République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Intégrale de Bochner

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Seghier **H**adj **A**hmed [1]

Sous la direction de

Dr. Fatima **Z**ohra **M**ostefai

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
M. Hamou **D**ida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : seghier20hmd@gmail.com

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous ses sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce modeste travail soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier de trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans ma vie. Puisse Allah faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu.

À tous mes proches de la famille Seghier, et plus particulièrement, ma soeur et mon frère qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Ma superviseuse, qui m'a guidée durant toute ma recherche. Mes professeurs de l'université "Dr.Moulay Taher à saida" qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

À mes amis proches, Souar, Allou, Moussa, Djelloul. Tous les étudiants du département de mathématique surtout mes amis de la promotion.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah , notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Madame Mostefai Fatima-zohra . Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé du début à la fin de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de siéger à mon soutenance, tout particulièrement : Mr.O.Bennihi pour m'avoir fais l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je souhaite exprimer notre gratitude à Mr.M.Hamou Dida et Mr.A.Zeglaoui pour avoir accepté d'examiner ce mémoire. Je vous remercie pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour vos précieux conseils et remarques.

Finalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et à tout ceux qui ont participé à réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Merci à tous

Table des matières

Introduction

L'intégration au sens de Bochner est utilisé dans plusieurs branches mathématiques comme la théorie des probabilités, Analyse fonctionnelle, équations différentielles dans des espaces vectoriels, théorie de semi-groupes pour opérateurs linéaires,... A la fin du dix-neuvième siècle, la théorie d'intégration de Riemann devient insuffisantes et ses limitations étaient apparentes alors plusieurs mathématiciens célèbres comme (Jordan, Borel, Young,..) se mettent en devoir de la généraliser. C'est ainsi que la communauté mathématique adopta la théorie de Lebesgue, exposée dans une note fondatrice de 1901, puis développée dans le Cours Peccot en introduisant concept de mesure par Borel vers 1895. La théorie de la mesure et l'intégration de Lebesgue seront ensuite perfectionnées et généralisées par de nombreux mathématiciens du vingtième siècle, en particulier Carathéodory, Vitali, Radon, Riesz, Hausdorff, Kolmogorov et Besicovich (par ordre chronologique approximatif).

Le cadre classique le plus simple pour définir une intégrale est celui des fonctions en escalier sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrabilité au sens de Riemann impose des conditions relativement fortes : Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\beta > 0$ donné, on peut subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles suffisamment fins pour que la somme des longueurs des sous-intervalles sur lesquels l'oscillation de la fonction f dépasse β soit arbitrairement petite.
Plus tard, Lebesgue montrera qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, au sens où on peut l'inclure dans une union d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est arbitrairement petite.

Ces conditions peuvent sembler assez faibles, puisqu'elles autorisent par exemple une fonction qui ne serait discontinue qu'en une quantité dénombrable de points. Mais il est facile de construire des fonctions bornées ne remplissant pas ces conditions : le contre-exemple connu est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, ou sa restriction à un segment. Dans de nombreux problèmes d'analyse, on rencontre des fonctions qui ne sont pas forcément Riemann-intégrables. Dans la théorie de Lebesgue, la classe des fonctions intégrables est beaucoup plus grande. Par exemple, toute fonction bornée est Lebesgue intégrable. En outre, sa théorie généralise bien celle de Riemann.

C'est par ce problème que Lebesgue motive sa construction dans sa note de 1901. L'intégrale de Riemann permet d'intégrer des fonctions discontinues, mais ne permet pas d'intégrer n'importe quelle fonction dérivée, même bornée c'est à dire si donc f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il n'est pas garanti que l'identité

$$(1) \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

ait un sens. En fait, divers auteurs (Volterra, Köpcke, Brodén, Schoenflies) ont construit des classes de fonctions qui sont dérivables, avec une dérivée bornée mais non Riemann-intégrable. Alors que,sous des hypothèses simples, dans la théorie de Lebesgue, la dérivation et l'intégration deviennent des opérations inverses. C'est ainsi que l'identité (1) est automatiquement vérifiée dès que f est continue, dérivable sur $[a, b]$ et de dérivée bornée.

Sachant qu'une limite de fonctions Riemann-intégrables n'est pas forcément Riemann-intégrable, même si ces fonctions sont uniformément bornées alors on ne peut pas échanger les opérations limite et intégrale. Par contre, Lebesgue parvient à définir un concept de fonctions intégrables qui est invariant par passage à la limite. Par conséquent, sous des hypothèses simples, l'échange intégrale-limite est presque automatique.

L'intégration par rapport à une mesure est une opération qui associe à une fonction f à valeurs réelles, une valeur dans $\mathbb{R}$. Une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ se présente sous forme $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, ou chaque f_i est une fonction. Intégrer une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ revient alors à intégrer chaque composante f_i et à former le vecteur composé de ces intégrales. En revanche, on se pose la question, qu'en est-il pour une fonction à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie ? La définition de l'intégrale de Lebesgue comme borne supérieure d'intégrales de fonctions simples ne peut s'étendre directement aux intégrales à valeurs vectorielles car elle utilise la propriété d'ordre de $\mathbb{R}$.

Partant de la théorie de l'intégration de Lebesgue pour des fonctions scalaire, on développe dans ce mémoire, la théorie correspondante pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach.

Dans le chapitre 1, on évoque les deux théories d'intégration connues et étudiées auparavant : intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue.

Le chapitre 2 sera consacré à l'étude de l'intégrale d'une classe de fonctions à valeurs vectorielles, à savoir, les fonctions simples.

Le chapitre 3, on s'intéresse à la construction de l'intégrale de Bochner, tout en donnant quelques uns de ses propriétés.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Intégration au sens de Riemann

On considère la fonction f définie de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. *Soit A un ensemble, la fonction indicatrice*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

est celle qui indique si x est dans A ou non.

Exemple :

Soit $A = [1, 5[$, alors les images des points $x = 0$, $x = 1$ et $x = 5$ par la fonction indicatrice sont :

$$\mathbb{1}_A(1) = 1, \quad \mathbb{1}_A(5) = 0, \quad \mathbb{1}_A(0) = 0.$$

Définition 1.1.2. ***(Fonction en escalier)*** *La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite fonction en escalier sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $S = (t_i)_{0<i<n}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. La fonction f s'écrira alors :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(x) \tag{1.1}$$

avec : $f(a) = \alpha_0$, $f(b) = \alpha_n$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Exemples :

1. $f(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,2[}(x) + 5 \cdot \mathbb{1}_{[2,4[}(x) - 3 \cdot \mathbb{1}_{[4,6[}(x) + 8 \cdot \mathbb{1}_{[6,8]}(x)$
2. $g(x) = -1 \cdot \mathbb{1}_{[-5,-3[}(x) + \frac{3}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-3,0[}(x) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,4]}(x)$

Définition 1.1.3. ***(L'intégrale des fonctions en escalier)*** *On appelle intégrale de la fonction en escalier f donnée par* (1.1), *le nombre réel*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_{i+1} - t_i).$$

Exemples :

Le calcul de l'intégrale des fonctions en escalier dans l'exemple précédent donne :

$$\int_0^8 f(x) = 2\times(2-0)+5\times(4-2)-3\times(6-4)+8\times(8-6) = 2\cdot(2+5-3+8) = 24.$$

et pour $g(x)$ on a :

$$\int_{-5}^4 g(x) = -1\times(-3-(-5))+\frac{3}{2}\times(0-(-3))+\frac{1}{2}\times(4-0) = -1\cdot 2+\frac{3}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{9}{2}.$$

Soit f une fonction bornée définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour définir son intégrale, on va approcher la fonction f par des fonctions en escalier. Etant donnée une subdivision S, on définit des fonctions en escalier qui minorent f et qui majorent f. Soient

$$E^-_{(f,S)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(x) \text{ avec } m_i = \inf_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x). \tag{1.2}$$

Et

$$E^+_{(f,S)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(x) \text{ avec } M_i = \sup_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x). \tag{1.3}$$

Plus généralement, on peut approcher f par :

$$\tilde{E}_{\alpha,f,S}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(x) \tag{1.4}$$

avec $\alpha_i \in [t_i, t_{i+1}[$ est quelconque.

Définition 1.1.4. *(**Somme de Darboux**) Etant donnée une subdivision S, on appelle somme de Darboux inférieure, l'intégrale de la fonction en escalier $E^-_{(f,S)}$ définie par (1.2)*

$$A^-(f,S) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i).$$

Et la somme de Darboux supérieure, l'intégrale de la fonction en escalier $E^+_{(f,S)}$ définie par (1.3)

$$A^+(f,S) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i).$$

Définition 1.1.5. *(**Somme de Riemann**) Etant donnée une subdivision S, on appelle somme de Riemann, l'intégrale d'une fonction en escalier du type (1.4)*

$$R(f,S,\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Définition 1.1.6. *(**L'intégrale de Riemann**) Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable (sur $[a,b]$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S telle que ses sommes de Darboux vérifient :*

$$A^+(f,S) - A^-(f,S) \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.1.7. *L'intégrale de Riemann de f est la valeur commune :*

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_S A^-(f,S) = \inf_S A^+(f,S).$$

De façon équivalente, si f est Riemann-intégrable, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\rho(S)\to 0} A^-(f,S) = \lim_{\rho(S)\to 0} A^+(f,S) = \lim_{\rho(S)\to 0} R(f,S,\alpha).$$

pour toute somme de Riemann $R(f,s,\alpha)$ où on rappelle que $\rho(S)$ désigne le pas de la subdivision S.

Propriétés :

1. Toute fonction Riemann-intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est bornée.
2. Les fonctions continues et les fonctions monotones sont Riemann-intégrables.
3. **La linéarité :**
   Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ alors :
   $$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$
4. **Relation de Chasles :**
   Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a; b[$ alors f l'est encore sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et on a :
   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
5. **Positivité :**
   Si f est positive et Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors :
   $$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$
6. Si f et g sont Riemann intégrables et $f \leqslant g$ alors :
   $$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$
7. **Intégrale et valeur absolue :**
   Si f est Riemann-intégrable alors :
   $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

1.2 Intégration au sens de Lebesgue

Commençons par donner quelques définitions sur la théorie de la mesure.

Définition 1.2.1. *(**tribu , σ-algèbre**) On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensemble de X est une tribu si :*

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire si : $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$;

(iii) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable si : $\forall n \geqslant 1$, $A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemples :

$\{\emptyset, X\}$ est la tribus grossière , $\mathcal{P}(X)$ est la tribus totale.

Définition 1.2.2. *(**Espace mesurable**) On appelle espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ tout ensemble X munit d'une tribu $\mathcal{A}$.*

Définition 1.2.3. *(**La tribu engendrée**) Soit $\mathcal{A}$ une famille de sous-ensemble de X ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). On note $\sigma(\mathcal{A})$ la plus petite tribu de X (pour l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$. On l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.*

Définition 1.2.4. *(**La tribu borélienne**) La tribu engendrée par une topologie (c'est à dire engendrée par la famille $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ des ouverts d'une topologie) est la tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(X)$. Les éléments de la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ s'appellent les boréliens de X.*

Définition 1.2.5. *(**Boréliens réels**) On considère $X = \mathbb{R} =]+\infty, -\infty[$ muni de sa topologie usuelle (topologie de l'ordre qui coincide avec la topologie engendrée par la distance usuelle $|\cdot|$). On considère alors sur $\mathbb{R}$ la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendrée par les ouverts de sa topologie usuelle. On rappelle que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des réunions dénombrables d'intervalles ouverts $\bigcup\limits_{n \geqslant 1}]a_n, b_n[$ (réunion finie ou dénombrable).*

Définition 1.2.6. *(**Mesure**) Une mesure μ sur un ensemble mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application de $\mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ *;*

(ii) *Si* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite dénombrable d'ensemble de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints alors :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1}(A_n)\right) = \sum_{n\geqslant 1}\mu(A_n) \qquad (\sigma - \textit{additivité}).$$

Exemples :

1. Mesure de dénombrement sur $(X, \mathcal{P}(X))$: soit $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\eta(A) = \begin{cases} Card\ A & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Mesure de Dirac sur $(X, \mathcal{P}(X))$: soient $a \in X$ et $A \in \mathcal{A}$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \in A \\ 0 & \text{si} \quad a \notin A. \end{cases}$$

La mesure de Dirac δ_a indique si un ensemble contient ou non le point a.
Par exemple : $\delta_0([0,1]) = 1$, $\delta_0(]0,1]) = \delta_0(\mathbb{R}^*) = 0$, $\delta_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}) = 0$.

Théorème 1.2.1. ***(La mesure de Lebesgue)*** *Il existe une unique mesure* μ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que :*

- *Pour tout intervalle* $[a,b]$ *borné, on a :* $\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = b - a$.
- *Pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(A + x) = \mu(A)$ *avec* $A + x = \{a + x\ ;\ a \in A\}$.

On l'appelle la mesure de Lebesgue.

Définition 1.2.7. ***(Espace mesuré)*** *On appelle espace mesuré la donnée d'un triplet* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *avec* X *un ensemble,* $\mathcal{A}$ *une tribu sur* X *et* μ *une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$.
Les ensembles de $\mathcal{A}$ *sont appelés les ensembles mesurables.*

Définition 1.2.8. ***(Négligeable , presque par tout)***

1. *Un ensemble* N *de* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est dit* μ*-négligeable s'il existe* $A \in \mathcal{A}$ *tel que* $N \subset A$ *et* $\mu(A) = 0$.

2. *On dit qu'une propriété est vraie μ-presque par tout (μ-p.p.) sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si l'ensemble des $x \in X$ pour lesquelles elle n'est pas vraie est négligeable.*

Définition 1.2.9. ***(Fonction mesurable)*** *Soient $(X, \mathcal{A})$,$(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement si $\forall B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Définition 1.2.10. ***(Fonction Lebesgue-mesurable)*** *La fonction f est dite Lebesgue-mesurable si $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E/f(x) < a\}$ est un ensemble mesurable.*

Définition 1.2.11. ***(Fonction étagée positive)***
Une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite étagée positive si elle est de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

avec :

1. *$n \in \mathbb{N}$ $(n < \infty)$;*
2. *les α_i sont des réels positifs ;*
3. *les A_i sont des ensembles mesurables deux à deux disjoints.*

Remarque 1.2.1. *Si les A_i sont des intervalles f est dite en escalier.*

Définition 1.2.12. ***(L'intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive)*** *Soit f une fonction étagée positive. On appelle intégrale de Lebesgue de la fonction f le nombre*

$$\int f \ d\mu = \int_X f \ d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

avec les précisions suivantes :
- *si $\alpha_i = 0$ et la mesure de A_i est infinie, alors $\alpha_i \mu(A_i) = 0$;*
- *$\int f \ d\mu \geqslant 0$ mais elle peut être infinie.*

Définition 1.2.13. ***(Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle positive)*** *Soit f une fonction mesurable positive i.e $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}_+$,*

on définit $\Sigma(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier positives inférieures ou égales à f.
On appelle intégrale de Lebesgue de f le nombre éventuellement infini, tel que :

$$\int f\ d\mu = \int_X f\ d\mu = \sup_{e \in \Sigma(f)} \int e\ d\mu.$$

Définition 1.2.14. ***(Sommable)***
La fonction f est dite sommable au sens de Lebesgue si $\int f\ d\mu$ est finie.

Définition 1.2.15. *Soit f une fonction à valeurs réelles. On peut définir deux fonctions auxiliaires f^+ et f^- par :*

$$f^+ = \begin{cases} f(x) & si\ f(x) \geqslant 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Et

$$f^- = \begin{cases} -f(x) & si\ f(x) \leqslant 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On a alors : $f = f^+ - f^-$.

Définition 1.2.16. ***(L'intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle)***
Une fonction f à valeurs réelles est sommable si et seulement si les deux fonctions f^+ et f^- sont sommables, et on pose alors :

$$\int f\ d\mu = \int f^+\ d\mu - \int f^-\ d\mu.$$

Remarque 1.2.2. *- Si $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$ sont infinies alors $\int f\ d\mu$ n'existe pas.*
- Si l'un des deux intégrales est infinie et l'autre est fini alors $\int f\ d\mu$ est infinie.

Propriétés :

1. **Croissance :**
   - Si $f \leqslant g$ sur X, alors :

$$\int f\ d\mu \leqslant \int g\ d\mu.$$

- Si $E \subset F$, alors :

$$\int_E f \ d\mu \leqslant \int_F f \ d\mu.$$

2. **Nullité :**
Si $f(x) = 0$ pour $x \in E$, alors :

$$\int_E f \ d\mu = .$$

Si $\mu(E) = 0$, alors :

$$\int_E f \ d\mu = 0.$$

3. **Linéarité :**
Soient f et g deux fonctions mesurables et $a, b \in \mathbb{R}_+$,alors :

$$\int af + bg \ d\mu = a \int f \ d\mu + b \int g \ d\mu.$$

4. **Relation de Chasles :**
Si E et F sont deux ensembles mesurables disjoints, alors :

$$\int_{E \cup F} f \ d\mu = \int_E f \ d\mu + \int_F f \ d\mu.$$

1.3 Espace topologique, Espace de Banach

Définition 1.3.1. (***Norme et semi-norme***) *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel* ($\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *, on appelle une norme sur E l'application :*

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1) a) $\|x\| \geqslant 0$, $\forall x \in E$

b) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *(homogénéité)*

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in E$ *(inégalité triangulaire).*

Si on supprime le 1) b) i.e. $\|x\| = 0$ n'implique pas que $x = 0_E$ alors $\| \cdot \|$ devient une semi-norme.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}$ la norme usuelle est donnée par : $\|x\| = |x|$.
2. dans $\mathbb{R}^n$ on peut définir plusieurs normes :
   a) $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
   b) $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (la norme euclidienne).
   c) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ (la norme de la convergence uniforme).
   d) $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Définition 1.3.2. (***Suite de Cauchy***) *Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace vectoriel normé E est dite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geqslant 1,\ \forall k,\ l \geqslant N \Longrightarrow \|x_k - x_l\| \leqslant \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse en général par exemple : ($X =]0,1[$ et $x_n = 2^{-n}$).

Définition 1.3.3. (***Espace topologique***) *Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X, i.e. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2) Si $U, V \in \mathcal{T}$, alors $U \cap V \in \mathcal{T}$;
3) Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

L'ensemble X muni de la topologie $\mathcal{T}$ est appelée ***espace topologique****.*
Les parties de X qui appartienne à $\mathcal{T}$ sont dites ***les ouverts****.*

Définition 1.3.4. (***Les voisinages***) *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $a \in X$. On dit qu'une partie V de X est voisinage du point a s'il existe un ouvert U contient a et inclut dans V.*
On note $\mathcal{V}(a)$ la famille de tous les voisinages du point a.

Exemples :

1. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ la partie $]-2,1]$ est un voisinage de 0 par contre n'est pas voisinage de 1.
2. $X = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$, alors $V = \{a,b,d\}$ est un voisinage des deux points a et b mais n'est pas voisinage du point d.

Définition 1.3.5. (***L'adhérence***) *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A une partie de X et $x \in X$.On dit que x est adhérant à A si tout voisinage V de x dans X contient un point de A.*
On note $\overline{A}$ l'ensemble de tout les points adhérant à A.

Exemple :
On considère dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ l'ensemble $A = [0,2] \cup [5,8[\cup]10,20] \cup]30,35[$. Alors $\overline{A} = [0,2] \cup [5,8] \cup [10,20] \cup [30,35]$.

Définition 1.3.6. (***Densité***) *Une partie A de X est dite dense si $\overline{A} = X$ avec $\overline{A}$ est l'adhérence de A.*

Exemples :

1. Soient $X = \{a,b,c,d\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a,b\}\{c,d\}\}$ et $A = \{a,c,d\}$. Il est clair $(X, \mathcal{T})$ que est un espace topologique.
   On a : $\overline{A} = \{a,b,c,d\} = X$. Donc A est dense dans X.
2. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ on a $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.7. (***dénombrabilité***) *Un ensemble A est dit dénombrable s'il est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$.*

Remarque
Un ensemble dénombrable c'est l'ensemble qui s'écrit sous forme d'une suite i.e A est dénombrable $\Rightarrow A = \{x_1, x_2, \cdots\}$.
Exemple :
Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Définition 1.3.8. (***Séparabilité***) *Un espace X est dit séparable s'il contient une partie dense et dénombrable.*
Exemple :
$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est séparable car il contient $\mathbb{Q}$ qui est dense et dénombrable.*

Définition 1.3.9. (***Espace complet***) *On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Définition 1.3.10. (***Espace de Banach***) *on appelle un espace de Banach tout espace vectoriel normé complet pour sa norme.*

Exemples :

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace de Banach.
2. les espaces $\mathbb{R}^n$ munissent des différentes normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont des espaces de Banach.
3. tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.
4. $(\mathcal{B}(I,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, l'espace des fonctions bornées munit de la norme : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$ est un espace de Banach avec I un ensemble non vide (intervalle par exemple).
5. $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$,l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace de Banach ; c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.
6. $\ell^\infty(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des suites bornées (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace de Banach avec la norme :
$$\|u\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |u_n|.$$
7. $\ell^1(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des suites (u_n) pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|$ converge est un espace de Banach avec la norme :
$$\|u\|_1 = \sum_{n\geqslant 0} |u_n|.$$
8. $\ell^p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des suites (u_n) pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|^p$ converge est un espace de Banach avec la norme :
$$\|u\|_p = \left(\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Chapitre 2

Intégrale de fonctions simples

2.1 Fonctions simples et mesurabilité

Soit X un espace de Banach et $(I, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 2.1.1. *On dit qu'une fonction $f : I \to X$ est simple s'il existe une suite finie d'ensembles mesurables $E_m \subset I$, $m = 1, \ldots, p$, telle que :*

$$E_m \cap E_l = \emptyset, \quad \forall m \neq l \quad \textit{et} \quad I = \bigcup_{m=1}^{p} E_m$$

où

$$f(t) = y_m \in X, \qquad \forall t \in E_m, \quad m = 1, \ldots, p.$$

C'est à dire, f est constante sur chaque ensemble mesurable E_m.

On note par $\mathcal{J}(\mu, X) = \mathcal{J}$ l'ensemble de toutes les fonctions simples définies sur I.

Remarque 2.1.1.
1. *Il est clair que $\mathcal{J}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Ce résultat découle du fait que X est un espace de Banach et par suite un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si f est une fonction simple alors $\|f\|_X : I \to \mathbb{R}$ l'est aussi. En effet, soit $f : I \to X$ une fonction simple donc $f(t) = y_m \in X$ pour $t \in E_m \subset I$, $m = 1, ..., p$ avec : $I = \bigcup\limits_{m=1}^{p} E_m$ et $E_m \cap E_l = \emptyset$ pour $l \neq m$.*

L'application $\|f\|_X$ est définit par :

$$\begin{array}{rccl} \|f\|: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \to & \|f\|(t) = \|f(t)\| = \|y_m\| \,;\, t \in E_m \subset I \;,\; m = 1,...,p \end{array}.$$

Ainsi, $\|f\|_X$ est constante sur chaque sous-ensemble E_m de I , donc $\|f\|_X$ est simple.

Définition 2.1.2. *On dit que $f : I \to X$ est mesurable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \quad \textit{pour presque tout } t \in I.$$

Il est clair que si $f \in \mathcal{J}$ alors f est mesurable. En effet , si f est simple, il suffit de prendre une suite de fonctions simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à f.

Proposition 2.1.1. *Si $f : I \to X$ est mesurable alors la fonction réelle $\|f\|_X : I \to \mathbb{R}$ est mesurable.*

Preuve

Supposons que f est mesurable, alors il existe une suite de fonctions simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \quad \text{p.p}$$

Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{J}$ alors, d'après la Définition 2.1.1

$$\|f_n\| \in \mathcal{J}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et comme :

$$0 \leqslant |\|f_n(t)\|_X - \|f(t)\|_X| \leqslant \|f_n(t) - f(t)\|_X, \forall t \in I$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} |\|f_n(t)\|_X - \|f(t)\|_X| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \forall t \in I$$

Ce qui entraine

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\|_X = \|f(t)\|, \forall t \in I$$

On en conclut que $\|f\|_X$ est mesurable. ∎

Remarque 2.1.2. *Dans le cas où* $X = \mathbb{R}$ *alors,* $f : I \to \mathbb{R}$ *est mesurable au sens de la Définition 2.1.2, si et seulement si, pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, l'ensemble* $\{t \in I\,;\, f(t) \geqslant a\}$ *(ou* $\{t \in I\,;\, f(t) > a\}$*,* $\{t \in I\,;\, f(t) \leqslant a\}$ *ou* $\{t \in I\,;\, f(t) < a\}$*) est mesurable. Pour plus de détails voir [5], Théorème 4.13.*

Définition 2.1.3. *On dit que* $f : I \to X$ *est faiblement mesurable si*

$$\forall x^* \in X^*, \quad x^*(f) : I \to \mathbb{R} \text{ est mesurable.}$$

Les concepts de mesurabilité et de mesurabilité faible sont relativement proches. Cette relation est donnée par le théorème de Pettis suivant.

Théorème 2.1.1. *[4]***(Pettis)** *Une fonction* $f : I \to X$ *est mesurable si et seulement si elle est faiblement mesurable et il y a un ensemble* $N \subset I$*,* $\mu(N) = 0$ *tel que l'ensemble* $\{f(t); t \in I \setminus N\} \subset X$ *est séparable.*

On en déduit du théorème de précédent le résultat suivant :

Corollaire 2.1.1. *Une fonction* $f : I \to X$ *est mesurable si et seulement si :*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} h_n(t)$$

uniformément pour presque par tout $t \in I$ *où* $(h_n)_n$ *est une suite dénombrable de fonctions mesurables.*

Proposition 2.1.2. *Si* $f : I \to X$ *est une fonction mesurable alors, il existe une fonction mesurable bornée* $g : I \to X$ *et une fonction mesurable* $h : I \to X$ *avec :*

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n}(t), \; x_n \in X, \; n \in \mathbb{N}, \; t \in I,$$

où E_n *sont des ensembles mesurables deux à deux disjoints tels que :*

$$f = g + h.$$

Preuve

En utilisant le théorème de Pettis, on peut supposer que $f(I)$ est sous-ensemble séparable de X avec $\{x_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $f(I)$
On définit :

$$E_n=\left\{t\in I\,;\,f(t)\in(x_n+B(X)))\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}(x_k+B(X))\right\}.$$

Alors $I\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, $E_n\bigcap E_m=\emptyset\ \forall m\neq n$.On pose :

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\mathbb{1}_{E_n}(t)$$

pour $t\in I$. $h:I\to X$ est mesurable et si $t\in E_n\bigcap I$,alors :

$$f(t)-h(t)=f(t)-x_n\in B(X),$$

i.e $\|f(t)-h(t)\|_X\leqslant 1$ Posons $g(t)=f(t)-h(t)$, on obtient $\|g(t)\|_X\leqslant 1$ et $f(t)=g(t)+h(t)$, $t\in I$

■

Proposition 2.1.3. *Si X est un espace de Banach séparable alors, $f:I\to X$ est mesurable si et seulement si elle faiblement mesurable.*

Preuve

Il est clair que si X est séparable alors l'ensemble $\{f(t),\ t\in I\}\subset X$ est séparable, donc d'après le théorème de Pettis on a l'équivalence.

■

2.2 Intégrale des fonctions simples

Définition 2.2.1. *Soit $f:I\to X$ une fonction simple, on définit l'intégrale de f comme :*

$$\int_I f=\sum_{n=1}^{p}y_m\mu(E_m)=\sum_{m=1}^{p}f(E_m)\mu(E_m). \tag{2.1}$$

Si $A \subset I$ est un ensemble mesurable alors on définit :

$$f_A(t) = \begin{cases} f(t) & si \quad t \in A \\ 0 & si \quad t \notin A \end{cases}$$

i.e : $f_A = f \cdot \mathbb{1}_A$.
Il est facile de remarquer que f_A est aussi une fonction simple et on a alors :

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

Propriétés :

1. L'intégrale des fonctions simples $\int : \mathcal{J} \to X$ est une application linéaire, en effet, soient f et g deux fonctions simples,

$$\begin{aligned} \int_I (f+g) &= \sum_{m=1}^{p} (f+g)(E_m)\mu(E_m) \\ &= \sum_{m=1}^{p} (f(E_m) + g(E_m))\mu(E_m) \\ &= \sum_{m=1}^{p} f(E_m)\mu(E_m) + \sum_{m=1}^{p} g(E_m)\mu(E_m) \\ &= \int_I f + \int_I g. \end{aligned}$$

Et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \int_I \alpha f &= \sum_{m=1}^{p} (\alpha f)(E_m)\mu(E_m) \\ &= \sum_{m=1}^{p} \alpha(f(E_m)\mu(E_m) \\ &= \alpha \sum_{m=1}^{p} f(E_m)\mu(E_m) \\ &= \alpha \int_I f. \end{aligned}$$

2. Si A,B sont deux ensembles mesurables de I avec $A \cap B \neq \emptyset$ alors :

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

En effet la linéarité de l'intégrale et l'identité $f_{A\cup B} = f_A + f_B$ entraine que :

$$\begin{aligned} \int_{A\cup B} f &= \int_I f_{A\cup B} \\ &= \int_I f_A + f_B \\ &= \int_I f_A + \int_I f_B \\ &= \int_A f + \int_B f \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. Si A est un ensemble mesurable de I et $f \in \mathcal{J}$, alors

$$\left\| \int_A f \right\|_X \leqslant \int_A \|f\|_X \leqslant \sup_{t\in I} \|f(t)\|_X \mu(A) \tag{2.3}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f \right\|_X &= \left\| \sum_{m=1}^{p} y_m \mu(A \cap E_m) \right\|_X \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{p} \|y_m\|_X \mu(A\cap E_m) = \int_A \|f\|_X \\ &\leqslant \max_m \|y_m\|_X \sum_{m=1}^{p} \mu(A\cap E_m) \\ &= \sup_{t\in I} \|f(t)\|_X \mu(A) \end{aligned}$$

Et $\bigcup\limits_{m=1}^{p} (A \cap E_m) = A$.

Remarque 2.2.1. *Dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $f \leqslant g$ tel que $f, g \in \mathcal{J}$, on a :*

$$\int_I f \leqslant \int_I g. \tag{2.4}$$

Si $f \geqslant 0$ et $A \subset B$ alors :

$$\int_A f \leqslant \int_B f. \tag{2.5}$$

Soit $f \in \mathcal{J}$ une fonction simple, on définit l'application $\|\cdot\|_1 : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ tel que

$$\|f\|_1 = \int_I \|f\|_X. \tag{2.6}$$

Cette application admet les propriétés suivantes :

1. Pour tout $f \in \mathcal{J}$,
$$\|f\|_1 \geqslant 0.$$
En effet, soit $f \in \mathcal{J}$
$$\|f\|_1 = \int_I \|f\|_X$$
Or, $0 \leqslant \|f\|_X$ alors d'après (2.6) on a :
$$0 \leqslant \int_I \|f\|_X$$
Donc
$$\|f\|_1 \geqslant 0, \forall f \in \mathcal{J}$$

2. $\|af\|_1 = |a|\|f\|_1$, $\forall f \in \mathcal{J}$, $\forall a \in \mathbb{R}$
En effet, Soient $f \in \mathcal{J}$ et $a \in A$, on a :
$$\begin{aligned} \|af\|_1 &= \int_I \|af\|_X \\ &= \int_I |a|\|f\|_X \\ &= |a| \int_I \|f\|_X \\ &= |a| \cdot \|f\|_1 \end{aligned}$$

3. $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$ $\forall f, g \in \mathcal{J}$
En effet, soient $f, g \in \mathcal{J}$
$$\|f+g\|_1 = \int_I \|f+g\|_X$$
On sait bien que $\|f+g\|_X \leqslant \|f\|_X + \|g\|_X$ car $\|\cdot\|_X$ est bien une norme sur X donc d'après (2.6) on a :
$$\int_I \|f+g\|_X \leqslant \int_I (\|f\|_X + \|g\|_X)$$

et à cause de la linéarité de l'intégrale on a :

$$\int_I \|f+g\|_X \leqslant \int_I \|f\|_X + \int_I \|g\|_X$$

Donc :

$$\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1 \ \forall f,g \in \mathcal{J}$$

4. Si $\|f\|_1 = 0$ n'implique pas que $f(t) = 0 \ \forall t \in I$. En effet, il suffit de considérer le contre exemple suivant : Soit $A \subset I$ tel que $\mu(A) = 0$, et f une fonction constante égale à $y \neq 0$ sur A et nulle sur $I \setminus A$. Ainsi, par défintion de l'intégrale, on a

$$\int_I f = y\mu(A) + 0\mu(I \setminus A) = 0,$$

alors que $f \neq 0$.

D'après ces propriétés, on a bien définie une semi-norme sur $\mathcal{J}$. Cette semi-norme $\|\cdot\|_1$ est appelée L-seminorme.

Chapitre 3

Intégrale de Bochner

Maintenant, on va considérer une suite de fonctions simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{J}$ avec la semi-norme donnée dans le chapitre précédent.

3.1 Définition de l'intégrale de Bochner

Définition 3.1.1. *Une suite de fonctions simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée L-zero si :*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0.$$

On dit que deux suites de fonctions simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si leur différence $(f_n - g_n)_n$ est L-zero.

Définition 3.1.2. *Une suite de fonctions simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée L-Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\|f_p - f_q\|_1 < \varepsilon, \ \forall p, q \geqslant N_\varepsilon.$$

On va considérer le complété de l'espace vectoriel $\mathcal{J}$ des fonctions simples sur I avec L-seminorme $\|\cdot\|_1$. le complété de $\mathcal{J}$ est donné comme l'espace des classes d'équivalence des suite de fonctions simples L-Cauchy. Pour plus de détails voir [2].
L'ensemble des suites de fonctions simples L-Cauchy est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{J}$. En effet, soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions simples L-Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0 \text{ tel que} \|f_p - f_q\|_1 \leqslant \varepsilon/2, \quad \forall p, q \geqslant N_\varepsilon$$

de même

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \|g_p - g_q\|_1 \leqslant \varepsilon/2, \quad \forall p, q \geqslant M_\varepsilon.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|(f_p + g_p) - (f_q + g_q)\|_1 &= \|(f_p - f_q + (g_p - g_q))\|_1 \\ &\leqslant \|f_p - f_q\|_1 + \|g_p - g_q\|_1 \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $p, q \geqslant \sup(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$. Donc la suite $(f_n + g_n)_n$ est une suite L-Cauchy. De même

$$\begin{aligned} \|\lambda f_p - \lambda f_q\|_1 &= \|\lambda(f_p - f_q)\|_1 \\ &= |\lambda| \|f_p - f_q\|_1 \\ &\leqslant \lambda \cdot \varepsilon = \varepsilon' \end{aligned}$$

Donc la suite $(\lambda f_n)_n$ est une suite L-Cauchy.

Lemme 3.1.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions simples L-Cauchy définie sur I. Alors il existe une sous suite (f_{n_k}) de (f_n) qui converge presque par tout vers une fonction $f : I \to X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $E \subset I$ avec $\mu(E) < \varepsilon$ tel que (f_{n_k}) converge uniformément sur $I \setminus E$.*

Preuve

Comme la suite $(f_n)_n$ est L-Cauchy alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q > N_k$ alors

$$\|f_p - f_q\|_1 < \frac{1}{2^{2n}}.$$

Supposons que $N_k < N_{k+1}$, et posons

$$g_k = f_{N_k},$$

alors

$$\|g_m - g_n\|_1 = \|f_{N_m} - f_{N_n}\|_1 < \frac{1}{2^{2n}},\ \forall m \geqslant n.$$

On définit pour $t \in I$, la série

$$g_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(t) - g_k(t))$$

et on montre qu'elle converge absolument vers un élément de X et cette convergence est uniforme sauf sur un ensemble de I de mesure négligeable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$M_n = \left\{ t \in I \,;\, \|g_{k+1}(t) - g_k(t)\|_X > \frac{1}{2^n} \right\}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \cdot \mu(M_n) &= \int_{M_n} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \int_{M_n} \|g_{k+1}(t) - g_k(t)\|_X \\ &\leqslant \int_I \|g_{k+1}(t) - g_k(t)\|_X \\ &= \|g_{k+1} - g_k\|_1 \\ &\leqslant \frac{1}{2^{2n}} \end{aligned}$$

Ce qui entraine à

$$\mu(M_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble

$$Z_n = M_n \cup M_{n+1} \cdots$$

on remarque alors que $Z_{n+1} \subset Z_n$ et

$$\mu(Z_n) \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} \mu(M_j) < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pour $t \notin Z_n$ et $k \geqslant n$ on a :

$$\|g_{k+1}(t) - g_k(t)\|_X < \frac{1}{2^k}$$

et par conséquent, la série $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(g_{k+1}(t)-g_k(t))$ converge absolument et uniformément pour $t \notin Z_n$.
Supposons que $\varepsilon > 0$ est donné , posons $E = Z_k$, on a pour k assez grand :

$$\mu(E) = \mu(Z_k) < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

par suite les séries $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(g_{k+1}(t)-g_k(t))$ convergent absolument et uniformément sur $I \setminus E$.
Si on prend $M = \bigcap Z_n$, alors $\mu(M) = 0$ et si $t \notin M$, alors $t \notin Z_n$ pour certains n. Par conséquent, les séries $g_1(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(t)-g_k(t))$ convergent pour $t \notin M$, ce qui veut dire $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{N_k}(t)$ existe pour presque par tout $t \in I$, et la suite $g_k(t) = f_{N_k}(t)$ converge uniformément sur $I \setminus E$. ∎

Lemme 3.1.2. *a) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions simples L-Cauchy alors*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n \textit{ existe.}$$

b) Si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions simples L-Cauchy équivalentes alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \lim_{n\to\infty}\int_I g_n \tag{3.1}$$

c) Si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions simples L-Cauchy qui convergent presque partout vers une fonction $f : I \to X$ alors (f_n) et (g_n) sont équivalentes et (3.1) reste vraie.

Preuve

a) L'existence de la limite dans *a*) est facile à montrer. En effet, soit (f_n) une suite de fonctions simples L-Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_p - f_q\|_1 < \varepsilon \text{ pour tout } p, q \geqslant N_\varepsilon.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\|\int_I f_p - \int_I f_q\right\|_X &= \left\|\int_I (f_p - f_q)\right\|_X \\ &\leqslant \int_I \|(f_p - f_q)\|_X \\ &= \|f_p - f_q\|_1 \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Ce qui veut dire la suite d'intégrales $\int_I f_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy et par conséquent elle est convergente c'est à dire que la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n$ existe.

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné, comme (f_q) et (g_q) sont deux suite L-Cauchy équivalentes, et d'après a), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $r > N$, on a

$$\|f_r - g_r\|_1 = \int_I \|f_r - g_r\|_X < \varepsilon.$$

Et

$$\left\|\int_I f_r - \lim_{q\to\infty}\int_I f_q\right\|_X < \varepsilon, \quad \left\|\int_I g_r - \lim_{q\to\infty}\int_I g_q\right\|_X < \varepsilon.$$

Ce qui entraine que

$$\begin{aligned}\left\|\lim_{q\to\infty}\int_I f_q - \lim_{q\to\infty}\int_I g_q\right\|_X &\leqslant \left\|\lim_{q\to\infty}\int_I f_q - \int_I f_r\right\|_X + \left\|\int_I f_r - \int_I g_r\right\|_X + \\ &\quad \left\|\int_I g_r - \lim_{q\to\infty}\int_I g_q\right\|_X \\ &\leqslant \varepsilon + \int_I \|f_r - g_r\|_X + \varepsilon \\ &\leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{q\to\infty}\int_I f_q = \lim_{q\to\infty}\int_I g_q.$$

c) Posons

$$h_q = f_q - g_q$$

et soit $\varepsilon > 0$ donné. Il est clair que $\lim\limits_{q\to\infty} h_q(t) = 0$ presque par tout car $(f_q)_q$ et $(g_q)_q$ convergent presque par tout vers la même limite et $(h_q)_q$ est L-Cauchy i.e. il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $r, q \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\|h_q - h_r\|_1 < \varepsilon.$$

D'après a), les deux suites $(\int_I h_q)$ et $(\int_I \|h_q\|_X)$ sont convergentes. Reste à montrer que

$$\lim_{q\to\infty} \int_I \|h_q\|_X = 0$$

On définit l'ensemble

$$M = \{t \in I\,;\, h_{N_\varepsilon}(t) \neq 0\} \subset I$$

Pour $q \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} \int_{I\setminus M} \|h_q\|_X &= \int_{I\setminus M} \|h_q - h_{N_\varepsilon}\|_X \quad (\text{car } h_{N_\varepsilon}(t) = 0 \text{ pour } t \in I \setminus M) \\ &\leqslant \int_I \|h_q - h_{N_\varepsilon}\|_X \\ &= \|h_q - h_{N_\varepsilon}\|_1 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

et d'après le Lemme 3.1.1, il existe un sous-ensemble mesurable $Z \subset M$ avec :

$$\mu(Z) \leqslant \frac{\varepsilon}{\sup\limits_{t\in I} \|h_{N_\varepsilon}(t)\|_X + 1}$$

et une sous-suite (h_{q_s}) uniformément convergente vers zéro sur $M \setminus Z$. Par suite il existe$s_0 \geqslant N_\varepsilon$ tel que pour tout $s \geqslant s_0$ et pour $t \in M \setminus Z$ on a

$$\|h_{q_s}(t)\|_X < \frac{\varepsilon}{\mu(I)}$$

et par conséquent, pour $s \geqslant s_0$,

$$\int_{M\setminus Z} \|h_{q_s}(t)\|_X < \frac{\varepsilon\mu(M \setminus Z)}{\mu(I)} < \varepsilon$$

De même,

$$\begin{aligned} \int_Z \|h_{q_s}(t)\|_X &= \int_Z \|h_{q_s}(t) - h_{N_\varepsilon}(t) + h_{N_\varepsilon}(t)\|_X \\ &\leqslant \int_Z \|h_{q_s}(t) - h_{N_\varepsilon}(t)\|_X + \int_Z \|h_{N_\varepsilon}(t)\|_X \\ &\leqslant \|h_{q_s} - h_{N_\varepsilon}\|_1 + \sup_{t\in I} \|h_{N_\varepsilon}(t)\|_X \mu(Z) \\ &< \varepsilon + \sup_{t\in I} \|h_{N_\varepsilon}(t)\|_X \cdot \frac{\varepsilon}{\sup\limits_{t\in I} \|h_{N_\varepsilon}(t)\|_X + 1} \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|h_{q_s}\|_1 &= \int_I \|h_{q_s}(t)\|_X \\ &= \int_{I\setminus M} \|h_{q_s}(t)\|_X + \int_{M\setminus Z} \|h_{q_s}(t)\|_X + \int_Z \|h_{q_s}(t)\|_X \\ &< \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{s\to\infty} \int_I \|h_{q_s}(t)\|_X = 0$ et par conséquent on obtient

$$\lim_{q\to\infty} \int_I \|h_q(t)\|_X = 0.$$

■

Définition 3.1.3. *On note par $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : I \to X$ pour lesquelles il y a une suite de fonctions simples L-Cauchy $(f_n), n \in \mathbb{N}$ qui converge vers f presque par tout sur I, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \quad \textit{pour presque tout } t \in I.$$

Dans ce cas, on dit que la suite $(f_n) \in \mathcal{J}$ détermine la fonction $f \in \mathcal{B}$.
D'après a) du Lemme 3.1.2, il est facile de voir que pour toute suite de fonctions simples (f_n) L-Cauchy, la valeur $x_{(f_n)} \in X$ peut être attribué à $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n$, c'est à dire

$$x_{(f_n)} = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

De même, en utilisant b) du Lemme 3.1.2, on peut voir que la valeur $x_{(f_n)} \in X$ est unique à toutes les suites L-Cauchy qui sont équivalentes à la suite (f_n). Ce qui nous permet de donner la définition suivante,

Définition 3.1.4. *Pour $f \in \mathcal{B}$, on définit :*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \tag{3.2}$$

où (f_n) est une suite de fonctions simples qui détermine $f \in \mathcal{B}$. La valeur $\int_I f$ donnée par (3.2) est appelée ***l'intégrale de Bochner*** *de la fonction f.*

L'ensemble $\mathcal{B}$ est appelé l'ensemble des fonctions Bochner-intégrable.

Remarque 3.1.1. *1. $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel.*

2. Dans (2.1), l'intégrale est définie pour une fonction simple alors que la relation (3.2) est son extension aux fonctions $f \in \mathcal{B}$.

3. A partir du Lemme 3.1.2, on voit que cette notion est définie.

Dans cette présentation, on suit les lignes données dans [2] par S. Lang mais le lecteur peut trouver l'intégrale de Bochner dans plusieurs livres e.g[3] ou géneralement dans des livres d'analyse fonctionnelle e.g[1].

Lemme 3.1.3. *Si $f \in \mathcal{B}$ et (f_n) est une suite de fonctions simples L-Cauchy qui détermine f, alors $\|f\|_X$ est intégrable au sens de Bochner et la suite $(\|f_n\|_X)$ détermine la fonction réelle $\|f\|_X$ au sens de l'ensemble $\mathcal{B}$.*
Dans ce cas on a :

$$\int_I \|f\|_X = \lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 \tag{3.3}$$

De plus

$$\left\| \int_I f \right\|_X \leqslant \int_I \|f\|_X \tag{3.4}$$

Preuve

Comme

$$|\|f_q(t)\|_X - \|f_r(t)\|_X| \leqslant \|f_q(t)f_r(t)\|_X, \quad \text{pour } t \in I$$

alors

$$\begin{aligned} \|\|f_q\|_X - \|f_r\|_X\|_1 &= \int_I |\|f_q(t)\|_X - \|f_r(t)\|_X| \\ &\leqslant \int_I \|f_q(t) - f_r(t)\|_X = \|f_q - f_r\|_1 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire la suite de fonctions simples à valeurs réelles $\|f_q\|_X$ est L-Cauchy. De plus,

$$\lim_{q\to\infty} \|f_q(t)\|_X = \|f(t)\|_X \quad \text{pour presque tout } t \in I$$

et par conséquent $\|f\|_X : I \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Bochner et la suite $(\|f_q\|_X)_{q\in\mathbb{N}}$ détermine $\|f\|_X$ et par suite l'égalité (3.3) est vérifiée.

Or, comme la suite $(f_q \in \mathcal{J})$ de fonctions simples vérifie la propriété (2.3) alors

$$\left\| \int_A f_q \right\|_X \leqslant \int_A \|f_q\|_X$$

ce qui entraine que

$$\lim_{q\to\infty} \left\| \int_A f_q \right\|_X \leqslant \lim_{q\to\infty} \int_A \|f_q\|_X$$

et d'après (3.2), on a

$$\left\| \lim_{q\to\infty} \int_A f_q \right\|_X \leqslant \int_I \|f\|_X$$

et par suite, (3.3) entraine que

$$\left\| \int_I f \right\|_X \leqslant \int_I \|f\|_X.$$

Ce qui prouve l'inégalité (3.4). ■

D'après le Lemme 3.1.3, on sait que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1$ ne dépend pas du choix de la suite de fonctions simples L-Cauchy (f_n) qui détermine f, par conséquent la semi-norme définie pour des fonctions simples $f \in \mathcal{J}$ peut s'étendre aux fonctions $f \in \mathcal{B}$ par la relation

$$\|f\|_1 = \int_I \|f(t)\|_X = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1. \tag{3.5}$$

Ainsi, $\|\cdot\|_1 : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ est bien définie et vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \|f\|_1 \geqslant 0 & \qquad \forall f \in \mathcal{B} \\ \|af\|_1 = |a|\|f\|_1 & \quad \forall f \in \mathcal{B} \text{ et } \forall a \in \mathbb{R} \\ \|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1 & \qquad \forall f, g \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Ces relations sont des conséquences immédiates des propriétés pour $\|\cdot\|_1$ définie sur $\mathcal{J}$.

Lemme 3.1.4. *Si $f \in \mathcal{B}$ et (f_n) est une suite de fonctions simples L-Cauchy qui détermine f, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Preuve

Puisque (f_q) est une suite de fonctions simples L-Cauchy alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_r - f_q\|_1 < \varepsilon, \quad \forall r, q \geqslant N_\varepsilon.$$

On fixe $r > N_\varepsilon$ et on pose $g_q = f_r - f_q \in \mathcal{J}$ pour $q \in \mathbb{N}$ alors presque par tout $t \in I$,

$$\lim_{q\to\infty} g_q(t) = f_r(t) - f(t) \in \mathcal{B}$$

car

$$\|g_l - g_k\|_1 = \|f_r - f_q\|_1$$

ce qui entraine que la suite (g_q) est une suite L-Cauchy qui détermine la fonction $f_r - f \in \mathcal{B}$. Par conséquent

$$\|f - f_r\|_1 = \lim_{q\to\infty} \|g_q\|_1 = \lim_{q\to\infty} \|f_q - f_r\|_1 < \varepsilon$$

Ce qui implique

$$\lim_{r\to\infty} \|f_r - f\|_1 = 0.$$

■

Corollaire 3.1.1. *Si $f \in \mathcal{B}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une fonction simple $g_\varepsilon \in \mathcal{J}$ telle que*

$$\|f - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

i.e. l'ensemble $\mathcal{J}$ est dense dans $\mathcal{B}$ avec la semi-norme $\|\cdot\|_1$.

D'où le résultat suivant.

Lemme 3.1.5. *L'espace $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_1)$ est complet.*

Preuve

Soit $(g_q)_{q\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ une suite de Cauchy pour la semi-norme $\|\cdot\|_1$. D'après le Corollaire 3.1.1, pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe une fonction simple $f_q \in \mathcal{J}$ tel que :

$$\|g_q - f_q\|_1 < \frac{1}{q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|f_q - f_r\|_1 &= \|f_q - g_q + g_q - g_r + g_r - f_r\|_1 \\ &\leqslant \|f_q - g_q\|_1 + \|g_q - g_r\|_1 + \|g_r - f_r\|_1 \\ &< \frac{1}{q} + \|g_q - g_r\|_1 + \frac{1}{r}\end{aligned}$$

et par conséquent, la suite (f_q) est L-Cauchy. Et d'après le Lemme 3.1.1, il existe une sous-suite (f_{q_s}) de (f_q) qui converge presque par tout sur I vers une fonction $f : I \to X$ et la sous-suite (f_{q_s}) est L-Cauchy, Donc $f \in \mathcal{B}$.De plus, on a

$$\|g_{q_s} - f\|_1 \leqslant \|g_{q_s} - f_{q_s}\|_1 + \|f_{q_s} - f\|_1$$

ce qui entraine que la sous-suite (g_{q_s}) de (g_q) converge vers f pour la semi-norme $\| \cdot |_1$ d'après le Lemme 3.1.4. Par conséquent, la suite (g_q) converge aussi pour la semi-norme $\| \cdot \|_1$ vers $f \in \mathcal{B}$. C'est à dire que, $\mathcal{B}$ est complet.■
En utilisant le Lemme 3.1.5, on peut voir facilement qu'on a le résultat suivant.

Corollaire 3.1.2. *Une fonction $f : I \to X$ appartient à $\mathcal{B}$ si et seulement s'il existe une suite de fonctions simples $(f_n) \in \mathcal{J}, n \in \mathbb{N}$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \text{ pour presque tout } \forall t \in I,$$

Et

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n - f\|_X = 0.$$

Par ce corollaire, on obtient que $f \in \mathcal{B}$ est nécessairement mesurable. D'autre part, ce corollaire donne une autre définition de l'intégrabilité au sens Bochner qui est équivalente à la Définition 3.1.3. (Et la Définition 3.1.4 peut être utilisée pour définir l'intégrale).

Définition 3.1.5. *Une fonction $f : I \to X$ est intégrable au sens de Bochner s'il y a une suite de fonctions simples $f_n : I \to X$, $n \in \mathbb{N}$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \text{ pour presque tout } t \in I,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n - f\|_X = 0.$$

Théorème 3.1.1. *Si $f : I \to X$ est telle que $f(t) = 0$ presque par tout sur I alors $f \in \mathcal{B}$ et $\int_I f = 0$*

Preuve

Il suffit de choisir une suite de fonctions simples (f_n) L-Cauchy qui est identiquement nulle pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Corollaire 3.1.3. *Si $f : I \to X$ est intégrable au sens de Bochner et $g : I \to X$ est telle que $f(t) = g(t)$ presque partout sur I alors g est intégrable au sens de Bochner et*

$$\int_I f = \int_I g.$$

Preuve

Comme $g = g - f + f$ et $(g - f)$ est intégrable au sens de Bochner d'après le Théorème 3.1.1 , on obtient immédiatement le résultat. ∎

Remarque

Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, i.e. pour $f : I \to \mathbb{R}$, l'intégrabilité de Bochner et l'intégrale de Bochner données dans les définitions 3.1.4 ou 3.1.5 donne une autre approche de l'intégrabilité de Lebesgue et l'intégrale de Lebesgue. Ce qui veut dire, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est Bochner-intégrable au sens de la Définition 3.1.4 si et seulement si f est Lebesgue intégrable et les deux intégrales ont la même valeur.

3.2 Propriétés des fonctions Bochner-intégrable

D'après la définition de l'ensemble $\mathcal{B}$, il est clair que toute fonction $f \in \mathcal{B}$ est mesurable au sens de la Définition 2.1.2. Et d'après le Théorème 2.1.1 de Pettis, si $f \in \mathcal{B}$ alors f est aussi faiblement mesurable et l'ensemble d'images de f est séparable presque partout.

Définition 3.2.1. *Pour un ensemble mesurable $E \subset I$ et $f \in \mathcal{B}$ on définit :*

$$\int_E f = \int_I \mathbb{1}_E \cdot f = \lim_{n\to\infty} \int_I \mathbb{1}_E \cdot f_n$$

où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{J}$ détermine la fonction f.

Cette définition a un sens du moment que $(\mathbb{1}_E \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions simples qui détermine la fonction $\mathbb{1}_E \cdot f$.
Soit $f : I \to X$ une fonction mesurable à valeurs dénombrables de la forme :

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \mathbb{1}_{E_m}(t),\ t \in I \tag{3.6}$$

où $E_m \subset I$, $m \in \mathbb{N}$ sont mesurables et deux à deux disjoints et $y_m \in X$.

Lemme 3.2.1. *Une fonction $f : I \to X$ à valeurs dénombrables de la forme (3.6) est Bochner-intégrable si*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|y_m\|_X \mu(E_m) < \infty.$$

Preuve

Pour $l \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions

$$f_l(t) = \sum_{m=1}^{l} y_m \mathbb{1}_{E_m}(t),\ t \in I.$$

alors $f_l \in \mathcal{J}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{l\to\infty} f_l(t) = f(t)$ pour $t \in I$. Alors pour $t \in I$ et $k < l$, on a par définition :

$$\|f_l(t) - f_k(t)\|_X = \left\| \sum_{m=k+1}^{l} y_m \mathbb{1}_{E_m}(t) \right\|_X$$

et comme

$$\left\| \sum_{m=k+1}^{l} y_m \mathbb{1}_{E_m}(t) \right\| \leqslant \sum_{m=k+1}^{l} \|y_m\|_X \mathbb{1}_{E_m}(t)\|_X.$$

on a

$$\|f_l - f_k\|_1 = \sum_{m=k+1}^{l} \|y_m\|_X \mu(E_m).$$

A partir de là, on peut voir que la suite (f_l) est L-Cauchy si et seulement si la série $\sum\limits_{m=1}^{\infty} y_m \mu(E_m)$ converge. Et dans ce cas, la série $\sum\limits_{m=1}^{\infty} y_m \mathbb{1}_{E_m}$ converge dans X vers f, il en résulte alors par définition que $f \in \mathcal{B}$ et

$$\int_I f = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \mu(E_m)$$

et aussi

$$\int_I \|f\|_X = \sum_{m=1}^{\infty} \|y_m\|_X \mu(E_m).$$

■

Corollaire 3.2.1. *Une fonction mesurable $f : I \to X$ à valeurs dénombrables telle que $\|f(t)\|_X \leqslant g(t)$ presque partout sur I avec $g \in \mathcal{B}$ est Bochner-intégrable.*

Preuve

On peut utiliser la suite (f_l) donnée dans la preuve du Lemme précédent, on voit alors que

$$\|f_l\|_1 = \int_I \|f_l(t)\|_X \leqslant \int_I g < \infty \; \forall l \in \mathbb{N}$$

et par conséquent la condition du Lemme 3.2.1 est satisfaite, par suite f soit Bochner-intégrable. ■

Théorème 3.2.1. *Une fonction mesurable $f : I \to X$ est Bochner-intégrable si et seulement si $\|f\|_X : I \to \mathbb{R}$ est Bochner-intégrable.*

Preuve

Si $f \in \mathcal{B}$ alors $\|f\|_X$ est intégrable au sens de Bochner. (Un résultat du Lemme 3.1.3).
Inversement, Supposons que $\|f\|_X$ est Bochner-intégrable. Puisque f est mesurable alors d'après les Corollaires 3.1.2 et 2.1.1, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il y a une fonction mesurable à valeurs dénombrables de la forme :

$$f_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_{m,k} \mathbb{1}_{E_{m,k}}(t),\; t \in I. \tag{3.7}$$

où $E_{m,k}$, $m \in \mathbb{N}$ sont des ensembles mesurables de I deux à deux disjoints et $y_{m,k} \in X$, $m \in \mathbb{N}$ avec f_k vérifiant la propriété suivante : il existe $N \subset I$, $\mu(N) = 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f(t) - f_n(t)\|_X < \frac{1}{2k\mu(I)}, \qquad \text{pour } t \in I \setminus N \tag{3.8}$$

i.e. (f_k) converge uniformément vers f sur $I \setminus N$ et par conséquent

$$\begin{array}{rcl} \|f_k(t)\|_X & = & \|f(t) - f(t) + f_k(t)\|_X \\ & \leqslant & \|f(t)\|_X + \|f(t) - f_k(t)\|_X \\ & < & \|f(t)\|_X + \dfrac{1}{2k\mu(I)} \ p.p \end{array}$$

et puisque $\mu(I) < \infty$, le Corollaire 3.2.1 implique que f_k est Bochner-intégrable et

$$\int_I \|f_k\|_X = \sum_{m=1}^{\infty} \|y_{m,k}\|_X \mu(E_{m,k}) < \infty.$$

On choisit $r_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=r_k+1}^{\infty} \|y_{m,k}\|_X \mu(E_{m,k}) < \frac{1}{2k}.$$

Puisque $\|f - f_k\|_X$ est mesurable et l'inégalité (3.8) est vérifiée alors la fonction $\|f - f_k\|_X$ est intégrable et :

$$\int_I \|f - f_k\|_X < \frac{1}{2k\mu(I)} \cdot \mu(I) = \frac{1}{2k}.$$

on pose :

$$g_k = \sum_{m=1}^{r_k} y_{k,m} \mathbb{1}_{E_{k,m}}.$$

Alors $g_k \in \mathcal{J}$ et :

$$f_k = g_k + \sum_{m=r_k+1}^{\infty} y_{k,m} \mathbb{1}_{E_{k,m}}.$$

On a aussi

$$\begin{array}{rcl} \|f - g_k\|_1 & = & \displaystyle\int_I \|f - g_k\|_X \\ & \leqslant & \displaystyle\int_I \|f - f_k\|_X + \int_I \|f_k - g_k\|_X \\ & < & \dfrac{1}{2k} + \displaystyle\sum_{m=r_k+1}^{\infty} \|y_{k,m}\|_X \mu(E_{m,k}) \\ & < & \dfrac{1}{k}. \end{array}$$

Donc $f \in \mathcal{B}$. ∎

Corollaire 3.2.2. *Si $f : I \to X$ est mesurable et bornée par une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}$ i.e. $\|f(t)\|_X \leqslant g(t)$ presque partout sur I alors f est Bochner intégrable .*

Proposition 3.2.1. *Soit f une fonction mesurable de la forme :*

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n} \tag{3.9}$$

avec $g : I \to X$ est une fonction mesurable et bornée, E_n sont des ensembles mesurables de I deux à deux disjoints et $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ (voir la Proposition 2.1.2). Alors :
f est Bochner intégrable si et seulement si x_n et E_n, $n \in \mathbb{N}$ sont choisit tels que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mu(E_n)$ soit absolument convergente dans X, et dans ce cas,

$$\int_E f = \int_E g + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mu(E \cap E_n) \tag{3.10}$$

pour tout ensemble mesurable $E \subset I$.

Preuve

Supposons que f est Bochner-intégrable s'écrivant sous la forme (3.9). Puisque g est bornée, alors $g \in \mathcal{B}$ d'après le Corollaire 3.2.2 et on a aussi

$$f - g = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mathbb{1}_{E_n} \in \mathcal{B}.$$

D'après le Théorème 3.2.1, on a

$$\int_I \| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mathbb{1}_{E_n} \|_X < \infty$$

cela signifie que

$$\int_I \| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mathbb{1}_{E_n} \|_X = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \cdot \mu(E_n) < \infty$$

parce que $E_n \cap E_m = \emptyset$ pour tout$m \neq n$. Et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mu(E_n) \quad \text{est absolument convergente dans } X.$$

Inversement, Si g est bornée et les séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mu(E_n)$ sont absolument convergentes alors $g \in \mathcal{B}$, d'après le Corollaire 3.2.2 et

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n) \in \mathcal{B}$$

d'après le Lemme 3.2.1. Par conséquent, $f = g + h$ est Bochner-intégrable avec :

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{E_n}.$$

■

Bibliographie

[1] Dunford,N., Schwartz, J.T., Linear operators **I**., Interscience Publishers, New York, London, 1958.

[2] Lang, S., Real and Functional Analysis, Springer-Verlag, New York,1993.

[3] Mikusiǹski, J., The Bochner Integral, Birkhäuser, Basel, 1978.

[4] S. Schwabik, Y. Guoju, Topics in Banach Space integration, World Scientific, Singapore, 2005.

[5] Wheeden, R. L., Zygmund A., Measure and Integral, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[6] Yosida, K., Functional Analysis, Academic Press, New York,1965.