République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Saïda

Faculté des Sciences

Mémoire de Master

Spécialité

Mathématiques

Option

Equations Différentielles

Sujet

Le problème de Darboux pour quelques classes d'équations différentielles implicites

Présenté par : **Naas Nacira**

Soutenu le : 15/07/2019

Jury :

Président : S. Ouakkas l'université Moulay Tahar de Saïda

Encadreur : S. Abbas, l'université Moulay Tahar de Saïda

Examinateur : A. Zeglaoui, l'université Moulay Tahar de Saïda

Examinatrice : F-Z. Mostefay, l'université Moulay Tahar de Saïda

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à :

D'abord, je remercie Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je voudrais adresser toute ma gratitude à l'encadreur de ce mémoire, Professeur **M**onsieur.**Abbas Saïd**, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fais en acceptant de siéger à ma soutenance et d'examiner mon travail.

Je remercie mes très chers parents, "**Fadhila**, **S. Rahmani.**" qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie "**Abdelkrim**", mes soeurs "**Amel**, **Safaa** et **Ismahane**" pour leurs encouragements.

Finalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et à tous ce qui ont participé à réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Naas Nacira.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère, qui a ?uvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, et ses précieux conseils.

A mes frères "**Djamel**, **Ahmed** et **Mohammed**" et soeurs "**Fadhila**, **Samia** et **fatima**" qui n ?ont cessé d ?être pour moi des exemples de persévérance.

A toute ma famille.

A mon encadreur Professeur "**Abbas Saïd**" qui m ?a guidé durant toute ma recherche.

A toutes mes amies.

Et tous les étudiants Promo 2^{eme} année Master Math
Géométrie, Analyse et Probabilité.

Naas Nacira.

Table des matières

Introduction

Le calcul différentiel est un outil dont tout mathématicien, quelle que soit spécialité, doit en posséder les rudiments.

Pour celui qui ne les a rencontrées qu'au lycée et en première année d'université, les équations différentielles sont généralement synonymes de calcul très peu conceptuels aboutissant à des expressions algébriques ou analytiques constituant la "solution générale" de l'équation considérée. Au moment d'abord un enseignement spécifique d'équations différentielles, il est donc fondé à croire (et à redouter) que ledit enseignement va consister à lui inculque de nouvelles méthodes (dites de résolution par quadrature) qui lui permettront de déterminer les solutions de classes de plus en plus larges d'équations différentielles.

Il convient donc d'inique tout de suite que très rares sont les équations différentielles dont les solutions peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles telles que $\sin x$ ou $\log x$, ou de primitive (= quadratures) de telles fonctions. Aussi sera-t-on intéressé à formuler des théorèmes d'existence et d'unicité de solution : l'unique solution constitue alors une (nouvelle) fonction dont on peut envisager d'étudier les propriétés (périodicité, monotonie, comportement à l'infini) aussi bien que les fonctions trigonométriques par exemple.

Les problèmes de géométrie infinitésimale conduisent souvent à des équations aux dérivées partielles. L'intégration de ces équations est un des problèmes les plus difficiles de l'analyse. Au $XVIII^e$ siècle, d'**A**lembert donna la solution générale de l'équation célèbre des cordes vibrantes, qui régit aussi le mouvement de l'air dans un tuyau sonore ; les noms de **M**onge et d'**A**mpère sont liés ensuite à l'histoire de l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Pendant de longues années après les recherches de ces deux grands géomètres, aucun progrès réel ne fut réalisé dans cette théorie. En 1870, **D**arboux fit connaître une méthode extrêmement importante qui allait bien au delà des recherches antérieures. Le champ des équations intégrables fut considérablement agrandi, comprenant en particulier toute la première classe de la classification d'**A**mpère. **D**arboux n'a pas poursuivi lui-même les applications de sa méthode, mais nombreux ont été ses élèves,en France et au dehors, qui en ont montré la fécondité.

Dans cette période, entre 1870 et 1880, l'activité scientifique de **D**arboux fut prodigieuse. Un des d'objets de l'analyse abstraite est l'étude de l'idée de fonction, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendit compte de l'étendue extraordinaire de cette notion. Si **N**ewton et **L**eibnitz avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, le calcul différentiel n'aurait pas pris naissance. Il est indispensable qui les choses paraissent d'abord simple. Sans vouloir trop généraliser, on peut dire l'erreur quelque fois utile ; certaines époques, une vérité seulement approché s'est montrée plus féconde que n'a été une connaissance plus complète.

Aussi **N**ewton n'aurait probablement pas découvert les lois de la gravitation universelle, si au début de ses travaux, il n'avait pas regardé les lois de **K**epler comme entièrement rigoureuses.

l'objectif de ce travail consiste a étudier l'existence et l'unicité des solutions pour quelques classes d'équations différentielles implicites. Les résultats obtenus sont basés sur quelques théorèmes de point fixe. La théorie de point fixe est au c ?ur de l'analyse non-linéaire puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires.

Dans cette mémoire en utilisant les théorème de point fixe suivantes (Le principe de contraction de Banach, L'alternative non-linéaire de type Leray-Schauder et le théorème de Burton-Kirk).

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.
Dans le premier chapitre, nous présentons des notations, des définitions, certaines notions préliminaires et des théorèmes principaux qui seront utilisé dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité des solutions d'équation différentielle hyperbolique implicite fonctionnelle.
Nous aurons deux résultats, le premier est basé sur le principe de contraction de Banach par montré l'existence et l'unicité des solutions et le deuxième résultat basé sur le théorème de Leray-Schauder pour prouver l'existence des solutions avec un exemple.

Dans le troisième chapitre, nous présentons des résultats sur l'existence des solutions pour la classe des équations différentielles perturbées du second ordre et un résultat basé sur le théorème de point fixe de Burton-Kirk pour la somme de deux opérateurs, un contraction et l'autre complètement continu, avec un exemple.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, des définitions et des lemmes préliminaires qui seront utilisés dans le reste de ce mémoire.

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.On dira que la suite $(x_n)_n$ converge vers un élément $a \in E$, si :*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Rightarrow \| x_n - a \| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.1.2. *La suite $(x_n)_n$ est dite de Cauchy, si :*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_0 \in \mathbb{N} : \forall\, p, q \in \mathbb{N},\ \ p, q \geqslant N_0 \Rightarrow \| x_p - x_q \| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.1.3. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.*

Remarque 1.1.1. *Il est aisé de montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Exemple.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de l'une des norme équivalentes :
$\parallel x \parallel_1 = \max(\mid x_1 \mid, \ldots, \mid x_n \mid)$, $\parallel x \parallel_2 = (\Sigma_{i=1}^n \mid x_i \mid^2)^{\frac{1}{2}}$, $\parallel x \parallel_3 = \Sigma_{i=0}^n \mid x_i \mid$ avec $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, est un espace de Banach.

1.1.1 Compacité

Définition 1.1.4. *(E, d) désigne un espace métrique.*
Une partie K de E est dite compacte si, de toute suite (u_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

En particulier, toute réunion finie ou toute intersection finie de parties compactes est compacte.

Définition 1.1.5. *Soient E un ensemble quelconque et A une partie de E. Un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ des parties de E vérifiant :*

$$\boxed{A \subset \bigcup_{i\in I} B_i.}$$

Proposition 1.1.1. *Toute partie compacte de E est fermée et bornée.*

Corollaire 1.1.1. *Un segment $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. En particulier, les parties compactes de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sont les parties fermées et bornées.*

Proposition 1.1.2. *Si A est une partie compacte de E et si $B \subset A$ est fermé, alors B est compact.*

Théorème 1.1.1. ***(Théorème de la convergence dominée)*** *[8]*
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions complexes mesurables sur X.
On suppose que :

1. *$f_n(x)$ converge presque partout vers une limite $f(x)$.*
2. *Il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ presque partout en x.*

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans cet espace :

$$\boxed{\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\mapsto\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

1.1.2 Applications continues sur une partie compacte

Soient (E, d) et (F, d) désignent des espaces métriques compacts.

Définition 1.1.6. *On dit qu'un opérateur T est compact ; si et seulement si pour toute suite bornée $(u_n)_{n>0} \subset X$, la suite $(Tu_n)_{n>0}$ admet une sous suite convergente dans Y. Dans le cas où $X = C([a, b])$; le théorème suivant d'Ascoli-Arzelà est généralement utilisé pour prouver la compacité des opérateurs.*

Théorème 1.1.2. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)*** *[7]*
Une famille de fonctions $M \subset C([a, b])$ est relativement compact (i.e $\bar{M}$ est compact) si et seulement si :

1. *M est uniformément bornée.*
2. *M est équicontinue.*

Lemme 1.1.1. *Soit $f : K \to F$ une application continue où K est une partie compacte de E. Alors $f(K)$ est un compact de F.*

1.2 Équations différentielles

Définition 1.2.1. *En mathématiques, une équation différentielle est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. C'est un cas particulier d'équation fonctionnelle.*

On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

1) les équations différentielles ordinaires (EDO) où la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable.
2) les équations différentielles partielles, plutôt appelées équations aux dérivées partielles (EDP), où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Définition 1.2.2. *Une équation différentielle est une équation contenant une ou des dérivées d'une fonction à une ou plusieurs variables.*

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation.

Une équation différentielle linéaire homogène est une équation différentielle linéaire dans laquelle. On dit aussi qu ?elle est ń sans second membre ż.

Exemple

- $x^2y'' + 2 = 5x \quad$ avec $\quad y(1) = 3 \quad y'(1) = -1$
- $y'' + xy' - y = 0$
- $y'' + 2y' + 4y = cosx$

Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \quad a_0(x) \neq 0.$$

1.2.1 Équation différentielle implicite

Équations différentielles ordinaires implicites

Définition 1.2.3. *Une équation différentielle ordinaires implicite du premier ordre est une équation de la forme $y' = F(x, y, y')$. Où F est une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times E \times E$, appelé domaine.*
Soient y une fonction de x définie d'un intervalle I dans E et $y', y'', \ldots, y^n$ les dérivées successives de la fonction y. Cette fonction y est dite solution si elle est de classe C^n et si

$$\boxed{\forall x \in I; \quad F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0.}$$

Notation Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = f(x, y, y'), \quad (x, y, y') \in I \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

alors, le problème de Cauchy (1,1) admet une solution et une seule sur I de $\mathbb{R}$ (et ceci pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$).

1) Pour tout $x \in I$, $(x, y(x), y'(x)) \in I \times \mathbb{R}^2$.

2) pour tout $x \in I$, $y' = f(x, y, y')$.

3) $y(x_0) = y_0$.

On suppose que f est continue sur $I \times \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) est le point fixe.

Soit y une fonction définie sur I tell que $x_0 \in I$ et $(y : I \longrightarrow \mathbb{R})$.

On dit y est une solution de (1,3) si et seulement si elle vérifie :

1) Pour tout $x \in I,\ (x, y(x), y'(x)) \in I \times \mathbb{R}$.

2) y est continue sur I.

3) Pour tout $x \in I$

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s), y'(s))ds.}$$

Remarque (L'importance de la condition de Lipschitz)

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \\ \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

la condition de Lipschitz n'est pas vérifiée au voisinage de 0 et $y(x) = x^3$ est solution sur $[0, 1]$, $y(x) = 0$ est solution sur $[0, 1]$ également.

Équations différentielles implicites aux dérivées partielles

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x, y, \ldots) \longrightarrow u(x, y, \ldots).$$

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

Définition 1.2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, On appelle applications partielles associées à f en (x_0, y_0), les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenues en figeant l'une des variables :*

$$f_1 : x \longmapsto f_1(x) = f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \longmapsto f_2(y) = f(x_0, y).$$

La notion de dérivée partielle de f en un point (x_0, y_0) est alors particulièrement simple : il s'agit des dérivées des applications partielles associées à f en (x_0, y_0).

Notation 1.2.1. *u_t est la dérivée partielle de $u(t, x)$ par rapport soit avec les notations habituelles du calcul différentiel :*

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Soient $\Omega :=]a, b[\times]c, d[$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Considérons le problème de Cauchy suivant :
pour tout $(t, x) \in \Omega$ et $u, u_t \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = f(t, x, u(t, x), u_t(t, x)), \\ u(0, x) = \phi(x); \quad x \in [c, d]. \end{cases}$$

Ce problème est appelé EDP implicite avec une condition initiale.

Exemple On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \frac{1}{4} u_{xx}; \quad t \geqslant 0; \quad x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = t; \quad u(t, 1) = 2 + t; \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dans cet exemple, nous avons :

$$f(t,x,u,u_t) = \frac{1}{4}u_{xx}; \quad t \geqslant 0; \quad x \in [0,1]$$

et

$$\Phi(t) = t; \quad t \geqslant 0; \quad \Psi(t,1) = 2 + t; \quad t \geqslant 0.$$

1.3 Théorèmes de point fixe

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Théorème 1.3.1. ***(Théorème de point fixe de Banach)*** *[1]*
Soient $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $G : E \longrightarrow E$ *une application de* E *dans* E*. Si* G *est une application contractante i.e. Il existe* $0 < k < 1$ *telle que pour tout* $u, v \in E$

$$\|(G(u) - G(v))\| \leq k\|u - v\|.$$

Alors G *admet un unique point fixe* $u_0 (i.e), f(u_0) = u_0$.

Théorème 1.3.2. ***(Alternative non linéaire de type Leray-Schauder)*** *[6]*
Soient X *un espace de Banach,* U *un ouvert d'une partie convexe* D *de* X *et* $0 \in U$*. Supposons que* $N : \overline{U} \to D$ *est un opérateur continu et compact.*

Alors une seule des propriétés suivantes est satisfaite, *(S1) N admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou*

(S2) Il existe $\nu \in (0,1)$ et $u \in \partial U$ avec $u = \nu\ N(u)$.

Théorème 1.3.3. ***(Théorème de point fixe de Burton-Kirk) [4]***

Soient X un espace de Banach et $A,\ B : X \to X$ deux application vérifient :

(i) A est une contraction.

(ii) B est complètement continue.

Alors une seule des propositions suivantes est satisfaite,

(S1) l'équation opérateur $u = A(u) + B(u)$ a une solution, ou

(S2) l'ensemble $\mathcal{E} = \{u \in X : u = \nu A(\frac{u}{\nu}) + \nu B(u),\ \nu \in (0,1)\}$ n'est pas borné.

1.4 Lemmes Préliminaires.

Soit $C := C(J)$ l'espace de Banach de fonctions $u : J := [0,T] \times [0,b] \to \mathbb{R}$ continues de J dans $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|u\|_C = \sup_{(t,x)\in J} |u(t,x)|.$$

Lemme 1.4.1. *Soit $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $u \in C(J,\mathbb{R})$ est une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} (D^2_{tx}u)(t,x) = h(t,x);\ (t,x) \in J := [0,T] \times [0,b] \\ u(0,x) = \phi(x); \quad x \in [0,b], \\ u(t,0) = \psi(t); \quad t \in [0,T], \\ \phi(0) = \psi(0), \end{cases} \tag{1.4}$$

si et seulement si la fonction u vérifie l'équation intégrale suivante :

$$u(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.5}$$

où

$$\mu(t,x) = \phi(x) + \psi(t) - \phi(0).$$

Preuve. Soit $u(t,x)$ une solution du problème (1.4). Alors

$$(D_{tx}^2 u)(t,x) = h(t,x).$$

D'où

$$\int_0^t \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\xi} u(\tau,\xi)d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

Il s'ensuit alors

$$u(t,x) - u(0,x) - u(t,0) + u(0,0) = \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

On trouve

$$u(t,x) = \phi(x) + \psi(t) - \phi(0) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

Donc on obtient

$$\boxed{u(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau.}$$

Maintenant si $u(t,x)$ vérifie (1,5). Il est claire que $u(t,x)$ vérifie :

$$u(0,x) = \phi(x),\ u(t,0) = \psi(t)$$

et

$$(D_{tx}^2 u)(t,x) = h(t,x);\ (t,x) \in J.$$

Corollaire 1.4.1. *Soit $f \in C$ une fonction et $u \in C(J,\mathbb{R})$ est un solution de problème suivant :*

$$(D_{tx}^2 u)(t,x) = f(t,x,u(t,x),(D_{tx}^2 u)(t,x));\ (t,x) \in J := [0,T]\times[0,b]. \quad (1.6)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0,x) = \phi(x); \quad x \in [0,b], \\ u(t,0) = \psi(t); \quad t \in [0,T], \\ \phi(0) = \psi(0), \end{cases} \quad (1.7)$$

si et seulement si la fonction u vérifie l'équation intégrale suivante :

$$u(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau, \quad (1.8)$$

ou $h \in C(J)$, avec

$$h(t,x) = f\left(t,x,\mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau, h(t,x)\right).$$

Chapitre 2

Le Problème de Darboux pour les Équations Différentielles hyperboliques implicites fonctionnelles

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions de la classe d'équations différentielles hyperboliques du second ordre.

2.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle hyperbolique implicite fonctionnelle suivante :

$$(D_{tx}^2 u)(t,x) = f(t,x,u(t,x),(D_{tx}^2 u)(t,x)); \ (t,x) \in J := [0,T] \times [0,b]. \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0,x) = \phi(x); \quad x \in [0,b], \\ u(t,0) = \psi(t); \quad t \in [0,T], \\ \phi(0) = \psi(0), \end{cases} \quad (2.2)$$

où $T, b > 0$, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi : [0,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

Définition 2.1.1. *Une fonction continue $u \in C(J,\mathbb{R})$ est une solution du problème* $(2.1)-(2.2)$*, si :*

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u(t,0) = \psi(t), \ \ \phi(0) = \psi(0)$$

et u vérifie l'équation (2.1) *dans J.*

Lemme 2.1.1. *Soit $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors le problème* $(2.1)-(2.2)$ *est équivalent au problème du solution d'équation intégrale suivante :*

$$u(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi) d\xi d\tau,$$

où $h \in C(J)$, *avec*

$$h(t,x) = f\left(t, x, \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau, h(t,x)\right).$$

2.2 Résultats d'existence et unicité

Maintenant, nous donnons une condition suffisante pour l'existence et l'unicité de la solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

Théorème 2.2.1. *Supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :*

$(\mathbf{H_1})$ - *Pour* $u, v, w, z \in \mathbb{R}$ *il existe des constantes* $k > 0,\ 0 \leq c < 1,$

$$\mid f(t,x,u,v) - f(t,x,w,z) \mid \leq k \mid u - w \mid + c \mid v - z \mid .$$

Si

$$\frac{Tbk}{1-c} < 1, \tag{2.3}$$

alors, le problème $(2.1) - (2.2)$ *admet une solution unique définie sur* J.

Preuve. On considère opérateur $N : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$; définit pour tout $h \in C(J,\mathbb{R})$. On a

$$(Nu)(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau; (t,x) \in J,$$

avec $h \in C(J)$,

$$h(t,x) = f\left(t, x, \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau, h(t,x)\right).$$

Donc d'après le Lemme 2.1.1, les solutions du problème $(2.1)-(2.2)$ sont les points fixes de l'opérateur N.

Soient $u, v \in C(J)$ *et* $(t,x) \in J$. On a,

$$| (Nu)(t,x) - (Nv)(t,x) | \leq \int_0^t \int_0^x | h(t,x) - g(t,x) | \, d\xi d\tau, \tag{2.4}$$

avec

$$h(t,x) = f(t,x,u(t,x),h(t,x))$$

et

$$g(t,x) = f(t,x,v(t,x),g(t,x)).$$

Donc, d'après l'hypothèse $(\mathbf{H_1})$, nous avons

$$| h(t,x) - g(t,x) | \leq k \mid u - v \mid + c \mid h(t,x) - g(t,x) |,$$

d'où

$$\begin{aligned} | h(t,x) - g(t,x) | &\leq \frac{k}{1-c} | u(t,x) - v(t,x) | \\ &\leq \frac{k}{1-c} \| u - v \|_C . \end{aligned}$$

En suite, d'après l'égalité (2.4) on a

$$\begin{aligned} \mid (Nu)(t,x) - (Nv)(t,x) \mid &\leq \int_0^t \int_0^x \frac{k}{1-c} \parallel u - v \parallel_C d\xi d\tau, \\ &\leq \frac{k}{1-c} \parallel u - v \parallel_C \int_0^T \int_0^b d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\parallel N(u) - N(v) \parallel_C \leq \frac{Tbk}{1-c} \parallel u - v \parallel_C .}$$

D'après (2.3) il s'ensuit que N est une contraction, d'où N admet un point fixe unique u d'après le théorème 1.3.1.

La fonction u est la seule solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

Exemple 1. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} (D_{tx}^2 u)(t,x) = \frac{1}{5e^{t+x+2}(1+|u(t,x)|+|(D_{tx}^2 u)(t,x)|)}; \quad \forall\,(t,x) \in [0,1] \times [0,1], \\ u(0,x) = x^2; \quad x \in [0,1], \\ u(t,0) = t; \quad t \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Posons

$$f(t,x,u,v) = \frac{1}{5e^{t+x+2}(1+ \mid u \mid + \mid v \mid)}; \quad \forall\,(t,x) \in [0,1] \times [0,1].$$

Il est clair que la fonction f est continue.

Pour tout $u, v, w, z \in \mathbb{R}$ *et* $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$,

$$\begin{aligned} \mid f(t,x,u,v) - f(t,x,w,z) \mid &= \left| \frac{1}{5e^{t+x+2}} \left(\frac{1}{(1+u+v)} - \frac{1}{(1+w+z)} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{5e^{t+x+2}} \left(|u-w| + |v-z| \right) \\ &\leq \frac{1}{5e^2} |u-w| + \frac{1}{5e^2} |v-z|. \end{aligned}$$

Donc, la condition $(\mathbf{H_1})$ est satisfaite avec $k = c = \frac{1}{5e^2}$. Aussi la condition (2.3) est vrais pour $T = b = 1$.

En effet

$$\frac{Tbk}{1-c} = \frac{1}{5e^2 - 1} < 1.$$

D'après, le théorème 2.2.1, le problème (2.5) admet une unique solution sur $[0,1] \times [0,1]$.

2.3 Résultats d'existence

Le théorème suivant nous donne une condition pour que le problème $(2.1)-(2.2)$ admet une solution.

Théorème 2.3.1. *Supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :*

$(\mathbf{H_2})$ - *Il existe deux fonctions $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$, telles que :*

$$\mid f(t,x,u,v) \mid \leq p(t,x) \mid u \mid + q(t,x) \mid v \mid .$$

Pour tout $(t,x) \in J$ et $u, v \in \mathbb{R}$.

Si

$$Tbp^* + q^* < 1, \tag{2.6}$$

où

$$p^* = \sup_{(t,x)\in J} p(t,x), \quad q^* = \sup_{(t,x)\in J} q(t,x),$$

alors le problème $(2.1)-(2.2)$ admet au moins une solution définie sur J.

Preuve. Soit B_M la boule bornée fermée convexe de l'espace de Banach C définit par :

$$B_M = \{u \in C(J) : \parallel u \parallel_C \leq M\},$$

où

$$M \geq \ \mu^* + \frac{Tbp^*\mu^*}{1-(Tbp^*+q^*)},$$

avec

$$\mu^* = \sup_{(t,x)\in J} |\mu(t,x)|.$$

On définit l'opérateur de point fixe $N : B_M \longrightarrow B_M$, pour tout $h \in C(J, \mathbb{R})$ telle que :

$$(Nu)(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi) d\xi d\tau; (t,x) \in J := [0,T] \times [0,b].$$

Avec, $h \in C$, on a

$$h(t,x) = f\left(t, x, \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi) d\xi d\tau, h(t,x)\right).$$

Étape 1 : $\underline{N \text{ est continue.}}$

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans B_M, pour tout $(t,x) \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|(Nu_n)(t,x) - (Nu)(t,x)| &\leq \left|\mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h_n(\tau,\xi) d\xi d\tau - \mu(t,x) - \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi) d\xi d\tau\right| \\
&\leq \left|\int_0^t \int_0^x h_n(\tau,\xi) d\xi d\tau - \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi) d\xi d\tau\right| \\
&\leq \int_0^t \int_0^x |h_n(\tau,\xi) - h(\tau,\xi)| \, d\xi d\tau,
\end{aligned}$$

avec $h_n, h \in C(J, \mathbb{R})$, on a

$$h_n(t,x) = f\left(t, x, u_n(t,x), h_n(t,x)\right)$$

et

$$h(t,x) = f\left(t, x, u(t,x), h(t,x)\right).$$

Puisque $u_n \to u$ *quand* $n \to \infty$ et f est une fonction continue.

Alors, d'après le théorème de la convergence dominée on obtient

$$\boxed{N(u_n) \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} N(u).}$$

Étape 2 : B_M est uniformément bornée.

$\forall\, (t, x) \in J,\ \ h \in C(J, \mathbb{R})$, on a

$$(Nu)(t, x) = \mu(t, x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau, \xi) d\xi d\tau,$$

où

$$h(t, x) = f\left(t, x, \mu(t, x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau, \xi) d\xi d\tau, h(t, x)\right).$$

On a

$$|(Nu)(t, x)| \leq |\mu(t, x)| + \left|\int_0^t \int_0^x h(\tau, \xi) d\xi d\tau\right|. \tag{2.7}$$

D'après $(\mathbf{H_2})$, nous avons

$$\begin{aligned} |h(t, x)| &\leq p(t, x)\left|\mu(t, x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau, \xi) d\xi d\tau\right| + q(t, x)|h(t, x)| \\ &\leq p^*\left(|\mu(t, x)| + \int_0^t \int_0^x |h(\tau, \xi)| d\xi d\tau\right) + q^*|h(t, x)|, \end{aligned}$$

alors

$$\| h \|_C \leq p^*(\mu^* + Tb \| h \|_C) + q^* \| h \|_C,$$

donc

$$\| h \|_C \leq \frac{p^* \mu^*}{1 - (Tbp^* + q^*)} = M_0.$$

En suite, d'après l'égalité (2.7) implique

$$\begin{aligned} |(Nu)(t,x)| &\leq |\mu(t,x)| + \int_0^T \int_0^b M_0 \, d\xi d\tau \\ &\leq \mu^* + TbM_0 \leq M. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{N(B_M) \subset B_M.}$$

Comme B_M est bornée, alors $N(B_M)$ est uniformément bornée.

Étape 3 : <u>$N(B_M)$ est équicontinue.</u>

Soient $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in J, t_1 < t_2 \; et \; x_1 < x_2$, soit $u \in B_M$. On a

$$| \; (Nu)(t_2, x_2) - (Nu)(t_1, x_1) \; |$$

$$\leq \left| \mu(t_2, x_2) + \int_0^{t_2} \int_0^{x_2} h(\tau, \xi) d\xi d\tau - \mu(t_1, x_1) - \int_0^{t_1} \int_0^{x_1} h(\tau, \xi) d\xi d\tau \right|,$$

où

$$h(t,x) = f\left(t, x, \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau, \xi) d\xi d\tau, h(t,x)\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\,(Nu)(t_2,x_2)-(Nu)(t_1,x_1)\,| &\leq |\mu(t_2,x_2)-\mu(t_1,x_1)| \\
&+ \left|\int_0^{t_2}\int_0^{x_2} h(\tau,\xi)d\xi d\tau - \int_0^{t_1}\int_0^{x_1} h(\tau,\xi)d\xi d\tau\right| \\
&\leq |\mu(t_2,x_2)-\mu(t_1,x_1)| + \left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} h(\tau,\xi)d\xi d\tau\right| \\
&+ \left|\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2} h(\tau,\xi)d\xi d\tau\right| + \left|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2} h(\tau,\xi)d\xi d\tau\right|.
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
|\,(Nu)(t_2,x_2)-(Nu)(t_1,x_1)\,| &\leq |\mu(t_2,x_2)-\mu(t_1,x_1)| \\
&+ (p^*\mu^* + p^*TbM_0 + q^*M_0)[t_2(x_2-x_1)+x_2(t_2-t_1)] \\
&\underset{(t_1,x_1)\longrightarrow(t_2,x_2)}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $N(B_M)$ est équicontinue.

Par conséquence, d'après les étapes 1 à 3 et le théorème d'Arzelà-Ascoli, il s'ensuit que l'opérateur $N : B_M \longrightarrow B_M$ est continue et relativement compact.

Étape 4 : L'estimation Apriori.

Nous montrons maintenant qu'il existe un ensemble ouvert $U \subseteq C(J)$ avec $u \neq \lambda N(u),\ pour\ \lambda \in (0,1)\ et\ u \in \partial U$, ici ∂U désigne la frontière de U.

Soit $u \in C(J)$ avec $u = \lambda N(u)$ pour certain $0 < \lambda < 1$.

D'ou, pour tout $(t,x) \in J$, on a

$$u(t,x) = \lambda\mu(t,x) + \lambda \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau,$$

où

$$h(t,x) = f\left(t, x, \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau, h(t,x)\right).$$

Donc, pour tout $(t,x) \in J$, on a

$$\| u \|_C \leq M.$$

Si, on pose

$$U = \{u \in C(J)\ :\ \| u \|_C < M+1\},$$

alors, par ce choix de U, il n'existe aucune $u \in \partial u$ telle que $u = \lambda N(u)$, pour certain $\lambda \in (0,1)$.

Par conséquence, d'après le théorème 1.3.2. On en déduit que l'opérateur N admet au moins un point fixe u dans $\overline{U}$ qui est une solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

Exemple 2. Nous considérons maintenant le système d'équations différentielles fonctionnelles de la forme :

$$\begin{cases} (D^2_{tx}u)(t,x) = \frac{t^2}{7e^{t+x+2}(1+|u(t,x)|)} + \frac{t}{11} \mid (D^2_{tx}u)(t,x) \mid; \ \ \forall (t,x) \ \in [0,1]\times[0,1], \\ u(0,x) = tx^2; \quad x\in[0,1], \\ u(t,0) = x(1+2t); \quad t\in[0,1]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Posons

$$f(t,x,u,v) = \frac{t^2}{7e^{t+x+2}(1+|u|)} + \frac{t}{11}|v|, \quad (t,x)\in[0,1]\times[0,1].$$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$ et $(t,x) \in [0,1]\times[0,1]$ nous avons

$$\begin{aligned} |f(t,x,u(t,x),v(t,x))| &= \frac{t^2}{7e^{t+x+2}}|u(t,x)| + \frac{t}{11}|v(t,x)| \\ &\leq \frac{1}{7e^2}\|u\|_C + \frac{1}{11}\|v\|_C. \end{aligned}$$

On a

$$p(t,x) = \frac{t^2}{7e^2}$$

$$q(t,x) = \frac{t}{11}$$

Alors, la condition $\mathbf{H_2}$ est satisfaite avec $p^* = \frac{1}{7e^2}$ et $q^* = \frac{1}{11}$. Ainsi la condition (2.6) elle est vérifie pour $T = b = 1$.

En effet

$$Tbp^* + q^* = \frac{1}{7e^2} + \frac{1}{11} < 1.$$

Donc, d'après le théorème 2.3.1, le problème (2.8) admet une solution définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Chapitre 3

Le Problème de Darboux pour les Équations Différentielles hyperboliques implicites perturbées

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats d'existence pour la classe d'équations différentielles perturbées du second ordre.

3.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle hyperbolique perturbée du second ordre suivante :

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = f(t,x,u(t,x),(D^2_{tx}u)(t,x)) + g(t,x,u(t,x)); \quad (t,x) \in J, \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0,x) = \phi(x); \quad x \in [0,b], \\ u(t,0) = \psi(t); \quad t \in [0,T], \\ \phi(0) = \psi(0). \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $J := [0,T] \times [0,b],\ T, b > 0, f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions données et ϕ, ψ des fonctions continues.

3.2 Existence de solutions

Maintenant, nous allons étudier l'existence d'une solution du problème (3.1)−(3.2).

Nous présentons des hypothèses suivantes :

$(\mathbf{H_{01}})$ Les fonctions f et g sont continues.

$(\mathbf{H_{02}})$ Il existe $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\mid f(t,x,u,v) \mid \leq \frac{p(t,x) + q(t,x) \mid u \mid}{1+ \mid v \mid}, \; pour \; (t,x) \in J \; et \; u, v \in \mathbb{R}.$$

$(\mathbf{H_{03}})$ Il existe $a > 0$ telle que pour tout $(t, x) \in J$

$$\mid g(t, x, u) - g(t, x, v) \mid \leq a \mid u - v \mid \; pour \; u, v \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons les hypothèse* $(\mathbf{H_{01}}) - (\mathbf{H_{03}})$ *sont vérifies. Si de plus*

$$Tb(a + q^*) < 1 \tag{3.3}$$

alors, le problème $(3.1) - (3.2)$ *admet au moins une solution définie sur J.*

Preuve. Considérons les opérateurs $F, G \in: C \longrightarrow C$ définie par,

$$(Fu)(t, x) = \mu(t, x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), D_{tx}^2 u(\tau, \xi)) d\xi d\tau; (t, x) \in J$$

et

$$(Gu)(t, x) = \int_0^t \int_0^x g(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\xi d\tau.$$

Alors, les solutions du problème $(3.1) - (3.2)$ sont les solutions de l'équation

$$(Fu)(t, x) + (Gu)(t, x) = u(t, x), (t, x) \in J.$$

Nous allons montrer que les opérateurs F et G satisfait toutes les conditions du théorème 1.3.3. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 : F est continue.

Soit la suite $(u_n)_{n\in N}$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans C. On a

$$(Fu)(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi),D^2_{tx}u(\tau,\xi))d\xi d\tau;(t,x) \in J.$$

Alors

$$|(Fu_n)(t,x) - (Fu)(t,x)| \leq$$

$$\leq \quad \left|\int_0^t \int_0^x f(t,x,u_n(\tau,\xi),D^2_{tx}u_n(\tau,\xi))d\xi d\tau - \int_0^t \int_0^x f(t,x,u(\tau,\xi),D^2_{tx}u(\tau,\xi))d\xi d\tau\right|$$

$$\leq \quad \int_0^t \int_0^x \mid f(t,x,u_n(\tau,\xi),D^2_{tx}u_n(\tau,\xi)) - f(t,x,u(\tau,\xi),D^2_{tx}u(\tau,\xi)) \mid d\xi d\tau.$$

Puisque $u_n \to u$ *quand* $n \to \infty$ et f est continue.

Alors, d'après le théorème de la convergence dominée on obtient

$$\boxed{F(u_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} F(u)}.$$

Étape 2 : F transforme les bornées dans des bornées dans C.

On montre que pour tout $\delta^* > 0$, il existe $\ell > 0$ telle que

$$u \in B_{\delta^*} = \{u \in C(J,\mathbb{R}), \| u \|_C \leq \delta^*\}$$

implique $\| (Fu) \|_C \leq \ell$.

Soit $u \in B_{\delta^*}$. Nous avons

$$(Fu)(t,x) = \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(t,x,u(\tau,\xi), D^2_{tx}u(\tau,\xi))d\xi d\tau.$$

D'après l'hypothèse ($\mathbf{H_{02}}$) pour tout $(t,x) \in J$, on a

$$\begin{aligned}
\mid (Fu)(t,x) \mid \;&\leq\; \left| \mu(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(t,x,u(\tau,\xi), D^2_{tx}u(\tau,\xi))d\xi d\tau \right| \\
&\leq\; \mid \mu(t,x) \mid + \left| \int_0^t \int_0^x f(t,x,u(\tau,\xi), D^2_{tx}u(\tau,\xi))d\xi d\tau \right| \\
&\leq\; \mid \mu(t,x) \mid + (\mid p(t,x) \mid + \mid q(t,x) \mid \delta^*) \int_0^T \int_0^b d\xi d\tau, \\
&\leq\; \mu^* + Tb(p^* + q^*\delta^*).
\end{aligned}$$

Avec

$$\mu^* = \sup_{(t,x)\in J} \mid \mu(t,x) \mid, \quad p^* = \sup_{(t,x)\in J} \mid p(t,x) \mid, \quad q^* = \sup_{(t,x)\in J} \mid q(t,x) \mid .$$

Alors

$$\mid (Fu) \mid \leq \mu^* + Tb(p^* + q^*\delta^*) := \ell.$$

Donc

$$\boxed{\parallel (Fu) \parallel_C \leq \ell.}$$

Étape 3 : <u>F transforme les bornées dans les équicontinues dans C.</u>

Soient $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in [0, T] \times [0, b], t_1 < t_2, x_1 < x_2$ et soit $u \in B_{\delta^*}$. On a

$$| (Fu)(t_2, x_2) - (Fu)(t_1, x_1) | \leq |\mu(t_2, x_2) - \mu(t_1, x_1)| +$$

$$+ \quad \left| \int_0^{t_2} \int_0^{x_2} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), D^2_{tx} u(\tau, \xi)) d\xi d\tau - \int_0^{t_1} \int_0^{x_1} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), D^2_{tx} u(\tau, \xi)) d\xi d\tau \right|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
| (Fu)(t_2, x_2) - (Fu)(t_1, x_1) | &\leq |\mu(t_2, x_2) - \mu(t_1, x_1)| \\
&+ \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), D^2_{tx} u(\tau, \xi)) d\xi d\tau \right| \\
&+ \left| \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), D^2_{tx} u(\tau, \xi)) d\xi d\tau \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{x_2} f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), D^2_{tx} u(\tau, \xi)) d\xi d\tau \right| \\
&\leq |\mu(t_2, x_2) - \mu(t_1, x_1)| + (p^* + q^* \delta^*)[t_2(x_2 - x_1) + x_2(t_2 - t_1)] \\
&\leq (p^* + q^* \delta^*)[t_2(x_2 - x_1) + x_2(t_2 - t_1)] \underset{(t_1, x_1) \longrightarrow (t_2, x_2)}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Par conséquence, d'après les étapes 1 à 3 et le théorème d'Arzelà-Ascoli, on en déduit que $F : C \longrightarrow C$ est continue et relativement compact.

Étape 4 : <u>G est une contraction.</u>

Soient $u, v \in C$, pour tout $(t,x) \in J$, on a

$$(Gu)(t,x) = \int_0^t \int_0^x g(t,x,u(\tau,\xi))d\xi d\tau, (t,x) \in := J,$$

D'ou

$$\begin{aligned}
|\ (Gu)(t,x) - (Gv)(t,x)\ | &= \left| \int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau - \int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,v(\tau,\xi))d\xi d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t \int_0^x |\ g(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - g(\tau,\xi,v(\tau,\xi))\ |\ d\xi d\tau \\
&\leq a \parallel u - v \parallel_C \int_0^T \int_0^b d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse ($\mathbf{H_{03}}$), on obtient alors,

$$\boxed{\parallel (G)(u) - G(v) \parallel_C \leq \ \ Tba \parallel u - v \parallel_C .}$$

Donc, d'après (3.3) et comme $Tba < Tb(a+q^*)$, alors G est une contraction.

Étape 5 : <u>L'estimation Apriori.</u>

Maintenant il reste à montrer que l'ensemble

$$E = \{u \in C(J,\mathbb{R}), u = \lambda F(u) + \lambda G\left(\frac{u}{\lambda}\right),\ pour\ 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $u \in E$, on a

$$u = \lambda F(u) + \lambda G\left(\frac{u}{\lambda}\right),$$

pour $0 < \lambda < 1$. Alors pour tout $(t, x) \in J$, on a

$$u(t,x) = \lambda\mu(t,x) + \lambda \int_0^t \int_0^x f(\tau, \xi, u(\tau,\xi), D^2_{tx} u(\tau,\xi)) d\xi d\tau + \lambda \int_0^t \int_0^x g\left(\tau, \xi, \frac{u(\tau,\xi)}{\lambda}\right) d\xi d\tau.$$

D'après $(\mathbf{H_{02}})$ *et* $(\mathbf{H_{03}})$, pour tout $(t, x) \in J$,

$$\begin{aligned}
\mid u(t,x) \mid &\leq \mid \mu(t,x) \mid + p^* \int_0^t \int_0^x d\xi d\tau + q^* \int_0^t \int_0^x \mid u(\tau,\xi) \mid d\xi d\tau \\
&+ \lambda \int_0^t \int_0^x \mid g(\frac{u(\tau,\xi)}{\lambda}) - g(\tau,\xi,0) \mid d\xi d\tau + \lambda \int_0^t \int_0^x \mid g(\tau,\xi,0) \mid d\xi d\tau \\
&\leq \mu^* + p^* \int_0^t \int_0^x d\xi d\tau + q^* \int_0^t \int_0^x \parallel u \parallel_C d\xi d\tau \\
&+ a \int_0^t \int_0^x \parallel u \parallel_C d\xi d\tau + Tbg^*,
\end{aligned}$$

où $g^* = \sup_{(t,x)\in J} \mid g(t,x,0) \mid$.

Il s'ensuit alors

$$\parallel u \parallel_C \leq \mu^* + Tb(g^* + p^*) + Tb(a + q^*) \parallel u \parallel_C .$$

On trouve

$$\| u \|_C \leq \frac{\mu^* + Tb(g^* + p^*)}{1 - Tb(a + q^*)} := \tilde{M}.$$

Donc

$$\boxed{\| u \|_C \leq \ \tilde{M}}$$

et l'ensemble E est borné.

D'après le théorème 1.3.3, $F + G$ admet un point fixe qui représente une solution du problème $(3.1) - (3.2)$.

3.3 Exemple

Considérons le problème perturbée suivant :

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = \frac{1 + 3e^{t+x+2}(e^{-2} \mid u(t,x) \mid +2)}{3e^{t+x+2}(1+ \mid u(t,x) \mid)} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} u(t,0) = t, \quad t \in [0,1], \\ \\ u(0,x) = x^2, \quad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.5}$$

Posons

$$f(t,x,u(t,x),v(t,x)) = \frac{e^{-2} \mid u(t,x) \mid +2}{1+ \mid v(t,x) \mid}; \quad (t,x) \in [0,1] \times [0,1]$$

et

$$g(t,x,u(t,x)) = \frac{1}{3e^{t+x+2}(1+ \mid u(t,x) \mid)}; \quad (t,x) \in [0,1] \times [0,1].$$

Il est clair que l'hypothèse ($\mathbf{H_{02}}$) est satisfaite avec $p^* = 2$ et $q^* = e^{-2}$.

Pour $u, \overline{u} \in \mathbb{R}$ et pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\mid g(t,x,u) - g(t,x,\overline{u}) \mid \;&\leq\; \left| \frac{1}{3e^{t+x+2}(1+\mid u(t,x) \mid)} - \frac{1}{3e^{t+x+2}(1+\mid \overline{u}(t,x) \mid)} \right| \\
&\leq\; \left| \frac{1}{3e^{t+x+2}} \left(\frac{1}{(1+\mid u(t,x) \mid)} - \frac{1}{(1+\mid \overline{u}(t,x) \mid)} \right) \right|
\end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
\mid g(t,x,u) - g(t,x,\overline{u}) \mid \;&\leq\; \frac{1}{3e^{t+x+2}} \left| \left(\frac{1}{(1+\mid u(t,x) \mid)} - \frac{1}{(1+\mid \overline{u}(t,x) \mid)} \right) \right| \\
&\leq\; \frac{1}{3e^2} \parallel u - \overline{u} \parallel_C .
\end{aligned}$$

Donc, l'hypothèse ($\mathbf{H_{03}}$) est satisfaite avec $a = \frac{1}{3e^2}$, la condition (3.3) est vérifiée pour $T = b = 1$.

En effet

$$Tb(a + q^*) = \frac{4}{3e^2} < 1.$$

Donc, les hypothèses ($\mathbf{H_{01}}$) $-$ ($\mathbf{H_{03}}$) sont satisfaites.

D'après le théorème 3.2.1, le problème (3.4) $-$ (3.5) possède au moins une solution définie sur $[0,1] \times [0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions de quelques classes d'équations différentielles implicites aux dérivées partielles du second ordre.

Nous avons commencé par quelques préliminaires sur l'espace de Banach et quelques définitions d'équation différentielle implicite avec des exemples, puis nous avons présenté des théorèmes de point fixe et des lemmes préliminaires.

Ensuite, nous avons montré l'existence et l'unicité de solutions d'une classe d'équations différentielles implicites par l'utilisation des théorèmes de point fixe de Banach et théorème de Leray-Schauder.

Enfin, nous avons démontré l'existence de solutions d'une classe d'équations différentielles implicite aux dérivées partielles perturbées, nous avons utilisé cette fois le théorème de point fixe de Burton-Kirk pour la somme de deux opérateurs, un opérateur contraction et un autre complètement continu. Enfin nous avons donné des exemples illustratifs.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Topics in Fractional Differential Equations, Springer, New York, 2012.

[2] S. Abbas, M. Benchohra and A. N. Vityuk, On fractional order derivatives and Darboux problem for implicit differential equations, Frac. Calc. Appl. Anal. **15** (2) (2012), 168-182.

[3] H. Brézis. Analyse fonctionnelle. Théorie et application. Dunod, 1999.

[4] T.A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr. **189** (1998), 23-31.

[5] S. Gonnord, Nicolas Tosel. Théorème d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle. Ellipses, 1996.

[6] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] J. K. Hale and S.V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] G. Messaoud, Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de Magister, Université de Ouargla, 2012.

[9] W. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, 1995.

[10] L. Toudjihounde, Calcul Differentiel, Université d'Abomey-Calavi.