

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique et application.

par

Habchi Fatiha¹

Sous la direction de

Pr : Djellouli Ghaouti

Thème :

Théorie Des Bifurcations Et Applications.

Soutenu le 14/06/2022 devant le jury composé de

M. N. Bekouce	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
M. G. Djellouli	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
M. A. Zeglaoui	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examineur
M. D. Djerfi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examineur
Melle. F. Z. Mostfai	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Invité

Année univ. : 2021/2022

1. e-mail : fatihahabchi285@gmail.com

REMERCIEMENTS

APRÈS AVOIR RENDU GRÂCE À DIEU LE TOUT PUISSANT
ET LE MISÉRICORDIEUX NOUS TENONS À REMERCIER
VIVEMENT TOUS CEUX QUI, DE PRÈS OU DE LOIN ONT
PARTICIPÉ À LA RÉDACTION DE CE DOCUMENT .IL

S'AGIT PLUS PARTICULIÈREMENT DE :

MONSIEUR GHOUTI DJELLOULI , ON LE REMERCIE POUR LA
QUALITÉ DE SON ENCADREMENT EXCEPTIONNEL, POUR SA
PATIENCE, SA RIGUEUR ET SA DISPONIBILITÉ DURANT
NOTRE PRÉPARATION DE CE MÉMOIRE.

JE REMERCIE VIVEMENT TOUS LES ENSEIGNANTS DE
NOTRE DÉPARTEMENT QUI ONT TOUJOURS DONNÉE LE
MEILLEUR D'EUX-MÊMES AFIN DE NOUS ASSURER UNE
FORMATION DE QUALITÉ, JE N'OUBLIE PAS LE CHEF
DÉPARTEMENT POUR SON AIDE.

DÉDICACE

JE DÉDIE CE MÉMOIRE

À MA MÈRE POUR LEUR PATIENCE, LEUR AMOUR
LEUR SOUTIEN ET LEURS ENCOURAGEMENTS.

À MES FRÈRES.

À MES AMIES ET MES CAMARADES.

SANS OUBLIER TOUS LES PROFESSEURS QUE CE SOIT DU
PRIMAIRE, DU MOYEN, DU SECONDAIRE OU DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEURE.

Table des matières

1	Notions générales sur les systèmes dynamiques continus	7
1.1	Introduction	8
1.2	Définitions	9
1.2.1	Espace de phase	9
1.2.2	Définition du flot	9
1.2.3	Propriétés élémentaires	10
1.2.4	Quelques définitions de base	11
1.3	Stabilité au sens de Lyapunov	11
1.4	Stabilité des systèmes linéaires	13
1.4.1	En fonction de la stabilité	13
1.4.2	En fonction des oscillations	13
1.4.3	Synthèse « Types de points d'équilibre »	13
1.4.4	Typologie des points d'équilibre : Trace et déterminant	18
1.5	Méthodes d'analyse de stabilité des systèmes non linéaires	20
1.5.1	Théorème de linéarisation	21
1.5.2	Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)	22
1.5.3	Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)	22
2	Introduction à la théorie des bifurcations	25
2.1	Introduction	26
2.2	Classification des bifurcations des points d'équilibre	26
2.3	Classification des bifurcations des points d'équilibre	27
2.3.1	Bifurcation de Noeud-col	27
2.3.2	Bifurcation de Noeud-col : Equivalence topologique	30
2.3.3	Bifurcation transcritique	34
2.3.4	Bifurcation transcritique : Equivalence topologique	37
2.3.5	Bifurcation fourche	41

2.3.6	Bifurcation fourche : Equivalence topologique	44
2.3.7	Bifurcation hystérésis	48
2.3.8	Bifurcation de Hopf	49
2.4	Théorème de Hartmann-Großman	49
2.4.1	Théorème Poincaré-Bendixson [Str94]	49
2.5	Recherche d'une orbite périodique	50
2.5.1	Critère de Bendixson	50
2.6	Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf	52
3	Modèle de Hindmarsh-Rose-2D	57
3.1	Introduction	58
3.2	Physiologie des Neurones	59
3.2.1	Le neurone	59
3.2.2	Propriétés électriques du neurone	60
3.2.3	Le potentiel de repos	61
3.2.4	Le stimulus	61
3.2.5	Les canaux ioniques	61
3.2.6	Le potentiel d'action	62
3.3	Etude du modèle de HINDMARSH-ROSE -2D	63
3.3.1	Existence et stabilité des points d'équilibre	63
3.4	Localisation des racines	67
3.5	Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf	68
3.6	Stabilité , direction et la période de la bifurcation de Hopf	70
4	Application numérique	73
4.1	Existence des états d'équilibres	74
4.1.1	Existence des états d'équilibres	75
4.1.2	Stabilités des équilibres	75
4.1.3	Recherche d'une orbite périodique	76
4.2	Etude des bifurcations	77

Introduction

La théorie des bifurcations, en mathématiques et en physique est l'étude de certains aspects des systèmes dynamiques. Une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système. Par exemple, ont tous une cause commune : un paramètre physique spécifique franchit un seuil, et cet événement force le système à organiser un nouvel état qui diffère considérablement de celui observé auparavant.

Mathématiquement parlant, il se passe ce qui suit : Les états observés d'un système correspondent à des solutions d'équations non linéaires qui modélisent le système physique. Un état peut être observé s'il est stable, notion intuitive qui se précise pour une solution mathématique. On s'attend à ce qu'un léger changement d'un paramètre dans un système n'ait pas une grande influence, mais plutôt que des solutions stables changent continuellement d'une manière unique. Cette espérance est vérifiée par le théorème de la fonction implicite. Par conséquent, tant qu'une branche continue de solutions conserve sa stabilité, aucun changement spectaculaire n'est observé lorsque l'on fait varier le paramètre. Cependant, si cet « état fondamental » perd sa stabilité lorsque le paramètre atteint une valeur critique, alors l'état n'est plus observé, et le système lui-même organise un nouvel état stable qui « bifurque » de l'état fondamental.

Dans ce mémoire, nous présentons quelques conditions suffisantes pour une « bifurcation à un paramètre », ce qui signifie que le paramètre de bifurcation est un véritable scalaire. Nous ne traitons pas la « théorie de la bifurcation multiparamètre ».

Nous distinguons une théorie locale, qui décrit le diagramme de bifurcation dans un voisinage du point de bifurcation.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux notions de base et outils fonctionnels concernant les systèmes dynamiques et la théories de stabilité associés aux systèmes différentiel en utilisant les méthodes de Lyapunov. Cette partie est largement inspirée des livres : ([16],

[19],[20], [25], [29]).

Dans le deuxième chapitre, nous donnons les notions et les propriétés préliminaires de bifurcation et leurs types avec des exemples de base.

La 3 et le 4 chapitre de ce document repose sur l'étude de la dynamique des modèles de Hindmarsh-Rose à deux équations. Tout d'abord, nous nous intéressons à l'étude des points critiques, avant de nous interroger sur la dynamique asymptotique et l'analyse qualitative de ces modèles. Cette étude permet dans un premier temps de déterminer des plages de paramètres pour lesquelles le comportement d'un neurone est stationnaire, périodique ou encore chaotique. Ce travail est effectué en partie grâce à l'utilisation des outils numériques sur Matlab. Ces observations nous ont conduit, dans un second temps, à l'étude de l'existence de certaines bifurcations apparaissant sous l'effet de la variation de certains paramètres, telle que la bifurcation de Hopf qui s'avère importante dans l'étude de systèmes oscillatoires. Cette partie est inspirée des articles de [17], [15], [9], [1], [10], [26].

Chapitre

1

Notions générales sur les systèmes dynamiques continus

Sommaire

1.1	Introduction	8
1.2	Définitions	9
1.2.1	Espace de phase	9
1.2.2	Définition du flot	9
1.2.3	Propriétés élémentaires	10
1.2.4	Quelques définitions de base	11
1.3	Stabilité au sens de Lyapunov	11
1.4	Stabilité des systèmes linéaires	13
1.4.1	En fonction de la stabilité	13
1.4.2	En fonction des oscillations	13
1.4.3	Synthèse « Types de points d'équilibre »	13
1.4.4	Typologie des points d'équilibre : Trace et déterminant	18
1.5	Méthodes d'analyse de stabilité des systèmes non linéaires	20
1.5.1	Théorème de linéarisation	21
1.5.2	Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)	22
1.5.3	Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)	22

1.1 Introduction

L'étude des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui remonte aux travaux de H. Poincaré (1854-1912) et au mémoire qu'il présenta en 1881 intitulé : "Sur les courbes définies par une équation différentielle".

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la présentation des notions générales sur les systèmes dynamiques : tels que définition, points d'équilibre, cycle limite, et la théorie de stabilité qui joue un rôle central en théorie des systèmes dynamiques.

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires, alors dans cette on va présenter brièvement les deux méthodes de Lyapunov pour l'étude de la stabilité des systèmes non-linéaires. La première méthode ou bien "**Méthode indirecte de Lyapunov**" consiste à calculer les points d'équilibre afin de linéariser autour de ces points pour évaluer la stabilité ou bien l'instabilité. La dernière étape de cette méthode consiste à examiner les valeurs propres de la matrice Jacobienne ainsi obtenue à partir la linéarisation.

Cette méthode, malgré sa simplicité ne semble pas très efficace. En d'autres termes, la méthode de linéarisation est une méthode par approximation, elle n'est donc valide que localement autour du point d'équilibre concerné et ne peut certainement pas être utilisée pour en déduire un comportement global.

Pour cela, A. M. Lyapunov a proposé une deuxième méthode ou bien "**Méthode directe de Lyapunov**" pour l'étude de la stabilité. Cette méthode est une généralisation de l'idée de l'énergie du système. Le but est de trouver une fonction dite "**Fonctions de Lyapunov**" qui décroît le long des trajectoires du système. Le principal inconvénient de la méthode directe est de ne pas disposer de guide pour le choix de la fonction de Lyapunov, dans la plupart des applications, les fonctions considérées sont l'énergie totale du système.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et y_0 un réel. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= f(y(t)) \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

c'est déterminer l'ensemble des réels strictement positifs T , et l'ensemble des fonctions $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, telles que $y(0) = y_0$ et :

$$\forall t \in [0, T[, \quad y'(t) = f(y(t)).$$

Il existe des théorèmes (voir [22], [16] et [19]) qui, sous des conditions assez générales portant sur g , assurent l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Il peut aussi se faire qu'il n'y ait aucune solution, ou bien qu'il y en ait une infinité

1.2 Définitions

Définition 1.2.1 *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction.*

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

1.2.1 Espace de phase

Définition 1.2.2 *On appelle espace ou portrait de phase l'ensemble des trajectoires qui sont les solutions du système (1.1) représentées dans le plan de phase initiées à partir des conditions initiales différentes*

1.2.2 Définition du flot

On note en outre

$$\Omega_0 = \{(t, y_0) \in \mathbb{R} \times D; t \in]0, T[\}$$

Définition 1.2.3 *On appelle flot de l'équation différentielle (1.1) l'application :*

$$\begin{aligned} \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, y_0) &\mapsto \varphi_t(y_0) = y(t; 0, y_0) \end{aligned}$$

Il est clair que $\varphi_t(y_0)$ satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_t(y_0) = f(\varphi_t(y_0)) \\ \varphi_0(y_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

En outre :

$$\forall (t, t_0, y_0) \in \Omega, \quad (t - t_0, y_0) \in \Omega \quad \text{et} \quad y(t; t_0, y_0) = \varphi_{t-t_0}(y_0)$$

ce qui implique que φ_t est définie indépendamment de t_0 .

Remarque 1.2.1 *On peut aussi définir le flot d'un système continu non-autonome. Cependant, tout système non-autonome peut se réécrire comme un système autonome. La définition de φ_t n'est pas restrictive.*

1.2.3 Propriétés élémentaires

Proposition 1.2.1 *L'application*

$$\begin{aligned}\Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, y) &\mapsto \varphi_t(y)\end{aligned}$$

est continue. Pour tout $(t, y) \in \Omega_0$, il existe un voisinage V de y tel que l'application $\varphi_t(\cdot)$ soit définie et continue sur V .

Lorsque φ est continue, on parle d'un système dynamique continu topologique.

Voir George David Birkhoff, (1884 - 1944), M.V. Bebutov (1913-1942), A.A Andronov (1901-1952), . . .

Proposition 1.2.2 *Si $D = \mathbb{R}^n$ et f globalement Lipschitzienne et de classe C^1 , alors $\Omega_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et*

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow GL(\mathbb{R}^n) \\ t &\mapsto \varphi_t(\cdot)\end{aligned}$$

est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL(\mathbb{R}^n), \circ)$, où $GL(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des difféomorphismes de \mathbb{R}^n dans lui-même.

preuve 1.2.1 *En vertu de l'unicité de la solution (Th. de Cauchy-Lipschitz [22]) :*

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$$

donc

1. φ_t est une bijection;
2. $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$;
3. $(\varphi_t)^{-1}$ est continue.
4. Enfin, φ_t est C^1 d'inverse C^1

Remarque 1.2.2 (Flot d'un système linéaire) *Lorsque le champ de vecteurs $f(x)$ dépend linéairement de l'état x , il définit un système dynamique linéaire. Le caractère linéaire du système se traduit par $f(x) = Ax$, A étant la matrice du système linéaire. Le flot est explicite : il met en jeu une exponentielle de matrice :*

$$x(t) = e^{At}x_0 \text{ d'où } \varphi_t(x) = e^{At}x$$

Ceci explique le rôle central de la matrice A dans l'étude à venir de la stabilité des systèmes linéaires.

1.2.4 Quelques définitions de base

1. **Trajectoire d'un point x** : On appelle trajectoire d'une solution $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points $\varphi(t)$ de \mathbb{R}^n , où t parcourt l'intervalle I . C'est donc une courbe paramétrée.

$$\gamma_x = \{\varphi(t, x); t \in \mathbb{R}\}.$$

2. **Courbe intégrale** : On appelle courbe intégrale d'une solution $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points de $(t, \varphi(t))$ de \mathbb{R}^n , où t parcourt l'intervalle I . C'est donc la représentation graphique de la solution φ dans \mathbb{R}^{n+1} .
3. **Mouvement du point x** : c'est la fonction $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ définie par

$$\varphi_x(t) = \varphi(t, x)$$

4. **Mouvement périodique de x** : Une solution $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est périodique s'il existe une constante $T > 0$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_x(t + T) = \varphi_x(t)$$

La trajectoire d'une telle solution est fermée (c'est une boucle).

5. **Point d'équilibre** : Un état x_e est un point d'équilibre du système (1.1) si pour tout instant $t \geq t_0$ l'état du système $x(t) = x_e$.
Le point d'équilibre x_e vérifie $f(t, x_e) = 0$

1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Dans cette partie nous rappelons brièvement la notion de stabilité au sens de Lyapunov ainsi que les principes de la deuxième méthode de Lyapunov. A partir de cela, nous donnons les concepts de région d'attraction et de région de stabilité d'un point d'équilibre asymptotiquement stable. Nous terminons par la présentation de quelques résultats concernant en particulier la stabilité des systèmes linéaires.

Les définitions et résultats présentés dans cette partie sont assez classiques et peuvent, sauf référence explicite, être trouvés dans des ouvrages traitant des systèmes non-linéaires. Ainsi, pour les démonstrations de ces résultats nous pouvons citer, par exemple, [19], [20] et [25].

Définition 1.3.1 (Attractivité d'un point d'équilibre) Le point d'équilibre x_e est attractif si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Autrement dit, l'équilibre x_e est dit attractif si la trajectoire $x(t)$, à un certain voisinage et pendant un certain temps, converge vers ce point d'équilibre x_e .

Définition 1.3.2 Le point d'équilibre x_e est dit :

1. **Stable**, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

2. **Asymptotiquement stable**, s'il est stable et attractif.
3. **Instable**, s'il n'est pas stable

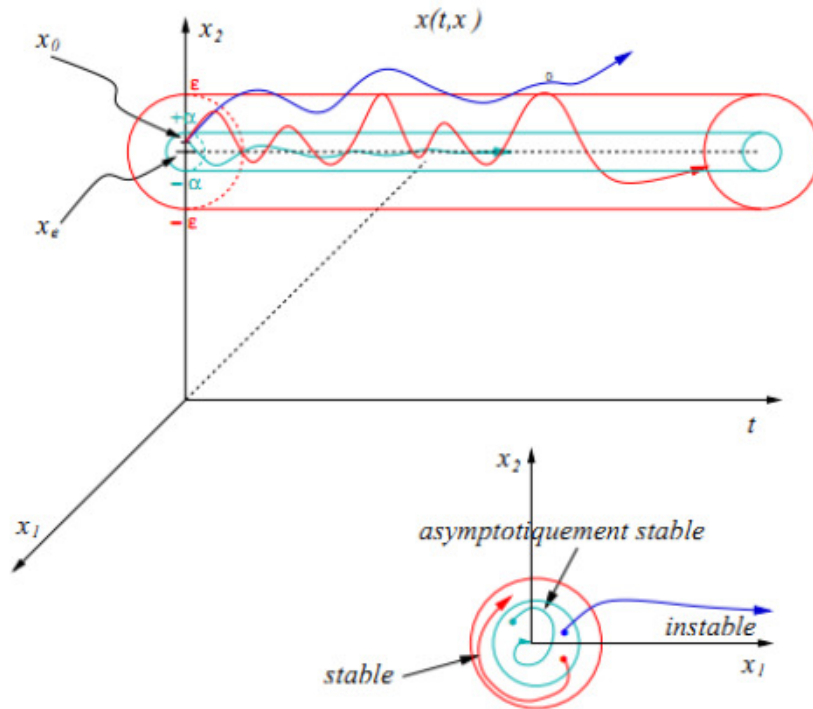


Fig 1.1 :Stabilité et Stabilité asymptotique

L'équilibre x_e est **stable** si pour un voisinage quelconque de x_e , $U_1(x_0, \epsilon)$, il existe un voisinage $U_2(x_0, \delta(\epsilon))$ tel que pour toute condition initiale x_0 prise dans $U_2(x_0, \delta(\epsilon))$ la trajectoire reste dans $U_1(x_0, \epsilon)$. En plus, si dans le voisinage $U_1(x_0, \epsilon)$ la trajectoire tend vers x_e lorsque t tend vers l'infini, l'origine est dite **asymptotiquement stable**.

D'autre part, dire que $x = x_e$ est **instable** signifie qu'il existe un voisinage de l'équilibre $U_1(x_0, \epsilon)$, tel que pour tout voisinage $U_2(0, \delta(\epsilon)) \subset U_1(0, \epsilon)$, il existe au moins une trajectoire $\varphi(t, x_0)$, avec $x_0 \in U_2(x_0, \delta(\epsilon))$, qui n'est pas contenue dans $U_1(x_0, \epsilon)$.

1.4 Stabilité des systèmes linéaires

Afin de faciliter la notion de classe, on utilisera pour le moment des exemples de systèmes linéaires

$$X' = A.X \quad (1.3)$$

de deuxième ordre (le point d'équilibre d'un système linéaire est unique). Alors, on peut faire un classement en se référant à deux pivots :

1.4.1 En fonction de la stabilité

1. Attracteurs ou points stables.
2. Répulseurs ou points instables.
3. Points selles ou cols

1.4.2 En fonction des oscillations

1. Foyers.
2. Centres et cycles limites.
3. Noeuds.

La résolution de l'équation $X' = 0$ va nous permettre de déduire le point d'équilibre du système $X' = A.X$. Notre but dans ce cas est d'identifier le type de classe de ce point d'équilibre. On détermine les valeurs propres de la matrice A ensuite on déduit le type de ce point.

1.4.3 Synthèse « Types de points d'équilibre »

La matrice A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et dans ce cas elle est diagonalisable

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

1. Première cas

- (a) Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est un **noeud instable**.

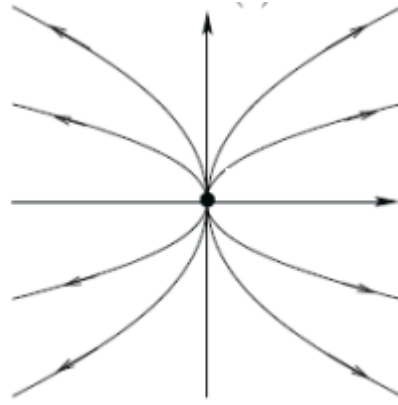


Fig1.2 : noeud instable

(b) Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ est un **noeud stable**.

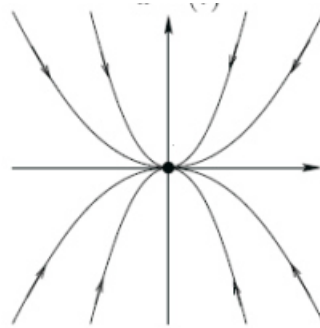


Fig1.3 : noeud stable

(c) Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ (Valeurs propres λ_1 et λ_2 sont de signe opposé) alors le point d'équilibre $(0,0)$ est un **point col ou selle** .

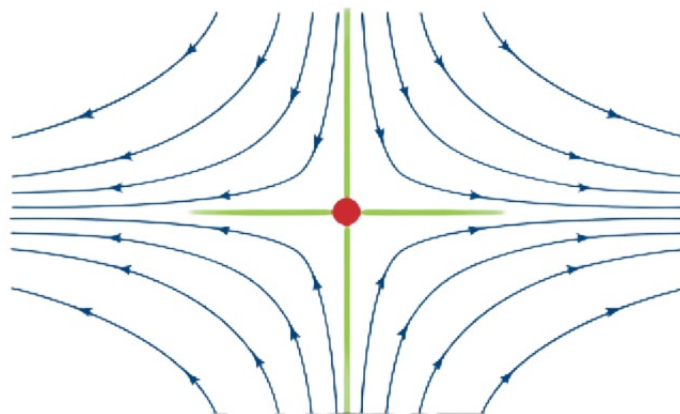


Fig1.4 : point col ou selle

Remarque 1.4.1 Pour un point selle, on distingue deux axes appelés les séparatrices du point selle, car ces droites séparent le plan en quatre « flots » de trajectoires différentes. Le point en rouge est le point du graphe de la fonction associé à son unique point-selle.

2. **Deuxième cas** La matrice A admet une valeur propre double $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, Si A

est diagonalisable

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- (a) Si $\lambda > 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ est une étoile ou un **nœud dégénéré instable**.

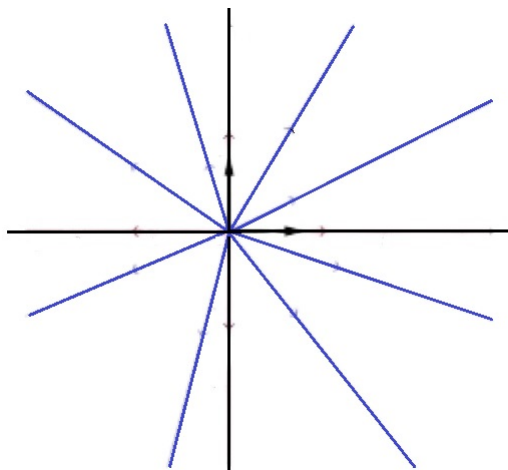


Fig1.5 : étoile instable

- (b) Si $\lambda < 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ est une étoile ou un **nœud dégénéré stable**.

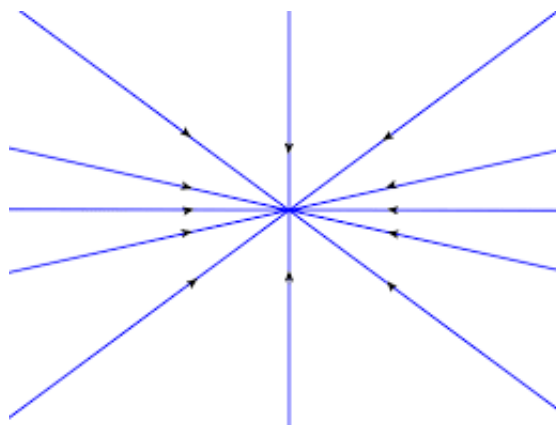


Fig1.6 : étoile stable

Remarque 1.4.2 *Le cas $\lambda = 0$ ne peut pas avoir lieu, car on a supposé que la matrice A est inversible.*

Si A n'est pas diagonalisable mais seulement triangularisable

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- (c) Si $\lambda > 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ on a une **étoile** ou un **nœud dégénéré instable**.

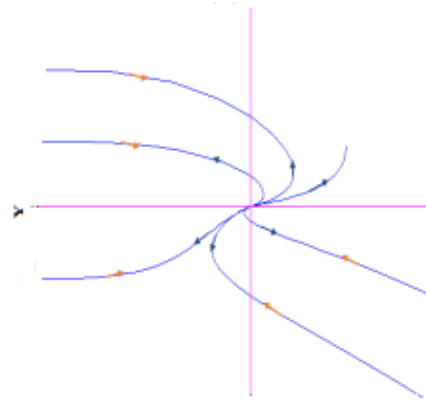


Fig1.7 : Nœud dégénéré instable

- (d) Si $\lambda < 0$ alors le point d'équilibre $(0, 0)$ on a une **étoile** ou un **nœud dégénéré stable**.

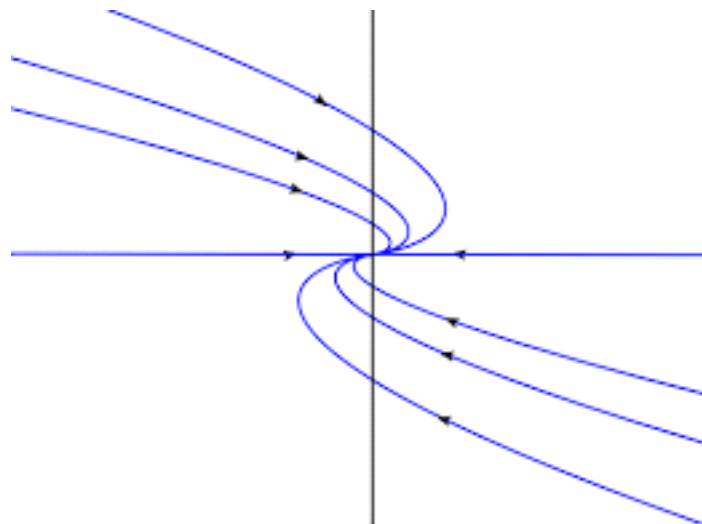


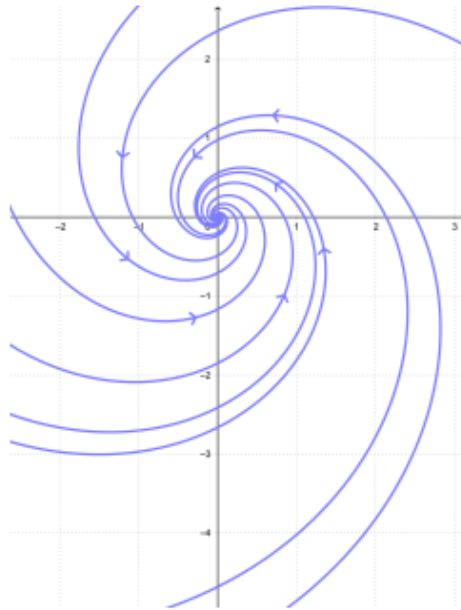
Fig1.8 : Nœud dégénéré stable

3. Troisième cas

La matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

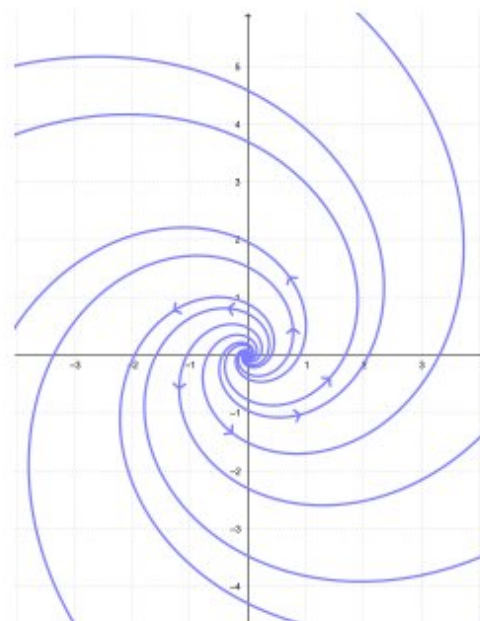
$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) Si $\alpha < 0$, $\beta > 0$, alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est un **foyer stable**

**Fig1.8 : Foyer stable**

Dans le portrait et les trajectoires ci-dessus, les solutions se rapprochent du point d'équilibre (l'origine est un foyer stable ou encore spirale attractante).

- (b) Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est un **foyer instable**.

**Fig1.9 : Foyer instable**

On a alors le portrait de phase suivant correspondant donc à des **spirales**, qui s'éloignent du point d'équilibre (l'origine est un **foyer instable** ou encore **spirale répulsive**.)

- (c) Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$ alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est un **centre** (point neutralement stable).

On a alors le portrait de phase suivant représentant des **centre**

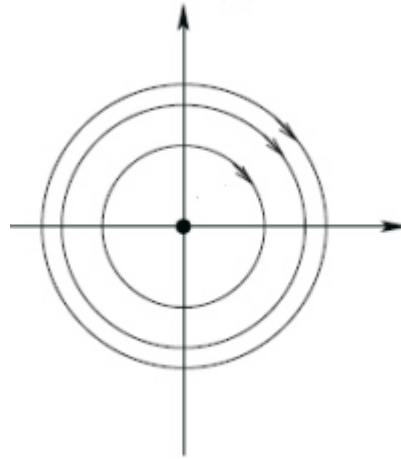


Fig1.10 : centre

Dans ce cas, les trajectoires pour différentes valeurs initiales **oscillent** autour du point d'équilibre. De même pour l'espace de phase, on remarque des lieux de cercles autour de ce point. On dit que l'origine est un **centre**.

1.4.4 Typologie des points d'équilibre : Trace et déterminant

Il existe alors une autre approche pour déduire le signe des valeurs propres sans avoir à les calculer, en utilisant la trace et le déterminant de la matrice A .

Reprenons le système $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice réelle carrée de dimension 2. Les valeurs propres de la matrice A sont les valeurs λ solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

d'où

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est

$$\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$$

C'est la nature des valeurs propres qui détermine la forme de Jordan associée à A

1. Réelles distinctes ($\Delta > 0$);
2. Réelles égales ($\Delta = 0$); une racine double;
3. Complexes conjuguées ($\Delta < 0$).

Donc la nature des points d'équilibre du système est déterminée par le signe de $tr(A)$ et de $det(A)$, de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \lambda tr(A) + det(A) = 0.$$

Les solutions oscillantes et non oscillantes sont donc déterminées par l'intérieur et l'extérieur de la parabole d'équation :

$$tr(A)^2 - 4det(A).$$

En effet, si λ_1 et λ_2 sont racines de l'équation caractéristique, alors :

$$tr A = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad det A = \lambda_1 \lambda_2$$

ainsi dans le plan $(tr(A), det(A))$ l'équation $\Delta = 0$ correspond à celle de la parabole

$$det(A) = \frac{1}{4}(tr(A))^2$$

qui divise le plan en deux grandes régions.

1. **Cas $\Delta = 0$** (i.e. sur la parabole $det(A) = \frac{1}{4}(tr(A))^2$).

Racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et dans ce cas

$$det(A) = \lambda^2 \quad \text{et} \quad tr(A) = 2\lambda$$

- (a) Si $tr(A) > 0$ donc $\lambda > 0$ et le point d'équilibre est soit une **étoile instable** ou un **noeud dégénéré instable**.
- (b) Si $tr(A) < 0$ donc $\lambda < 0$ et le point d'équilibre est soit une **étoile stable** ou un **noeud dégénéré stable**.

2. **Cas $\Delta > 0$** (i.e. la région au dessous la parabole $det(A) < \frac{1}{4}(tr(A))^2$).

- (a) Si $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ alors λ_1 et λ_2 sont de signes opposés le point d'équilibre est un **point selle**.
- (b) Si $det(A) > 0$ et $tr(A) > 0$ donc $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ le point d'équilibre est un **noeud instable**.
- (c) Si $det(A) > 0$ et $tr(A) < 0$ donc $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ le point d'équilibre est un **noeud stable**.

3. **Cas $\Delta < 0$** (i.e. la région au dessus la parabole $det(A) > \frac{1}{4}(tr(A))^2$) alors, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ donc $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$

- (a) Si $tr(A) < 0$ donc la partie réelle des valeurs propres est négative, et le point d'équilibre est un **foyer stable**.
- (b) Si $tr(A) > 0$ donc la partie réelle des valeurs propres est positive, et le point d'équilibre est un **foyer instable**.
- (c) Si $tr(A) = 0$ la partie réelle des valeurs propres est nulle, et le point d'équilibre est un **centre**.

Figure récapitulatif

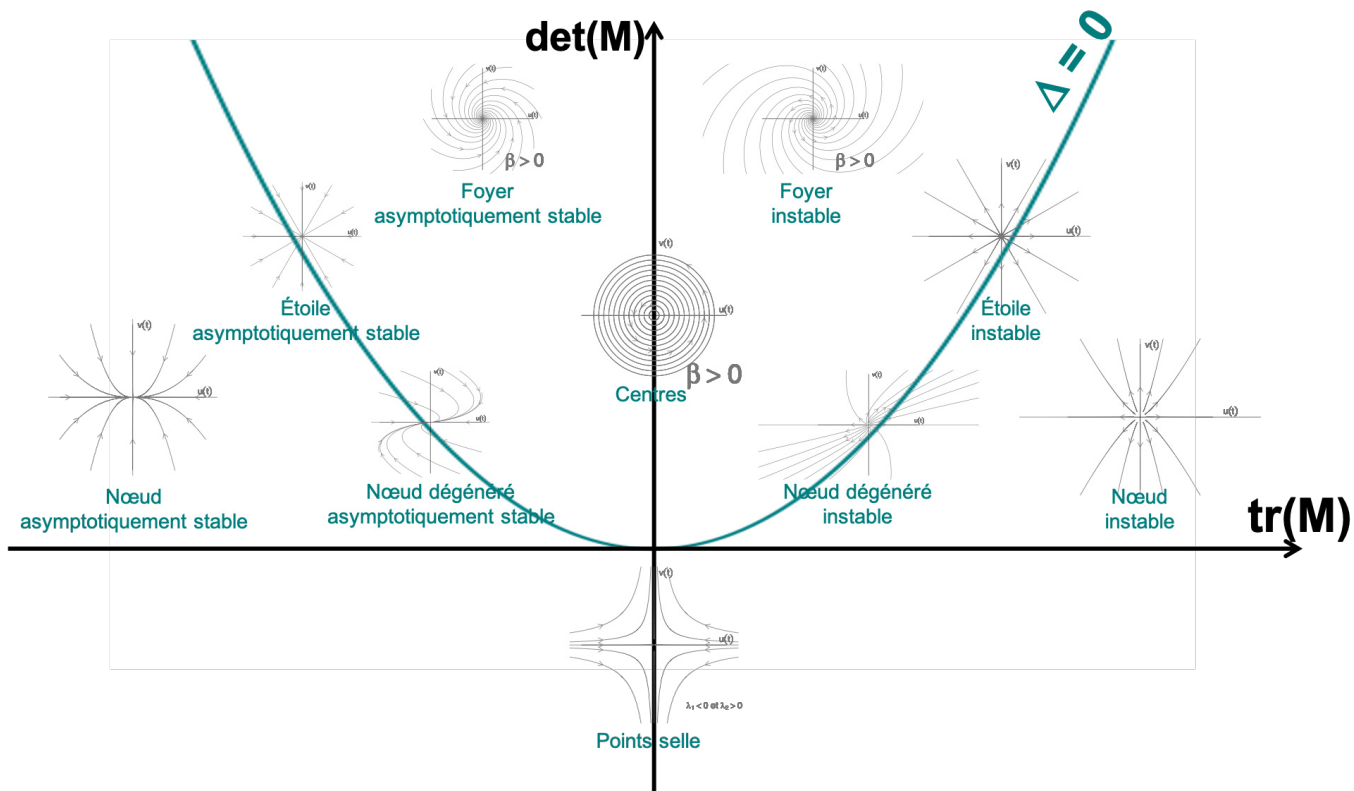


Fig 1.11 : Nature des points d'équilibre d'un système linéaire de dimension 2, en fonction de la trace et du déterminant de sa matrice au voisinage de ces points.

1.5 Méthodes d'analyse de stabilité des systèmes non linéaires

L'étude des systèmes non linéaires nécessite leur transformation en un système linéaire approché, dit système linéarisé, ayant l'origine comme point d'équilibre.

Pour simplifier plaçons-nous dans le cas d'un système de dimension 2 :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

dont l'état stationnaire est noté , (x_e, y_e) .

Le développement en série de Taylor au voisinage de (x_e, y_e) donne :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x_e, y_e) + (x, x_e) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e, y_e} + (y, y_e) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_e, y_e} + \dots \\ \frac{dy}{dt} = g(x_e, y_e) + (x, x_e) \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_e, y_e} + (y, y_e) \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{x_e, y_e} + \dots \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} x &= x_e + X \\ y &= y_e + Y \end{aligned}$$

X et Y exprimant de petites perturbations des variables d'état au voisinage de (x_e, y_e) .

Le système (1.3) s'écrit d'une manière approchée (en ne tenant compte que des termes de degré 1 du développement) :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= aX + bY \\ \frac{dY}{dt} &= cX + dY \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Z \\ &= \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e, y_e} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_e, y_e} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_e, y_e} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{x_e, y_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire les éléments de la matrice jacobienne J du système (dérivées partielles de f et g).

A l'état stationnaire nous avons évidemment : $X_e = Y_e = 0$ permettant d'appliquer le théorème suivant.

1.5.1 Théorème de linéarisation

En bref ce théorème établit qu'au voisinage de l'état d'équilibre (x_e, y_e) et si la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne J est différente de zéro en (x_e, y_e) , les propriétés dynamiques du système initial (1.3) sont les mêmes que celles du système linéarisé (1.4) au voisinage de l'origine 0.

1.5.2 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov se base sur l'analyse du comportement du système non linéaire autour de son point d'équilibre x_e (linéarisé ce système au voisinage de x_e). Donc, on étudie les valeurs propres λ_i du système de la matrice **Jacobienne**

$$J = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{x=x_e}$$

déduite au point d'équilibre x_e du système (1.4)

1.5.3 Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

L'objectif de la seconde méthode de Lyapunov est d'étudier le comportement des solutions (trajectoires) au voisinage d'un point d'équilibre sans la connaissance explicite de ces dernières. Cette méthode est basée sur l'utilisation de fonctions auxiliaires possédant certaines propriétés de positivité, et permet de conclure sur la stabilité d'un point équilibre par l'étude de l'évolution de telles fonctions le long des trajectoires du système. Relativement aux systèmes du type (1.4), le théorème suivant donne des conditions pour la stabilité autour de l'origine.

Théorème 1.5.1 Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (1.4) et $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant $x_e = 0$ s'il existe une fonction V de classe C^1 telle que

1. $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans $U \setminus \{0\}$.
2. $V'(x) \leq 0$ dans U .
Alors $x_e = 0$ est stable. De plus,
3. Si $V'(x) < 0$ dans $U \setminus \{0\}$ alors $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

Notons que le **théorème** (1.5.1) garantit la stabilité dans un sens local, c'est-à-dire, la stabilité n'est assurée que dans un voisinage de l'origine contenu dans l'ensemble U pour lequel la fonction $V(x)$ vérifie les conditions (1) et (2) ou (1) et (3).

Supposons maintenant, qu'un système présente la propriété suivante : pour toute condition initiale dans l'espace d'état, i.e., $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, la convergence des trajectoires vers l'origine est garantie. Dans ce cas, la stabilité asymptotique du système est obtenue dans un sens global.

Définition 1.5.1 Si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la trajectoire respective $\varphi(t, x_0)$ du système (1.4) converge vers l'origine quand $t \rightarrow +\infty$, alors l'origine est dite globalement asymptotiquement stable.

Il est donc intéressant d'établir sous quelles conditions on peut initialiser le système aussi loin que l'on veut et garantir que la trajectoire converge vers l'origine.

L'idée immédiate serait d'utiliser le **théorème** (1.5.1) en considérant $U = \mathbb{R}^n$. Cependant, cela n'est pas suffisant. En fait : il est nécessaire aussi que $V(x)$ soit une fonction radialement non-bornée (condition (2) ci-après). Ces conditions sont exprimées dans le théorème suivant :

Théorème 1.5.2 *Soit l'origine ($x = 0$) un point d'équilibre du système (1.4). Soit la fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dans \mathbb{R}^n , si :*

1. $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0$,
2. $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$,
3. $V'(x(t)) < 0, \forall x \neq 0$,

Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

La difficulté majeure de la deuxième méthode de Lyapunov réside dans le choix de la "bonne" fonction. Malheureusement, il n'existe pas de méthode systématique pour la détermination de fonctions de Lyapunov. En général, le choix de la fonction fait appel à l'expérience du concepteur. Dans des cas particuliers (systèmes mécaniques et/ou électriques, par exemple), on peut faire appel à l'interprétation physique du théorème de Lyapunov et choisir des fonctions représentant l'énergie du système. Dans ce cas, si l'énergie est dissipée le long des trajectoires du système, la fonction sera potentiellement une fonction de Lyapunov.

Chapitre

2

Introduction à la théorie des bifurcations

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Classification des bifurcations des points d'équilibre	26
2.3	Classification des bifurcations des points d'équilibre	27
2.3.1	Bifurcation de Noeud-col	27
2.3.2	Bifurcation de Noeud-col : Equivalence topologique	30
2.3.3	Bifurcation transcritique	34
2.3.4	Bifurcation transcritique : Equivalence topologique	37
2.3.5	Bifurcation fourche	41
2.3.6	Bifurcation fourche : Equivalence topologique	44
2.3.7	Bifurcation hystérésis	48
2.3.8	Bifurcation de Hopf	49
2.4	Théorème de Hartmann-Großman	49
2.4.1	Théorème Poincaré-Bendixson [Str94]	49
2.5	Recherche d'une orbite périodique	50
2.5.1	Critère de Bendixson	50
2.6	Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf	52

2.1 Introduction

Considérons maintenant l'ODE autonome d'ordre un :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, \mu) \\ x \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ (pour simplifier on note $x = x(t)$). L'objectif est maintenant d'explorer le nombre d'équilibres x_e qui va dépendre de la valeur de μ et leur stabilité lorsque μ évolue le long de \mathbb{R} : μ est alors appelé paramètre de bifurcation.

Définition 2.1.1 *Une bifurcation est un changement qualitatif dans la dynamique d'un système lors d'un changement des valeurs des paramètres.*

On définit les valeurs de bifurcation du système (2.1) comme étant les valeurs de μ telle que la jacobienne $J = D_x f(x, \mu)$ calculée au point d'équilibre x_e a une valeur propre nulle.

Définition 2.1.2 *L'équation*

$$f(x, \mu) = 0$$

permet de trouver les coordonnées des points d'équilibres, définit une équation dans le plan (x, μ) appelée diagramme de bifurcation.

Dans la suite de cette partie, nous présentons les bifurcations les plus simples et les théorèmes généraux décrivant la structure des champs de vecteurs qui les subissent.

2.2 Classification des bifurcations des points d'équilibre

Dans cette section, nous débutons en donnant un tableau illustrant certaines de ces bifurcations, un déploiement universel en dimension 1 (resp. 2 en coordonnées polaires pour la bifurcation de Hopf) et un schéma de l'évolution du portrait de phase en fonction du paramètre de bifurcation μ au voisinage de la valeur de bifurcation $\mu = 0$. (voir : [1], [9], [10], [17], [5])

La bifurcation col-noeud et la bifurcation de Hopf sont les deux bifurcations de points singuliers de codimension 1 dites génériques (cette notion sera précisée dans la suite). Cependant, d'autres bifurcations non génériques, principalement la bifurcation transcritique et la fourche, sont importantes pour la compréhension des portraits de phase des modèles en Sciences du Vivant. A ce titre, nous les présentons également.

Col-Noeud (ou Pli)	Transcritique	Fourche	Hopf
$x' = \mu - x^2$	$x' = \mu x - x^2$	$x' = \mu x - x^3$	$\rho' = \rho(\mu - \rho^2)$ $\theta' = 1$
<ul style="list-style-type: none"> • Lignes bleues pleines : lieu des points singuliers stables ; • Lignes bleues pointillées : lieu des points singuliers instables ; • Lignes noires avec flèches : orbites et orientation du flot ; • Surface rouge : famille de cycles limites. 			

Fig 2.1 : tableau illustrant certaines de ces bifurcations, un déploiement universel en dimension 1 (resp. 2 en coordonnées polaires pour la bifurcation de Hopf).

2.3 Classification des bifurcations des points d'équilibre

2.3.1 Bifurcation de Noeud-col

Son nom vient du fait que lors de cette bifurcation pour un système plan, un point du type col et un point de type noeud se rejoignent et disparaissent. Nous allons considérer l'équation différentielle suivante :

$$x' = f(x, \mu), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière. Supposons que f possède pour $\mu = 0$ un point d'équilibre non hyperbolique i.e.

1. $f(0, 0) = 0$;

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

et deux autres conditions

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0.$
4. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$

On cherche à transformer le système (2.2) sous la forme

$$x = \mu + x^2, \quad (2.3)$$

par des changements de coordonnées et de paramètres et sous les conditions imposées en 1, 2, 3 et 4.

étape 1 : on fait un changement de variables par translation. On pose $\zeta = x + \delta$, on fait le dl de f au voisinage de $x = 0$,

$$f(x, \mu) = f(0, \mu) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu) + O(x^3).$$

On obtient une équation différentielle en ζ

$$\begin{aligned} \zeta &= \left[f(0, \mu) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu)\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu)\delta^2 + O(\delta^3) \right] \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu)\delta + O(\delta^2) \right] \zeta + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu) + O(\delta) \right] \zeta^2 + O(\zeta^3). \end{aligned} \quad (2.4)$$

On cherche à annuler le terme linéaire de l'équation (2.4) On cherche donc $\delta = \delta(\mu)$ tel que $F(\mu, \delta(\mu)) = 0$, avec

$$F(\mu, \delta(\mu)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu)\delta + O(\delta^2)$$

On utilise le théorème des fonctions implicites :

$$\text{On a } F(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \delta}(0, 0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

$$\exists U \in V(0), V \in V(0), \text{ tel que } F(\mu, \delta) = 0, \forall \mu \in U \text{ et } \delta(0) = 0$$

$$\forall (\mu, \delta) \in U \times V, F(\mu, \delta) = 0 \Rightarrow \delta = \delta(\mu)$$

avec

$$\delta'(\mu) = \frac{d\delta}{d\mu}(\mu) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \mu}(\mu, \delta)}{\frac{\partial F}{\partial \delta}(\mu, \delta)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(\mu, \delta) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(\mu, 0) - \frac{\partial^3 f}{\partial c \partial x^2}(\mu, 0)\delta$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta}(\mu, \delta) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu, \delta) + O(\delta)$$

$$\delta(\mu) = \delta(0) + \mu\delta'(0) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}\mu + O(\mu^2),$$

alors

$$\zeta' = \left[f(0, \mu) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu)\delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu)\delta^2 + O(\delta^3) \right] + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu) + O(\delta) \right] \zeta^2 + O(\zeta^3)$$

On fait le dl de f au voisinage de $\mu = 0$ jusqu'à l'ordre 2, on obtient

$$\zeta' = \left[\mu \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) + O(\mu^2) \right] + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + O(\mu) \right] \zeta^2 + O(\zeta^3) \quad (3)$$

étape 2 : introduire un nouveau paramètre

Soit

$$r = r(\mu) = \mu \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) + \mu^2 \varphi(\mu)$$

On a

$$r(0) = 0 \text{ et } r'(0) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0)$$

a On suppose

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$$

Théorème des fonctions implicites : il existe $\mu = \mu(r)$, pour tout $r \in V(0)$ tel que $\mu(0) = 0$.

$$\zeta = r + a(r)\zeta^2 + O(\zeta^3)$$

avec

$$a(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

étape 3 : Soit

$$\eta = |a(r)|\zeta, \quad \beta = |a(r)|\mu$$

$$\eta' = |a(r)|\zeta' = r|a(r)| + |a(r)|a(r)\zeta^2 + |a(r)|O(\zeta^3)$$

$$\eta' = r|a(r)| + s\eta^2 + |a(r)|O(\zeta^3) = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3)$$

où $s = \pm \text{signe}(a(0)) = \pm 1$

2.3.2 Bifurcation de Noeud-col : Equivalence topologique

Proposition 2.3.1 *L'équation*

$$x' = \mu + x^2 + O(x^3)$$

est localement topologiquement équivalente au voisinage de l'origine à

$$x' = \mu + x^2$$

Théorème 2.3.1 *On suppose que l'équation $x' = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ avec f régulière, possède en $\mu = 0$ un point d'équilibre $x = 0$ non hyperbolique.*

On suppose de plus que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0,$$

alors, il existe un changement de variables et de paramètres qui transforme cette équation sous la forme.

$$\eta' = \beta \pm \eta^2$$

Finalement, nous avons les conditions nécessaires dans lesquelles les deux exigences posées au début sont satisfaites.

Théorème 2.3.2 Soit

$$x' = f(x, \mu), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière et que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non-hyperbolique (c.à.d $f(0, 0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$).

Pour que la bifurcation du **nœud de col** se produise à $(x, \mu) = (0, 0)$, nous devons avoir ;

1. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$,
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$.

Exemple 2.3.1 (Bifurcation noeud-col des champs de vecteurs.)

La forme normale est donnée par :

$$\frac{dx}{dt} = \mu + x^2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

1. Pour $\mu < 0$ l'équation $\mu + x^2 = 0$ admet deux points d'équilibre : $x_e^1 = -\sqrt{-\mu}$ et $x_e^2 = \sqrt{-\mu}$.
2. Pour $\mu = 0$, $x^2 = 0$ admet un seul point d'équilibre non hyperbolique $x_e = 0$.
3. $\mu > 0$, l'équation $x' = \mu + x^2$ n'admet pas de points d'équilibre $x > 0$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, toutes les trajectoires tendent vers l'infini

Portrait de phase

Si on fait tendre μ vers 0, on constate que les deux points d'équilibre $x_e^1 = -\sqrt{-\mu}$ (stable) et $x_e^2 = \sqrt{-\mu}$ (instable) se rapprochent et pour $\mu = 0$, ils fusionnent en un point d'équilibre $x_e = 0$ qui est non hyperbolique.

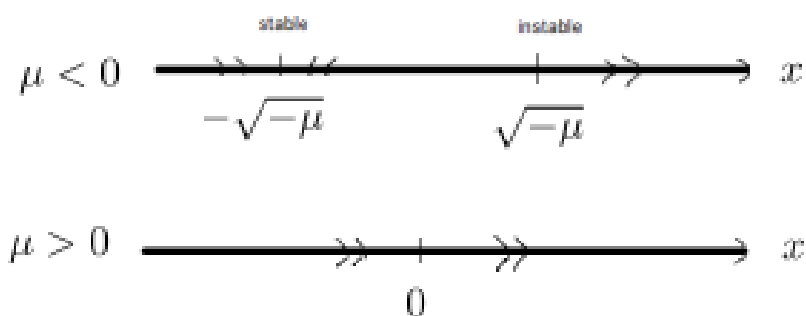


Diagramme de bifurcation

La bifurcation noeud-col consiste en la collision d'un noeud et d'un col qui s'annihilent l'un l'autre.

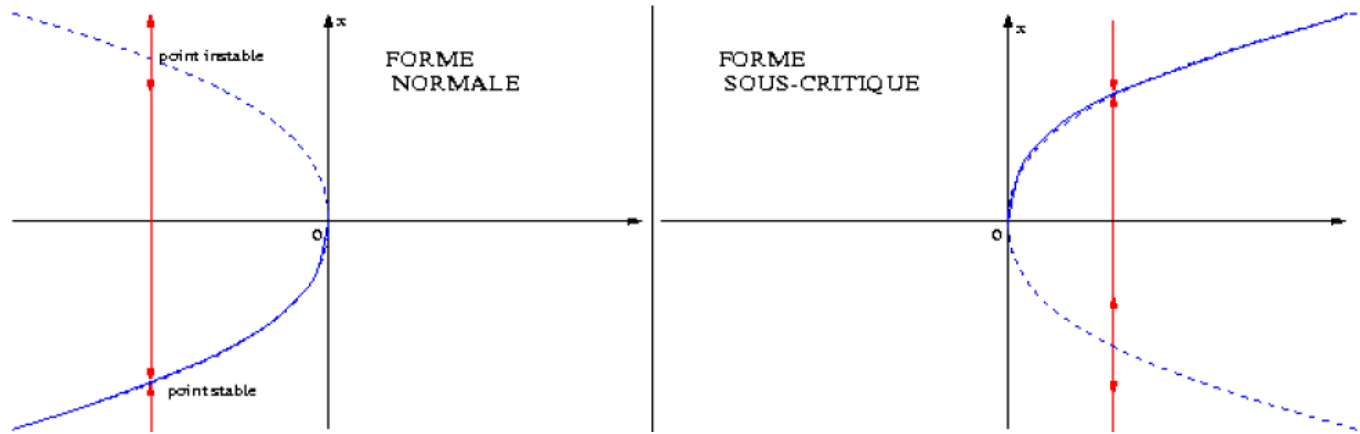


Fig 2.2 : Diagramme de bifurcation de Noeud-col.

Exemple 2.3.2 on considère le système suivant avec le paramètre $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, \mu) = y \\ y' = f_2(x, y, \mu) = x^2 - y - \mu \end{cases}$$

les points critiques de ce système et qui dépendent de la valeur de μ vérifient :

$$\begin{cases} f_1(x, y, \mu) = y = 0 \\ f_2(x, y, \mu) = x^2 - y - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \mu \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc les points critiques sont

$$x_{01} = (+\sqrt{\mu}, 0), x_{02} = (-\sqrt{\mu}, 0)$$

On a

$$Df_{(x,y,\mu)} = A = J(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -1, \det(A) = -2x$$

Pour le premier point critique $x_{01} = (+\sqrt{\mu}, 0)$, nous avons

$$D_{(+\sqrt{\mu}, 0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{\mu} & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient :

$$\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2\sqrt{\mu} & -1 - \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2\sqrt{\mu} = 0$$

$$\Delta = 1 + 8\sqrt{\mu}$$

Pour $\mu > 0 \Rightarrow \Delta > 0$. Dans ce cas l'équation caractéristique possède deux solutions (valeurs propres) réelles

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{\mu}}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{\mu}}}{2} \end{cases}$$

Or

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = -2\sqrt{\mu} \end{cases}$$

on conclut qu'elles sont de signe différent, d'où $x_{01} = (+\sqrt{\mu}, 0)$ est du type col qui est instable. Pour le deuxième point critique $x_{02} = (-\sqrt{\mu}, 0)$, nous avons

$$D_{(-\sqrt{\mu}, 0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{\mu} & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient :

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\sqrt{\mu} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2\sqrt{\mu} = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 - 8\sqrt{\mu}$$

on discute trois cas selon le signe du discriminant Δ .

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 8\sqrt{\mu} > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{64}$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \end{cases}$$

Or

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = 2\sqrt{\mu} \end{cases}$$

donc ces deux valeurs propres sont de même signe négatif, d'où le point x_{02} est un point noeud stable pour $0 < \mu < \frac{1}{64}$.

2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 8\sqrt{\mu} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{64}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$, donc x_{02} est un "noeud stable".

3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 8\sqrt{\mu} < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{64}$,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{1 - 8\sqrt{\mu}}}{2} \end{cases}$$

avec

$$\operatorname{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2} < 0$$

donc x_{02} est un "foyer stable" pour $\mu > \frac{1}{64}$.

Le diagramme de cette bifurcation est donné par l'équation

$$f(x, y, \mu) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x, y, \mu) = y = 0 \\ f_2(x, y, \mu) = x^2 - y - \mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mu - x^2 = 0$$

2.3.3 Bifurcation transcritique

Nous allons considérer l'équation différentielle suivante :

$$x' = f(x, \mu), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière avec $f(0, 0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

(c.à.d que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non-hyperbolique) et de plus on suppose

qu'on a $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$.

Encore une fois, nous avons un équilibre non hyperbolique à l'origine, c'est-à-dire

$$f(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Aussi, nécessairement

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$$

sinon, le théorème de la fonction implicite dirait qu'il existe une courbe unique d'équilibres passant par l'origine.

Fixons $x = 0$ comme une courbe d'équilibre passant par l'origine. Ensuite, on peut écrire

$$x' = f(x, \mu) = xF(x, \mu)$$

où

$$F(x, \mu) = \begin{cases} \frac{f(x, \mu)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ \frac{\partial f(0, \mu)}{\partial x} & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Le cas où $x = 0$ vient de la définition de la dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, \mu) - f(0, \mu)}{x - 0}$$

Nous vérifions, que

$$F(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)$$

Comme $x = 0$ donne une courbe d'équilibre, F doit définir l'autre courbe. Comme il doit être unique, nous exigeons

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0.$$

Alors, par le théorème de la fonction implicite il existe un unique $\mu(x)$, s.t. $F(x, \mu(x)) = 0$ pour petit x . Nous ne voulons pas que ce soit la courbe $x = 0$, et nous voulons qu'elle existe des deux côtés de l'axe des x :

$$0 < \left| \frac{d\mu}{dx}(0) \right| < \infty. \quad (2.5)$$

En différenciant implicitement $0 = F(x, \mu(x))$, on obtient

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0)}$$

ou en utilisant f nous avons

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0)}.$$

Pour que (2.5) soit satisfait il faut $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$, ce qui est vrai, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$.

Théorème 2.3.3 *Soit*

$$x' = f(x, \mu), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière avec $f(0,0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (c.à.d que $(0,0)$ est un point d'équilibre non-hyperbolique)

Pour que la bifurcation transcritique se produise à $(x, \mu) = (0,0)$ nous avons

1. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0$,
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0$,
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$.

2.3.4 Bifurcation transcritique : Equivalence topologique

Théorème 2.3.4 soit l'équation

$$x' = f(x, \mu) = xg(x, \mu)$$

supposons que ce système possède un point d'équilibre non hyperbolique au point $x = 0$, $\mu = 0$, vérifiant $g(0, 0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \neq 0$, $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$. Alors au voisinage de $(0, 0)$, l'équation est localement topologiquement équivalente à la forme normale suivante :

$$\eta' = \pm\mu\eta \pm \eta^2$$

qui donne lieu à la bifurcation transcritique

Exemple 2.3.3 La forme normale d'une bifurcation transcritique est donnée par :

$$x' = \mu x + x^2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

1. $\mu < 0$, l'équation précédente admet deux points d'équilibre : $x_e^1 = 0$ et $x_e^2 = -\mu > 0$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \mu < 0$ donc $x_e^1 = 0$ est asymptotiquement stable.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -\mu) = -\mu > 0$, $x_e^2 = -\mu$ est instable

2. $\mu = 0$, l'équation

$$x' = x^2$$

admet un point d'équilibre non hyperbolique $x_e = 0$

3. $\mu > 0$, l'équation

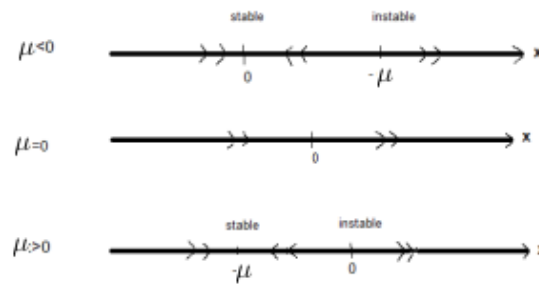
$$x' = \mu x + x^2$$

admet deux points d'équilibre $x_e^1 = 0$ et $x_e^2 = -\mu < 0$ et dans ce cas, x_e^1 est instable et x_e^2 est asymptotiquement stable.

Portrait de phase

Le nombre de points d'équilibre est conservé mais leur nature change à la valeur de bifurcation $\mu = 0$.

A cette valeur, un point fixe stable et un point fixe instable se croisent en échangeant leur stabilité.



Bifurcation transcritique : Diagramme de bifurcation

L'origine, qui est stable pour $\mu < 0$, devient instable pour $\mu > 0$, alors que le point d'équilibre x_c^2 passe d'instable à stable.

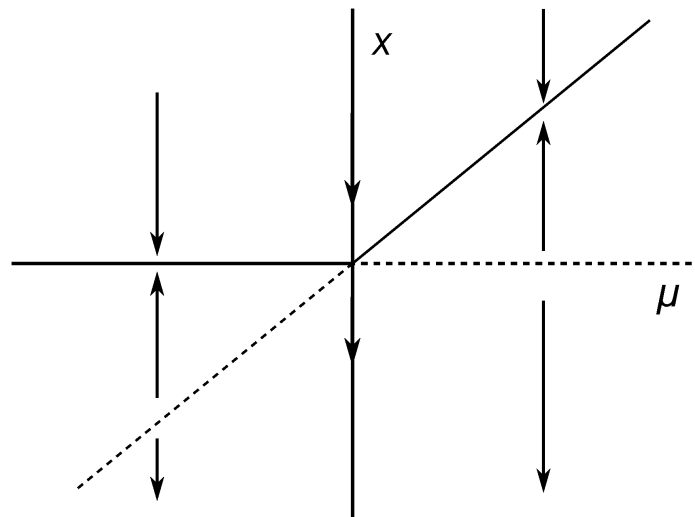


Fig 2.3 : Diagramme de bifurcation 3 transcritique.

Remarque 2.3.1 Les conditions sur f sont données par

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0,$$

Exemple 2.3.4 Considérons le système suivant avec le paramètre $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, \mu) = y \\ y' = f_2(x, y, \mu) = \mu x - x^2 - y \end{cases}$$

les points critiques sont $x_{01} = (0, 0)$, $x_{02} = (\mu, 0)$ On a

$$Df_{(x,y,\mu)} = A = J(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 2x & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -1, \text{det}(A) = -\mu + 2x.$$

Pour le premier point critique $x_{01} = (0, 0)$

$$D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient

$$\text{det}|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu - 1 - \lambda & \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \mu = 0$$

$$\Delta = 1 + 4\mu$$

donc il y a trois cas d'après le signe de discriminant

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu > 0 \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{4}$, on obtient deux valeurs propres réelles

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu \end{cases}$$

aussi il y a deux cas

(a) Si $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < 0$, donc $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, d'où $x_{01} = (0, 0)$ est un **"noeud stable"**

(b) Si $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > 0$, λ_1 et λ_2 sont de signe différent, d'où $x_{01} = (0, 0)$ est un point **"col point"** qui est toujours instable.

2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$, donc $x_{01} = (0, 0)$ est un **"noeud stable"**

3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu < 0 \Leftrightarrow \mu < -\frac{1}{4}$ donc

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{1 + 4\mu}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{1 + 4\mu}}{2}$$

avec $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$, donc $x_{01} = (0, 0)$ est un "**foyer stable**".

Pour le deuxième point critique $x_{02} = (\mu, 0)$:

$$D_{(\mu, 0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu - 1 - \lambda & \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \mu = 0 \\ &\Delta = 1 - 4\mu \end{aligned}$$

donc il y a trois cas selon le signe de discriminant

(a) $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{4}$, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = \mu \end{cases}$$

aussi il y a deux cas

i. Si $\lambda_1 \times \lambda_2 = \mu > 0 \Rightarrow 0 < \mu < \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, on a un "**noeud stable**"

ii. Si $\lambda_1 \times \lambda_2 = \mu < 0 \Rightarrow \mu < 0 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont de signe différent, on a donc un "**point col**" instable.

(b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$, donc on a un "**noeud stable**"

$$(c) \Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{4},$$

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{1 - 4\mu}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{1 - 4\mu}}{2}$$

avec $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$, on a un "**foyer stable**".

Le diagramme de cette bifurcation est donnée par l'équation

$$\begin{aligned} f(x, y, \mu) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ \mu x - x^2 - y &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x(x - \mu) = 0 \end{aligned}$$

2.3.5 Bifurcation fourche

Nous allons considérer l'équation différentielle suivante :

$$x' = f(x, \mu), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière avec $f(0, 0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ (c.à.d que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non-hyperbolique) et de plus on suppose qu'on a $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$.

Par un développement limité au voisinage de l'origine on trouve :

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \mu \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) + x\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) + \dots \\ &= x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) + x\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0). \end{aligned}$$

Posons

$$A = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$$

notre équation devient :

$$x' = Ax^3 + Bx\mu$$

Encore une fois, nous avons un équilibre non hyperbolique à l'origine, c'est-à-dire

$$f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Aussi, nécessairement

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$$

sinon, le théorème de la fonction implicite dirait qu'il existe une courbe unique d'équilibres passant par l'origine.

Fixons $x = 0$ comme une courbe d'équilibre passant par l'origine. Ensuite, on peut écrire

$$x' = f(x, \mu) = xF(x, \mu)$$

où

$$F(x, \mu) = \begin{cases} \frac{f(x, \mu)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Le cas où $x = 0$ vient de la définition de la dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, \mu) - f(0, \mu)}{x - 0}$$

Nous vérifions, que

$$F(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$$

donc nous pouvons à présent appliquer le théorème des fonctions implicites à F : Montrons

que $\frac{d\mu}{dx}(0) = 0$ et $\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial F}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x)$$

remplaçons x par 0 on obtient :

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0)} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0)} = 0$$

c.à.d la courbe des points fixes est tangente à la courbe $\mu = 0$ en $x = 0$

calculons $\frac{d^2\mu}{dx^2}(0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \mu(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \mu(x)) = 0$$

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \mu(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) \right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \mu(x)) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) + \frac{\partial F}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d^2\mu}{dx^2}(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x)$$

En différenciant implicitement $0 = F(x, \mu(x))$, on obtient

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0)} \neq 0$$

Théorème 2.3.5 Soit

$$x' = f(x, \mu), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière avec $f(0,0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
(c.à.d que $(0,0)$ est un point d'équilibre non-hyperbolique)

Pour que la bifurcation de la fourche se produise à $(x, \mu) = (0,0)$, nous devons avoir ;

1. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$,
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0$
3. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$

2.3.6 Bifurcation fourche : Equivalence topologique

Théorème 2.3.6 soit l'équation

$$x' = f(x, \mu)$$

supposons que ce système possède un point d'équilibre non hyperbolique au point $x = 0$, $\mu = 0$, vérifiant

1. $f(0, 0) = 0$,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$,
3. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$,
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$,
5. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$,
6. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$.

Alors au voisinage de $(0, 0)$, l'équation est localement topologiquement équivalente à la forme normale suivante :

$$\eta' = \eta(\pm\mu \pm \eta^2)$$

qui donne lieu à la bifurcation fourche

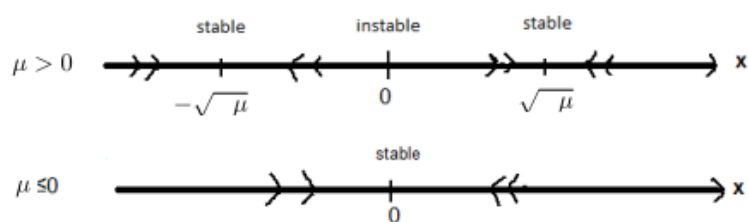
Exemple 2.3.5 La forme normale d'une bifurcation fourche est donnée par :

$$x' = -x^3 = x(\mu - x^2), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

1. $\mu < 0$, l'équation précédente admet un seul point d'équilibre : $x_e = 0$ asymptotiquement stable.
2. $\mu = 0$, l'équation devient $x' = x^2$ admet un point d'équilibre non hyperbolique $x_e = 0$ cependant si $x > 0$, alors $x' < 0$ et si $x < 0$, alors $x' > 0$, par conséquent l'origine est asymptotiquement stable.
3. $\mu > 0$, l'équation $x' = \mu x - x^3$ admet trois points d'équilibre $x_e^1 = 0$, $x_e^2 = -\sqrt{\mu}$ et $x_e^3 = \sqrt{\mu}$. Le point $x_e^1 = 0$ est instable et $x_e^2 = -\sqrt{\mu}$, $x_e^3 = \sqrt{\mu}$ sont deux points d'équilibre asymptotiquement stables.

$$x' = x(x - \sqrt{\mu})(x + \sqrt{\mu})$$

Portrait de phase



Bifurcation fourche : Diagramme de bifurcation

Ce diagramme montre que pour la valeur de bifurcation $\mu = 0$, le nombre de points d'équilibre passe de un à trois. Le point d'équilibre situé à l'origine, qui est stable pour $\mu < 0$, devient instable pour $\mu > 0$ en s'entourant de deux points d'équilibre stables $\pm\sqrt{\mu}$

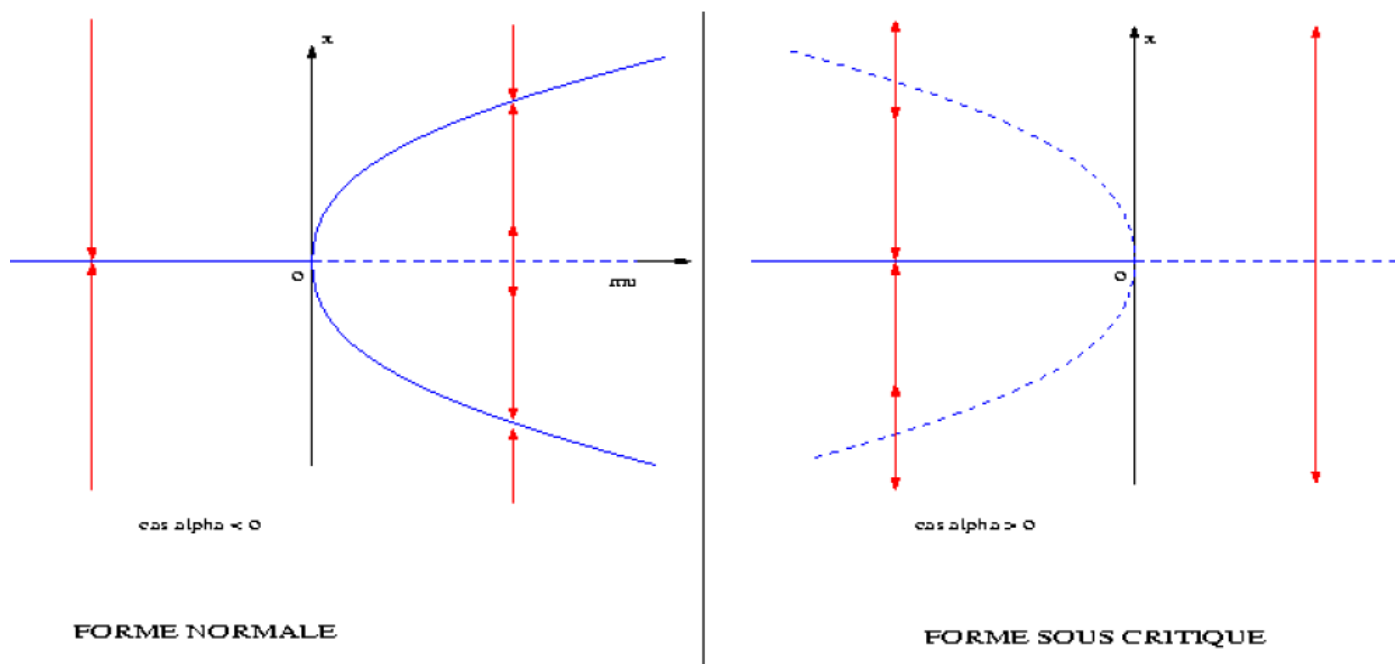


Fig 2.4 : Diagramme de bifurcation fourche.

Exemple 2.3.6 Considérons le système suivant avec le paramètre $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, \mu) = y \\ y' = f_2(x, y, \mu) = \mu x - x^3 - y \end{cases}$$

les points critiques vérifient

$$\begin{cases} x' = y = 0 \\ y' = \mu x - x^3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc les points critiques sont

$$x_{01} = (0, 0), \quad x_{02} = (\sqrt{\mu}, 0), \quad x_{03} = (-\sqrt{\mu}, 0)$$

On a

$$Df_{(x,y,\mu)} = A = J(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -1, \text{det}(A) = -\mu + 3x^2.$$

Pour le premier point critique $x_{01} = (0, 0)$

$$D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient

$$\text{det}|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu - 1 - \lambda & \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \mu = 0$$

$$\Delta = 1 + 4\mu$$

donc il y a trois cas selon le signe de discriminant

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu > 0 \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{4}$, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu \end{cases}$$

aussi il y a deux cas

(a) Si $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < 0$, donc $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, d'où $x_{01} = (0, 0)$ est un **"noeud stable"**

(b) Si $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > 0$, λ_1 et λ_2 sont de signe différent, d'où $x_{01} = (0, 0)$ est un point col qui est toujours instable.

2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$, donc $x_{01} = (0, 0)$ est un **"noeud stable"**

3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4\mu < 0 \Leftrightarrow \mu < -\frac{1}{4}$,

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{1 + 4\mu}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{1 + 4\mu}}{2}$$

avec $Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0$, $x_{01} = (0, 0)$ est donc un **"foyer stable"**.

Pour le deuxième point critique $x_{02} = (\mu, 0)$:

$$D_{(\sqrt{\mu}, 0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\mu - 1 - \lambda & \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2\mu = 0 \\ &\Delta = 1 - 8\mu \end{aligned}$$

donc il y a trois cas selon le signe du discriminant

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 8\mu > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{8}$, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\mu}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 8\mu}}{2} \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = 2\mu \end{cases}$$

il y a un seul cas

- Si $\lambda_1 \times \lambda_2 = 2\mu > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, $x_{02} = (\sqrt{\mu}, 0)$ est un **"noeud stable"**

2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 8\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{8}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$, donc $x_{01} = (0, 0)$ est un "**noeud stable**"

3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 8\mu < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{8}$,

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{1 - 8\mu}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{1 - 8\mu}}{2}$$

avec $Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0$, $x_{02} = (\sqrt{\mu}, 0)$ est donc un "**foyer stable**".

Pour le troisième point critique $x_{03} = (-\sqrt{\mu}, 0)$:

$$D_{(-\sqrt{\mu}, 0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\mu - 1 - \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2\mu = 0 \\ &\Delta = 1 - 8\mu \end{aligned}$$

Cette étude est similaire à celle du point critique x_{02} , donc le point x_{03} est symétrique à x_{02} .

Le diagramme de cette bifurcation est donnée par l'équation

$$x(\mu - x^2) = 0$$

2.3.7 Bifurcation hystérésis

Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad x' = \mu + x - x^3$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$x' = \mu + f(x, 0)$$

avec $f(x, 0) = x - x^3$.

Les points d'équilibre se trouvent à l'intersection de la courbe $f(x, 0) = x - x^3$ et la droite $x = -\mu$

1. si $\mu > \frac{2}{3}\sqrt{3}$, (1) admet un point d'équilibre unique AS.
2. si $-\frac{2}{3}\sqrt{3} < \mu < \frac{2}{3}\sqrt{3}$, (1) admet 3 points d'équilibre un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre AS.
3. si $\mu < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, (1) admet à nouveau un point d'équilibre unique AS.

Cycle d'hystérésis

Pour les valeurs du paramètre $\mu = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$, le nombre de points d'équilibre passe de un à trois et à nouveau repasse à un seul point.

2.3.8 Bifurcation de Hopf

Le bifurcation de Hopf est l'apparition ou la disparition d'une solution périodique, d'un point d'équilibre quand le paramètre passe par une valeur critique μ^* . Ceci se produit quand la paire des valeurs propres conjuguées du système linéarisé au point d'équilibre deviennent imaginaires pures. Ceci implique que la bifurcation de Hopf est pour les systèmes de dimension $n \geq 2$.

Pour un tour d'horizon plus général sur les bifurcations de Hopf et leurs applications notamment en physique et en électronique

2.4 Théorème de Hartmann-Großman

Le théorème prouvé indépendamment par Hartmann en 1960 et de Großman en 1959, précise que la structure d'une trajectoire d'un système près d'un point d'équilibre a qualitativement la même structure qu'une trajectoire donnée par le système linéarisé.

On suppose que la jacobienne J du système (2.1) admet des valeurs propres avec partie réelle non nulle.

2.4.1 Théorème Poincaré-Bendixson [Str94]

Ensembles ω -limite et α -limite

Soit le système (2.1) avec $f \in C^r(U \subset \mathbb{R}^2)$, $r > 1$. On notera $\phi_t(\cdot)$ le flot correspondant.

Définition 2.4.1 1. $q \in \mathbb{R}^2$ est appelé un point ω -limite de $p \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe $(t_n)_n$, $t_n \rightarrow +\infty$ tel que $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$.

2. $q \in \mathbb{R}^2$ est appelé un point α -limite de $p \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe $(t_n)_n$, $t_n \rightarrow -\infty$ tel que $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$.

Notation

$\omega(p)$ = ensemble des points ω -limite de p .

$\alpha(p)$ = ensemble des points α -limite de p .

Théorème Poincaré-Bendixson

Théorème 2.4.1 Un ensemble ω -limite non vide compact du système (2.1), qui ne contient pas de point d'équilibre est une orbite périodique. C'est-à-dire, si on suit une courbe intégrale d'un champ de vecteurs dans une surface compacte, il ne peut se passer que deux choses :

1. on s'approche d'un point d'équilibre du champ de vecteurs.
2. on s'approche d'un cycle limite.

2.5 Recherche d'une orbite périodique

2.5.1 Critère de Bendixson

Soit le système (2.1) avec $f \in C^1(U \subset \mathbb{R}^2)$. On notera $\phi_t(\cdot)$ le flot correspondant.

Théorème 2.5.1 [15] Supposons que le sous-ensemble U est un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 .

Si la divergence $\text{div} f$ est de **signe constant et non identiquement nulle**, alors le système **n'a aucune orbite périodique incluse dans U** .

On dit aussi **qu'il n'y a pas de cycle limite**.

Ce théorème nous permet d'isoler des valeurs du paramètre de bifurcation, pour lesquelles il n'y a pas d'orbites périodiques.

Remarque 2.5.1 [1] Si $\text{div} f = 0$, le flot conserve le volume de tout domaine.

Remarque 2.5.2 Un système dynamique à l'état stationnaire (attracteur : point limite) peut devenir oscillatoire (attracteur : cycle limite) par franchissement d'une valeur critique du paramètre de contrôle.

Définition 2.5.1 [15] *Un cycle limite est une courbe fermée dans l'espace des phases.*

Il reflète la périodicité du mouvement et son caractère oscillatoire.

Définition 2.5.2 [27] *Une orbite homocline du système (2.1) est une solution bornée, qui tend vers un point d'équilibre lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.*

2.6 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf

Théorème 2.6.1 de Poincaré-Andronov-Hopf [4] Soit le système dynamique suivant :

$$(2.2) \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Supposons que le système admet un point d'équilibre de coordonnées $(x_e(\mu), y_e(\mu))$. Soit $J(x_e(\mu), y_e(\mu))$ la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme

$$\lambda_{1,2} = a(\mu) \pm ib(\mu)$$

avec $a(\mu) = \Re(\lambda_{1,2})$ la partie réelle et $b(\mu) = \Im(\lambda_{1,2})$ la partie imaginaire. Soit μ^* une valeur particulière du paramètre μ pour laquelle on a

$$\begin{cases} a(\mu^*) = 0, b(\mu^*) \neq 0 \\ \frac{\partial a(\mu^*)}{\partial \mu} \neq 0 \end{cases}$$

Alors, si $\frac{\partial a(\mu^*)}{\partial \mu} > 0$, trois cas sont possibles :

1. Lorsque $\mu = \mu^*$, il existe des trajectoires concentriques autour de $(x_e(\mu^*), y_e(\mu^*))$. Le point d'équilibre $(x_e(\mu^*), y_e(\mu^*))$ correspond alors à des **centres**.

On parle de **bifurcation de Hopf dégénérée**

2. Lorsque $\mu = \mu^*$, le point d'équilibre $(x_e(\mu^*), y_e(\mu^*))$ est asymptotiquement stable, et $\exists \tilde{\mu} > \mu^* / \forall \mu$ vérifiant $\mu^* < \mu < \tilde{\mu}$ il existe, autour de $(x_e(\mu^*), y_e(\mu^*))$ qui est instable, un **cycle limite asymptotiquement stable** dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{\mu - \mu^*}$.

On parle de **bifurcation de Hopf super-critique**

3. Lorsque $\mu = \mu^*$, le point d'équilibre $(x_e(\mu^*), y_e(\mu^*))$ est instable, et $\exists \tilde{\mu} > \mu^* / \forall \mu$ vérifiant $\tilde{\mu} < \mu < \mu^*$ il existe, autour de $(x_e(\mu^*), y_e(\mu^*))$ qui est **asymptotiquement stable**, un **cycle limite instable** dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{\mu - \mu^*}$.

On parle de **bifurcation de Hopf sous-critique**

de plus, soit μ_1 l'indice de MARS DEN-MCCRACKEN tel que :

$$c_1 = \frac{1}{16\Im(\lambda_{1,2})(r_\mu)} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \right)$$

où chacune des fonctions \hat{F} et \hat{G} représente la partie non linéaire du système, les fonctions F et G représentent chacune la transformée par la matrice de passage (ou de changement de base) des fonctions \hat{F} et \hat{G} respectivement.

Il existe plusieurs approches et plusieurs références pour la démonstration du théorème P-A-H, nous renvoyons le lecteur par exemple à [8] Le calcul de c_1 permet de distinguer différents cas.

		$c_1 < 0$	$c_1 > 0$
$\frac{\partial \Re(\lambda_{1,2})}{\partial \mu}$	< 0	$\mu < \mu_c$ eq.inst.et orb.per.st. $\mu > \mu_c$ eq.st.et pas orb.per.	$\mu < \mu_c$ eq.inst.et pas orb.per.st. $\mu > \mu_c$ eq.st.et pas orb.per.
$\frac{\partial \Re(\lambda_{1,2})}{\partial \mu}$	> 0	$\mu < \mu_c$ eq.st.et pas orb.per. $\mu > \mu_c$ eq.inst.et orb.per.st.	$\mu < \mu_c$ eq.st.et pas orb.per. $\mu > \mu_c$ eq.inst.et pas orb.per.

eq : équilibre, orb : orbite, per : périodique, st : stable, inst : instable,

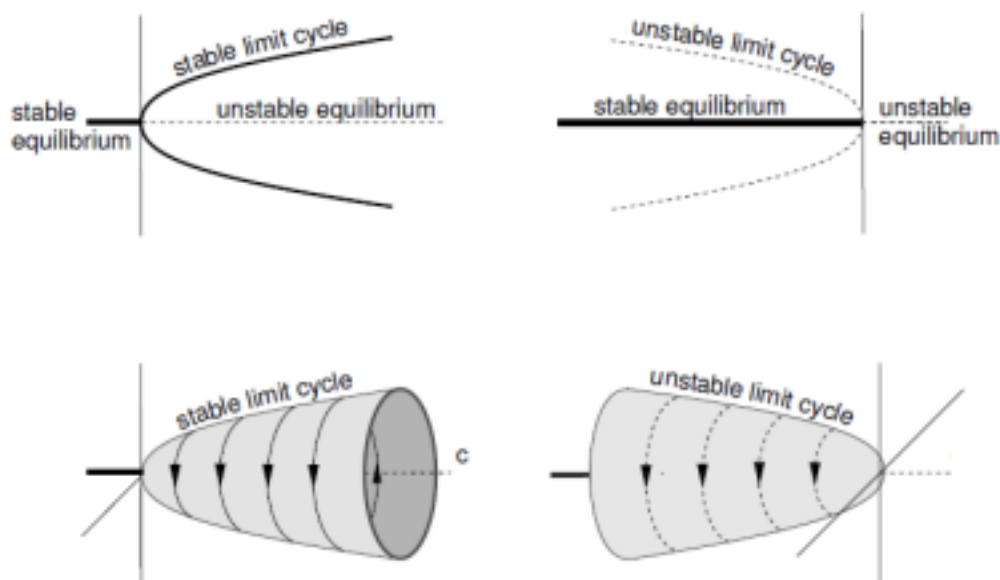


Fig 2.5 : A gauche, la bifurcation super-critique. A droite, la bifurcation sous-critique

Exemple 2.6.1 (Bifurcation de Hopf dégénérée) Considérons l'équation de Van Der Pol

$$x'' + \mu(x^2 - 1) = x' + x = 0.$$

On peut d'écrire l'équation de Van Der Pol comme le système suivant :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \mu(1 - x^2)y. \end{cases}$$

Le système linéarisé en $(0,0)$ est

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \mu y. \end{cases}$$

La matrice du système calculée à l'origine est :

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = -\lambda(\mu - \lambda) + 1 \\ &= -\lambda\mu + \lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

donc si

$$\mu \in]-2, 2[$$

Alors

$$\Delta = \mu^2 - 4 < 0.$$

les valeurs propres de la matrice J sont donc complexes conjuguées et égales à

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2}.$$

1. $\text{sign}(\omega) = \text{sign}\left(\frac{\partial g}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}(0,0)\right) = -1, \omega = -1.$

2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2} = d > 0.$

3. $c_1 = 0$. Puisque $c_1 = 0$ donc la condition $c_1 \neq 0$ n'est pas vérifiée, on dit dans ce cas que la bifurcation est dégénérée.

Exemple 2.6.2 (bifurcation de Hopf sur-critique) Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

On remarque que l'origine $(0,0)$ est un point d'équilibre du système.

La matrice jacobienne du système calculée à l'origine est :

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

On a

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)^2 + 1.$$

Les valeurs propres de la matrice J sont donc complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$

1. $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x}\bigg|_{\mu=0}(0,0)\right) = 1, \omega = 1.$
2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}\bigg|_{\mu=0} = 1 = d > 0.$
3. $c_1 = \frac{1}{16}[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16}[(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$
 $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{\mu=0}(0,0) = -6,$
 $f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\bigg|_{\mu=0}(0,0) = -2$
 $g_{xxy} = \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}\bigg|_{\mu=0}(0,0) = -2$
 $g_{yyy} = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\bigg|_{\mu=0}(0,0) = -6.$

On remplace dans a on obtenons : $a = \frac{1}{16}[-6 - 2 - 2 - 6] = -1.$

1. Puis que $c_1 d = -1.1 = -1 < 0 \implies$ il y a une solution périodique pour $\mu > 0.$
2. Puis que $d = 1 > 0,$ le point d'équilibre $(0,0)$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0.$
3. Puis que $c_1 = -1 < 0$ alors la bifurcation est super critique ce qui signifie que l'orbite périodique est stable.
4. L'amplitude $\sqrt{\mu}$
5. La périodicité $T = 2\pi.$

Exemple 2.6.3 (bifurcation de Hopf sous-critique.) On considère cette fois le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y + x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

On remarque que l'origine $(0,0)$ est un point d'équilibre du système.

La matrice jacobienne du système calculée à l'origine est :

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

On a

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)^2 + 1.$$

Les valeurs propres de la matrice J sont donc complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$

$$1. \operatorname{sgn}(\omega) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x}\Big|_{\mu=0}(0,0)\right) = 1, \omega = 1.$$

$$2. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=0} = 1 = d > 0.$$

$$3. c_1 = \frac{1}{16}[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16}[(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 6,$$

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 2$$

$$g_{xxy} = \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 2$$

$$g_{yyy} = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 6.$$

On remplace dans a on obtenons : $c_1 = \frac{1}{16}[6 + 2 + 2 + 6] = 1.$

1. Puis que $c_1 d = 1.1 = 1 > 0 \implies$ il y a une solution périodique pour $\mu < 0$.

2. Puis que $d = 1 > 0$, le point d'équilibre $(0,0)$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$.

3. Puis que $a = 1 > 0$ alors la bifurcation est sous-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est instable.

4. L'amplitude $\sqrt{\mu}$

5. La périodicité $T = 2\pi$.

Chapitre

3

Modèle de Hindmarsh-Rose-2D

Sommaire

3.1	Introduction	58
3.2	Physiologie des Neurones	59
3.2.1	Le neurone	59
3.2.2	Propriétés électriques du neurone	60
3.2.3	Le potentiel de repos	61
3.2.4	Le stimulus	61
3.2.5	Les canaux ioniques	61
3.2.6	Le potentiel d'action	62
3.3	Etude du modèle de HINDMARSH-ROSE -2D	63
3.3.1	Existence et stabilité des points d'équilibre	63
3.4	Localisation des racines	67
3.5	Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf	68
3.6	Stabilité , direction et la période de la bifurcation de Hopf	70

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un modèle bidimensionnel qui a été proposé en 1984 par J.L.Hindmarsh et R.M.Rose. Ce dernier découle d'une modification du système de Fitzhugh-Nagumo [8], lui-même venant d'une réduction à deux équations du système à quatre équations de Hodgkin-Huxley [[18] et [14]].

Le modèle d'activité neuronale Hindmarsh-Rose vise à étudier le comportement d'éclatement de pointe du potentiel de membrane observé dans des expériences réalisées avec un seul neurone.

Le modèle Hindmarsh-Rose (HR) est basé sur le comportement global du neurone et son fonctionnement sous-jacent est retiré du processus biologique réel. Bien qu'il soit plus simple avec moins d'équations et de coefficients directeurs, le modèle HR est précis pour les neurones observés en biologie et a été créé pour suivre avec précision la sortie d'éclatement observée chez les mollusques [12]. Des versions électroniques discrètes ont également été comparées à celles observées dans le système stomatogastrique des crustacés où un degré élevé de similitude a été observé [5]. Les versions électroniques ont même remplacé les neurones retirés d'un générateur de modèle central d'un homard vivant et ont restauré la fonctionnalité [30].

Le modèle Hindmarsh-Rose qui décrit la dynamique d'un neurone est donné par un système de deux équations différentielles ordinaires non linéaires, ce modèle définit par :

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + ax^2 + I \\ y' = 1 - dx^2 - y \end{cases} \quad (3.1)$$

où,

x : représente le potentiel de membrane cellulaire.

y : le flux d'ions à travers la membrane.

I : est le courant membranaire ou stimulus externe appliqué, habituellement est pris comme paramètre de contrôle.

La variable pertinente est le potentiel de membrane, $x(t)$, qui est écrit en unités sans dimension, $y(t)$ prennent en compte le transport des ions à travers la membrane à travers les canaux ioniques. Le transport des ions sodium Na^+ et potassium K^+ se fait par des canaux ioniques rapides et sa vitesse est mesurée par $y(t)$, qui est appelée la variable de pointe.

3.2 Physiologie des Neurones

3.2.1 Le neurone

Le neurone ou cellule nerveuse est l'unité fondamentale du système nerveux constitué d'un corps cellulaire, dont la taille varie de $4\mu\text{m}$ à $130\mu\text{m}$, prolongée d'un côté par des dendrites et de l'autre côté par un axone, lui-même prolongé par des terminaisons axonales; Illustré par la figure (3.1) ([21], [4]).

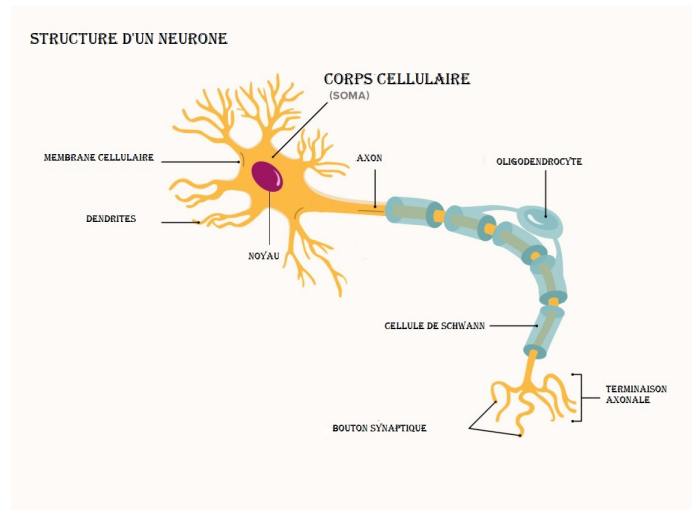


Fig 3.1 : Schéma d'un neurone [4].

Comme toutes les cellules, un neurone forme un compartiment microscopique dont le corps cellulaire contient un cytoplasme, un noyau et une membrane plasmique.

Le cytoplasme est la matrice cellulaire qui contient tous les organites, limité par la membrane cellulaire ([7], [4]).

Le noyau se trouve au centre de la cellule, enveloppé dans une membrane nucléaire, perforée de trous : les pores nucléaires. Ces derniers permettent les échanges avec le cytoplasme. Le noyau contient l'information génétique ([7], [4]).

La membrane cellulaire, ou membrane plasmique, délimite le contour des cellules et donc le contour du neurone. ([4], [7]).

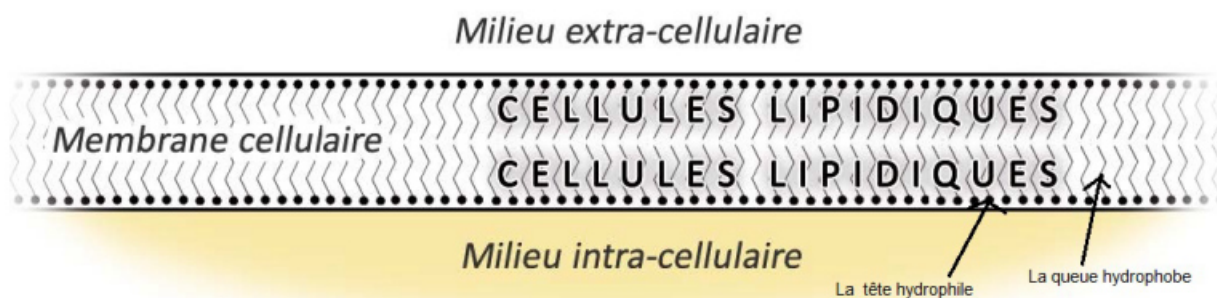


Fig 3.2 : Schéma d'une membrane de neurone, composée d'une bicouche lipidique [4]

Les dendrites constituent des prolongements du corps cellulaire possédant des jonctions où les informations sont reçues. Ils permettent l'augmentation de la surface membranaire.

L'axone est le prolongement du corps cellulaire, donnant naissance à des branches collatérales, se terminant par de petits renflements vers une autre cellule (nerveuse ou musculaire).

L'espace synaptique est l'espace situé entre les membranes de deux cellules nerveuses.

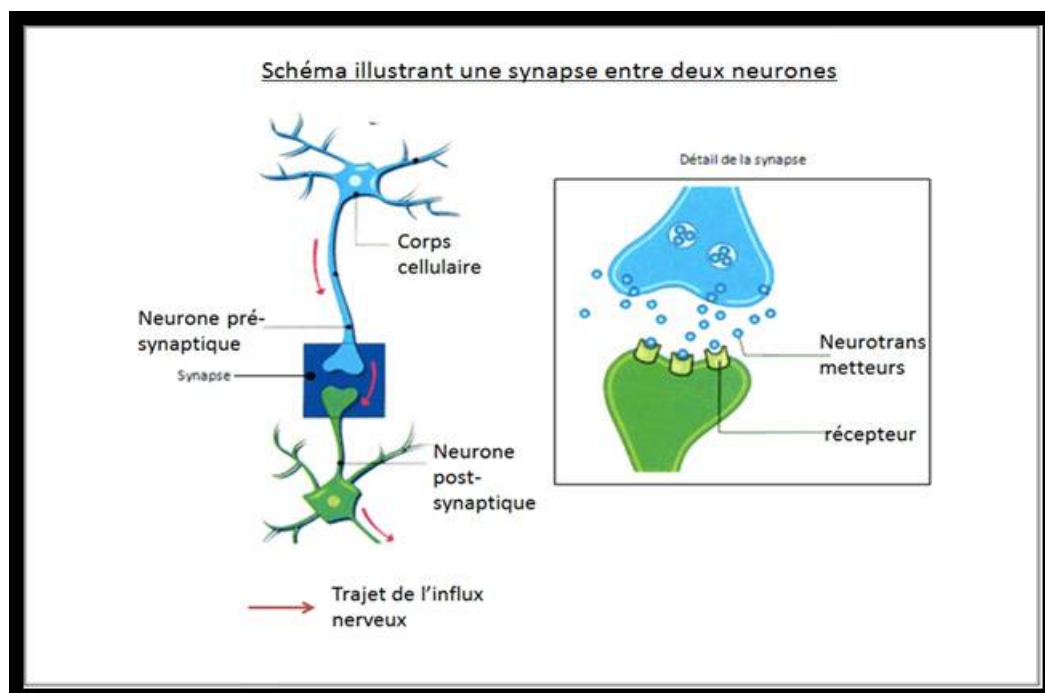
La synapse est constituée de l'ensemble des membranes et l'espace synaptique. C'est dans ce dernier que se fait le transfert de l'influx nerveux d'un neurone à l'autre ([24], [7], [2], [4]).

3.2.2 Propriétés électriques du neurone

De par sa fonction, le neurone est une cellule de "messagerie". Les messages donnés ou reçus sont transportés par l'intermédiaire d'un influx nerveux.

les scientifiques ont prouvé que la nature du message nerveux spontané est le fait qu'une contraction musculaire s'accompagne d'une activité électrique. Donc les nerfs et les muscles en activité donnent naissance à des signaux électriques. L'information nerveuse était de nature électrique ([11], [2]). Par conséquent, la compréhension de l'influx nerveux et de son mode de propagation nécessite de comprendre les phénomènes électriques et chimiques qui la provoquent. Les neurones (cellules excitables) produisent des impulsions nerveuses en réponse à une excitation appelée stimulus.

Cet influx prend un chemin qui peut être constitué d'un ou de plusieurs neurones ([4]).



3.2.3 Le potentiel de repos

Dans l'organisme, les ions sodium Na^+ et les ions potassium K^+ sont chargés positivement. L'ion chlore Cl^- est chargé négativement. Cette caractérisation de positivité et de négativité est appelée "polarité" ([23]).

La répartition des charges entre les deux milieux (intracellulaire et extracellulaire) de la membrane est différente et joue un rôle fondamental dans la fonction cellulaire.

Dans toute cellule, la concentration des ions diffère de part et d'autre de la membrane plasmique. Cette différence explique l'existence d'un potentiel membranaire ou potentiel de membrane. Les ions potassium K^+ sont les ions préférentiels du milieu intracellulaire, les ions sodium Na^+ sont ceux du milieu extracellulaire ([23]).

La différence de potentiel entre les deux milieux s'appelle le potentiel de repos, diffère d'une cellule à l'autre. L'intérieur de la cellule est négatif par rapport à l'extérieur, le potentiel de repos ou potentiel membranaire est égal à -70mV ([7],[4]).

Au repos, la membrane neuronale peut être considérée comme une pile électrique, génératrice de courant, avec un pôle négatif situé à l'intérieur de la cellule et un pôle positif à l'extérieur (comme indiqué sur figure 3.3).

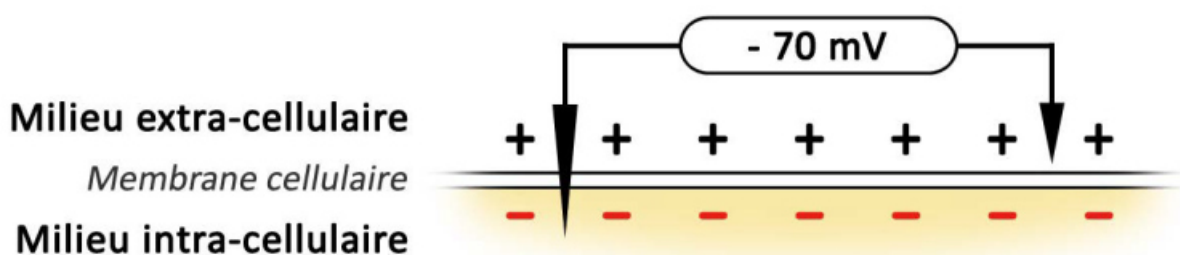


Fig 3.3 : Prise de mesure du potentiel de repos ([4]).

3.2.4 Le stimulus

L'activité d'un neurone est provoquée par un stimulus, ce sont les impulsions nerveuses en réponse à une excitation produite par le neurone de nature très variable. Il doit être suffisamment intense pour déclencher le passage de l'influx nerveux.

Un stimulus dépassant un certain seuil donne naissance à un influx nerveux.

Il correspond au changement instantané du potentiel de membrane à l'état de repos, qui constitue un signal électrique et provoque des impulsions nerveuses ([2]), ([7]).

3.2.5 Les canaux ioniques

Les mouvements des ions à travers la membrane ne se font qu'au niveau de protéines transmembranaires spécialisées, appelées les canaux ioniques.

La membrane assure continuellement, grâce à ces derniers, une régulation stricte du passage des ions et des molécules entre les deux milieux de la membrane grâce à la bicouche lipidique ([4]).

Certains canaux sélectionnent les ions, par exemple les canaux au sodium, au calcium, au potassium ou au chlore, alors que d'autres sont moins sélectifs.

Cette sélection permet l'ouverture des canaux correspondant à un ion spécifique.

Certains canaux ioniques restent toujours ouverts durant le potentiel de repos, et l'ouverture d'autres canaux est déterminée par le potentiel transmembranaire, d'où leur nom de canaux voltage dépendants.

Parmi les canaux ioniques toujours ouverts, les canaux à chlorure qui permettent un passage permanent des ions Cl^- . Les canaux sodiques et potassiques sont quant à eux voltage dépendants (voir figure 3.4) ([32]).

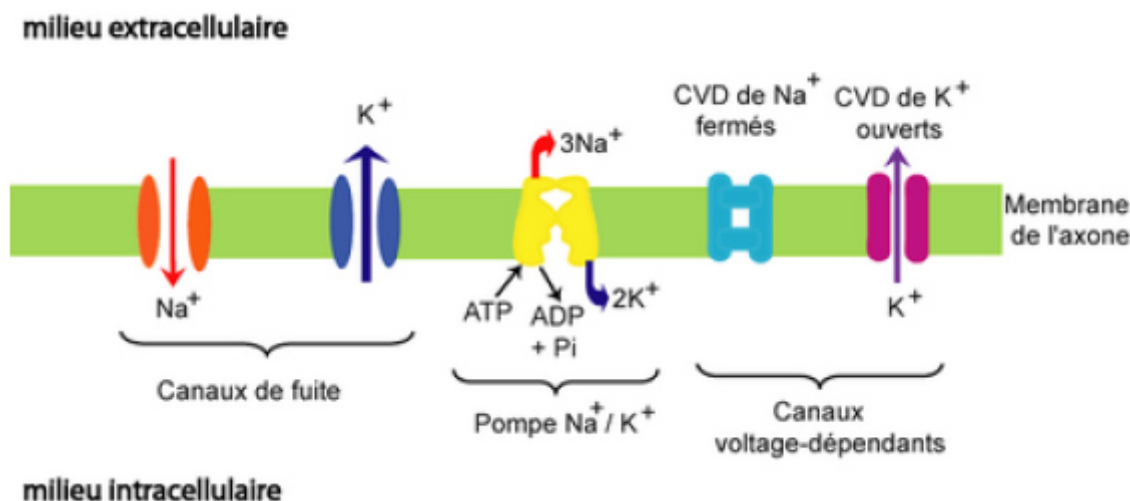


Fig 3.4 : Schéma des canaux ioniques au cœur de la membrane d'un neurone ([32]).

3.2.6 Le potentiel d'action

Le potentiel d'action est une vague d'inversion de polarité électrique de part en part de la membrane cellulaire passant d'environ $-70mV$ à environ $+30mV$.

Il est dû à une certaine intensité du stimulus ([24], [6]).

Le potentiel d'action est composé de trois phases ([24], [7]) :

- **La dépolarisation** : Ouverture rapide des canaux de sodium Na^+ voltage dépendants, ce qui permet une entrée massive de Na^+ .

- **Repolarisation** : Fermeture des canaux de sodium Na^+ voltage dépendants et en même temps ouverture des canaux de potassium K^+ voltage-dépendants qui permet la sortie du K^+ , le potentiel de la membrane peut revenir à $-70mV$.

- **Hyperpolarisation** : La conductance du K^+ reste élevée plusieurs millisecondes ce qui permet une fuite accrue d'ions K^+ . L'amplitude de la baisse du potentiel est supérieure

à l'état basal, -80mV , puis revient à -70mV , (comme résumé dans la figure 3.5).

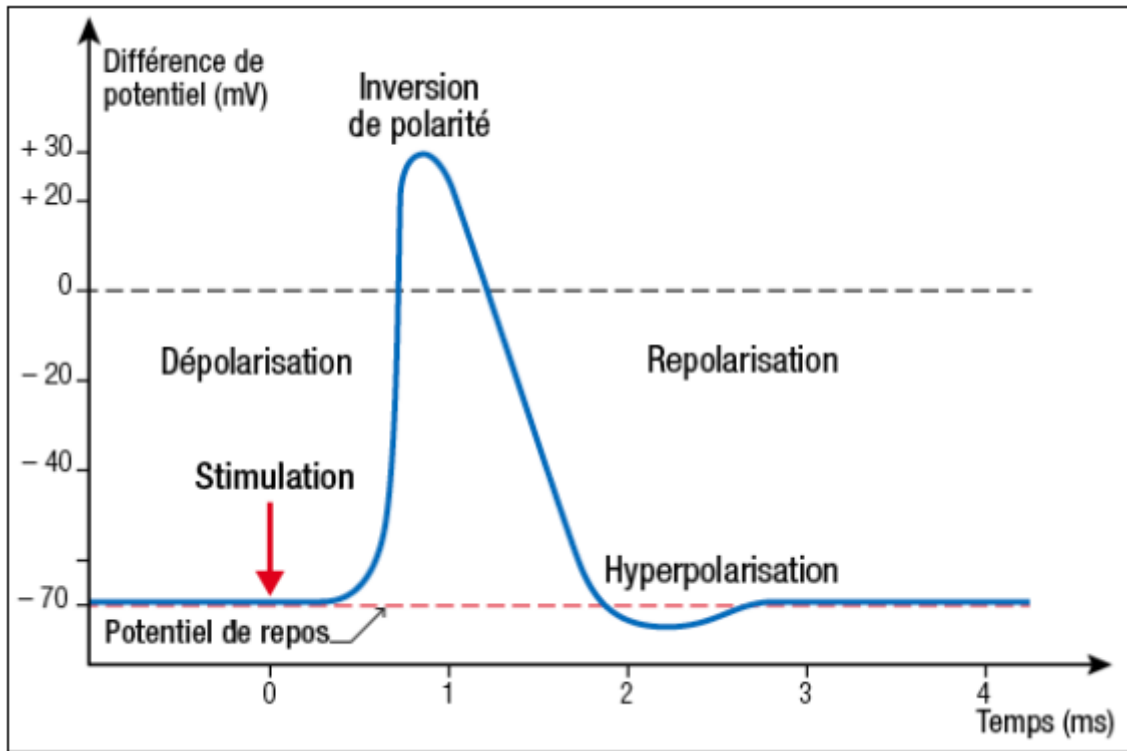


Fig 3.5 : Les différentes phases du potentiel d'action [33].

Le potentiel d'action possède trois propriétés essentielles [6],

- **Le seuil de déclenchement** : Le déclenchement du potentiel d'action nécessite, l'application d'une forte intensité de stimulation.

- **La loi du tout ou rien** : Le potentiel d'action ne se déclenche pas pour des intensités inférieures au seuil, mais au-dessus de la valeur seuil, il ne change pas d'amplitude. C'est "la loi du tout ou rien" .

- **La période réfractaire** :

- La période réfractaire absolue :

Si deux stimulus sont très rapprochés, le deuxième choc ne provoque pas de réponse de l'axone. Ceci est dû à l'état inactif des canaux sodiques.

- La période réfractaire relative :

Si deux stimulus sont espacés, chacun des deux stimulus déclenche un potentiel d'action. Ceci est dû à l'état fermé actif des canaux sodiques.

3.3 Etude du modèle de HINDMARSH-ROSE -2D

3.3.1 Existence et stabilité des points d'équilibre

Considérons le système de Hindmarsh-Rose à deux équations, donné sous la forme générale par ([2], [28], [13]),

$$\begin{cases} x' = y - ax^3 + bx^2 + I \\ y' = c - dx^2 - y \end{cases} \quad (3.2)$$

Existence des états d'équilibres

La recherche des points d'équilibre du système (3.2) se traduit par la résolution du système suivant,

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - ax^3 + bx^2 + I = 0 \\ c - dx^2 - y = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

En éliminant y , les coordonnées x des points d'équilibre sont données par les racines de

$$ax^3 + (d - b)x^2 - c - I = 0 \quad (3.4)$$

Si on pose, $\alpha = \frac{d - b}{a}$ et $\beta = -\frac{c + I}{a}$. L'équation (3.4) peut donc s'écrire

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta = 0.$$

En utilisant les changements de variables suivants,

$$x = \xi - \frac{d - b}{3a}, \quad p = -\frac{(d - b)^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2(d - b)^3}{27a^3} - \frac{c + I}{a}$$

pour obtient l'équation :

$$\xi^3 + p\xi + q = 0$$

Nous pouvons maintenant résoudre cette équation en utilisant la méthode de **Cardan** [47], ce qui nous donne :

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

Alors, on a

Théorème 3.3.1 Posons

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

Alors ;

1. Si $\Delta > 0$, alors le système (3.3) admet un unique point d'équilibre dans \mathbb{R}^2 .
2. Si $\Delta = 0$, le système (3.3) admet deux points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 .
3. Si $\Delta < 0$, le système (3.3) admet trois points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 .

(on peut le voir aussi dans la figure 3.3)

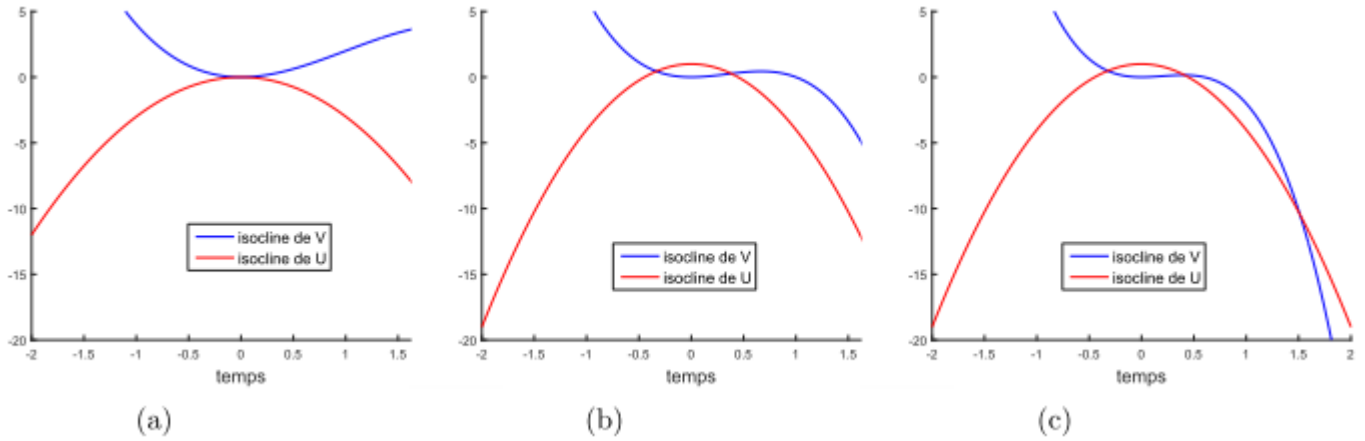


Figure 3.3 : Simulations numériques obtenues pour les deux isoclines du système (3.3) avec $I = 0$, $x' = 0$ en bleu et $y' = 0$ en rouge. La figure (a) représente un seul point d'équilibre du système (3.6) pour $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$ et $d = 3$, la figure (b) représente ses deux points d'équilibre pour $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 5$ et la figure (c) montre ses trois points d'équilibre pour $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 5$.

Stabilité des points d'équilibres

La stabilité de ces équilibres peut être étudiée avec la linéarisation du système (3.3), donc la matrice jacobienne J du système (3.3) à l'équilibre (x_e, y_e) est donné par

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3ax_e^2 + 2bx_e & 1 \\ -2dx_e & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de J est

$$\det((J(x_e)) - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}((J(x_e)))\lambda + \det((J(x_e)))$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = \text{tr}(J(x_e))^2 - 4 \det(J(x_e))$$

où $\text{tr}(J(x_e))$ représente la trace de J et $\det(J(x_e))$ est le déterminant de J , avec

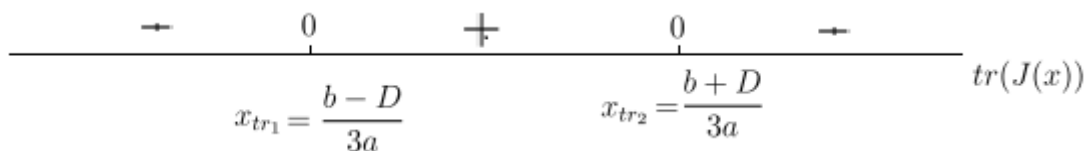
$$\text{tr}, \det : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

sont représentées par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(x_e)) &= (3ax_e^2 - 6x_e + 1) \\ \det(J(x_e)) &= 3ax_e^2 + 4x_e \end{aligned}$$

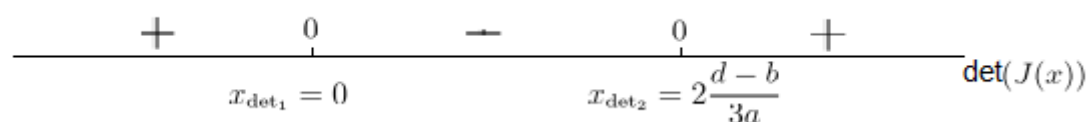
alors les polynômes $tr(J(x_e))$ et $\det(J(x_e))$ alors, si $b^2 > 3a$, admettent deux racines réelles données par :

$$x_{tr_1} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 3a}}{3a} = \frac{b - D}{3a} \quad \text{et} \quad x_{tr_2} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 3a}}{3a} = \frac{b + D}{3a}$$



Même chose pour le déterminant $\det(J)$ ses racines sont :

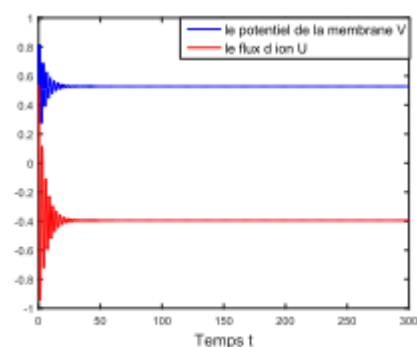
$$x_{det_1} = 0 \quad \text{et} \quad x_{det_2} = 2\frac{d-b}{3a}$$



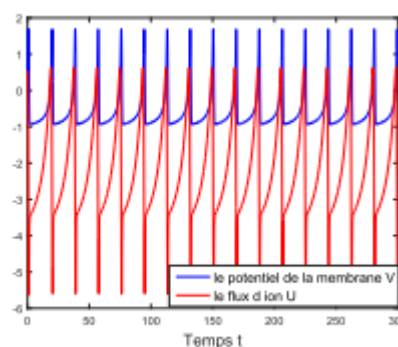
respectivement. Alors le tableau 1 donne le type de points d'équilibre selon la région à laquelle x_e appartient.

V^*	$-\infty$	$-2\frac{d-b}{3a}$	0	$\frac{b-D}{3a}$	$\frac{b+D}{3a}$	$+\infty$	
$Tr(J)$	-	-	-	0	+	0	-
$Det(J)$	+	0	-	0	+	+	+
<i>Nature</i>	foyer stable noeud stable		col	foyer stable noeud stable		foyer instable noeud instable	foyer stable noeud stable

TABLE 3.1 – Stabilité des points d'équilibre



(a)



(b)

Figure 3.2 – Simulations numériques obtenues du système (3.3) avec $I = 0$, $c = 1$ et $d = 5$, la variation du potentiel x en bleu et la variation du flux d'ion à travers la membrane y en rouge. La figure (a) représente un point d'équilibre stable du système (3.3) pour $a = 3$, $b = 3$; la figure (b) représente un point d'équilibre instable pour $a = 1$, $b = 3$.

Si $b^2 < 3a$ alors ;

$\text{tr}(J(x_e))$ est négatif pour toutes les valeurs de x_e , et les seuls types possibles de points d'équilibres sont un **point selle instable** ou un **foyer** ou une **spirale stable**. Cela exclut la possibilité d'un **foyer** ou d'une **spirale instable** dont les chemins de phase approchent d'un **cycle limite stable**.

Puisque nous voulons que ce soit notre modèle de la cellule de tir répétitive, nous imposons la condition que $b^2 > 3a$.

3.4 Localisation des racines

The Poincaré Index (Jordan & Smith (1977), chapitre 3) d e point d'équilibre simple dans le plan de phase de la figure 1b est 1. L'introduction de deux équilibres supplémentaires comme dans la figure 1d ne change pas la somme des indices de tous les équilibres et on voit facilement que les équilibres les plus à gauche et les plus à droite ont l'indice -1 . Ainsi le milieu équilibre correspond à un point **selle** et doit avoir son abscisse dans la région II. Il s'ensuit que l'équilibre le plus à gauche doit avoir sa coordonnée dans la région I et donc un **nœud** ou une **spirale stable**. Cela laisse ouverte la question de l'emplacement de la coordonnée de l'équilibre le plus à droite. Comme indiqué ci-dessus, on obtient un modèle simple d'une cellule à tir répétitivement si cet équilibre est un **nœud** ou une **spirale instable**.

Nous avons donc besoin de la coordonnée de l'équilibre le plus à droite qui se situe dans la région IV.

Les limites inférieure et supérieure de la région IV sont données par :

$$L = \frac{b - D}{3a} \quad (10)$$

et

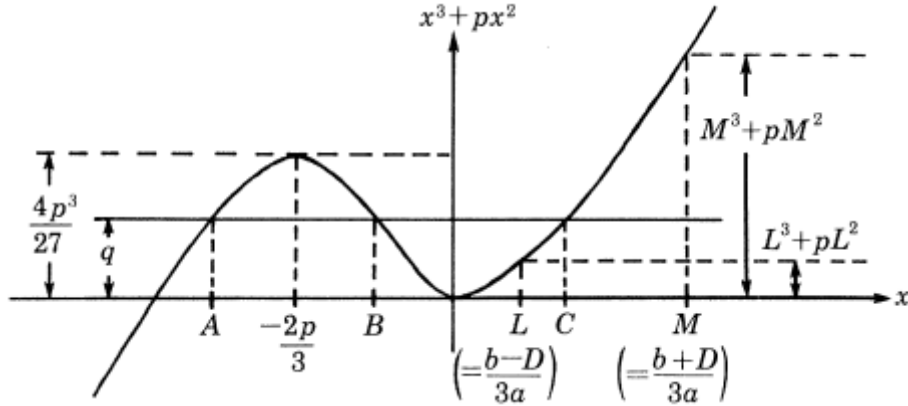
$$M = \frac{b - D}{3a} \quad (11)$$

respectivement. Si $L^3 + pL^2 = q$ alors la racine positive de la cubique (9) sera L , et si $M^3 + pM^2 = q$ ce sera M . Ainsi pourvu

$$L^3 + pL^2 < q < M^3 + pM^2 \quad (12)$$

la racine positive se trouvera dans la région IV.

Les conditions (10) et (11) sont représentées graphiquement sur la figure 2.



Emplacement des racines de l'équation $x^3 + px^2 = q$.

Là, les racines de la cubique (9) sont les abscisses des points d'intersection du graphique de $x^3 + px^2$ avec la ligne horizontale de hauteur q au-dessus de l'axe des x . Pour avoir trois racines, représentées par les points A , B et C , nous devons avoir $0 < 27q < 4p^3$, et la condition d'instabilité sur l'équilibre correspondant aux racines positives est $L < C < M$ qui peut aussi s'exprimer par (12).

3.5 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf

Dans cette partie, nous désignons le paramètre $a = \mu$ comme paramètre de bifurcation, et en fixant tous les autres paramètres comme suit, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$.

$$\begin{cases} x' = y - \mu x^3 + 3x^2 + I = f(x, y) \\ y' = 1 - 5x^2 - y = g(x, y) \end{cases} \quad (3.5)$$

Soit (x_e, y_e) un point d'équilibre du système (4.4). On ramène le point d'équilibre à l'origine en posant $x = x_1 + x_e$ et $y = y_1 + y_e$ et on obtient le système,

$$\begin{cases} x'_1 = f(x_1, y_1, \mu) = (y_1 + y_e) - \mu(x_1 + x_e)^3 + 3(x_1 + x_e)^2 + I \\ y'_1 = g(x_1, y_1, a) = 1 - 5(x_1 + x_e)^2 - (y_1 + y_e) \end{cases}$$

En faisant le développement des fonctions f et g , en série de MacLaurin [33], au voisinage du point $(0, 0, \mu)$ on trouve :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, \mu) + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}(0, 0, \mu) + \widehat{F}(x_1, y_1, \mu) \\ y'_1 = x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0, \mu) + y_1 \frac{\partial g}{\partial y_1}(0, 0, \mu) + \widehat{G}(x_1, y_1, \mu) \end{cases}$$

Où, $\widehat{F}(x_1, y_1, \mu)$ et $\widehat{G}(x_1, y_1, \mu)$ sont les termes non-linéaires.

On a alors,

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 3\mu x_e^2 + 6x_e + y_1 + \widehat{F}(x_1, y_1, \mu) \\ y_1' = -10x_1 x_e - y_1 + \widehat{G}(x_1, y_1, \mu) \end{cases}$$

«

Avec

$$\widehat{F}(x_1, y_1, \mu) = -\mu x_1^3 + (-3\mu x_e + 3)x_1^2$$

et

$$\widehat{G}(x_1, y_1, \mu) = -5x_1^2.$$

Le point $(0, 0, \mu)$ est bien un point d'équilibre du système.

Calculons la matrice jacobienne associée au système (4.4) au point (x_e, y_e) ,

$$J_0 = \begin{pmatrix} -3\mu x_e^2 + 6x_e & 1 \\ -10x_e & -1 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique associé s'écrit comme suit,

$$\det(J_0 - \lambda Id) = \lambda^2 + (-3\mu x_e^2 + 6x_e - 1)\lambda + 3\mu x_e^2 + 4x_e = 0$$

On pose,

$$P(\mu) = -\text{tr}(J_0) \quad \text{et} \quad Q(\mu) = \det(J_0).$$

Ce qui implique que,

$$\lambda^2 + P(\mu)\lambda + Q(\mu) = 0$$

Ainsi, la matrice jacobienne admet une paire de valeurs propres complexes conjuguées si

$$\det(J_0) > \frac{1}{4} \text{tr}(J_0)^2$$

et on a,

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$$

avec

$$\alpha(\mu) = -\frac{3\mu x_e^2 - 6x_e + 1}{2}$$

et

$$\omega(\mu) = \sqrt{3\mu x_e^2 + 4x_e - \alpha(\mu)^2}.$$

De plus, la valeur μ_c de μ pour laquelle la partie réelle de ces valeurs propres s'annule est donnée par les équations $P(\mu_c) = 0$ et $Q(\mu_c) > 0$. On a donc,

$$P(\mu_c) = 0 \Rightarrow \mu_c = \frac{6x_e - 1}{3x_e^2}$$

et

$$Q(\mu_c) > 0 \Rightarrow \mu_c > \frac{-4}{3x_e} \Rightarrow x_e > \frac{1}{10}$$

Par ailleurs, on a,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c) = -\frac{3x_e^2}{2}$$

Ainsi,

$$\alpha(\mu_c) = 0, \quad \omega(\mu_c) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c) \neq 0,$$

qui sont les deux conditions du théorème de Poincaré-Androov-Hopf, donc μ_c est une valeur de bifurcation de Hopf du paramètre μ .

3.6 Stabilité , direction et la période de la bifurcation de Hopf

Déterminons maintenant un vecteur propre v_1 associé à la valeur propre λ_1 , obtenu en résolvant le système,

$$(J_0 - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1 + i\sqrt{10x_e - 1})x + y = 0 \\ -10x_e x + (-1 + i\sqrt{10x_e - 1})y = 0 \end{cases}$$

Une solution de ce système est un vecteur propre associé à λ_1 ,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i\sqrt{10x_e - 1} \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base est donc donnée par,

$$P = (\Re(v_1), -\Im(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{10x_e - 1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a,

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10x_e - 1}} \begin{pmatrix} \sqrt{10x_e - 1} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit maintenant le changement de variable,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Alors on a,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} J_0(\mu) P \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{F}(x_2, y_2, \mu) \\ \widehat{G}(x_2, y_2, \mu) \end{pmatrix}$$

Soit,

$$J'_0(\mu) = P^{-1} J_0 P = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour $\mu = \mu_c$, on a,

$$J'_0(\mu_c) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega(\mu_c) \\ \omega(\mu_c) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'_2 = -\omega(\mu_c)y_2 + F(x_2, y_2, \mu_c) \\ y'_2 = \omega(\mu_c)x_2 + G(x_2, y_2, \mu_c) \end{cases}$$

avec,

$$\begin{pmatrix} F(x_2, y_2, \mu_c) \\ G(x_2, y_2, \mu_c) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{F}(x_2, y_2, \mu_c) \\ \widehat{G}(x_2, y_2, \mu_c) \end{pmatrix}$$

On a donc les fonctions F et G données par,

$$\begin{cases} F(x_2, y_2, \mu) = -\mu x_2^3 + (-3\mu x_e + 3)x_2^2 \\ G(x_2, y_2, \mu) = \frac{1}{\sqrt{10x_e - 1}} (-\mu x_2^3 - (3\mu x_e + 2)x_2^2) \end{cases}$$

Les fonctions F et G ne dépendant que de x_2 , l'indice de MARS DEN-McCRACKEN c_1 est donné par,

$$c_1 = -\frac{1}{16\omega(\mu_c)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_2^3}$$

Au point $(x_2, y_2) = (0, 0)$ et pour $\mu = \mu_c$, on a, $\omega(\mu_c) = \sqrt{10x_e - 1}$ et,

$$\begin{aligned} c_1 &= -6\mu_c + \frac{1}{16\sqrt{10x_e - 1}} \frac{4}{\sqrt{10x_e - 1}} (-3\mu_c x_e + 3)(3\mu_c x_e + 2) \\ &= -6\mu_c + \frac{3}{4(10x_e - 1)} (-3\mu_c^2 x_e^2 + \mu_c x_e + 2) \end{aligned}$$

Comme présenté dans le théorème 1, les signes de $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c)$ et de c_1 permettent de connaître la direction et la stabilité de la bifurcation de Hopf.

Chapitre

4

Application numérique

Sommaire

4.1	Existence des états d'équilibres	74
4.1.1	Existence des états d'équilibres	75
4.1.2	Stabilités des équilibres	75
4.1.3	Recherche d'une orbite périodique	76
4.2	Etude des bifurcations	77

Un exemple du type de réponse que nous souhaitons simuler est montré dans la figure (4.1), qui est un enregistrement intracellulaire d'une petite cellule identifiée dans le ganglion viscéral de l'escargot *Lymnaea*. La cellule est généralement silencieuse, mais lorsqu'elle est dépolarisée pendant environ 100 ms, elle s'allume plusieurs fois et continue de se déclencher après l'arrêt du courant de stimulation :

$$\begin{cases} x' = y - ax^3 + bx^2 + I \\ y' = c - dx^2 - y \end{cases} \quad (4.1)$$

Une solution numérique de (4.1) pour une courte impulsion de courant I est illustrée à dans la figure de déclenchement du tir respectif..

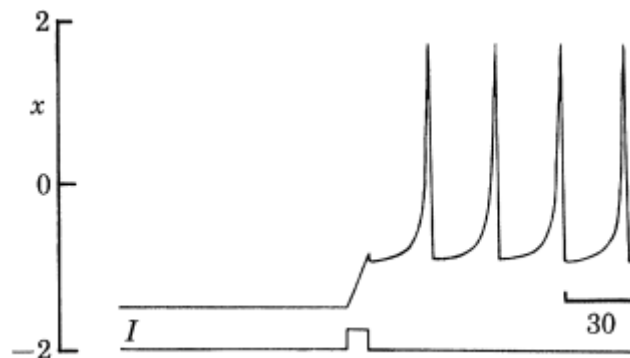
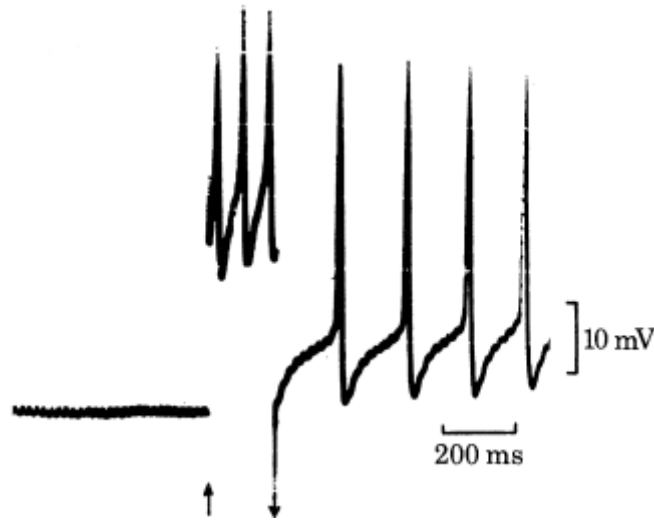


Fig (4.1) : Solution numérique de de (4.1) avec $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, pour une courte impulsion de courant ($I = 1$)



*Fig 4.2 : Réponse intracellulaire enregistrée d'une petite cellule identifiée dans le ganglion viscéral de l'escargot *Lymnaea stagnalis*, pour une courte impulsion de courant dépolarisant appliquée entre les flèches. Le déplacement vers le haut de la ligne de base pendant l'impulsion de courant est dû au déséquilibre du pont.*

Pendant l'application de l'impulsion de courant, la valeur x augmente régulièrement et, comme dans le vrai neurone, le modèle se décharge de manière répétitive après la fin de l'impulsion de courant. Une différence entre le modèle et la cellule est qu'il est toujours nécessaire d'allumer la cellule plusieurs fois pendant l'application de l'impulsion de courant pour qu'une post-décharge se produise. Dans le modèle, il est possible de produire la post-décharge par l'application d'une impulsion de courant plus courte, qui ne déclenche pas la cellule (figure 4.1). Cette différence pourrait survenir parce que le courant entrant sous le seuil a une cinétique d'activation plus lente dans le neurone de l'escargot que ce qui est supposé dans le modèle.

De plus, les potentiels d'action enregistrés ont un sous-dépassement plus important et une récupération plus rapide que dans le modèle, bien que cette différence soit prévisible car elle était présente dans notre modèle original (Hindmarsh & Rose 1982a). Le modèle à trois points d'équilibre montre donc la propriété de tir déclenché au moins qualitativement.

4.1 Existence des états d'équilibres

Soit le système (4.1), on pose $I = 0$, alors on a,

$$\begin{cases} x' = y - ax^3 + 3x^2 \\ y' = 1 - 5x^2 - y \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.1 Existence des états d'équilibres

Les points d'équilibre du système sont donnés en résolvant l'équation suivante,

$$\xi^3 + p\xi + q = 0 \quad (4.3)$$

où,

$$\xi = x + \frac{2}{3a}, \quad p = -\frac{4}{3a^2}, \quad \text{et} \quad q = \frac{16}{27a^3} - \frac{1}{a}$$

Le nombre de racines est donné par le signe de

$$\Delta = 27\left(\frac{16}{27a^3} - \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{256}{27a^6}$$

Alors les points d'équilibre sont

$$A = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-13 - 5\sqrt{5}}{2}\right), \quad B = (-1, -4) \quad \text{et} \quad C = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-13 + 5\sqrt{5}}{2}\right)$$

Ou bien, $A = (-1, 618033989, -12, 090169948)$, $B = (-1, -4)$,

$C = (0, 618033989, -0, 909830058)$

Donc les équilibres sont localisés à des valeurs x de $-1,6$ et -1 et $+0,6$.

4.1.2 Stabilités des équilibres

La trace de J et $\det(J(x_e))$ est le déterminant de J , sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(x_e)) &= (3ax_e^2 - 6x_e + 1) \\ \det(J(x_e)) &= 3ax_e^2 + 4x_e \end{aligned}$$

Le calcul exacte du $\text{tr}(J_0)$ et $\det(J_0)$ aux points d'équilibres A , B et C conduit aux caractéristiques suivantes :

1. Au point A , on a $\det(J_0(A)) = 1,381966013 > 0$ et $\text{tr}(J_0(A)) = -18,562305903 < 0$ donc A est donc un **noeud stable**.
2. Au point B , on a $\det(J_0(B)) = -1 < 0$ et $\text{tr}(J_0(B)) = -10 < 0$ donc B est un **point col**.
3. Au point C , on a $\det(J_0(C)) = 3,618033991 > 0$ et $\text{tr}(J_0(C)) = 1,562305899 > 0$ et donc C est un **foyer instable**.

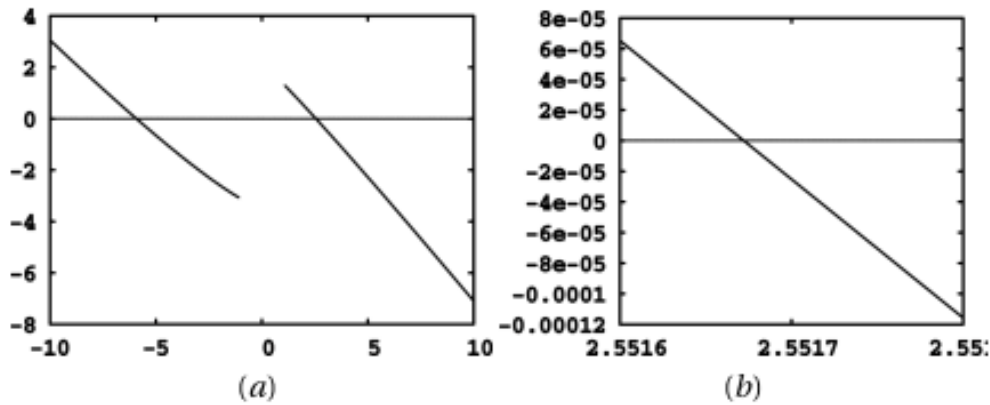
3. Pour $a < 3$, $\Delta(a) > 0$, donc $\text{div}f$ ne garde pas un signe constant et il y a possibilité d'existence de **solutions périodiques**.

4.2 Etude des bifurcations

Dans cette section, nous désignons le paramètre μ comme paramètre de bifurcation,

$$\begin{cases} x' = y - \mu x^3 + 3x^2 \\ y' = 1 - 5x^2 - y \end{cases} \quad (4.4)$$

La résolution de l'équation (4.3) nous donne les deux solutions sur $[-10, 10]$, correspondant à l'intersection avec l'axe des abscisses comme le montre la figure (a).



Nous nous intéressons au cas $\mu > 0$ et donc la solution correspondante $\mu_c \in [2.55165, 2.55170]$.

Donc nous choisissons arbitrairement une condition sur μ , afin de n'avoir qu'un unique point d'équilibre,

$$\Delta > 0 \Rightarrow \mu \in \left] -\infty, -\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right[\cup \left] \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, +\infty \right[$$

Pour un tel μ , la première coordonnée du point d'équilibre est donnée par,

$$x_e(\mu) = \frac{\left(9\mu\sqrt{27\mu^2 - 32} + 27\sqrt{3}\mu^2 - 16\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{32^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{6}}\mu \left(9\mu\sqrt{27\mu^2 - 32} + 27\sqrt{3}\mu^2 - 16\sqrt{3}\right)}$$

$$\frac{22^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{6}} \left(9\mu\sqrt{27\mu^2 - 32} + 27\sqrt{3}\mu^2 - 16\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}} - 42^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{3}}}{32^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{6}}\mu \left(9\mu\sqrt{27\mu^2 - 32} + 27\sqrt{3}\mu^2 - 16\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Nous avons vu précédemment qu'alors, la valeur de bifurcation de Hopf μ_c du paramètre μ est donnée par,

$$\mu_c = \frac{6x_e(\mu) - 1}{3x_e(\mu)^2}$$

Ainsi, μ_c est solution de l'équation,

$$\frac{6x_e(\mu) - 1}{3x_e(\mu)^2} - \mu = 0 \quad (3.8)$$

Pour une telle valeur de μ_c , nous avons bien,

$$x_e \approx 0.54 > \frac{1}{10} \text{ et}$$

$$3\mu_c x_e^2 + 4x_e \approx 4.392187794 > \frac{1}{4}(-3\mu_c x_e^2 + 6x_e - 1)^2 \approx 1.526 * 10^{-5}$$

Par ailleurs, on a,

$$c_1 = -6\mu_c + \frac{3}{4(10x_e - 1)}(-3\mu_c^2 x_e^2 + \mu_c x_e^* + 2) = -15.632152 < 0$$

Par conséquent, nous sommes dans le cas où

$$c_1 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c) < 0 \quad (4.5)$$

. Ainsi, d'après le théorème 1, $(x_e, y_e, \mu_c) = (0.54, -0.46, \mu_c \approx 2.551655)$ est un point de bifurcation de Hopf.

De plus, pour $\mu < \mu_c$, le point d'équilibre est instable avec une orbite périodique stable, tandis que pour $\mu > \mu_c$, le point d'équilibre est stable et il n'y a pas d'orbite périodique.

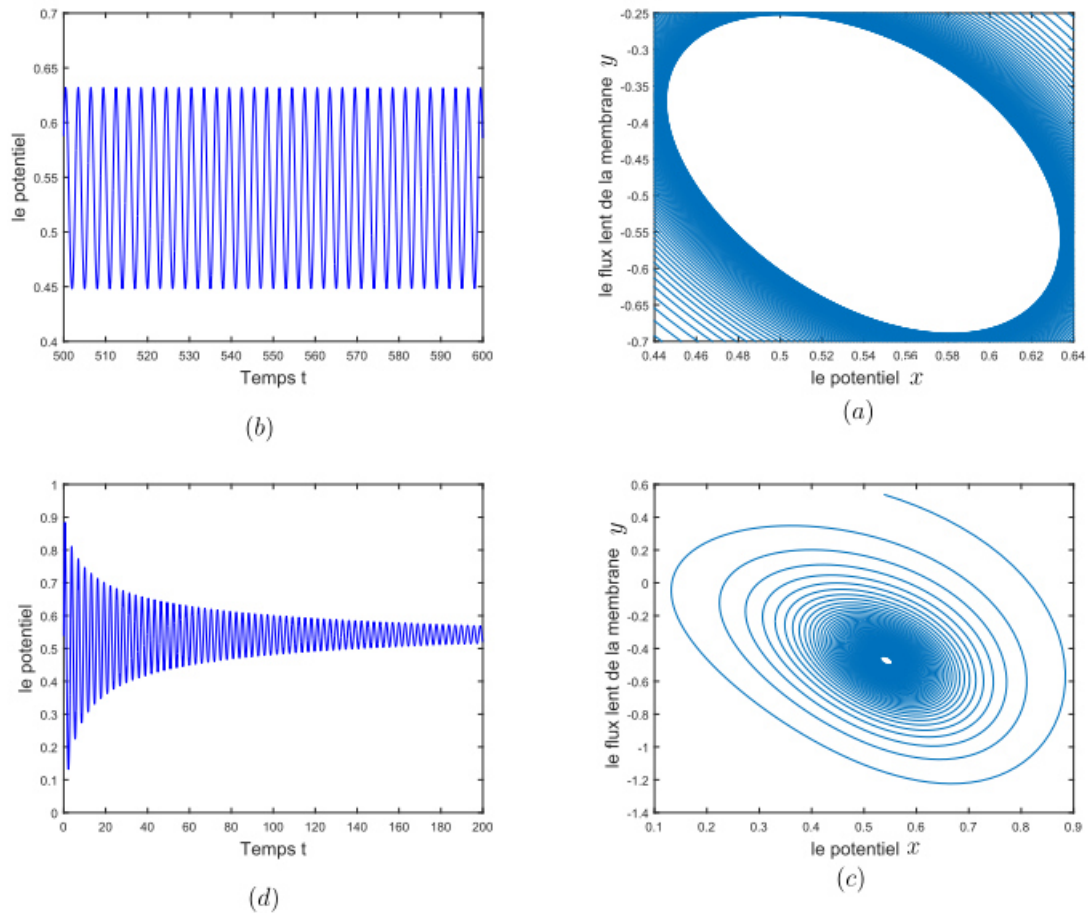


FIG.4.3 : Activités électriques du modèle de neurone (SMHH) lorsque le courant de forçage externe est choisi comme différentes valeurs. la figure (a) $I = 5 \mu A$, la figure (b) $I = 10 \mu A$, la figure (c) $I = 50 \mu A$, la figure (d) $I = 100 \mu A$

Bibliographie

- [1] Alecea M.R. , *Introduction to Bifurcations and The Hopf Bifurcation Theorem for Planar Systems, Dynamics at the Horsetooth, M640 , 2011.*
- [2] Barbara, J. G. (2006). *The physiological construction of the neurone concept (1891–1952). Comptes rendus biologiques, 329(5-6), 437-449.*
- [3] Chen, S. S., Cheng, C. Y., Lin, Y. R. (2013). *Application of a two dimensional Hindmarsh–Rose type model for bifurcation analysis. International Journal of Bifurcation and Chaos, 23(03), 1350055.*
- [4] Corson, N. (2009). *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité (Doctoral dissertation, Université du Havre).*
- [5] Denker. M. , Szucs. A. , Pinto. R. , H. Abarbanel, and A. Selverston, “A network of electronic neural oscillators reproduces the dynamics of the periodically forced pyloric pacemaker group,” *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol.52, pp. 792–798, May 2005.
- [6] Dr.Benahmed, P. B. (2012). “*Physiologie du neurone*”. *Faculté de médecine d'Annaba.*
- [7] Ermentrout, G. B., Terman, D. H. (2010). *Mathematical foundations of neuroscience (Vol. 35). Springer Science Business Media.*
- [8] FitzHugh R. , “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane,” *Biophysical Journal*, vol. 1, no. 6, pp. 445 -466, 1961.
- [9] Guckenheimer J. , Myers M. and Sturmfels B., *Computing Hopf Bifurcations I, SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1997.
- [10] Hale J. et Koçak H. , *Dynamics and Bifurcations, vol. 3, New York, Springer-Verlag, coll. Texts in Applied Mathematics, 1991.*

- [11] Heathcote, N. D. V. (1955). *Commentary on the Effects of Electricity on Muscular Motion*.
- [12] Hindmarsh, J. L., Rose, R. M. (1984). *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences, 221(1222), 87-102., 1984.*
- [13] Hindmarsh, J. L., Rose, R. M. (1982). *A model of the nerve impulse using two first order differential equations. Nature, 296(5853), 162-164.*
- [14] Hodgkin A. L. and Huxley A. F., "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve," *The Journal of Physiology*, vol. 117, no. 4, pp. 500–544, 1952.
- [15] Izhikevich E. M. . *Dynamical Systems in Neuroscience : The geometry of Excitability and Bursting. The mit press, 1st edition, 2007.*
- [16] Kurzweil J. "On the Inversion of Liapunov's Second Theorem on Stability of Motion" *Amer. Math. Soc. Transl, vol. 24, pages 19-77, 1963.*
- [17] Kuznetsov Yu.A. , *Elements of Applied Bifurcation Theory. 3rd edition, Springer, 2004.*
- [18] Lewis E. R., "Neuroelectric potentials derived from an extended version of the hodgkinhuxley model," *Journal of Theoretical Biology, vol. 10, no. 1, pp. 125 – 158, 1966.*
- [19] Liapounov, A. (1907). *Problème général de la stabilité du mouvement. In Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques (Vol. 9, pp. 203-474).*
- [20] Lyapunov A. M. , "Stability of Motion : General Problem" *Internat. J. Control, Lyapunov Centenary issue. vol. 55, no. 3, pages 520-790, march 1992.*
- [21] Mader, S. S. (2010). *Biologie humaine. De Boeck Supérieur.*
- [22] [33] Marchand, J. (1882). *Note sur un developpement d'une fonction en série. Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, 1, 450-458.*
- [23] McConnell, M. J., Lindberg, M. R., Brennand, K. J., Piper, J. C., Voet, T., Cowing-Zitron, C., ... Gage, F. H. (2013). *Mosaic copy number variation in human neurons. Science, 342(6158), 632-637.*
- [24] McConnell, M. J., Moran, J. V., Abyzov, A., Akbarian, S., Bae, T., Cortes-Ciriano, I., ... Network, B. S. M. (2017). *Intersection of diverse neuronal genomes and neuropsychiatric disease : The Brain Somatic Mosaicism Network. Science, 356(6336).*
- [25] Mawhin, J. (2015). *Alexandr Mikhailovich Liapunov, The general problem of the stability of motion (1892). ResearchGate.[cit. 28.2. 2015]. Dostupné z :http ://www.researchgate. net.*

- [26] Nathalie C. *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité. Mathématiques [math]. Université du Havre, 2009. Français. tel-00453912v2.*
- [27] Shui-Nee Chow, Chengzhi Li, and Duo Wang. *Normal forms and Bifurcations of planar Vector Fields. Cambridge university press edition, 1994.*
- [28] Storace, M., Linaro, D., de Lange, E. (2008). *The Hindmarsh-Rose neuron model : bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 18(3), 033128.*
- [29] Strogatz S. H. . *Non linear dynamics and chaos, with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Advanced book program, perseus books edition, 1994.*
- [30] Szucs. A. , Varona. P. , Varona C. P. , Volkovskii A.R. , Abarbanel H. D. I. , Rabinovich M. I. , and Selverston A. I. , "Interacting biological and electronic neurons generate realistic oscillatory rhythms."
- [31] Weber, H. (1895). *Formule de Cardan modifiée par Cayley. Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, 14, 347-349.*
- [32] SVT Ghdiri, "Science de la vie et de laterre" (2009). [http ://svt.ghediri.com/print-article-19.html?iframe=true& width=600&height=400&](http://svt.ghediri.com/print-article-19.html?iframe=true& width=600&height=400&)
- [33] Universités universelles(2017). [https ://www.universiteuniverselle.com/t3783-master-class-reflexe-myotatique](https://www.universiteuniverselle.com/t3783-master-class-reflexe-myotatique)