécessite plus de technique.*

1.2.2 Produit tensoriel

Définition 1.2.3. *Si (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) sont des représentations d'un même groupe G, on définit leur produit tensoriel $(E_1 \otimes E_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$ par*

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$

1.2.3 Opérateurs d'entrelacement et lemme de Schur

Définition 1.2.4. *Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentation de G. On dit qu'une application linéaire, $T : E_1 \longrightarrow E_2$, entrelace ρ_1 et ρ_2 si*

$$\forall g \in G, \rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g)$$

et T s'appelle alors opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2.
La définition exprime la commutativité du diagramme suivant, $\forall g \in G$,

$$\begin{array}{ccccc} & E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 & \\ \rho_1(g) & \downarrow & & \downarrow & \rho_2(g) \\ & E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 & \end{array}$$

Les expressions suivantes sont diversement utiliser pour exprimer cette même propriétés :

- *T est équivariant ρ_1 et ρ_2*
- *T est un morphisme de G-espaces vectoriels*
- *$T \in Hom_G(E_1, E_2)$*

Cas particulier : Si $E = E_1 = E_2$ et $\rho = \rho_1 = \rho_2$, un opérateur T qui entrelace ρ_1 et ρ_2 est simplement un opérateur qui commute avec ρ.

Définition 1.2.5. *Les représentations ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes s'il existe un opérateur d'entrelacement bijective entre ρ_1 et ρ_2*
Dans ce cas :

$$\forall g \in G, \rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1} \tag{1.2}$$

La relation définie par (1.2) est bien une relation d'équivalence sur les représentation En particulier pour des représentations matricielles on obtient des matrices semblables : ie :
$\forall g \in G : [\rho_1(g)]$ est semblable à $[\rho_2(g)]$ avec la même matrice de passage.

Lemme 1.2.2. *Si T entrelace ρ_1 et ρ_2 le noyau de T, $KerT$ est invariant par ρ_1, et l'image de T,ImT, est invariant par ρ_2.*

Démonstration

- *Si $x \in E_1$ et $Tx = 0$, Alors*

$$T(\rho_1(g)x) = \rho_2(g)(Tx) = \rho_2(g)(0) = 0$$

  Donc :
  $Ker\ T$ est invariant par ρ_1
- *Si $y \in ImT, \exists x \in E_1$ tel que $y = Tx$*
  Alors :

$$\rho_2(g)y = \rho_2(g)Tx = T(\rho_1(g)x)$$

  $\Rightarrow \rho_2(g)y \in Im(T)$
  Donc ImT est invariant par ρ_2

Lemme 1.2.3. *Si T commute avec ρ, tout sous espace propre de T est invariant par ρ*

Démonstration *En effet, si* $Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$*, alors* $T(\rho(g)x) = \lambda\rho(g)x$*. Donc le sous espace propre de* T *correspondant à la valeur propre* λ *est invariant par* ρ*.*

Théorème 1.2.2. ***(Lemme de Schur)***
Soit T *un opérateur entrelacant des représentation irréductibles de* G *:* (E_1, ρ_1) *et* (E_2, ρ_2)

- *Si* ρ_1 *et* ρ_2 *ne sont pas équivalentes, alors* $T = 0$*.*
- *Si* $E_1 = E_2 = E$ *et* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*, alors* T *est un multiple scalaire de l'identité de* E*.*

Démonstration *Si* ρ_1 *et* ρ_2 *ne sont pas équivalentes,* T *n'est pas bijectif, donc* $KerT \neq \{0\}$ *ou bien* $ImT \neq E_2$
D'après le lemme (1.2.2), $Ker\ T$ *est invariant par* ρ_1*, comme* ρ_1 *est irréductible alors :* $KerT = E_1$ *si* $Ker\ T \neq \{0\}$*, donc* $T = 0$*.*
D'après le lemme (1.2.2) aussi $Im\ T$ *est invariant par* ρ_2*, comme* ρ_2 *est irréductible alors :* $ImT = \{0\}$*, donc* $T = 0$*.*
Si $E_1 = E_2 = E$ *et* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*, alors :*$\rho(g) = T \circ \rho(g) \circ T^{-1}, \quad \forall g \in G$
Soit λ *une valeur propre de* T
Soit E_λ *l'espace propre associée à* λ*, d'après le lemme (1.2.3) l'espace propre* E_λ *est invariant par* ρ*,*$E_\lambda \neq \{0\}$ *car* $T \neq 0$*.*
Alors puis que ρ *est irréductible on a :* $E_\lambda = E, \forall x \in E, Tx = \lambda x$
donc $T = \lambda.Id_E$

1.3 Caractères et relations d'orthogonalité

1.3.1 Fonctions sur un groupe, coefficients matriciels

Définition 1.3.1. *Sur* $L^2(G)$*, le produit scalaire est défini par*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$$

. On va s'intéresser aux coefficients matriciels des représentations.

Définition 1.3.2. *Si* ρ *est une représentation de* G *dans* $\mathbb{C}^n, \forall (i,j), 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$*, la fonction* $\rho_{ij} \in L^2(G)$ *qui associe à* $g \in G$ *la coefficient de la* *matrice $\rho(g)$ situé sur la i ligne et la j colonne, $(\rho(g))_{ij} \in \mathbb{C}$, est appelée un coefficient matriciel de ρ.*

Pour une représentation ρ dans un espace vectoriel E, on définit les coefficients matriciels ρ_{ij} relativement à une base (e_i), qui vérifient

$$\rho(g)e_j = \sum_i \rho_{ij}(g)e_i$$

(i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne). Si ρ est une représentation unitaire dans un espace de Hilbert de dimension finie, alors

$$\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1} = \overline{{}^t(\rho(g))}$$

, d'où, dans une base orthonormale,

$$\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ij}(g)}$$

et, en particulier, les coefficients diagonaux de $\rho(g)$ et $\rho(g^{-1})$ sont des nombres complexes conjugués.

1.3.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité

Définition 1.3.3. *Soit (E, ρ) une représentation de G. On appelle caractère de ρ la fonction χ_ρ sur G à valeurs complexes définie par*

$$\forall g \in G, \chi_\rho(g) = Tr(\rho(g))$$

. Des représentations équivalentes ont même caractère.
Pour une représentation matricielle de dimension n,

$$\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^{n} (\rho(g))_{ii} \tag{1.3}$$

Sur chaque classe de conjugaison de G, la fonction χ_ρ est constante.

Définition 1.3.4. *On appelle fonction centrale sur G une fonction constante sur chaque classe de conjugaison.*

Proposition 1.3.1. *Les propriétés élémentaires des caractères sont les suivantes :*

- $\chi_\rho(e) = dim\rho$.
- $\forall g \in G, \chi(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
- *Le caractère d'une somme directe de représentation est de la somme des caractères,* $\chi_{\rho_1\oplus\rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.
- *Le caractère d'un produit tensoriel de représentation est le produit des caractères,*

$$\chi_{\rho_1\otimes\rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$$

Démonstration *La première propriété est conséquence de la formule (1.3). Pour démontrer la seconde formule, on peut supposer que ρ est unitaire pour un certain produit scalaire et choisir une base orthonormal. La propriété des sommes directes est évidente.*
La relation suit du fait que la trace d'un produit tensoriel de matrices est le produit des traces.

Proposition 1.3.2. *Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentation de G et soit $u : E_1 \to E_2$, une application linéaire. Alors l'application linéaire, $T_u : E_1 \to E_2$, définie par :*

$$T_u = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_2(g)u\rho_1(g)^{-1} \tag{1.4}$$

entrelace ρ_1 et ρ_2
Démonstration *Calculons*

$$\begin{array}{rcl} \rho_2(g)T_u & = & \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} \rho_2(gh)u\rho_1(h^{-1}) \\ & = & \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} \rho_2(k)u\rho_1(k^{-1}g) \end{array}$$

d'après la relation fondamentale (1.1). D'où,

$$\rho_2(g)T_u = T_u\rho_1(g)$$

L'opérateur T_u est donc un opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2.

Proposition 1.3.3. *Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations irréductibles de G, On choisit des bases dans E_1 et E_2.*

(i) Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes,

$$\forall i, j, k, l, \quad \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_{kl} (\rho_1(g^{-1}))_{ji} = 0$$

(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g))_{kl} (\rho(g^{-1}))_{ji} = \frac{1}{dimE} \delta_{ki} \delta_{lj}$$

Théorème 1.3.1. *Les caractères irréductibles de G forment un système orthonormal dans $L^2(G)$*

Corollaire 1.3.1. *Les représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini G sont en nombre fini.*

On désigne par $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G.

1.4 Représentations des groupes compacts

Définition 1.4.1. *Rappelons qu'un groupe topologique est un groupe muni d'une structure d'espace topologique séparé (par exemple un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé) telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient des application continue. Un espace topologique est localement compact si tout point possède un voisinage compact. On appelle groupe compact (resp., localement compact) un groupe topologique qui est un espace compact (resp., localement compact).*
Si E est un espace de Banach sur le corps des réels ou des complexes (espace vectoriel normé complet), on désigne par $\mathcal{L}(E, E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E (encore appelées endomorphismes de E ou opérateurs linéaires continues ou opérateurs bornés sur E). On le munit de la norme des applications linéaires qui, pour $u : E \longrightarrow E$, linéaire et continue, est définie par

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$$

Pour tout espace de Banach,E, on désigne par $GL(E) \subset \mathcal{L}(E, E)$ le groupe des isomorphismes de E, c'est-à-dire des endomorphismes bijectifs et bicontinus de E. On sait qu'il suffit qu'une application linéaire continue entre espaces de Banach soit bijective pour que son inverse le soit. On considère $GL(E)$ comme sous espace topologique de l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, E)$. La boule unité dans un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie. Donc tout sous-ensemble fermé est borné de $GL(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, est compact.Par exemple $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ et $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ sont compacts. De même, $SU(n)$ et $SO(n)$ sont compacts. Le groupe abélien $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle est un groupe localement compact mais non compact.

1.4.1 Mesure de Haar

Sur un groupe fini G, on sait que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(G)$ et $\forall g \in G$,

$$\sum_{h \in G} f(h) = \sum_{h \in G} f(gh) = \sum_{h \in G} f(hg)$$

Si l'on désigne par l_g (resp.,r_g) la multiplication à gauche (resp., droite) par $g \in G$, on a par définition $f(gh) = (f \circ l_g)(h)$ et $f(hg) = (f \circ r_g)(h)$. Par conséquent, l'opération de moyenne,

$$M : f \longmapsto M(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$$

, vérifie

- M est une forme linéaire sur $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, positive, c'est-à-dire prenant des valeurs positives sur les fonctions réelles positives.
- M est invariante à gauche et à droite, c'est-à-dire

$$\forall g \in G, M(f \circ l_g) = M(f \circ r_g) = M(f)$$

- M(1)=1

Sur les groupes compacts, il existe une mesure, la mesure de Haar, qui possède des propriétés analogues. Plus généralement sur un groupe localement compact, il existe des mesures ayant une propriété d'invariance soit à gauche, soit à droite (mais pas les deux en général).

Théorème 1.4.1. *Soit G un groupe localement compact.*

(i) Il existe sur G une mesure positive, finie sur les compacts, non identiquement nulle et invariante à gauche, i.e., pour toute fonction intégrable f et pour tout $h \in G$,

$$\int_G f(hg)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g)$$

Une telle mesure est unique à un facteur scalaire réel positive près. Si f est continue, $f \geqslant 0$ et $\int_G f(g)d\mu(g) = 0$, alors f=0.

(ii) Si G est compact, il existe sur G une unique mesure invariante à gauche μ telle que $\int_G d\mu(g) = 1$.

(iii) Sur un groupe compact, toute mesure invariante à gauche est invariante à droite.

Démonstration

(i) Nous admettrons ce résultat.

(ii) Si μ_0 est une mesure invariante à gauche sur G compact et si $\int_G d\mu_0(g) = m$, on pose $\mu = \frac{1}{m}\mu_0$ et μ est clairement l'unique mesure invariante à gauche telle que $\int_G d\mu(g) = 1$.

(iii) Soit μ une mesure invariante à gauche sur G localement compact. Pour f continue à support compact, posons $\mu(f) = \int_G f(g)d\mu(g)$. Soit $h \in G$ et considérons $\mu_h(f) = \int_G f(gh)d\mu(g)$, c'est-à-dire $\mu_h(f) = \mu(f \circ r_h)$. Alors,

$$\forall k \in G, \mu_h(f \circ l_k) = \int_G f(kgh)d\mu(g) = \int_G f(gh)d\mu(g) = \mu_h(f)$$

, donc, d'après l'unicité des mesures invariantes à gauche à un facteur prés, il existe un scalaire $\Delta(h) \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\mu_h(f) = \Delta(h)\mu(f)$$

Si G est compact, on peut intégrer la fonction constante 1. On obtient $\mu_h(1) = \mu(1) = \Delta(h)\mu(1)$. D'où $\Delta = 1$ et μ est donc aussi invariante à droite, i, e.,

$$\int_G f(gh)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g), \quad \forall h \in G$$

Définition 1.4.2. *Sur un groupe compact, l'unique mesure invariante à gauche et à droite, et de masse totale 1, s'appelle la mesure de Haar.*

Sur un groupe localement compact G, la fonction $\Delta : h \in G \longmapsto \Delta(h) \in \mathbb{R}^+$ est appelée la fonction modulaire de G. Elle vérifie

$$\Delta(hh') = \Delta(h)\Delta(h')$$

car $\Delta(hh')\mu(f) = \mu_{hh'}(f) = \mu(f \circ r_{hh'}) = \mu(f \circ r_{h'} \circ r_h) = \Delta(h)\mu(f \circ r_{h'}) = \Delta(h)\Delta(h')\mu(f)$. On dit que le groupe localement compact G est unimodulaire si $\Delta = 1$.
Le théorème précédent dit que si G est compact, alors G est unimodulaire.
On écrit souvent $\int f(g)dg$ ou lieu de $\int f(g)d\mu(g)$. Ainsi, si G est compact, pour toute fonction mesurable f,

$$\forall h \in G, \int_G f(g)dg = \int_G f(hg)dg = \int_G f(gh)dg$$

et l'on impose à μ de satisfaire la condition de normalisation, $\int_G dg = 1$

1.4.2 Complète réductibilité

Théorème 1.4.2. *Toute représentation d'un groupe compact est unitarisable.*

Schéma d'une démonstration. Soit G un groupe compact, et soit (E, ρ) une représentation de G. On pose, pour $x, y \in E$,

$$\langle x, y\rangle' = \int_G \langle \rho(g)x, \rho(g)y\rangle dg$$

où dg est la mesure de Haar sur G. C'est bien un produit scalaire car, si $\langle x, x'\rangle = 0$, alors d'après le théorème (1.4.1) ,$\langle \rho(g)x, \rho(g)x\rangle = 0, \forall g \in G$, et par conséquent, x=0. D'autre part,

$$\langle \rho(g)x, \rho(g)y\rangle' = \int_G \langle \rho(hg)x, \rho(hg)y\rangle dh = \int_G \langle \rho(h)x, \rho(h)y\rangle dh = \langle x, y\rangle'$$

Ainsi $\rho(g)$ est unitaire pour $\langle , \rangle'$.

Corollaire 1.4.1. *Toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est complètement réductible.*

Théorème 1.4.3. *Toute représentation irréductible d'un groupe compact est de dimension finie.*

Remarque *Cet énoncé, comme spécifié plus haut, sous-entend qu'il s'agit de représentations continues dans des espaces de Hilbert complexes séparables. Il n'est pas vrai en toute généralité, mais reste vrai pour des représentations continues à valeurs dans certains espaces vectoriels topologiques plus généraux que les espaces de Hilbert.*

1.4.3 Relations d'orthogonalité

Définition 1.4.3. *On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes sur G par*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg$$

où dg est la mesure de Haar. On désigne par $L^2(G)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant cet espace préhilbertien pour la norme définie par ce produit scalaire. C'est l'espace de Hilbert des classes d'équivalences (pour la relation d'égalité presque par tout) de fonctions de carré intégrable sur G.

On sait que les représentations irréductibles de G sont de dimension finie. Les relations d'orthogonalité des caractères des représentations irréductibles des groupes finis s'étendant au cas compact.

Théorème 1.4.4. *Soit G un groupe compact et soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations unitaires irréductibles de G. $\forall x_1, y_1 \in E_1$ et $\forall x_2, y_2 \in E_2$,*

$$\langle \varphi^{\rho_1}_{x_1 y_1}, \varphi^{\rho_2}_{x_2 y_2} \rangle = \begin{cases} 0 & si \quad \rho_1 \nsim \rho_2 \\ \frac{1}{dim E} \langle x_2, x_1 \rangle \langle y_1, y_2 \rangle & si \quad E_1 = E_2 = E et \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{cases}$$

Démonstration *En généralisant le procédé utilisé dans la proposition 1.3.2 et 1.3.3, pour toute application linéaire continue $u : E_1 \to E_2$, on définit* *l'opérateur qui entrelace* ρ_1 *et* ρ_2*,*

$$T_u = \int_G \rho_2(g)u\rho_1(g)^{-1}dg$$

On considère l'application linéaire $u_{y_1y_2} : E_1 \longrightarrow E_2$ *définie par* $u_{y_1y_2}(x) = \langle y_1, x\rangle y_2$ *pour* x *dans* E_1*. En utilisant le fait que* ρ_1 *est unitaire, on obtient alors la relation* $\langle \varphi^{\rho_1}_{x_1y_1}, \varphi^{\rho_2}_{x_2y_2}\rangle = \langle x_2, T_{u_{y_1y_2}}x_1\rangle$*.*

On applique ensuite le lemme de Schur. Cette quantité est nulle si ρ_1 *n'est pas équivalente à* ρ_2*. Si* $E_1 = E_2 = E$ *et* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*, alors* $T_{u_{y_1y_2}} = \tau(y_1, y_2)Id_E$*, où* $\tau(y_1, y_2)$ *est antilinéaire en* x_1 *et linéaire en* x_2*. On calcule* $\tau(y_1, y_2)$ *en calculant la trace de* $T_{u_{y_1y_2}}$*. Celle-ci est égale à la trace de* $u_{y_1y_2}$ *car, pour toute application linéaire* u*,* $TrT_u = \int_G Tr(\rho(g) \circ u \circ \rho(g^{-1}))dg = \int_G Trudg = Tru$*. Comme on a* $Tru_{y_1y_2} = \langle y_1, y_2\rangle$*, on obtient le résultat cherché.*

En particulier, si ρ_1 *et* ρ_2 *ne sont pas équivalentes, dans toute bases orthonormales,*

$$\langle \varphi^{\rho_1}_{ij}, \varphi^{\rho_2}_{kl}\rangle = 0 \tag{1.5}$$

et, si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*, alors*

$$\langle \varphi^{\rho}_{ij}, \varphi^{\rho}_{kl}\rangle = \frac{1}{dimE}\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{1.6}$$

On désigne par $\widehat{G}$ *l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles d'un groupe compact G. Lorsque* $L^2(G)$ *est séparable, ce qui a lieu dans les cas que l'on rencontre en pratique, les relations d'orthogonalité ci-dessus impliquent que* $\widehat{G}$ *est dénombrable.*

D'après (1.5) et (1.6) les coefficients matriciels dans des bases orthonormales des représentations unitaires irréductibles inéquivalentes de G forment un système orthogonal dans $L^2(G)$*. On démontre qu'ils forment une base orthogonale de* $L^2(G)$ *au sens hilbertien. Ce résultat constitue le théorème de Peter-Weyl qui peut s'énoncer :*

Théorème 1.4.5. ***(Théorème de Peter-Weyl pour les groupes compacts)*** *Toute fonction* $f \in L^2(G)$ *admet un développement de Fourier convergent* *au sens de* L^2,

$$f = \sum_{\alpha \in \widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{dim\rho^\alpha} c_{ij}^\alpha \rho_{ij}^\alpha \tag{1.7}$$

où les ρ^α *sont des représentants unitaires des classes de représentations irréductibles inéquivalentes de* G*, les* ρ_{ij}^α *sont leurs coefficients matriciels dans des bases orthonormales, et*

$$c_{ij}^\alpha = (dim\rho^\alpha)\langle \rho_{ij}^\alpha, f\rangle = (dim\rho^\alpha)\int_G f(g)\overline{\rho_{ij}^\alpha(g)}dg \tag{1.8}$$

Théorème 1.4.6. *(Relation d'orthogonalité) Soient* ρ_1 *et* ρ_2 *des représentations irréductibles de* G*. Alors*

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}\rangle = \begin{cases} 0 & si \quad \rho_1 \nsim \rho_2 \\ 1 & si \quad \rho_1 \sim \rho_2 \end{cases}$$

Démonstration *Compte tenu du théorème (1.4.2), ces relations sont une conséquence des formules précédentes (1.5) et (1.6).*

Une représentation ρ *est irréductible si et seulement si* $\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}\rangle = 1$

Si ρ *est une représentation de* G*, on peut la décomposer en somme hilbertienne de représentations irréductibles,* $\rho_i \in \widehat{G}$*. On écrira*

$$\rho = \widehat{\bigoplus}_{\rho_i \in \widehat{G}} m_i \rho_i$$

où

$$m_i = \langle \chi_{\rho_i}, \chi_\rho \rangle$$

On peut avoir $m_i = \infty$

Chapitre 2

Groupe de Lorentz

2.1 Groupe de Lorentz

2.1.1 Définition

Nous considérons dans $\mathbb{R}^4$ la forme quadratique

$$S^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \tag{2.1}$$

Une transformation générale de Lorentz est une transformation linéaire $x' = gx$ laissant invariante cette forme quadratique.
On note l la matrice de la forme quadratique $S^2(x)$:

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sous toute transformation linéaire avec la matrice g la matrice l la forme quadratique se transforme en $g^t l g$. où g^t est la matrice transposée de la matrice g. Par conséquent pour une transformation de Lorentz générale, nous avons l'équation

$$g^t l g = l \tag{2.2}$$

Cela implique clairement que det $g = \pm 1$, et donc g est inversible. Il est clair que g^{-1} est aussi une transformation générale de Lorentz. Le produit de deux transformations générales de Lorentz est clairement une transformation de Lorentz. Par conséquent l'ensemble des transformations linéaires dans $\mathbb{R}^4$ qui laissent invariant S^2 est un sous groupe du groupe linéaire $Gl(\mathbb{R}^4)$, c'est le groupe général de Lorentz notée par suit $\mathcal{L}$.

L'équation $S^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$ définit dans $\mathbb{R}^4$ un cône (appelé cône de lumière) dont l'axe est le x_0-axe (l'axe du temps) Le cône lumineux divise l'ensemble de l'espace $\mathbb{R}^4$ en trois régions : un région extérieure. où $S^2(x) > 0$, et deuxième régions internes $S^2(x) < 0, x_0 > 0$ et $S^2(x) < 0, x_0 < 0$ Toute transformation générale de Lorentz transforme la lumière cône et sa région interne (c'est-à-dire la région où $S^2(x) < 0$) en eux-mêmes.
Une transformation générale de Lorentz sous laquelle chaque région du cône de lumière reste également en place, nous appellerons simplement une transformation de Lorentz. Il est clair que les transformations de Lorentz ne modifient pas la direction positive de la axe du temps. Les transfusions de Lorentz forment également un groupe. connu comme le compléter le groupe Lorentz. Nous appellerons les transformations de Lorentz avec un minant égal à 1 transformations de Lorentz propres. Ils forment également un groupe -le bon groupe Lorentz. Nous notons que l'ensemble du groupe Lorentz est provenant du groupe approprié par l'ajout d'une transformation spéciale - un réflexion spatiale s avec la matrice

$$s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et aussi toutes les transformations possibles de la forme sg, où g est un élément du groupe Lorentz approprié.

De même, le groupe de Lorentz général est obtenu à partir du groupe de Lorentz complet par l'addition de la soi-disant réflexion temporelle, c'est-à-dire de la transformation t avec la matrice

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3 \\ x'_2 &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + g_{23}x_3 \\ x'_3 &= g_{31}x_1 + g_{32}x_2 + g_{33}x_3 \\ x'_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Il est clair qu'il s'agit d'une transformation de Lorentz appropriée.

Si nous identifions chaque rotation en trois dimensions avec le correspondant transformation de Lorentz indiquée ci-dessus, alors nous pouvons dire que les rotations tridimensionnelles forment un sous-groupe du groupe de lorentz approprié.
Enfin, nous faisons une observation concernant la réflexion spatiale et temporelle.

Nous associons à chaque transformation de Lorentz propre g une autre transformation de Lorentz selon la formule

$$\widetilde{g} = sgs^{-1} \tag{2.4}$$

Il est clair que $\widetilde{g}$ est à nouveau une transformation de Lorentz appropriée.

La correspondance $\widetilde{g} \sim g$ satisfait clairement ce qui suit

1) $e \sim e$ (e est la transformation unitaire)
2) si $\widetilde{g}_1 \sim g_2$ alors $\widetilde{g}_2 \sim g_2$ et $\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2 \sim g_1g_2$ Toute correspondance individuelle $\widetilde{g} \sim g$ entre les éléments d'un même groupe qui satisfait ces conditions sont connues comme un automorphisme du groupe. De cette façon une réflexion spatiale produit selon la formule (2.4) un automorphisme du groupe Lorentz approprié. La réflexion temporelle également un automorphisme

$$\widetilde{g} = tgt^{-1} \tag{2.5}$$

Cet automorphisme coïncide avec le précédent, car on voit facilement que

$$tgt^{-1} = sgs^{-1}$$

On note que la matrice de la transformation t coïncide avec la matrice l de la forme quadratique $S^2(x)$. Il résulte donc de l'équation (2.2) que

$${}^{t}g^{-1} = lgl^{-1} = tgt^{-1}$$

De cette manière, la matrice $\widetilde{g}$ de la transformation $sgs^{-1} = tgt^{-1}$ est égale à

$$\widetilde{g}={}^{t} g^{-1}$$

Soit g un élément arbitraire d'un groupe, et g_0 va être un élément fixe de ce même groupe. Il est clair que la correspondance $g \sim g_0 g g_0^{-1}$ est une automorphisme du groupe. Un tel automorphisme est appelé intérieur. Tout autre l'automorphisme est appelé extérieur. Automorphisme (2.5) du bon groupe de Lorentz

$$\widetilde{g}= sgs^{-1} ={}^{t} g^{-1}$$

généré par la réflexion spatiale s. ne peut pas être représenté sous la forme

$$\widetilde{g}= g_0 g g_0^{-1}$$

où g_0 est un élément du groupe approprié. Cette simple circonstance peut être facilement vérifié par le lecteur. De cette façon, nous voyons que l'automorphisme

$$g = sgs^{-1}$$

est un automorphisme externe du groupe propre (pour le groupe complet et le groupe général cet automorphisme est, évidemment, interne). On peut prouver que tout automorphisme externe du groupe de Lorentz propre est donné sous la forme

$$\widetilde{g}= g_0 sgs^{-1} g_0^{-1}$$

où g_0 est une transformation de Lorentz propre. Cela signifie que l'automorphisme $g = sg_0 s^{-1}$ est en un certain sens le seul automorphisme externe du groupe de Lorentz propre.

2.1.2 Systèmes de coordonnées orthogonales

Lors du transfert du repère $(x_0, x_1, x_{2,3})$ aux coordonnées (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) à l'aide de la transformation linéaire g la matrice I de forme quadratique

$$S^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - x_0^2$$

se transforme, comme nous le savons, en

$$l' = g^t l g$$

Voici la matrice l' de la forme quadratique $S^2(x)$ dans le repère (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) coïncide avec la matrice l si et seulement si g est une transformation générale de Lorentz. Les repères (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) dans la forme quadratique $S^2(x)$ est représentée par la matrice l sont appelés systèmes de coordonnées orthogonales dans l'espace à quatre dimensions $\mathbb{R}^4$.

Il est clair qu'une transformation linéaire effectuant une transformation d'un système de coordonnées orthogonales à un autre, est une transformation générale de Lorentz. Inversement, toute transformation générale de Lorentz porte un système de coordonnées orthogonales dans un autre (système de coordonnées orthogonales). Dans ce qui suit, nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées orthogonales, sans le déclarer explicitement à chaque fois.

Il est bien connu que toute route de l'espace tridimensionnel porte chaque sphère centre l'origine en elle-même ; et que tout point sur une telle sphère peut être porté en tout autre point par une rotation suiuble.

Pour décrire cela, nous disons que les sphères (avec le centre à l'origine) sont des surfaces transitives par rapport au groupe de rotations.

En général, si un groupe G de transformations agit dans un espace $\mathbb{R}$ alors une surface est connue comme une surface de transitivité pour le groupe G, à condition que toute transformation de G porte cette surface en elle-même et que l'un de ses points puisse être porté par une transformation de G à une autre.

Dans la mesure où la forme

$$S^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$$

n'est pas altérée sous une transformation de Lorentz, les surfaces

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = cont \tag{2.6}$$

se transforment en eux-mêmes sous les transformations de Lorentz.

Les surfaces (2.6) sont des types suivants :

1. $S^2(x) = c < 0, x_0 > 0$ est la branche supérieure d'un hyperboloïde de deux feuilles.
2. $S^2(x) = c < 0, x_0 < 0$ est la branche inférieure de cet hyperboloïde.
3. $S^2(x) = 0, x_0 > 0$ est la branche supérieure du cône de lumière.
4. $S^2(x) = 0, x_0 < 0$ est la branche inférieure du cône de lumière.
5. $S^2(x) = c > 0$ est un hyperboloïde d'une feuille.

L'origine des coordonnées $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$
Nous allons maintenant montrer que chacune de ces surfaces est une surface transitive avec respect pour le bon groupe de Lorentz.
On note tout d'abord qu'il est possible de porter n'importe quel point $A(x_0, x_1, x_2, x_3)$ par une rotation (c'est-à-dire par une transformation de Lorentz appropriée qui ne modifie pas la quatrième coordonnée x_0). à droite de l'avion $(x_0, x_3), x_3 > 0$

Maintenant, Soient A_1 et A_2 être deux points dans l'espace à quatre dimensions qui se trouvent sur une seule et même surface (1-5).

Nous faisons tourner chacun de ces éléments de façon à ce qu'ils coïncident avec les points B_1 et B_2 ,le demi-plan droit (x_0, x_3) : $B_1 = u_1 A_1, B_2 = u_2 A_2$ (u_1 u_2 sont rotations). Sous les rotations, chacune des surfaces (1-5) est transportée en lui-même. Il s'ensuit que les points B_1 et B_2 se trouvent sur une même courbe et cela signifie que chacun peut être porté par une transformation appropriée g_{03} dans l'avion (x_0, x_3) à l'autre :

$$B_2 = g_{03} B_1$$

Il est clair que la transformation $g = u_2^{-1} g_{03} u_1$ porte A_1 en A_2 . Dans ce manière, nous voyons que les surfaces (1-5) sont des surfaces de transitivité pour la groupe Lorentz approprié.

Il est clair que la réflexion spatiale transforme chacune des surfaces (1-5) en elle-même. Cela signifie que les surfaces de transitivité pour le groupe de Lorentz complet sont les mêmes que pour le groupe propre. La réflexion temporelle intervertit les deux branches de l'hyperboloïde de deux feuilles et branches du cône lumineux. Par conséquent, les surfaces de transitivité pour le groupe général de Lorentz ne sont que de quatre types :

1. Hyperboloïde de deux feuilles :$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c > 0$
2. Le cône lumineux :$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$
3. Hyperboloïde d'une feuille :$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c < 0$
4. L'origine des coordonnées :$x_0^2 = x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 0$

Nous faisons maintenant quelques observations importantes pour la suite. Comme nous l'avons montré, tout point A de la branche supérieure de l'hyperboloïde

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, x_0 > 0 \tag{2.7}$$

peut être porté par des transformations de Lorentz appropriées à tout autre point sur ce branche, en particulier à son sommet $O(1,0,0,0)$

La plus simple de ces transformations est la vis hyperbolique g_{OA} dans le plan (x_0, A), qui passe par le point A et l'axe x_0. Mais il n'y a pas de transformation de Lorentz propre unique qui transfère le point A au point O.

Il est clair que deux de ces transformations diffèrent l'une de l'autre par une transformation u qui laisse le point O en place : $uO = O$. Toute transformation u qui laisse O(et avec elle aussi l'axe x_0) en place est clairement une rotation.

De cette manière, nous voyons que toute transformation de Lorentz qui transfère le point A au point 0 à la forme

$$g = ug_{OA}$$

où u est une rotation et g_{OA} est une vis hyperbolique dans le plan (x_0, A).

On voit donc que pour spécifier une transformation de Lorentz propre, il faut indiquer un point A sur la branche supérieure de l'hyperboloïde (2.7) qui est transféré par cette transformation à l'apex O de l'hyperboloïde. puis à l'aide d'une vis hyperbolique dans le plan (A, x_0) pour transférer du point A vers le point O, et enfin pour effectuer une rotation u. En d'autres termes. chaque transformation de Lorentz propres est définie par une paire $g \sim (u, A)$ où u est une rotation et A est un point sur l'hyperboloïde (2.7).

De cette observation, il résulte immédiatement que

1) Chaque élément du groupe de Lorentz approprié est donné par six paramètres indépendants (c'est-à-dire que le groupe de Lorentz approprié est un groupe de six paramètres). En fait, le point A sur l'hyperboloïde fournit trois paramètres indépendants (par exemple ses coordonnées x_1, x_2, x_3) et la rotation u de trois autres paramètres (par exemple les angles eulériens) ;
2) Le groupe de Lorentz approprié est connecté, c'est-à-dire deux de ses éléments g_1 et g_2 peuvent être reliés par un chemin continu. En fait soit $g_1 \sim (u_1, A_1)$ et $g_2 \sim (u_2, A_2)$. Si maintenant les rotations : u_1 et u_2 sont jointes par un chemin continu, ainsi que A_1 et A_2 (la branche supérieure de hyperboloïde est également connecté), alors g_1 lui-même sera rejoint par un chemin continu vers g_2.

En ce qui concerne cette dernière observation, nous déterminons maintenant le nombre de composants connectés des groupes Lorentz complets et généraux.

Le groupe propre est une composante connexe du groupe général de Lorentz. En fait, toute transformation de Lorentz g non incluse dans le groupe approprié non plus modifie la direction positive de l'axe du temps x_0, ou satisfait $detg = -1$ et par conséquent, elle ne peut pas être rejoint par un chemin continu vers une transformation de Lorentz propre. De cette manière, nous voyons que le groupe propre est connecté mais que toute extension de celui-ci ne l'est pas, c'est-à-dire que les formes de groupe de Lorentz propres une composante connectée du groupe général.

Il est clair que toutes les transformations de la forme sg où (s est une réflexion spatiale et g est une transformation propre). Forment également un composant connexe. Cela signifie que le groupe Lorentz complet est constitué de deux composants.

La réflexion temporelle t produit deux autres composants : une composante constitué des éléments de la forme tg. et une composante constituée des éléments de la forme $tsg = jg$ (j est une réflexion complète dans $\mathbb{R}^4$). De cette manière, le groupe général se compose de quatre composants connectées :

1) Le groupe approprié, que nous désignons par G_0.
2) Le composant sG_0 constitué d'éléments de la forme sg (g une transformation appropriée).

Ces deux composantes forment le groupe de Lorentz complet.

3) La composante tG_0 (des éléments tg).
4) Le composant tsG_0 (dans lequel tous les éléments stg se produisent).

Dans l'étude des représentations du groupe de rotations tridimensionnelles un rôle important a été joué par le fait que chaque rotation peut correspondre à une transformation bilinéaire unique du plan complexe :

$$z \to \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

ayant une matrice unitaire $a = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ avec $deta = 1$. À chaque rotation g a reçu une matrice unitaire du second ordre de signe indéfini $\pm a = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ avec un déterminant égal à l'unité. En revanche, à chaque matrice unitaire a avec déterminant égal à l'unité correspond une rotation complètement définie $g_a, a \to g_a$ tel que :

1. à l'aide au produit $a_1 a_2$ de deux matrices correspond au produit $g_{a_1} g_{a_2}$ des rotations $g_{a_1} g_{a_2} = g_{a_1 a_2}$
2. la matrice unitaire $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ définit la rotation unitaire e.
3. deux matrices distinctes a_1 et a_2 définissent une même rotation g si et seulement si, ces matrices ne diffèrent que par leur signe, $a_1 = -a_2$

Cette correspondance entre le groupe U de matrices unitaires de la seconde ordre avec déterminant égal à 1 et le groupe de rotations nous a permis de considérer toute représentation $g \to T_g$ du groupe de rotations comme une représentation du groupe $U, a \to Tg_a = T_a$ et inversement, considérer la représentation $a \to T_a$ du groupe U, en général, comme une représentation à deux valeurs du groupe de rotations.

Il s'avère qu'il existe une correspondance analogue entre les Transformations de Lorentz et matrices complexes du second ordre. Nous allons maintenant établir cela. Incidemment. nous obtiendrons la correspondance entre les rotations et les matrices unitaires une fois de plus et de façon plus simple. On considère l'ensemble des matrices hermitiennes du second ordre

$$c = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_2 + ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}$$

A chacune de ces matrices c, nous associons un vecteur x de $\mathbb{R}^4$ aux coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 :

$$c \longleftrightarrow x$$

On remarque que

$$detc = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -S^2(x)$$

La correspondance entre les matrices c et les vecteurs x est une. bi-unique et linéaire. Par conséquent. toute transformation linéaire dans l'espace des matrices c peuvent être considérées comme une transformation linéaire dans $\mathbb{R}^4$.

On spécifie une transformation linéaire dans l'espace des matrices c avec la formule

$$c' = aca^* \tag{2.8}$$

où a est une matrice du second ordre avec un déterminant égal à 1 (l'astérisque désigne la transposition conjuguée). Il est clair que pour que $(c')^* = ac'a^* = aca^* = c'$, soit c' une matrice hermitienne.

On notera par la transformation linéaire correspondante en $\mathbb{R}^4$ obtenue à l'aide de la formule $c \longleftrightarrow x$
Depuis $detc' = detc(deta = deta^* = 1), S^2(x') = S^2(x)$ c'est-à-dire que la transformation g_a est une transformation générale de Lorentz.

La correspondance $a \sim g_a$ satisfait clairement $g_{a_1}g_{a_2} = g_{a_1a_2}$. c'est-à-dire le produit des matrices a_1a_2 correspond le produit $g_{a_1}g_{a_2}$ des transformations de Lorentz spécifiées par celles-ci. Nous trouverons quelles matrices a correspond à la transformation identitaire.
Il est clair qu'une telle matrice doit satisfaire l'équation, Pour toute c

$$c = aca^* \tag{2.9}$$

Si nous prenons $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ alors on obtient

$$aa^* = E$$

Ou

$$a^* = a^{-1}$$

Nous pouvons maintenant réécrire l'équation (2.9) sous la forme

$$c = aca^{-1}$$

Il apparaît donc que

$$ac = ca$$

c'est-à-dire que la matrice a est permutable avec chaque matrice hermitienne. Une telle matrice est nécessairement un multiple de la matrice unitaire

$$a = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Depuis $deta = 1, \lambda = \pm 1$
De cette façon. la transformation de Lorentz identitaire correspond aux deux matrices $a = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui ne diffèrent que par le signe.

Nous allons maintenant prouver qu'à deux matrices a_1 et a_2 leur correspond une et la même transformation de Lorentz si et seulement si $a_1 = \pm a_2$, En fait, laissez. $g_{a_1} = g_{a_2}$, Cela signifie que pour tous les c.

$$a_1 c a_1^* = a_2 c a_2^*$$

Où

$$a_2^{-1} a_1 c (a_2^{-1} a_1)^* = c$$

Il s'ensuit que la matrice correspond à la transformation identitaire.
Par conséquent

$$a_2^{-1} a_1 = \pm E$$

Où

$$a_2 = \pm a_1$$

Ainsi, à chaque matrice complexe du second ordre avec déterminant égal à nous avons associé une transformation de Lorentz la correspondance possède les propriétés suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim e$
2. $g_{a_1} g_{a_2} = g_{a_1 a_2}$
3. Deux matrices distinctes a_1 et a_2 correspondent à une même transformation $g_{a_1} = g_{a_2}$ si et seulement si, ces matrices ne diffèrent que par le signe $a_1 = -a_2$.

Des deux premières propriétés, il s'ensuit que l'ensemble des transformations constitue un sous-groupe du groupe général de Lorentz.

Nous le désignons par G_a. Nous montrons maintenant que ce sous-groupe coïncide avec le groupe Lorentz approprié.

On note que le groupe de toutes les matrices complexes du second ordre avec déterminant égal à 1 est connecté.

Dans cette situation, le sous-groupe G_a est également connecté. Par conséquent, ce sous-groupe est contenu dans cette composante connexe du groupe général de Lorentz qui contient la transformation d'identification e. cette composante est le groupe de Lorentz approprié. Ainsi le sous-groupe G_a des transformations g_a est contenu dans le groupe de Lorentz propre. Nous prouvons maintenant qu'ils coïncident. À cette effet, on dérive le nombre de paramètres indépendants par lesquels les éléments du groupe $\mathcal{L}$ sont définis (la dimension du groupe $\mathcal{L}$)

Chaque matrice complexe est spécifiée par huit nombres réels. Puisque l'exigence que $\det a = 1$ impose deux conditions à ces nombres : $Re \det a = 1, Im \det a = 0$. alors six d'entre eux restent indépendants.

Chaque élément du groupe $\mathcal{L}$ et, par conséquent, du sous-groupe G_a également, est spécifié par six paramètres indépendants. Un élément du groupe de Lorentz approprié, comme nous l'avons vu, dépend également de six paramètres. Il s'ensuit donc que le sous-groupe de transformations G_a et le groupe propre ont la même dimension, et puisque le premier groupe est contenu dans le second, ils coïncident.

Nous résumons nos résultats comme suit :
Nous avons construit une correspondance $a \sim g_a$ entre le groupe de Lorentz propre et le groupe L de matrices complexes a du second ordre $(deta = 1)$ de telle sorte qu'à chaque matrice a correspond une transformation de Lorentz propre g_a et à chacune de ces transformations g sont liées deux matrices

différentes uniquement en signe. $+a$ et $-a$. La correspondance construite est telle que la matrice unitaire correspond à la transformation identitaire de Lorentz et le produit des matrices a_1a_2 correspond le produit de Lorentz transformations $a_1a_2 \sim g_{a_1}g_{a_2}$.
Nous faisons maintenant deux observations importantes :

I) Une réflexion spatiale s n'appartient pas au groupe de Lorentz propre et par conséquent aucune matrice a ne lui correspond. Cependant, nous pouvons nous associer à la réflexion s une certaine transformation (automorphisme) des matrices complexes à 2 rangées. En réalité. nous avons vu plus haut qu'à l'aide d'une réflexion s il est possible de construire un automorphisme du groupe de Lorentz propre

$$sgs^{-1} = (g^*)^{-1}$$

Cet automorphisme du groupe propre se répercute naturellement dans le groupe de matrices complexes a avec déterminant unitaire, à savoir. si a un Lorentz approprié transformation $g_{\pm a}$ correspondent des matrices du second ordre $\pm a$, Puis à la transformation propre $sg_{\pm a}s^{-1}$ correspondent les matrices $\pm(a^*)^{-1}$.
En d'autres termes

$$sg_a s^{-1} = g_{(a^*)^{-1}}$$

C'est-à-dire,

$$(g_a^*)^{-1} = g_{(a^*)^{-1}}$$

En réalité. comme nous venons de le voir, une transformation de Lorentz propre peut être considérée comme une transformation dans l'espace des matrices hermitiennes de second ordre donné par la formule

$$c' = aca^* \tag{2.10}$$

où a est une matrice complexe de second ordre, et $deta = 1$

Nous trouvons maintenant comment les matrices c se transforment en réflexion spatiale

$$x_0 \to x_0, x_1 \to -x_1, x_2 \to -x_2, x_3 \to -x_3$$

Il est clair que la réflexion porte la matrice c dans la matrice c' comme suit : $c = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_2 + ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & -x_2 - ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = c'$
Il est facile de vérifier que c' peut être écrit sous la forme :

$$c' = \tau \bar{c} \tau^{-1} \tag{2.11}$$

où , $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et me bar désigne le conjugué complexe. Dans ce manière. une réflexion spatiale génère la transformation (2.11) dans l'espace des matrices hermitiennes.

Soit correspond à une transformation propre g_a les matrices $\pm a$. On détermine maintenant les matrices qui correspondent à la transformation $g^{*-1} = sg_a s^{-1}$. À cette fin, nous utilisons la formule (2.11) et transformons tour à tour la matrice c par s^{-1}, g_a et s. on obtient

$$c' = \tau [\overline{a(\tau^{-1} \bar{c} \tau) a^*}] \tau^{-1}$$

Ou

$$c' = \tau \bar{a} \tau^{-1} c \tau \bar{a}^* \tau^{-1}$$

On voit donc que la transformation sgs^{-1} correspond à la matrice $\tau \bar{a} \tau^{-1}$ i.e

$$sg_a s^{-1} = g_{\tau \bar{a} \tau^{-1}}$$

Il est facile de vérifier que si $deta = 1$, alors

$$\tau \bar{a} \tau^{-1} = (a^*)^{-1} \tag{2.12}$$

De cette façon on obtient :

$$sg_a s^{-1} = g_{(a^*)^{-1}}$$

C'est

$$g_a^{*-1} = g_{(a^*)^{-1}}$$

II) Les rotations dans l'espace tridimensionnel $x_0 = 0$ se forment. comme nous savoir, un sous-groupe du groupe Lorentz approprié. Il s'ensuit donc que ces matrices complexes a. qui dans notre correspondance $g_a \sim a$ correspondent aux rotations g, forment également un sous-groupe dans le groupe de tous les complexes. matrices de second ordre avec déterminant d'unité.

Nous allons maintenant prouver que ce sous-groupe coïncide avec le groupe de toutes les matrices unitaires du second ordre avec un déterminant égal à 1. En d'autres termes dans notre correspondance construite $g_a \sim a$ entre des matrices complexes de second ordre avec déterminant égal à 1, et les transformations de Lorentz propres, les matrices unitaires a correspondent aux rotations $\widetilde{g}_a$ dans l'espace tridimensionnel $x_0 = 0$, et inversement à chaque rotation $\widetilde{g}$ correspondent deux matrices unitaires $\pm a$ un signe différent seulement, avec déterminant égal à 1.

En fait, que la matrice complexe a soit unitaire. c'est-à-dire $a^{*-1} = a$. Alors la transformation (2.10) dans l'espace des matrices hermitiennes peut s'écrire sous la forme

$$c = aca^{-1} \tag{2.13}$$

Mais sous toutes les transformations possibles de la forme (2.13) la trace (la somme des les éléments diagonaux) est conservé (reste constant) c'est-à-dire

$$(x_0' + x_3') + (x_0' - x_3') = (x_0 + x_3) + (x_0 - x_3)$$

Par conséquent

$$x_0' = x_0$$

Par conséquent, les transformations de Lorentz correspondantes ne modifient pas la quatrième coordonnée x_0 et sont des rotations dans l'espace $x_0 = 0$. Ainsi, nous avons a prouvé que les matrices unitaires correspondent à des rotations dans l'espace tridimensionnel $x_0 = 0$.

Nous allons le prouver maintenant. inversement, à toute rotation $\widetilde{g}$ il y a deux matrices unitaires du second ordre $\pm a$ avec déterminant unitaire. À cette fin, nous considérons les rotations qui correspondent à des matrices unitaires.
Il est clair que toutes ces rotations $\widetilde{g}_a$ forment un sous-groupe $\widetilde{G}_a$ du groupe de rotations. La dimension (le nombre de paramètres indépendants) de ce sous-groupe est clairement égale à trois. car elle coïncide avec la dimension du groupe de matrices unitaires du second ordre avec déterminant égal à un. La dimension du groupe de rotations dans l'espace tridimensionnel. comme indiqué dans la partie I, est également égal à trois.

De cette manière, le sous-groupe $\widetilde{G}_a$ a la même dimension que l'ensemble du groupe de rotations. et par conséquent coïncide avec lui (en raison du fait que le groupe de rotations est connecté). Ainsi, à chaque rotation correspondent deux matrices. ne différant que par le signe, qui sont du second ordre, avec un déterminant égal à 1.

2.1.3 le groupe général Lorentz

Il est bien connu que les lois de la mécanique classique ne dépendent du choix de tout système de coordonnées fixe particulier, par rapport auquel le mouvement est considéré comme ayant lieu ; de plus, les lois de la mécanique classique ne sont pas altérées en passant d'un référentiel à un autre qui a mouvement de translation uniforme, rectiligne par rapport au premier.

Le premier fait signifie que les lois de la mécanique classique sont invariant par rapport aux transformations orthogonales des coordonnées $x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k, i = 1, 2, 3$, à coefficients constants a_{ik} ; le deuxième fait peut être représenté le plus simplement en choisissant les deux systèmes de coordonnées afin que les axes correspondants soient parallèles. Si v_x, v_y, v_z, sont les projections de la vitesse du deuxième système, x', y', z', sur les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz du premier système, puis

$$x' = x + v_x t, y' = y + v_y t, z' = z + v_z t \tag{2.14}$$

Une transformation de la forme (2.14) est appelée transformation galiléenne. Les lois de la mécanique classique doivent donc être invariantes avec en ce qui concerne les transformations galiléennes.

Un système de coordonnées est dit inertiel si le mouvement de corps en elle est rectiligne et uniforme en l'absence de externe les forces. La mécanique classique affirme que les transformations galiléennes donner les formules pour passer d'un système inertiel de coordonnées à un autre système inertiel de coordonnées avec des axes correspondants parallèle.
En cela, la mécanique classique part de l'hypothèse que le temps t peut être considéré comme le même pour les deux systèmes de coordonnées.
La théorie de la relativité rejette cette hypothèse et attribue à chaque système inertiel x, y, z son propre temps t ; le passage d'un système inertiel x, y, z, dont le temps est t, à un système inertiel x', y', z', dont le temps est t'est accompli par une transformation linéaire des variables x, y, z, t, qui laisse invariante la forme quadratique :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \tag{2.15}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

L'invariance de la forme (2.15) est une expression mathématique de la fait, établi par l'expérience, que la vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tout système inertiel peu importe.
Une transformation linéaire des variables x, y, z, t qui laisse la forme $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ invariante est appelée une transformation générale de lorentz.
Il sera pratique dans ce qui suit d'utiliser, au lieu de la variable t, une nouvelle variable

$$x_4 = ct \tag{2.16}$$

Une transformation générale de Lorentz peut alors être décrite comme une transformation linéaire.

$$x_i' = \sum_{j=1}^{4} g_{ij}x_j, i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.17}$$

des variables x_1, x_2, x_3, x_4, laissant invariant la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \tag{2.18}$$

On note x et x' les vecteurs dans un espace à quatre dimensions dont les projections sont x_1, x_2, x_3, x_4 et x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 respectivement, et par g la matrice de la transformation (2.17). Les relations (2.17) peuvent alors s'écrire sous la forme

$$x' = gx \tag{2.19}$$

Trouvons les conditions que doit remplir la matrice g d'une transformation de Lorentz. De la définition d'une transformation de Lorentz, il s'ensuit que nous devons avoir

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \tag{2.20}$$

En substituant aux x leurs valeurs de (2.17), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{3} (\sum_{j=1}^{4} g_{ij} x_j)^2 - (\sum_{j=1}^{4} g_{4j} x_j)^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - x_4^2 \tag{2.21}$$

L'égalisation des coefficients des produits $x_j x_k$ donne

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ij} g_{ik} - g_{4j} g_{4k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ 1 & \text{si} \quad j = k \leqslant 3 \\ -1 & \text{si} \quad j = k = 4 \end{cases} \tag{2.22}$$

Les conditions (2.22) peuvent également être écrites sous forme matricielle. À cet effet, avec chaque matrice

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

On associe la matrice

$$g^+ = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & -g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & -g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & -g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & -g_{44} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

De plus, nous désignons par t la matrice

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

On voit alors facilement que les relations (2.22) sont équivalentes à l'équation matricielle

$$g^{+}g = t \tag{2.26}$$

Donc :

1. La condition (2.22) ou la condition équivalente (2.26) est nécessaire et suffisante pour que la transformation g soit une transformation de Lorentz générale. Trouvons $det\, g$. A cet effet, nous notons que $det\, g^{+} = -det\, g, det\, t = -1$; il résulte donc de (2.26) que

$$-det\, g\, det\, g = -1, c'est - - direque \quad (det\, g)^2 = 1$$

   par conséquent,

$$det\, g = \pm 1 \tag{2.27}$$

2. Le déterminant de chaque transformation de Lorentz générale est égal à ± 1. Il en résulte que

3. Chaque transformation générale de Lorentz a une transformation inverse. Bien sûr, cette transformation inverse est également une transformation générale de Lorentz, car elle laisse également invariante la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

   On voit facilement que $t^2 = I$, où I représente la matrice unitaire ; donc, en multipliant les deux côtés de (2.26) à gauche par t, on obtient

$$tg^{+}g = I$$

   Cette relation signifie que

$$g^{-1} = tg^{+} \tag{2.28}$$

par conséquent,

$$gtg^{+} = I$$

En écrivant le dernier en termes d'éléments de matrice, nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{3} g_{ij}g_{kj} - g_{i4}g_{k4} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \leqslant 3 \\ -1 & \text{si} \quad i = k = 4 \end{cases} \tag{2.29}$$

Comme dans le cas des rotations, le produit g_1g_2 des transformations g_1 et g_2 est défini comme la transformation obtenue par l'application successive de g_2 et g_1. Évidemment, la multiplication des transformations correspond à la multiplication des matrices.

4. Le produit de deux transformations générales de Lorentz est également une transformation générale de Lorentz. En effet, l'application successive de deux transformations qui ne changent pas la forme (2.18), laisse également la forme invariante.

On note L l'agrégat de toutes les transformations générales de Lorentz. Les propositions 3 et 4 montrent que cet agrégat est un groupe. De plus, l'élément unitaire e du groupe L est la transformation unitaire.

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = x_4 \tag{2.30}$$

Le groupe L est appelé le groupe Lorentz général.
De la relation (2.22) pour $j = k = 4$

$$g_{14}^2 + g_{24}^2 + g_{34}^2 - g_{44}^2 = -1 \tag{2.31}$$

Il s'ensuit que

$$g_{44}^2 = 1 + g_{14}^2 + g_{24}^2 + g_{34}^2 \geqslant 1$$

Par conséquent,

$$g_{44} \geqslant 1 \quad ou \quad g_{44} \leqslant -1 \tag{2.32}$$

Une transformation de Lorentz générale satisfaisant la condition

$$g_{44} \geqslant 1$$

est appelé une transformation de Lorentz.

Chapitre 3

Représentations des groupes de Lorentz

3.1 Les algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$

3.1.1 Base de $\mathfrak{su}(2)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$=$\{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) | {}^t\overline{X} + X = 0, Tr\ X = 0\ \}$ est l'espace vectoriel réel de dimension 3 des matrices complexes antihermitiennes 2×2, de trace nulle.
Les trois matrices linéairement indépendantes,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \varepsilon_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

forment une base sur $\mathbb{R}$ de $\mathfrak{su}(2)$, et satisfont les relations de commutation,

$$[\varepsilon_k, \varepsilon_l] = \varepsilon_m$$

où k, l, m est une permutation circulaire de 1,2,3.
On introduit encore les matrices

$$J_k = i\varepsilon_k$$

qui satisfont les relations de commutation

$$[J_k, J_l] = iJ_m$$

On considère aussi les matrices

$$J_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_+ = J_1 + iJ_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J_- = J_1 - iJ_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\varepsilon_3 = -iJ_3,\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-),\ \varepsilon_2 = -\frac{1}{2}(J_+ - J_-)$$

Les matrices J_3, J_+, J_- satisfont les relations de commutation,

$$[J_+, J_-] = 2J_3,\ [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$

Enfin, on introduit aussi la base
$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{K} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
de $\mathfrak{su}(2)$, on vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}^3 = \mathcal{J}^2 = \mathcal{K}^2 = -I$$

$\mathcal{I}\mathcal{J} = \mathcal{K} = -\mathcal{J}\mathcal{I},\ \mathcal{J}\mathcal{K} = \mathcal{I} = -\mathcal{K}\mathcal{J},\ \mathcal{K}\mathcal{I} = \mathcal{J} = -\mathcal{I}\mathcal{K}$
et les relations de commutation de $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent donc

$$[\mathcal{I}, \mathcal{J}] = 2\mathcal{K},\ [\mathcal{J}, \mathcal{K}] = 2\mathcal{I},\ [\mathcal{K}, \mathcal{I}] = 2\mathcal{J}$$

3.1.2 Base de $\mathfrak{so}(3)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ est l'espace vectoriel des matrices réelles antisymétriques. On a déjà vu que les matrices
$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
forment une base de cette algèbre de Lie, avec les relations de commutation,

$$[\eta_k, \eta_l] = \eta_m$$

Il est clair que $\eta_k \mapsto e_k$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie so(3) sur l'algèbre de Lie $(\mathbb{R}^3, \bigwedge)$.
D'autre part,

$$\mathfrak{su}(2) \approx \mathfrak{so}(3)$$

3.1.3 Le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $SO(3)$

Nous allons voir que, bien que les algèbres de Lie des groupes de Lie $SO(3)$ et $SU(2)$ soient isomorphes, les groupes eux-mêmes ne le sont pas. L'un, $SU(2)$, est connexe et simplement connexe, alors que l'autre, $SO(3)$, est connexe mais non simplement connexe, et il existe un morphisme de groupes surjectif du premier sur le second, dont le noyau est constitué des éléments I et $-I$ ´

3.2 Le groupe de Lie SO(3)

Toute transformation orthogonale de $\mathbb{R}^3$ de déterminant $+1$ laisse fixe un vecteur unitaire a de $\mathbb{R}^3$. C'est alors une rotation d'un angle $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, notée $Rot(a,t)$. Donc un élément de $SO(3)$ est déterminé par $a \in \mathbb{R}^3, \|a\| = 1$, et $t \in [0, 2\pi[$. L'image d'un élément $x \in \mathbb{R}^3$ par $Rot(a,t)$ est

$$Rot(a,t)(x) = x + (1 - \cos t) a \wedge (a \wedge x) + \sin t a \wedge x \tag{3.1}$$

Pour le montrer, on observe d'abord que si x est orthogonale à a, et l'on utilise la linéarité de $Rot(a,t)$. D'où

$$Rot(a,t)(x) = \cos t x + (1 - \cos t)\langle x, a\rangle a + \sin t a \wedge x$$

Enfin on utilise la formule du double produit vectoriel, $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$, qui donne $\langle x, a\rangle a = x + a \wedge (a \wedge x)$, Il est claire que $Rot(a,t) = Rot(-a,-t)$.

Deux rotations $Rot(a,t)$ et $Rot(a',t')$ sont conjuguées dans $SO(3)$ si et seulement si $t' = \pm t$. En effet, si une rotation R laisse a invariant, alors pour tout $g \in SO(3)$, la rotation gRg^{-1} laisse ga invariant. Plus précisément, les formules précédentes montrent que

$$\forall g \in SO(3), gRot(a,t)g^{-1} = Rot(ga,t) \tag{3.2}$$

(Il suffit d'évaluer les deux membres sur les éléments $x \in \mathbb{R}^3$). Donc si $R' = Rot(a',t')$ est une rotation conjuguée à $Rot(a,t)$ par un élément $g \in SO(3)$, alors $Rot(a',t') = Rot(ga,t)$, et par conséquent R et R' ont des angles égaux ou opposés et, inversement, que $a' = ga$, et toute rotation $Rot(a',t)$ est

conjuguée à $Rot(a,t)$ par un élément $g \in SO(3)$ tel que $a' = ga$, et toute rotation $Rot(a', -t)$ est conjuguée à $rot(a,t)$ par un élément $g \in SO(3)$ tel que $-a' = ga$.
Surjectivité de l'application exponentielle de $\mathfrak{so}(3)$ sur $SO(3)$. Soient η_k les générateurs infinitésimaux des groupes à un paramètre de rotation autour des axes $e_k, k = 1, 2, 3$.
Par définition

$$\exp(t\eta_k) = Rot(e_k, t)$$

Soit a un vecteur unitaire quelconque de $\mathbb{R}^3$. Fixons $k = 1, 2ou3$ et soit g un élément de $SO(3)$ tel que $a = g(e_k)$. Alors

$$Rot(a,t) = gRot(e_k, t)g^{-1} = g\exp(t\eta_k)g^{-1} = \exp(tg\eta_k g^{-1})$$

.

3.3 Le groupe de Lie $SU(2)$

Le groupe de Lie $SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) | A^t\overline{A} = I, \det A = 1\}$ est difféomorphe à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ car

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

En effet, pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, des relations $A^t\overline{A} = I$ et $\det A = 1$, on déduit $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$, $ad - bc = 1$, $a\overline{c} + b\overline{d} = 0$, d'où $ad\overline{c} + bd\overline{d} = 0$, d'où $c = -\overline{b}$ et, de même, $d = \overline{a}$. Les éléments du groupe de Lie $SU(2)$ dépendent donc de trois paramètres réels indépendants.

3.3.1 Projection de $SU(2)$ sur $SO(3)$

On considère la représentation adjointe de $SU(2)$ dans $\mathfrak{su}(2)$,

$$Ad : SU(2) \longrightarrow Gl(\mathfrak{su}(2))$$

l'application Ad identifié a une application

$$\varphi : SU(2) \longrightarrow GL(3, \mathbb{R})$$

Pour tout $g \in SU(2)$, $Ad_g : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ est l'application $X \longmapsto gXg^{-1}$ qui conserve les déterminants. Puisque, dans l'identification de $\mathfrak{su}(2)$ avec $\mathbb{R}^3$, au déterminant d'une matrice correspond le carré de la norme euclidienne du vecteur,$\forall g \in SU(2)$, $\varphi(g)$ conserve les normes, donc $\varphi(SU(2)) \subset O(3)$. En fait, comme φ est continue et $SU(2)$ connexe, $\varphi(SU(2)) \subset SO(3)$. On sait que l'application $\varphi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ est un morphisme de groupes. Nous allons montrer que le morphisme φ est surjectif de $SU(2)$ sur $SO(3)$.

Proposition 3.3.1. *Le groupe $SU(2)$ est le revêtement universel, à deux feuillets, du groupe $SO(3)$.*

3.4 les représentations de $SU(2)$ et $SO(3)$

3.4.1 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Les représentations de D^j

On considère $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ muni de la base H, X_+, X_- dans laquelle les rotations de commutation s'écrivent

$$[H, X\pm] = \pm 2X_\pm \quad , \quad [X_+, X_-] = H \tag{3.3}$$

Soit (E, R) une représentions irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
L'opérateur $R(H)$ admet au moins une valeur propre λ et un vecteur propre v pour cette valeur propre satisfaisant $v \neq 0$ et

$$R(H)v = \lambda v$$

D'après les rotations de (3.3)

$$R(H)R(X_+)v = (R(X_+)R(H) + 2R(X_+))v = (\lambda + 2)R(X_+)v \tag{3.4}$$

et

$$R(H)R(X_-)v = (R(X_-)R(H) + 2R(X_-))v = (\lambda - 2)R(X_-)v \tag{3.5}$$

3.4.2 Représentations de $SU(2)$

Les représentations de D^j

Nous allons étudier des représentations D^j de $SU(2)$, montrer qu'elles ont pour différentielles DD^j les représentations D^j de $\mathfrak{su}(2)$ étudiées ci-dessus, et montrer que ce sont les seules représentations irréductibles de $SU(2)$.
Le groupe $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}^2$ par la représentation canonique, telle que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}$$

Définition 3.4.1. *De manière générale,si un groupe G agit sur un ensemble M, alors G agit linéairement sur l'espace des fonctions sur M à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}(M)$ par $(g, f) \in G \times \mathcal{F}(M) \mapsto g.f \in \mathcal{F}(M)$, où*

$$\forall\ x\ M,\ (g.f)(x) = f(g^{-1}x)$$

D'après la définition, il est naturel de faire agir $SL(2,\mathbb{C})$ sur l'espace des fonctions $\mathbb{C}^2$ à valeurs complexes par

$$\rho(g)f = f \circ g^{-1}$$

Pour toute fonction f sue $\mathbb{C}^2$. On définit une représentation de $SL(2,\mathbb{C})$.(ici représentation signifie seulement que $\rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g')$ si g et $g' \in SL(2,\mathbb{C})$).
Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour déterminant 1, alors $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, donc explicitement

$$(\rho(g)f)(z_1, z_2) = f(dz_1 - bz_2, -cz_1 + az_2) \tag{3.6}$$

On va étudier la représentation ρ en restriction à $SU(2)$, mais elle n'est certainement pas irréductible, et l'on va mettre en évidence des sous-espaces vectoriels sur lesquels $SU(2)$ agit de manière irréductible.

$$\forall g \in SU(2),\ g^{-1} =^t \overline{g},\ donc\ \rho(g)f = f \circ^t \overline{g}\ et\ si\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

$$(\rho(g)f)(z_1, z_2) = f(\overline{a}z_1 - bz_2, \overline{b}z_1 + az_2) \tag{3.7}$$

Soit V^j l'espace vectoriel des polynômes homogènes à coefficients complexes en deux variables, (z_1, z_2), de degré $2j$, où $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Cet espace vectoriel complexe est de dimension $2j+1$. Une base en est

$$z_2^{2j}, z_1 z_2^{2j-1}, ..., z_1^{j+m} z_2^{j+m}, ..., z_1^{2j}, \quad -j \leqslant m \leqslant j$$

Par exemple

$$si\ j = \frac{1}{2},\ z_2,\ z_1$$
$$si\ j = 1,\ z_2^2,\ z_1 z_2,\ z_1^2$$
$$si\ j = \frac{3}{2},\ \ z_2^3,\ z_1 z_2^2,\ z_1^2 z_2,\ z_1^3$$

3.5 Représentations de $SO(3)$

Rappelons l'existence du morphisme φ de $SU(2)$ sur $SO(3)$, de noyau $\{I, -I\}$,étudié au. Si (E, ρ) est une représentation de $SU(2)$, alors ρ se factorise par la projection φ si et seulement si

$$\rho(-I) = \rho(I) = Id_E \tag{3.8}$$

Si ρ se factorise en $\sigma \circ \varphi$, où $\sigma : SO(3) \to GL(E)$, alors σ est une représentation de $SO(3)$, et ρ est irréductible si et seulement si σ est irréductible. La représentation D^j de $SU(2)$ satisfait la condition (3.8) si et seulement si j est entier. En effet $-I = g_\pi$ et $D^j(g_\pi) f_m^j = e^{-2im\pi} f_m^j$; le facteur scalaire est 1 si et seulement si m est entier, donc si et seulement si j est entier. On voit donc que les représentations obtenues par factorisation de $D^0, D^1, D^2, ..., D^j ...$, sont les représentations irréductibles de $SO(3)$.

3.6 Définition des représentations du groupe de Lorentz et concepts fondamentaux de la théorie des représentations

Définition 3.4.1

Soit $\mathbb{R}$ un espace normé. et supposons qu'à chaque élément du groupe G

on affecte un opérateur linéaire borné T_g dans $\mathbb{R}$ de telle manière que les conditions suivantes soient remplies ;

1) $T_e = E$ (e est l'identité du groupe G, est l'opérateur de l'unité dans $\mathbb{R}$)
2) $T_{g_1 g_2} = T_{g_1}.T_{g_2}$
3) continuité : si $F(f)$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $\mathbb{R}$, alors pour tout f fixe, $F(T_g f)$ dépend continuellement de g.

Puis la correspondance $g \to T_g$ s'appelle une représentation linéaire du groupe G dans l'espace $\mathbb{R}$. La représentation est dite finie si l'espace $\mathbb{R}$ est fini (dimensionnel).

Représentations unitaires :.La représentation $g \to T_g$ est dite unitaire si l'espace $\mathbb{R}$ est un espace de Hilbert et le produit scalaire (ξ, η) dans $\mathbb{R}$ est invariant par rapport à l'opérateur T_g, ie si

$$(T_g \xi, T_g \eta) = (\xi, \eta)$$

*Représentations équivalentes.*Les représentations finies $g \to T_g^{(1)}$ et $g \to T_g^{(2)}$ réagissant respectivement dans les espaces $\mathbb{R}^{(1)}$ et $\mathbb{R}^{(2)}$ sont dites équivalentes s'il existe un opérateur B qui transpose $\mathbb{R}^{(1)}$ sur $\mathbb{R}^{(2)}$ de manière biunique one-one, telle que pour tout élément g du groupe

$$BT_g^{(1)} = T_g^{(2)} B \tag{3.9}$$

Plus graphiquement, cela signifie que les représentations sont équivalentes, s'il est possible d'établir une correspondance linéaire $h^{(1)} \to h^{(2)}$ entre les éléments $h^{(1)}$ de l'espace $\mathbb{R}^{(1)}$ et les éléments $h^{(2)}$ de l'espace ($\not\models$) tels que $h^{(1)} \leftrightarrow h^{(2)}$ alors $T_g^{(1)} h^{(1)} = T_g^{(2)} h^2$. La définition générale de l'équivalence des représentations, applicable à la fois au cas fini et au cas infini, diffère peu de celle présentée ci-dessus. Les représentations $g \to T_g^{(1)}$ et $g \to T_g^{(2)}$ agissant dans les espaces $\mathbb{R}^{(1)}$ et $\mathbb{R}^{(2)}$ sont dites équivalentes, si $\mathbb{R}^{(1)}$ et $\mathbb{R}^{(2)}$ contiennent partout des variétés linéaires denses $\mathbb{R}^{(1)}$ et $\mathbb{R}^{(2)}$ qui sont invariants sous les opérateurs $T_g^{(1)}$ et $T_g^{(2)}$ respectivement, et il y a un opérateur fermé B qui mappe $\mathbb{R}^{(1)}$ en $\mathbb{R}^{(2)}$ bi-unique et satisfait l'équation :

$$T_g^{(1)} B = BT_g^{(2)} \tag{3.10}$$

Cette définition de l'équivalence revient à la condition qu'il soit possible de choisir des bases dans les espaces $\mathbb{R}^{(1)}$ et $\mathbb{R}^{(2)}$ où les représentations équivalentes $g \to T_g^{(1)}$ et $g \to T_g^{(2)}$ fait que les opérateurs $T_g^{(1)}$ et $T_g^{(2)}$ sont écrits en termes d'entre eux par une seule et même matrice.
Il est clair que les représentations mutuellement équivalentes ne sont pas substantiellement différentes. Dans la théorie des représentations, on considère généralement les représentations à l'intérieur de l'équivalence.

Représentations équivalentes aux représentations unitaires. De telles représentations possèdent clairement la propriété suivante.
La représentation $g \to T_g$ dans l'espace normé $\mathbb{R}$ équivaut à une représentation unitaire s'il existe dans l'espace $\mathbb{R}$ une forme bilinéaire hermitienne définie positive qui est invariante sous les opérateurs T_g (cette forme peut être définie soit sur tout l'espace $\mathbb{R}$ soit sur une sous-variété linéaire partout dense , également invariante sous les opérateurs T_g.)

3.7 La relation entre les représentations du propre groupe de Lorentz et les représentations du groupe de matrices complexes

Ci-dessus, nous avons étudié en détail la correspondance $g_a \to \pm a$ un entre les transformations propres de Lorentz et le groupe $\mathcal{L}$ de matrices complexes du second ordre ($\det a = 1$). Cette correspondance $g_a \to \pm a$ permet évidemment de considérer toute représentation $g \to T_g$ du groupe propre comme une représentation du groupe $\mathcal{L}$, $a \to T_a \equiv T_{g_a}$, l'équation $T_a = T_{-a}$ est satisfaite. A l'inverse, il est clair que toute représentation du groupe $\mathcal{L}$, $a \to T_a$ telle que $T_a = T_{-a}$. peut être considérée comme une représentation du groupe de Lorentz propre : $g_a \to T_{g_a} \equiv T_a$. Si une représentation du groupe $\mathcal{L}$ (ne possède pas la propriété que $T_a = T_{-a}$ alors il n'est pas possible, à proprement parler, de la considérer comme une représentation du groupe de Lorentz, puisque dans ce cas chaque élément $g = g_a$ est mis en correspondance avec deux opérateurs distincts T_a et T_{-a}. Nous allons cependant considérons ces représentations du groupe $\mathcal{L}$ à égalité avec celles qui satisfont la condition $T_a = T_{-a}$. Dans un souci de cohérence terminologique, nous désignerons les représentations du groupe $\mathcal{L}$, pour lesquelles $T_a \neq T_{-a}$ comme représentations à deux valeurs du groupe de Lorentz, et celles pour lesquelles $T_a = T_{-a}$ comme représentations uniques de ce groupe.

On peut prouver qu'il est impossible de rendre unique une représentation à deux valeurs du groupe propre en choisissant un opérateur de chaque paire, T_a et T_{-a}, de telle sorte que la correspondance $g \to T_g$ ainsi obtenue soit continue.

Nous montrons maintenant que si une représentation à deux valeurs du groupe de Lorentz est irréductible alors à chaque élément du groupe correspondent précisément deux opérateurs qui ne diffèrent que par le signe ; la situation est donc similaire au cas plus simple de la représentation bidimensionnelle $g_a \to \pm a$. En fait, $T_{-a} = T_{-e} T_a$ où $-e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, Puisque la matrice $-e$ commute avec toutes les matrices a, l'opérateur T_{-e} commute aussi avec tous les opérateurs T_a. En vertu de l'irréductibilité de la représentation, il s'ensuit que $T_{-e} = \lambda E$ est E l'opérateur unitaire.
Puisque, d'autre part $(T_{-e})^2 = T_{(-e)^2} = T_e = E.\lambda^2 = 1$, il s'ensuit que $\lambda = +1$ ou $\lambda = -1$. Dans le premier cas $T_{-e} = +E$, $T_a = T_{-a}$ et nous avons une représentation unique ; dans le second cas $T_{-e} = -E$ et $T_{-a} = -T_a$, c'est-à-dire que la représentation est à deux valeurs et les opérateurs $T_{-a} = T_a$. Et Ta diffèrent en signe seulement.

3.7.1 Représentations à deux valeurs du Groupe générale Lorentz

Le groupe général de Lorentz est obtenu à partir du groupe de Lorentz propre G_0 par l'addition de trois réflexions s, t, j (s est le spatial, t le temporel et j la réflexion complète) et tous les éléments possibles de la forme sg', tg', jg',où g' est un élément du groupe propre.

On note que les transformations e, s, t, j (e est la transformation d'identité) forment un groupe commutatif avec la table de multiplication suivante :

	e	s	t	j
e	e	s	t	j
s	s	e	j	t
t	t	j	e	s
j	j	t	s	e

Nous appellerons ce groupe le groupe des réflexions.

Supposons maintenant qu'une représentation $g \to T_g$ du groupe général soit spécifiée. Cette représentation génère une représentation $g' \to T_g$ du groupe propre, et une représentation $\tau \to T_\tau(\tau = e, s, t, j)$ du groupe de réflexions.
On considère tout d'abord le cas où la représentation $g' \to T_{g'}$ du groupe propre (généré par la représentation du groupe général) vaut deux valeurs $g' \to \pm T_{g'}$. Naturellement la représentation du groupe de réflexions est également à deux valeurs :

$$e \to \pm E, \quad s \to \pm S, \quad t \to \pm T, \quad j \to \pm J$$

Les opérateurs S, T, J se combinent clairement de la manière suivante :

$$ST = \pm J, \quad SJ = \pm T, \quad TJ = \pm J$$

$$S^2 = \pm E, \quad T^2 = \pm E, \quad J^2 = \pm E$$

De ces équations, il résulte facilement que les opérateurs T, S, J font la navette entre eux :

$$TS = ST, \quad JS = SJ, \quad TJ = JT$$

ou ils anticommute :

$$TS = -ST, \quad JS = -SJ, \quad TJ = -JT$$

En conséquence, nous considérons deux cas.
Premier cas. Les opérateurs S, T, J commute. Dans ce cas, nous pouvons

choisir le signez pour ces opérateurs afin qu'ils se multiplient selon le tableau précédente.

$$TS = ST = J, \quad JS = S, \quad J = T, \quad JT = T, \quad J = S$$

$$S^2 = T^2 = J^2 = E$$

Il est clair que dans ce cas les opérateurs E, S, T, J spécifient une représentation unique du groupe de réflexions $e \to E$, $s \to S$, $t \to T$, $j \to J$, Une représentation du général groupe qui conduit à cette représentation unique du groupe de réflexions sera appelé une représentation unique du groupe général (la nature à deux valeurs de cette représentation n'est liée qu'à la nature à deux valeurs de la représentation du groupe propre).

Deuxième cas. Les opérateurs, S, T, J anticommute
On vérifie facilement que par un choix de signe pour les opérateurs il est possible de s'assurer qu'ils combinent selon le tableau :

	E	S	T	J
E	E	S	T	J
S	S	E	J	T
T	T	-J	E	-S
J	J	-T	S	-E

opérateurs $\pm E, \pm S, \pm T, \pm J$ qui forment une représentation unique du groupe de réflexions ; en d'autres termes la représentation $e \to \pm E$,$s \to \pm S$,$t \to \pm T$, $j \to \pm J$, de ce groupe est essentiellement à deux valeurs.
Une représentation du groupe général, conduisant à une telle représentation à deux valeurs du groupe de réflexions est dite être une représentation à deux valeurs du groupe général (sa nature à deux valeurs est liée non seulement à la nature à deux valeurs de la représentation du groupe propre, mais aussi avec la nature à deux valeurs de la représentation du groupe de réflexions).
Nous notons qu'une représentation du groupe général peut être à deux valeurs même si la représentation du groupe propre généré par celui-ci est unique ; il suffit que la représentation du groupe de réflexions soit à deux valeurs. Nous décrirons ci-dessous la construction nécessaire.

En conclusion, nous notons que, tout comme une représentation à deux valeurs du groupe propre peut être considérée comme une représentation fidèle et unique du groupe de matrices complexes du second ordre avec un déterminant égal à 1, une représentation à deux valeurs du groupe de les réflexions peuvent être considérées comme une représentation fidèle et unique d'un groupe composé de huit éléments, $e, e', s, s', t, t', j, j'$ avec la table de multiplication suivante :

$$e'^2 = s^2 = s'^2 = t^2 = t' = e, j^2 = j'^2 = e'$$

$$se' = e's = s', te' = e't = t', je' = e'j = j'$$

$$st = t's = j, sj = js' = t, ts = s't = j'$$

Les relations restantes sont déterminées par celles déjà écrites (voir le tableau précédente). Les représentations uniques du groupe de réflexions ne sont pas des représentations fidèles de ce groupe de huit éléments mais sont telles que $T_{e'} = T_e, T_{s'} = T_s$ etc. Cette connexion entre les représentations du groupe de réflexions et le groupe de huit éléments que nous ont construit est tout à fait analogue à ce qui existe entre les représentations du groupe propre de Lorentz et le groupe des matrices complexes unimodulaires du second ordre.

3.8 Groupe de Lorentz $\mathcal{L}$

$\mathbb{R}^4$ étant muni de la forme de Minskovski, de matrice $Q = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ dans sa base canonique, le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ est celui des matrices L des endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ laissant invariant la forme de Minkowski c'est à dire vérifiant

$$^tLQL = L \tag{3.11}$$

On en déduit que si l'on écrit L sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & ^tU/c \\ cV & A \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Son inverse est $L^{-1} = Q^{-1t}LQ$ soit $L^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -{}^tV/c \\ -cU & {}^tA \end{pmatrix}$, et ses coefficients vérifiant les relations si $-\gamma \neq -1$

$$\gamma^2 = 1 +^t UU = 1 +^t VV, A = S + \frac{V^tU}{1+\gamma} \tag{3.13}$$

S étant une matrice orthogonale telle que $V = SU$
Dans ce cas : $det(L) = det(S)$.
Lors que γ est positif et S une rotation, $L \in \mathcal{L}^+$ (groupe spéciale de lorentz). Sinon, dans l'interprétation physique, il y a renversement du temps ou retournement de l'espace,
Si $\gamma = -1$, L est de forme $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où S est orthogonale.
Les matrices particulières de $\mathcal{L}^+$

$$L(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, L(U) = \begin{pmatrix} \gamma & {}^tU/c \\ cU & I + \frac{{}^tUU}{1+\gamma} \end{pmatrix}$$

Où R est une matrice de rotation et où γ positif et U sont liés par 3.13 sont appelées matrice de rotation pure et matrice de Lorentz pure de vecteur U (boost pour les anglo-saxons).

$$L = L(R)L(U) = L(V)L(R) \tag{3.14}$$

L'algèbre de Lie de $\mathcal{L}$

S'obtient de manière traditionnelle : soit $L : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{L}$ de classe C^1 sur l'intervalle réel $\mathcal{I}$, et pour X fixé soit $X_s = L_sX$. En dérivant il vient

$$\dot{X}_s = \dot{L}_s X \qquad soit \qquad \dot{X}_s = \Sigma_s X_s \qquad avec \qquad \Sigma_s = L_s L_s^{-1}$$

d'où puisque ${}^tL_sQL_s = Q$:

$$\Sigma Q + Q\Sigma = 0, \quad et \quad la \quad forme \quad de \quad \Sigma : \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX/c \\ cX & \Omega \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Réciproquement soit $s \longrightarrow \Sigma_s$ continue sur $\mathcal{I}$ à valeurs une matrice réelle d'ordre 4 telle que ($\forall s, \quad {}^t\Sigma_sQ + Q\Sigma_s = 0$). La solution de $\dot{L}_s = \Sigma_s L_s$ pour la condition initiale $L_{s_0} \in \mathcal{L}$ vérifie

$$\frac{d}{dt}({}^tL_sQL_s) =^t L_s({}^t\Sigma_sQ + Q\Sigma_s)L_s = 0$$

elle a donc ses valeurs dans $\mathcal{L}$ étant de même nature que L_{s_0}, par exemple appartenant comme elle à $\mathcal{L}^+$, ou présentant continûment un renversement du temps ou un retournement de l'espace ou les deux par simple raison de connexité, $\mathcal{I}$ étant un intervalle.

3.9 Algèbre de Pauli $\mathcal{P}$

L'algèbre de Pauli $\mathcal{P}$ est tout simplement l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices d'ordre deux sur $\mathbb{C}$, considérée comme algèbre réelle de dimension huit, de base engendrée par les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad avecaussi\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit la base $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_3)$ notée $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma 3, i\sigma_1, i\sigma_2, \sigma_3, i\sigma_0)$ en accord avec les notations dans $\mathcal{M}_2\mathbb{C}$.
Rappelons les relations $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\sigma_0$
Un élément ξ de $\mathcal{P}$ s'écrit à priori

$$\xi = a\sigma_0 + ib\sigma_0 + u + iv \quad ou \quad (a+ib)\sigma_0 + (u+iv) \tag{3.16}$$

où $u = \sum_{k=1}^{3} u^k\sigma_k \quad et \quad v =\sim_{k=1}^{3} v^k\sigma_k$.
On décompose $\mathcal{P}$ en somme directe des scalaires, pseudoscalaires, vecteurs et pseudovecteurs :

$$\mathcal{P} = Sc(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{P}_s Sc(\mathcal{P}) \oplus Vec(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{P}_s Vec(\mathcal{P}).$$

Le déterminant de $\xi = a\sigma_0 + ib\sigma_0 + u + iv$ s'obtient en multipliant ξ par sa coadjointe ξ^c.

$$\xi^c = a\sigma_0 + ib\sigma_0 - u - iv \Rightarrow det(\xi)\sigma_0 = \xi\xi^c = (a^2 - b^2 - \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2i(ab - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}))\sigma_0 \tag{3.17}$$

Remarquons

$$det\xi = (a+ib)^2 + det(u+iv), det(u+iv)\sigma_0 = -(u+iv)^2$$

.

Conventions géométriques

1. Il est commode d'identifier un vecteur de $Vec\mathcal{P}$ avec celui de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté de mêmes composantes dans la base canonique : $x = \Sigma_{k=1}^{3} x^k \sigma_k \longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \Sigma_{k=1}^{3} x^k \overrightarrow{e}_k$.
   Ainsi écrit-on :
   $$uv = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) + i\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$$
   relation utile pour faciliter les calculs dans $\mathcal{P}$
2. De manière analogue, identifions un élément de $Sc(\mathcal{P}) \oplus Vec(\mathcal{P})$ avec le vecteur de $\mathbb{R}^4$ muni de la forme de Minkovski Q, la base canonique $\overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$, vérifiant
   $$Q(\overrightarrow{e}_0) = c^2 \quad , \quad k = 1,2,3 : Q(\overrightarrow{e}_k) = -1$$
   , de sorte que
   $$ct\sigma_0 + \sum_{k=1}^{3} x^k \sigma_k \longleftrightarrow t\overrightarrow{e}_0 + \overrightarrow{x} = t\overrightarrow{e}_0 + \sum_{k=1}^{3} x^k \overrightarrow{e}_k \tag{3.18}$$
   D'après (3.17)
   $$Q(t\overrightarrow{e}_0 + \overrightarrow{x}) = det(ct\sigma_0 + x)$$
   Dans la suite nous noterons $\tau = ct + x$, en omettant plus généralement d'écrire σ_0 unité de l'algèbre $\mathcal{P}$ (ce qui revient à écrire 1 à la place de σ_0) .
   Notons que $\xi \in Sc(\mathcal{P}) \oplus Vec(\mathcal{P})$ si et seulement si $\xi = \xi^\dagger$ hermitienne de ξ :
   $$(a + ib + u + iv)^\dagger = a - ib + u - iv$$
   .

3.10 Représentation dans $\mathcal{P}$ du groupe de Lorentz

L'application

$$\tau = ct + x \mapsto \tau' = ct' + x' = \xi(ct + x)^\dagger = \xi\tau\xi^\dagger \tag{3.19}$$

est un endomorphisme de $Sc(\mathcal{P}) \oplus Vec(\mathcal{P})$ qui conserve Q ssi $|det(\xi)|^2 = 1$. Quitte à diviser ξ par l'une des racines carrées de son déterminant, on peut supposer que ξ vérifier

$$det(\xi) = 1$$

ce dont nous conviendrons dans la suite et dirons que ξ est unitaire (unimodulaire serait plus exact, mais unitaire a une connotation vectorielle).

Les représentations de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{P}$

Car en supposant ξ sous la forme , son déterminant valant 1 on a d'après (3.17)

$$a^2 - b^2 - u^2 + v^2 = 1 \quad , \quad ab - \overrightarrow{u}\overrightarrow{v} = 0$$

d'où la démarche

1. Si $\overrightarrow{v} = 0$, nécessairement $b = 0$ et $a^2 - u^2 = 1$.
   Il existe φ réel et $\overrightarrow{l}$ unitaire tels que
   $$\xi = \cosh\frac{\varphi}{2} + \sinh\frac{\varphi}{2} l$$
   et en développant (3.19) on vérifie que ξ représente une transformation de Lorentz pure de vecteur $\sinh\varphi\,\overrightarrow{l}$. Il est commode d'écrire ξ selon $\beta\sinh\frac{\varphi}{2}l$; notons que $\beta^\dagger = \beta$.
2. Si $\overrightarrow{v} = 0$, un calcul direct montre que
   $$(a - iv)\xi = (a^2 + v^2) + (au + bv + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$$
   . Puisque $(a - iv)^{-1} = (a + iv)/(a^2 + v^2)$:
   $$\begin{cases} a + ib + u + iv & = \frac{a+iv}{\sqrt{a^2+v^2}} . \dfrac{a^2 + v^2 + au + bv + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}}{\sqrt{a^2 + v^2}} \\ ou \quad encore & \dfrac{a^2 + v^2 + au + bv + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}}{\sqrt{a^2 + v^2}} . \frac{a+iv}{\sqrt{a^2+v^2}} \end{cases} \tag{3.20}$$
   la seconde expression étant obtenue en considérant $\xi.(a - iv)$.
   Il existe
   $theta$ réel et $\overrightarrow{n}$ unitaire tels que
   $$rho = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}n \quad avec \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}, \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{n} = -\frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{a^2 + v^2}} \tag{3.21}$$

et en développant (3.19) (pour ρ) on voit que ρ représente une rotation pure d'angle θ autour de l'axe dirigé par $\overrightarrow{n}$. Lorsque cette rotation est un demi-tour (ssi $a = 0$) on choisit $\rho = in$, sinon on note ρ sous la forme $\rho(\tan\frac{\theta}{2}n)$.

3. En conclusion selon (3.14), pour ξ unitaire, (3.19) correspond à un élément $\mathcal{L}^+$ la réciproque est évidente, et les relations (3.20) sont les transcriptions des relations (3.14) ((décompositions polaires). Il est intéressant de noter, si $a \neq 0$, que la rotation R figurent dans (3.14) n'est pas un demi-tour et que $-v/a$ (dans la représentation par ξ) est le vecteur d'O.Rodrigues de R.
4. En considérant, ξ étant toujours unitaire

$$\tau \mapsto \xi(-\tau^c)\xi^\dagger \quad , \quad \tau \mapsto \xi\tau^c\tau^\dagger \quad et \quad \tau \mapsto -\xi\tau\xi^\dagger$$

on obtient alors les représentations dans $\mathcal{P}$ des transformations de Lorentz changeant l'orientation du temps ou de l'espace ou des deux.

Remarques

1. La représentation précédente de $\mathcal{L}^+$ dans $\mathcal{P}$ donne immédiatement la structure de groupe de $\mathcal{L}^+$. Avec les notations de (3.12) et (3.16) , le coefficient γ de la matrice L est le terme scalaire de $\xi\xi^\dagger$: $\gamma = a^2 + b^2 + u^2 + v^2 = 1 + 2(a^2 + v^2) \geqslant 1$ car ξ est unitaire, et si $\gamma = \cosh\varphi : a^2 + v^2 = \cosh^2\frac{\varphi}{2}$
2. Notons que $x \mapsto \rho x \rho^\dagger$ représente une rotation dans $\mathbb{R}^3$. D'ailleurs $\rho^\dagger = \rho^{-1}$.
3. Il est facile de passer de $L \in \mathcal{L}^+$ à $\xi \in \mathcal{P}$ unitaire la représentant, et réciproquement ; il y a ambiguïté entre le choix de ξ ou celui de $-\xi$. A partir de L, sa première ligne (avec $\gamma = \cosh\varphi$) donne $\beta(\sinh\frac{\varphi}{2}l)$, et la matrice R donne $\rho = in$ ou $\rho(\tan\frac{\theta}{2}n$
4. Si ξ unitaire correspond à $L(R)L(U) = L(V)L(R)$ selon (3.16).
alors ξ^c correspond à $L(-U)L(R^{-1})$ et $\xi^\dagger$ à $L(R^{-1})L(V) =^t ((L(V)L(R))$.
5. La connaissance de $u + iv$ entraîne celle de $\pm(a + ib)$ (de carré $1 + (u + iv)^2$) c'est à dire de ξ et de $-\xi^c$ qui correspondent à L et L^{-1}.

Digression : les Quaternions Remarquons que la sous-algèbre de $\mathcal{P}$ engendrée par $(\sigma_0, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3)$ de table de multiplication (en posant $\sigma_0 = 1$ et $-i\sigma_j = \tau_j$ pour $j = 1, 2, 3$).

	τ_1	τ_2	τ_3
τ_1	-1	τ_3	$-\tau_2$
τ_2	$-\tau_3$	-1	τ_1
τ_3	τ_2	$-\tau_1$	-1

n'est autre que le corps des quaternions $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}$ étant la somme directe $Sc(\mathbb{H}) = Vec(\mathbb{H})$, on identifie les scalaires de $\mathbb{H}$ aux réels et ses vecteurs aux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ selon $\overline{u} = \sum_{k=1}^3 u^k \tau_k \longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^3 u^k \overrightarrow{e}_k$. Remarquons que selon l'identification des vecteurs de $\mathcal{P}$ à ceux de $\mathbb{R}^3$: $u \longleftrightarrow \overrightarrow{u}$, nous avons dans $\mathcal{P}$: $\overline{u} = -iu$ en accord avec la définition des τ_k.
C'est ainsi qu'une rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{n}$ unitaire et d'angle θ est représentée dans $\mathcal{H}$ par

$$\overline{x} \mapsto (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\overline{n})\overline{x}(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\overline{n})$$

$$Notons \quad que \quad det(\overline{x}) = \|\overrightarrow{x}\|^2$$

3.11 Représentation dans $\mathcal{P}$ de l'algèbre de Lie de $\mathcal{L}^+$

L'emploi de la représentation de $\mathcal{L}^+$ dans $\mathcal{P}$ permet d'obtenir aisément, pour tout élément de $\mathcal{L}^+$ un élément de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz dont le premier est l'exponentielle du second ; on dira que celui-ci est le logarithme de celui-là. Ainsi peut-on obtenir certaines propriétés de $\mathcal{L}^+$.

3.11.1 Algèbre de Lie des matrices de $\mathcal{P}$

1. Soit $\xi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{P}$ de classe C^1 sur l'intervalle réel $\mathcal{I}$ et à valeurs unitaires. τ étant fixe de $Sc(\mathcal{P}) \oplus Vec(\mathcal{P})$, soit $\tau_s = \xi_s \tau \xi_s^\dagger$: en dérivant et exprimant $\dot{\tau}_s$ à l'aide de τ_s on obtient

$$\dot{\tau}_s = \eta_s \tau_s + \tau_s \eta_s^\dagger \quad avec \quad \eta_s = \dot{\xi}_s \, \xi_s^{-1}$$

Si on considère $\tau_s = \xi(-\tau_s^c)\xi^\dagger \quad ou \quad \tau_s = \xi\tau_s^c\xi^\dagger \quad ou \quad \tau_s = -\xi\tau_s\xi^\dagger$, on retrouve η_s.

2. Puisque $\xi_s^{-1} = \xi_s^c$ (ξ_s étant unitaire) , et que dans $\mathcal{P}$: $\alpha\beta^c = (\beta\alpha^c)^c$, $\frac{d}{ds}(\xi_s\xi_s^c) = 0$
   entraîne :
   $$\eta_s + \eta_s^c = 0 \quad donc \quad \eta_s \quad est \quad de \quad la \quad forme \quad \eta_s = \tilde{u} + i\,\tilde{v}$$
   .
   Ainsi η est à valeurs dans $Vec(\mathcal{P}) \oplus PsVec(\mathcal{P})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ correspondant à $\tau \mapsto \eta\tau + \tau\eta$ s'écrit en utilisant (3.18)
   $$t\vec{e}_0 + \vec{x} \longmapsto t'\vec{e}_0 + \vec{x}' \quad avec \quad (t' = 2\frac{\vec{\tilde{u}}\,.\,\vec{x}}{c}, \vec{x}' = 2ct\,\vec{\tilde{u}} - \vec{\tilde{v}} \wedge \vec{x}$$
   On retrouve la forme des matrices de l'algèbre de Lie de $\mathcal{L}^+$:
   $$\begin{pmatrix} 0 & 2\,{}^t\tilde{U}/c \\ 2c\,\tilde{U} & -2\Omega_{\vec{\tilde{v}}} \end{pmatrix} ou \quad \overrightarrow{\Omega_{\tilde{v}}} \quad est \quad la \quad matrice \quad de \quad \vec{x} \longmapsto \vec{\tilde{v}} \wedge \vec{x}$$
   Exemples classiques : $\beta = \cosh\frac{s}{2} + \sinh\frac{s}{2}l$: $\quad \eta = \frac{l}{2}$; $\quad \rho = \cos\frac{s}{2} - i\sin\frac{s}{2}n$: $\quad \eta = -i\frac{n}{2}$
3. Réciproquement soit $\eta : \mathcal{I} \to \mathcal{P}$ à valeurs dans $Vec(\mathcal{P}) \oplus PsVec(\mathcal{P})$, continue sur cet intervalle réel, et soit ξ la solution de $\dot{\xi} = \eta\xi$ pour la condition initiale ξ_{s_0} .
   Puisque $\frac{d}{ds}\det(\xi_s) = \frac{d}{ds}(\xi_s\xi_s^c) = (\eta_s + \eta_s^c)det(\xi_s) = 0$, ainsi $\det(\xi_s) = det(\xi_{s_0})$:
   ξ est à valeurs unitaires si et seulement si ξ_0 est unitaire .
   de transformations de Lorentz de même nature (conservant ou non les orientations du temps et/ou de l'espace).
4. En conclusion, $Vec(\mathcal{P}) \oplus PsVec(\mathcal{P})$ est l'algèbre de Lie du groupe des matrices de Pauli unitaires.
   Le crochet de Lie de cette algèbre s'exprime selon
   $$[u+iv, u'+iv'] = (u+iv)(u'+iv') - (u'+iv')(u+iv) = i(u+iv)\wedge(u'+iv')$$
   Dans $\mathbb{H}$ on retrouve le crochet de Lie de l'algèbre de Lie des matrices orthogonales s'exprimant par un produit vectoriel.

Conclusion

Dans ce mémoire on a évoqué la notion de représentation des groupes comme un élément essentiel de la théorie en géométrie différentielle. On a donné un exemple de construction de représentation à partir d'autres. Cette technique est un outil pratique pour comprendre la géométrie d'un groupe (le groupe de Lorentz dans notre cas) ou d'une variété à un groupe de symétrie donnée.

Bibliographie

[1] A.Abraham, Ungar Thomas precession and its associated grouplike structure Am. J. Phys. 59(9) pp 824-834, Sept 1991.

[2] H.Bacry, Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires Gordon and Breach, 1967.

[3] D.René, Formes quadratiques et groupes classiques Presses, Universitaires de France, 1981.

[4] L.Pertti, Clifford Algebras and Spinors Cambridge, University Press, 1999.

[5] G.Rauch, Les groupes finis et leurs représentations, Ellipses, Paris, 2000.

[6] K. S.Yvette. Groupes et symétries, Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations, *É*ditions de l'*É*cole Polytechnique-Octobre 2011.

[7] I. M. Gelfand, R. A. Minlos, Z. Ya. Shapiro, Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications,1963.

[8] W.Fulton, J. Harris, Representation Theory, Springer, New York,1991.