Année univ.: 2021/2022

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar.

Faculté des Sciences.

Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques

par

Mme. Kernafia Nacera [1]

Sous la direction de

**Dr**. H. Benchira

**Thème :**

# Principe du Maximum et Synthèse Optimale

Soutenue le ../09/2022 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **Dr. N.** Bekkouche | Université de Saïda Dr. Moulay Tahar | Président |
| **Dr. H.** Benchira | Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen | Encadreur |
| **Mr. B.** Saadli | Université de Saïda Dr. Moulay Tahar | Examinateur |

Année univ.: 2021/2022

1. e-mail : kernafia2038@gmail.com

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes parents, mon mari et mes enfants pour leurs dévouements, leurs sacrifices et leurs encouragements.
A mes parents, mes sœurs, mes frères, neveux et nièces.
Que ce travail soit un témoignage de ma profonde affection et gratitude à ceux que j'aime.

# Remerciements

Avant tout, on remercie **ALLAH** Tout-Puissant de nous avoir donné le courage et la volonté d'accomplir ce travail.
Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à notre Encadreur
**Mme. Hayet Benchira**, pour avoir dirigé ce travail avec obnégation et disponibilité. Ses conseils nous ont été d'un grand apport pour accomplir de ce mémoire. Nous adressons mes plus vifs remerciements à **Mme.NoriaBekkouche**, pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de notre mémoire.
Sincères remerciements vont également à **Mr. Bendjed Saadli**, qui a eu l'honneur de participer au jury de soutenance de notre mémoire en tant qu'examinateur.
Ma reconnaissance va également à toute personne ayant participer d'une quelque façon, à la réalisation de ce travail, en particulier mon mari **Mr. Halimi Abderrazak** pour son soutient et son aide concrète.
Je termine par un vif hommage à mes très chers parents, qui ont toujours été la pour moi, et mes frères.

**Résumé**

" مبدأ التوليف الأقصى والأمثل"

**الملخص:**

في هذه الأطروحة ، نقدم توليفًا مثاليًا لمشاكل التحكم المثلى في المعادلة التفاضلية العادية ، ويستند هذا التركيب على حلول C1 لمعادلة هاملتون-جاكوبي-بيلمان.

**كلمات مفتاحية :** التحكم الأمثل ، التوليف الأمثل.،

# « Principe du Maximum et Synthèse Optimale »

**Résumé** :

Dans ce mémoire, nous présentons une synthèse optimale pour les problèmes de contrôle optimal en équation différentielle ordinaire, cette synthèse est basée sur les solutions C1 de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

**Mots clés** : contrôle optimal, synthèse optimale.

**« Principle of Maximum and Optimal Synthesis»**

**Abstract** :

In this thesis, we present an optimal synthesis for optimal control problems in ordinary differential equation, this synthesis is based on the C1 solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

**Key words** : optimal control, optimal synthesis.

# Contents

# Introduction

Les problèmes de contrôle en équation différentielle ordinaire considérés sont du type

$$\begin{cases} (\mathrm{P})_{cont} \begin{cases} \inf\limits_{(x(.),u(.))} \displaystyle\int_0^T L(t,x(t),u(t))dt + g(x(T)), \\ (EDO)_c \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), & pp\ t \in [0,T] \\ x(0) = x_0, \\ u(.) \in K, \end{cases} \end{cases} \\ x(.)\colon [0,T] \to X \text{ est l'état du système,} \\ u(.)\colon [0,T] \to Z \text{ le contrôle,} \end{cases}$$

avec $X$ et $Z$ des espaces de Banach.

Ils sont analysés pour des contrôles admissibles tels que $u(t) \in K$, $pp\ t \in [0,T]$ et $K \subset Z$, en général compacts.

Au delà des conditions nécessaires d'optimalité l'analyse tente de réaliser ce que l'on appelle une synthèse optimale qui consiste a dégager des procédures de calcul du contrôle optimal et ceci quelque soit la condition initiale $(t_0, x(t_0)\ )$.

Nous nous proposons dans ce travail de montrer que hors le cas classique des problèmes linéaires quadratiques à contrôle libres la synthèse optimale est difficile a réaliser.

Cependant par les solutions dites de viscosité il sera possible d'avancer substantiellement dans la réalisation d'une telle synthèse.

Le travail est organisé en trois chapitres.

Après un rappel rapide d'optimisation abstraite, le problème $(\mathrm{P})_{cont}$ est ramené à la forme abstraite au précisant les espaces fonctionnels et les hypothèses générales de travail.

Les conditions de régularité sont analyseés du point de vue de la contrôlabilité et les conditions d'optimalité sont obtenues à partir de leur expression abstraite. Ceci termine ce premier chapitre. Dans le second nous montrons la limite de la synthèse optimale que ce soit à partir des conditions d'optimalité, ou du problème aux limites (état-état adjoint) ou enfin à partir du principe du Maximum. Nous verrons alors l'intérêt majeur d'approche par l'équation Hamilton Jacobi Bellman $(HJB)$ pour laquelle l'hypothèse de différentiabilite $C^1$ de la fonction valeur (essentielle pour l'équation).

Dans le troisième chapitre seront considérés quelques aspects numériques de calcul de la fonction valeur.

# Chapter 1

# Optimisation abstraite et Contrôle Optimal en équation différentielle ordinaire.

## 1.1 Principes généraux d'optimisation abstraite.

Soient $X$ est un espace de Banach, $D$ un fermé dans $X$ appelé domaine. Considèrons un problème d'optimisation abstrait de la forme :

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \inf \varphi(x) \\ x \in D \end{cases}.$$

La fonction $\varphi(.) : X \to \mathbb{R}$ est appelée fonction coût, objectif ou critère. Tout point $x \in X$ vérifiant : $x \in D$, est appelé point admissible ou point réalisable du problème (P).

Chercher une solution du problème avec contraintes (P) revient à chercher un point de minimum local de $\varphi$ dans l'ensemble des points admissibles, au sens de les définitions suivantes :

**Definition 1.1** (*Optimal local*) *On dit que $\bar{x}$ est maximum local (resp minimum local) de $\varphi(.)$ si*

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in B(\bar{x}, r) : \varphi(x) \leq \varphi(\bar{x})$$

*(resp $\varphi(x) \geq \varphi(\bar{x}), \forall\, x \in B(\bar{x}, r)$).*

**Definition 1.2** (*Optimal global*) *On dit que $\bar{x}$ est maximum global (resp minimum global) de $\varphi(.)$ si*

$$\forall x \in D : \varphi(x) \leq \varphi(\bar{x})$$

*(resp $\forall x \in D : \varphi(x) \geq \varphi(\bar{x})$).*

**Remarque :**

Tout point de minimum global est aussi local.

## 1.2 Quelques éléments géométriques.

**Cône et cône tangent à $D$**

**Definition 1.3** *$T \subset X$ est dit un cône si : $\forall x \in T, \forall \lambda \geq 0 : \lambda x \in T$. Autrement dit :*

$$\lambda T \subset T, \forall \lambda \geq 0.$$

**Definition 1.4** *1) Soient $\bar{x} \in D$, $v \in X$ est un vecteur tangent à $D$ en $\bar{x}$ si $\exists\, x_n \to \bar{x}$ dans $D$, $\exists\, \lambda_n \geq 0$ tels que*

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n \ ( \ x_n \ - \ \bar{x}) = v.$$

*2) $T(D, \bar{x})$ sera l'ensemble des vecteurs tangents à $D$ en $\bar{x}$.*

**Proposition 1.5** *$T(D, \bar{x})$ est un cône non vide fermé.*

**Remarque** :

Le cône tangent est un concept essentiel pour l'écriture des conditions d'optimalité. Il sert à linéariser l'ensemble admissible au point optimal $\bar{x}$.

## 1.3 Condition d'optimalité.

**Theorem 1.6** *Soit $\varphi(.)$ différentiable et $\bar{x}$ minimum local du problème $(P)$. Alors :*

$$\varphi^{'}(\bar{x})\,(v) \geq 0, \forall v \in T(D, \bar{x}).$$

## 1.4 Cas d'un domaine explicité.

Soient $D = \{x \in X \ / F(x) = 0_Y\}$ avec $Y$ est un espace de Banach et $F : X \to Y$ de classe $C^1$.

**Theorem 1.7** **(***Lyusternik***)** *Soit $x \in D$, si $\operatorname{Im} F'(x) = Y$ alors*

$$T(D, x) = \ker F'(x).$$

Ceci rapproché du théorème d'optimalité mène a:

**Theorem 1.8** (*Optimalité cas $C^1$*) *On suppose que*

*1)* $\varphi$ *et* $F$ *sont* $C^1$,

*2)* $\bar{x}$ *est minimim local de* $(P)$,

*3)* $\operatorname{Im} F'(\bar{x}) = Y$.

*Alors* $\exists\ y^* \in Y^*$ *tel que*

$$(K-T)\begin{cases} \varphi'(\bar{x}) + (F'(\bar{x}))^* \, y^* = 0_{X^*}, \\ \qquad F(\bar{x}) = 0_Y. \end{cases}$$

**Remarque :**

La preuve s'appuie essentiellement sur le théorème de Lyusternik ci dessus.

## 1.5 Formulation Lagrangienne.

Le système $(K-T)$ suggère naturellement l'introduction de la fonctionnelle dite Lagrange

$$\mathtt{L} : X \times Y^* \to \mathbb{R} \text{ telle que } \mathtt{L}(x, y^*) = \varphi(x) + y^* \left(F(x)\right)$$

Le théorème 1.8 s'exprime alors comme suit:

**Theorem 1.9** (*Optimalité Lagrangien*) *Sous les hypothèses du théorème 1.8 ci dessus* $\exists\ \bar{y}^* \in Y^*$ *telle que*

$$(K-T)_L \begin{cases} \mathtt{L}_x'(\bar{x}, \bar{y}^*) = 0_{X^*} \\ \mathtt{L}_y'(\bar{x}, \bar{y}^*) = 0_Y \ . \end{cases}$$

## 1.6 Cas de Contrôle Optimal en équation différentielle ordinaire.

Nous noterons pour simplifier $(EDO)$ pour dire équation différentielle ordinaire.

Soient $X$, $Z$ deux espaces de Banach. Le problème considéré sera de la forme :

$$(\mathrm{P})_{cont}\begin{cases} \inf\limits_{(x(.),u(.))}\displaystyle\int_0^T L(t,x(t),u(t))dt+g(x(T)), \\ (EDO)_c\begin{cases} \dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)), & pp\ t\in[0,T] \\ x(0)=x_0, \\ u(.)\in\mathcal{U} \end{cases} \end{cases}$$

Où $(EDO)_c$ signifie $(EDO)$ contrôlée.

L'ensemble des contrôles $\mathcal{U}$ est tel que :

$$u(.)\in\mathcal{U}\Leftrightarrow\begin{cases} u(.):[0,T]\to Z \ \text{ mesurable et} \\ u(t)\in K \qquad pp\ t\in[0,T], \end{cases}$$

avec $K$ un convexe fermé borné dans $Z$.

## 1.7 Les espaces fonctionnels de travail.

Pour $q\in[1,+\infty]$, on considère

**L'espace de Lebesgue** $L^q(0,T;X)$

$x(.)\in L^q(0,T;X)$ signifie $x(.):[0,T]\to X$ mesurable et

$$\int_0^T \|x(t)\|_X^q \ \ dt \ < \ \infty, \forall\ q\in[1,+\infty[.$$

**Proposition 1.10** *1)* $L^q(0,T;X)$ *muni de la norme* $\|x(.)\|_{L^q(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|x(t)\|_X^q \; dt\right)^{\frac{1}{q}}$ *est un espace de Banach.*

*2)* $\forall q \in [1,+\infty[$, *le dual topologique de* $L^q(0,T;X)$ *est donné par* $L^{q^*}(0,T;X^*)$ *où* $X^*$ *est le dual topologique de* $X$ *et* $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^*}=1$.

**L'espace de Lebesgue** $L^\infty(0,T;X)$

$$x(.) : [0,T] \longrightarrow X \text{ mesurable et } \exists M \;\; / \; \|x(t)\|_X \leq M \qquad pp\ t \in [0,T].$$

**Proposition 1.11** 1) $\|x(.)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{M \;/\; \|x(t)\|_X \leq M \qquad pp\ t\in[0,T]\}$ *est une norme pour* $L^\infty(0,T;X)$.

2) $L^\infty(0,T;X)$ *est complet pour cette norme.*

**L'espace de Sobolev** $W^{1,q}(0,T;X)$

$x(.) \in W^{1,q}(0,T;X)$ si

1) $\dot{x}(.)$ existe *pp* $t \in [0,T]$,

2) $\dot{x}(.) \in L^q(0,T;X)$,

3) $\forall t_0 \in [0,T]$ , $\exists\ \alpha \in X$ Tel que $\forall t \in [0,T]$,

$$x(t) = \alpha + \int_{t_0}^t \dot{x}(s)ds.$$

**Proposition 1.12** *1)* $\forall q \in [1,+\infty[$, $W^{1,q}(0,T;X)$ *est un espace de Banach pour la norme*

$$\|x(.)\|_{W^{1,q}(0,T;X)} = \left(\|x(.)\|^q_{L^q(0,T;X)} + \|\dot{x}(.)\|^q_{L^q(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*2)* $x(.) \in W^{1,\infty(}0,T;X) \Leftrightarrow \begin{cases} a)\ \dot{x}(.) \text{ existe pp } t \in [0,T], \\ b)\ \dot{x}(.) \in L^{\infty}(0,T;X). \end{cases}$

*3)* $\forall q \in [1,+\infty[$, *le dual topologique de* $W^{1,q}(0,T;X)$ *est l'espace* $W^{1,q^*}(0,T;X^*)$ *avec* $X^*$ *est le dual topologique de* $X$ *et* $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^*}=1.$

## 1.8 Hypothèses sur le problème $(\mathbf{P})_{cont}$

$(H_1)$ $g : X \to \mathbb{R}$, de classe $C^1$,

$(H_2)$ $L : \mathbb{R} \times X \times Z \to \mathbb{R}$,et $f : \mathbb{R} \times X \times Z \to X$, $C^1$carathéodory,

c'est à dire:

$\forall (a,b) \in X \times Z : f(.,a,b)$ et $L(.,a,b)$ sont mesurables et $f(t,.,.)$ et $L(t,.,.)$ sont $C^1$sur $X \times Z$ $\quad pp\ t \in [0,T]$,

$(H_3)$ $f(t,.,.)$ et $L(t,.,.)$ sont bornées sur les bornés de $X \times Z$,

$(H_4)$ $\|f(t,a,b) - f(t,\bar{a},b)\| \leq c\,\|a-\bar{a}\|$ ($c$ ne dépend pas de $t$ et $b$),

$(H_5)$ $\|f(t,a,b)\|_X \leq c\,(1+\|a\|_X+\|b\|_Y)$ $\quad pp\ t \in [0,T]$.

**Proposition 1.13** *Sous les hypothèses* $(H_1)\_(H_5)$, $\forall q \in [1,+\infty]$, $\forall u(.) \in L^q(0,T;Z)$, $\forall x_0$ *fixé,* $\exists x(.)$ *solution de* $(EDO)_c$ *et* $x(.) \in W^{1,q}(0,T;X)$.

**Remarque :**

$(H_1)\_(H_4)$ assurent l'existence locale de la solution et $(H_5)$ permet de la prolonger sur $[0,T]$.

## 1.9 Réduction à la forme abstraite.

Nous ferons l'étude avec $u(.) \in L^1(0,T;Z)$ et $x(.) \in W^{1,1}(0,T;X)$, le cas général $q \in ]1,+\infty[$ se traite de la même manière.

Pour cela considérons:

1)

$$\begin{aligned}
\varphi_1, \varphi_2 &: W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;Z) \to \mathbb{R} \text{ définis par} \\
\varphi_2(x(.),u(.)) &= \int_0^T L(t,x(t),u(t))dt \\
\varphi_1(x(.),u(.)) &= g(x(T)).
\end{aligned}$$

2) Pour $Y = L^1(0,T;Z) \times X$ on considère

$$\begin{aligned}
\psi &: W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;Z) \to Y \;\text{ définie par} \\
\psi(x(.),u(.)) &= \begin{pmatrix} h_1(.) \\ h_2(.) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} h_1(x(.),u(.))(t) = \dot{x}(t) - f(t,x(t),u(t)) \quad pp\ t \in [0,T] \quad \text{et} \\ h_2(x(.),u(.)) = x(0) - x_0. \end{cases}$$

Le problème $(\mathrm{P})_{cont}$ prend alors la forme abstraite:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \inf \;\varphi(x(.),u(.)) \\ \psi(x(.),u(.)) = 0_{L^1 \times X} \\ u(.) \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

avec $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Notons par $D$ le domaine de (P) c'est à dire

$$(x(.), u(.)) \in D \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \; x(.) \in W^{1,1}(0,T;X), \;\; u(.) \in L^1(0,T;Z), \\ 2) \; \psi(x(.), u(.)) = 0_{L^1 \times X}, \\ 3) \; u(.) \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

## 1.10 Condition d'Optimalité.

Le théorème 1.6 d'optimalité général nécessite la différentiabilité des fonctionnelles $\varphi$ et $\psi$.

**Proposition 1.14** *Sous $(H_1)$ et $(H_2)$, $\varphi$ est différentiable avec*

$$\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' \text{ oú } \begin{cases} \varphi_1'(x(.), u(.))\,(v(.), w(.)) = g'(x(T))(v(T)) \\ \varphi_2'(x(.), u(.))\,(v(.), w(.)) = \displaystyle\int_0^T L_a(t, x(t), u(t))(v(t))dt + \int_0^T L_b(t, x(t), u(t))(w(t)) \end{cases}$$

Le théorème1.6 d'optimalité pour (P) s'exprime alors par:

**Theorem 1.15** *On suppose que:*

*1) $(H_1)\_\_(H_5)$ sont satisfaites*

*2) $(\bar{x}(.), \bar{u}(.))$ est minimum local pour le $(P)_{cont}$.*

*Alors* $\varphi'(\bar{x}(.), \bar{u}(.))\,(v(.), w(.)) \geq 0 \;\; \forall\,(v(.), w(.)) \in T(D, (\bar{x}(.), \bar{u}(.)))$.

**Analyse du cône tangent** $T(D,(\bar{x}(.),\bar{u}(.)))$

Le domaine de (P) est de la forme $D = D_1 \cap D_2$ avec

$$(x(.),u(.)) \in D_1 \Longleftrightarrow D_1 = \left\{ \begin{array}{l} (x(.),u(.)) \in W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;Z) \text{ et} \\ \\ \psi(x(.),u(.)) = 0_{L^1 \times X} \ . \end{array} \right\}$$

$$(x(.),u(.)) \in D_2 \Longleftrightarrow D_2 = \left\{(x(.),u(.)) \in W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;Z) \text{ et } u(.) \in \mathcal{U} \ .\right\}$$

**Hypothèse de régularité :**

$(H_6)$ $T(D,(\bar{x}(.),\bar{u}(.))) = T(D_1,(\bar{x}(.),\bar{u}(.))) \cap T(D_2,(\bar{x}(.),\bar{u}(.)))$.

Nous analyserons plus loin cette hypothèse.

**Proposition 1.16** *Sous les hypothèses* $(H_1)\_\_\ (H_6)$ *l'opérateur* $\psi$ *donné par*

$$\psi\left(x(.),u(.)\right) = \begin{pmatrix} h_1(x(.),u(.)) \\ h_2(x(.),u(.)) \end{pmatrix}$$

*est Frechet différentiable* $\psi'(x(.),u(.))\left(v\left(.\right),w\left(.\right)\right)$ /

1) $h_1'(x(.),u(.))\left(v\left(.\right),w\left(.\right)\right)(t) = \dot{v}\left(t\right) - A\left(t\right)\left(v\left(t\right)\right) - B\left(t\right)\left(w\left(t\right)\right) \quad ppt \in [0,T]$

*où*

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = f\ '_a(t,x(t),u(t)) \\ \\ B(t) = f\ '_b(t,x(t),u(t)) \end{array} \right.$$

2) $h_2'(x(.),u(.))\left(v\left(.\right),w\left(.\right)\right) = v\left(0\right).$

**Remarque :**

Nous savons qu'en général

$$T(D_1,(\bar{x}(.),\bar{u}(.))) \subset \ker \psi'(\bar{x}(.),\bar{u}(.)).$$

**Definition 1.17** (*Système Linéarisé*) *On appelle système linéarisé en* $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in D$*, le système suivant*

$$(Sys)_{lin} \begin{cases} \dot{v}(t) = A(t)v(t) + B(t)w(t) \quad pp \quad t \in [0, T] \\ v(0) = 0_X, \end{cases}$$

*où*

$$A(t) = f_a'(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ et } B(t) = f_b'(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

**Theorem 1.18** *Si le système linéarisé en* $(\bar{x}(.), \bar{u}(.))$ *est complètement contrôlable alors*

$$\psi'(x(.), u(.)) : W^{1,1}(0, T; X) \times L^1(0, T; Z) \to Y \quad \text{est surjectif}$$

*et*

$$T(D_1, (x(.), u(.))) = \ker \psi'(x(.), u(.)).$$

*Sachant que* $D_2 = W^{1,1}(0, T; X) \times \mathcal{U}$*, il est clair que*

$$T(D_2, (x(.), u(.))) = W^{1,1}(0, T; X) \times T(\mathcal{U}, u(.)).$$

Tout revient donc à expliciter $T(\mathcal{U}, u(.))$.

**Proposition 1.19**

$$w(.) \in T(\mathcal{U}, u(.)) \Rightarrow w(t) \in T(K, u(t)) \; ppt \in [0, T].$$

**Proof.** Soit $w(.) \in T(\mathcal{U}, u(.))$ alors par définition il existe $u_n(.) \in \mathcal{U}$ tel que

$$u_n(.) \xrightarrow{L^1} u(.) \text{ et } \lambda_n \geq 0, \; \lambda_n (u_n(.) - u(.)) \xrightarrow{L^1} w(.).$$

On sait alors que

1) $\exists N_1 \subset \mathbb{N}$ tel que

$$u_n(.) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in N_1}}{\overset{K}{\rightarrow}} u(.) \quad ppt \in [0,T] \text{ et}$$

2) $\exists N_2 \subset N_1$ tel que

$$\lambda_n \left(u_n(.) - u(.)\right) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in N_2}}{\rightarrow} w(.).$$

Par conséquent:

$$u_n(t) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in N_2}}{\overset{K}{\rightarrow}} u(t) \text{ et } \lambda_n \left(u_n(t) - u(t)\right) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in N_2}}{\rightarrow} w(t) \quad pp\ t \in [0,T].$$

Ainsi

$$w(t) \in T(K, u(t)) \ \ ppt \in [0,T].$$

■

**Conditions d'Optimalité :**

Sous $(H_6)$ et nous savons alors grâce au théorème 1.6 que $\forall (v\left(.\right), w\left(.\right))$ tels que :

$$\begin{cases} v(.) \in W^{1,1}(0,T;X), w(.) \in T(\mathcal{U}, \bar{u}(.)) \ \text{ et} \\ \psi_a'(\bar{x}(.), \bar{u}(.))(v(.)) + \psi_b'(\bar{x}(.), \bar{u}(.))(w(.)) = 0_{X^*}. \end{cases}$$

Alors

$$\varphi^{'}\left(\bar{x}(.), \bar{u}(.)\right)\left(v(.), w(.)\right) \geq 0.$$

Le théorème 1.9 mène alors à :

$\exists y^* = \left(y\left(.\right), \alpha\right) \in Y^*$ avec $Y^* = L^1\left(0,T;X^*\right) \times W^{1,\infty}\left(0,T;X^*\right)$ tel que

$$\varphi^{'}\left(\bar{x}(.), \bar{u}(.)\right)\left(v(.), w(.)\right) + \left(\left(\psi'(\bar{x}(.), \bar{u}(.))\right)^* y^*\right)\left(v(.), w(.)\right) = 0_{\mathbb{R}}$$

c'est -à-dire

$$\int_0^T L_a'(\bar{x}(t),\bar{u}(t))(v(t)) + L_b'(\bar{x}(t),\bar{u}(t))(w(t))dt + g'(\bar{x}(T))\,(v(T)) = 0$$

$$+\int_0^T \langle y^*, \psi_a'(\bar{x}(t),\bar{u}(t))(v(t)) + \psi_b'(\bar{x}(t),\bar{u}(t))(w(t))\rangle_{YY^*}\,dt \qquad \forall\,(v(.),w(.))$$

Ainsi pour:

1) $(v(.),w(.)) = (v(.),0)$ on obtient :

$$\varphi_a'(\bar{x}(.),\bar{u}(.))\,(v(.),w(.)) + \left((\psi_a'(\bar{x}(.),\bar{u}(.)))^* \,y^*\right)(v(.),w(.)) = 0_{\mathbb{R}}$$

c'est à dire$\forall v(.) \in W^{1,1}(0,T;X)$

$$\langle N_0, v(T)\rangle_{XX^*} + \langle \alpha, v(0)\rangle_{XX^*} + \int_0^T l_a(t)(v(t))dt + \int_0^T \langle y\,(t)\,,\dot{v}(t) - A(t)v(t)\ \rangle\,dt = 0_{\mathbb{R}} \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{cases} l_a(t) = L_a'(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)), \\ N_0 = g'(x(T)), \\ A(t) = f\,{}_a'(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)). \end{cases}$$

L'égalité (1.1) prend la forme $\forall v(.) \in W^{1,1}(0,T;X)$ on a :

$$\langle N_0, v(T)\rangle_{XX^*} + \langle \alpha, v(0)\rangle_{XX^*} + \int_0^T y\,(t)\,(\dot{v}(t))dt + \int_0^T \langle l_a\,(t) - A^*(t)y(t), v\,(t)\ \rangle_{XX^*}\,dt = 0_{\mathbb{R}}. \tag{1.2}$$

Calculons par parties les intégrales suivantes :

$$\int_0^T \langle l_a(t), v(t)\rangle_{XX^*}\,dt \quad \text{et}$$

$$\int_0^T \langle A^*(t)y(t), v(t)\rangle_{XX^*}\,dt.$$

Si $q(t) = \displaystyle\int_t^T l_a(s)ds$ alors $\dot{q}(t) = -l_a(t)$ et

$$\int_0^T l_a(t)(v(t))dt = \int_0^T q(t)(\dot{v}(t))dt - \langle q(0), v(0)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

si $\theta(t) = \displaystyle\int_t^T A^*(s)y(s)ds$ alors $\dot{\theta}(t) = -A^*(t)y(t)$ et

$$-\int_0^T (A^*(t)y(t))(v(t))dt = -\int_0^T \theta(t)(\dot{v}(t))dt + \langle \theta(0), v(0)\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Par ailleurs, comme $v(.) \in W^{1,1}(0,T;X)$, $v(T) = v(0) + \displaystyle\int_0^T \dot{v}(s)ds$.

Par suite

$$\langle N_0, v(T)\rangle_{XX^*} = \langle N_0, v(0)\rangle_{XX^*} + \int_0^T N_0(\dot{v}(t))dt$$

donc (1.2) devient :

Pour tout $v\,(.) \in W^{1,1}(0,T;X)$,

$$\langle N_0 + \theta(0) + \alpha - q(0), v(0)\rangle_{XX^*} + \int_0^T \langle q(t) + N_0 + y\,(t) - \theta(t), \dot{v}(t)\rangle_{XX^*}\, dt = 0_{\mathbb{R}}.$$

D'après un théorème général de Riesz [6.p 81.Th 5 ] on a :

$$\begin{cases} \alpha - q(0) + N_0 + \theta(0) = 0_X \\ y\,(t) - \theta(t) + N_0 + q(t) = 0_{X^*} \quad pp\ t \in [0,T] \end{cases}$$

ce qui donne

$$y(t) = -g'(x(T)) - \int_t^T l_a(s)ds + \int_t^T A^*(s)y(s)ds \quad pp\ t \in [0,T].$$

Il est alors clair que $y(.) \in W^{1,1}(0,T;X^*)$ et donc

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = l_a(t) - A^*(t)y(t) \quad pp\ t \in [0,T] \\ y(T) = -g'(x(T)). \end{cases}$$

2) Pour $(v(.), w(.)) = (0, w(.))$, on obtient :

$$\varphi_b'(\bar{x}(.), \bar{u}(.))(v(.), w(.)) + (\psi_b'(\bar{x}(.), \bar{u}(.)))^* y^*)(v(.), w(.)) \geq 0 \quad \forall\ w(.) \in T(\mathcal{U}, \bar{u}(.))$$

c'est-à-dire

$$\int_0^T \langle l_b(t) - B^*(t)y(t), w(t)\rangle_{YY^*}\, dt \geq 0\ , \quad \forall w(.) \in T(\mathcal{U}, \bar{u}(.))$$

avec

$$\begin{cases} l_b(t) = L_b'(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ B(t) = f_b'(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \end{cases}$$

la proposition 1.8 donne alors

$$\forall w(.)\ / w(t) \in T(K, u(t))\ pp\ t \in [0,T]$$

on a :

$$\int_0^T \langle l_b(t) - B^*(t)y(t), w(t)\rangle_{YY^*}\, dt \geq 0.$$

**Proposition 1.20** *Soit* $d(t) = l_b(t) - B^*(t)y(t)$. *Si*

$$\int_0^T \langle d(t), w(t)\rangle_{YY^*}\, dt \geq 0, \forall w(.)\ /\ w(t) \in T(K, u(t))\ pp\ t \in [0,T]\,. \tag{1.3}$$

*Alors*

$$d(t) \in T(K, u(t))^{\oplus} \quad pp\ t \in [0,T]\,.$$

**Proof.** Pour $w(t) = b \in K$, $\forall t \in [0,T]$, $w(.) \in L^1(0,T;Z)$ car $I = [0,T]$ est compact, et donc

$$(1.3) \iff \inf_{w(.)\in T(\mathcal{U},\bar{u}(.))} \int_0^T \langle d(t), w(t)\rangle_Z \, dt \geq 0$$

par un théorème de sélection mesurable [17] on a :

$$\inf_{w(.)\in T(\mathcal{U},\bar{u}(.))} \int_0^T \langle d(t), w(t)\rangle_Z \, dt = \int_0^T \inf_{b\in T(K,\bar{u}(t))} \langle d(t), b\rangle_Z \, dt \geq 0$$

par suite :

$$\langle d(t), b\rangle_Z \geq 0 \qquad pp\ t \in [0,T], \forall b \in K$$

c'est-à-dire

$$d(t) \in T(K, \bar{u}(t)) \qquad pp\ t \in [0,T].$$

Sachant que

$$\int_0^t \theta(r)dr \geq 0 \quad \forall t \in [0,T] \Rightarrow \theta(t) \geq 0 \ \ pp\ t \in [0,T]$$

on a :

$$\langle d(t), b\rangle_Z \geq 0 \ \ \forall b \in T(K, \bar{u}(t)) \ \ pp\ t \in [0,T],$$

c'est-à-dire

$$d(t) \in T(K, \bar{u}(t))^{\oplus} \ \ pp\ t \in [0,T].$$

■

En conclusion nous avons le théorème

**Theorem 1.21** *On suppose :*

*1)* $(H_1)\_\_\,(H_6)$ *satisfaites,*

*2)* $(\bar{x}(.), \bar{u}(.)) \in W^{1,1}(0,T;X) \times L^1(0,T;Z)$ *est minimum local de* $(P)_{cont}$*,*

*3) Le système linéarisé en* $(\bar{x}(.), \bar{u}(.))$ *est complètement contrôlable.*

*Alors* $\exists\, y(.) \in W^{1,\infty}(0,T;X^*)$ *tel que*

$$(EDO)_* \begin{cases} \dot{y}(t) = -A^*(t)y(t) + l_a(t), & \\ & pp\ t \in [0,T] \\ -B^*(t)y(t) + l_b(t) \in T(K, \bar{u}(t))^{\oplus}, & \\ y(T) = -g'(x(T)), & \end{cases}$$

*avec*

$A(t) = f\,'_a(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),\ B(t) = f\,'_b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$

$l_a(t) = L'_a(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),\ l_b(t) = L'_b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$

# Chapter 2

# Autour de la Synthèse Optimale.

## 2.1 Synthèse état–état adjoint.

Ce paragraphe est consacré á des tentatives de synthèse optimale pour faire ressortir les limites des différentes approches.

Soit $\bar{z}(.) = \begin{pmatrix} \bar{x}(.) \\ y(.) \end{pmatrix}$, $\bar{z}(.)$ est solution du problème aux limites contraint suivant

$$
(\mathrm{P_{lim}}) \begin{cases} \dot{z}(t) = F(z(t), \bar{u}(t)), \quad pp\ t \in [0, T] \\ z(0) = \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \\ z(T) = \begin{pmatrix} \bar{x}(T) \\ y(T) \end{pmatrix}, \\ \quad \alpha(z(t), \bar{u}(t)) \in T(K, \bar{u}(t))^{\oplus} \quad pp\ t \in [0, T], \end{cases}
$$

avec

$$
\begin{array}{rcl}
F(z(t),\bar{u}(t)) & = & \left(\begin{array}{c} f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \\ \\ -A^{*}(t)y(t)+l_{a}(t) \end{array}\right) \\
\alpha(z(t),\bar{u}(t)) & = & -B^{*}(t)y(t)+l_{b}(t).
\end{array}
$$

**Remarque :**

Il n'est pas possible même sans la contrainte défini par $\alpha\,(.,.)$ de résoudre $(\mathrm{P}_{\lim})$ car $y(0)$ et $\bar{x}(T)$ sont indéterminés.

Nous allons voir dans le paragraphe suivant que même pour le cas linéaire quadratique des difficultés persistent.

### 2.1.1 Cas linéaire quadratique.

Il correspond au cas où $X$, $Z$ sont des espaces de Hilbert et

$$
\left\{\begin{array}{l}
L(t,a,b)=\frac{1}{2}\left\langle a,R(t)a\right\rangle_{X}+\frac{1}{2}\left\langle b,Q(t)b\right\rangle_{Z}, \\ \\
g(\theta)=\frac{1}{2}\left\langle \theta,F\ \theta\right\rangle_{X}, \\ \\
f\ (t,a,b)=A(t)a+B(t)b,
\end{array}\right.
$$

avec

$R(t)\in\mathcal{L}(X,X)$ symétrique,

$Q(t)\in\mathcal{L}(Z,Z)$ symétrique,

$F\in\mathcal{L}(X,X)$ symétrique,

$A(t)\in\mathcal{L}(X,X)$ et $B(t)\in\mathcal{L}(Z,X)$.

Le système d'optimalité devient :

$$
Opt(LQR)\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}\dot{\bar{x}}(t)=A(t)\bar{x}(t)+B(t)\bar{u}(t)\\ \dot{y}(t)=-A^{*}(t)y(t)+R(t)\bar{x}(t)\end{array}\right. \quad pp\ t\in[0,T]\\
\bar{x}(0)=x_0\\
y(T)=F\ \bar{x}(T)\\
-B^{*}(t)y(t)+Q(t)\bar{u}(t)\in(T(K,\bar{u}(t)))^{\oplus} \qquad pp\ t\in[0,T]\,.
\end{cases} \tag{2.1}
$$

**Remarque :**

Le système $Opt$ $(LQR)$ ne peut être résolu du fait de la contrainte (2.1) et la synthèse n'est donc pas possible.

### 2.1.2 Cas linéaire quadratique à controles libres.

Il correspond au cas où $K=Z$, c'est-à-dire la contrainte (2.1) devient alors

$$-B^{*}(t)y(t)+Q(t)\bar{u}(t)=0 \qquad ppt\in[0,T]\,.$$

Si on suppose que $Q(t)$ est inversible $pp\ t\in[0,T]$ .Alors

$$\bar{u}(t)=Q^{-1}(t)B^{*}(t)y(t) \qquad pp\ t\in[0,T]\,.$$

**Remarque** :

Les hypothèses classiques sur $Q(.)$ sont généralement $Q(t)$ symétrique uniformément définie positive c'est-á-dire :

$$\exists\alpha>0\ /\ \ Q(t)\,(a,a)\geq\alpha\parallel a\parallel^{2} \qquad pp\ t\in[0,T]\,.$$

En remplaçant l'expression de $\bar{u}(t)$ dans la système $Opt$ $(LQR)$, on obtient le système réduit à :

$$(LQR)_{réduit}\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)Q^{-1}(t)B^{*}(t)y(t), & pp\ t \in [0,T] \\ \dot{y}(t) = -A^{*}(t)y(t) + R(t)\bar{x}(t), & \\ \bar{x}(0) = x_0, & \\ y(T) = F\ \bar{x}(T). & \end{cases}$$

C'est encore un problème aux limites en $\begin{pmatrix} \bar{x}(.) \\ y(.) \end{pmatrix}$ qui peut théoriquement être résolu par la méthode du tir mais dont nous pouvons éviter la résolution grâce au principe du découplage qui consiste à rechercher $y(.)$ sous la forme :

$$y(t) = m(t)\bar{x}(t),$$

avec $m(t) : X \ \to X$ et $m(.)$ différentiable.

Ainsi

$$\dot{y}(t) = \dot{m}(t)\bar{x}(t) + m(t)\dot{\bar{x}}(t). \tag{2.2}$$

Les équations du système $(LQR)_{réduit}$ deviennent

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \left(A(t) + B(t)Q^{-1}(t)B^{*}(t)m(t)\right)\bar{x}(t) \\ \dot{y}(t) = (R\,(t) - A^{*}\,(t)\,m(t))\bar{x}(t) \end{cases} \quad pp\ t \in [0,T]\,.$$

En remplaçant les expressions de $\dot{\bar{x}}(t)$ et $\dot{y}(t)$ dans (2.2) on aboutit à $\forall \bar{x}\,(.) \in W^{1,1}(0,T;X)$

$$\left(\dot{m}(t) + m(t)A(t) + m(t)B(t)Q^{-1}(t)B^{*}(t)m(t) - R\,(t) + A^{*}\,(t)\,m(t)\right)\bar{x}(t) = 0\ \ pp\,t \in [0,T]\,.$$

Par ailleurs

$$y(T) = m(T)x(T) = Fx(T), \quad \forall x(.) \in W^{1,1}(0,T;X).$$

Ce qui mène aisément à l'équation de Riccati :

$$(Riccati) \begin{cases} \dot{m}(t) + m(t)A(t) + m(t)B(t)Q^{-1}(t)B^*(t)m(t) + A^*(t)m(t) - R(t) = 0_{\mathcal{L}(X)} \quad pp\ t \in [0,T \\ m(T) = F. \end{cases}$$

**Conclusion :**

La synthèse optimale est alors possible et s'effectue comme suit:

1) Résoudre l'équation de Riccati, on obtient $m(.)$.

2) Résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \mathcal{S}(t)\bar{x}(t) \quad pp\ t \in [0,T] \\ \bar{x}(0) = x_0 \end{cases}$$

on obtient l'état $\bar{x}()$, avec

$$\mathcal{S}(t) = A(t) + B(t)Q^{-1}(t)B^*(t)m(t).$$

3) Le contrôle optimal est alors sous la forme feedback :

$$\bar{u}(t) = Q^{-1}(t)B^*(t)m(t)\bar{x}(t).$$

**Conclusion sur la synthèse optimale**

Ainsi une synthèse optimal n'est possible qu'en situation Hilbertienne pour les systèmes linéaires quadratiques à contrôles libres.

Et donc pour des situations différentes de celle qui précède d'autres approches sont nécessaires.

## 2.2 Principe du Maximum (PM) .

### 2.2.1 Fonction de Pontryaguine.

Soient $X$ et $Z$ des espaces de Banach .

**Definition 2.1** *On appelle fonction de Pontryaguine la fonction*

$$\begin{aligned} H(.,.,.,.) \quad &: \quad \mathbb{R} \times X \times Z \times X^* \to \mathbb{R} \ / \\ H(t,a,b,c) \quad &= \quad \langle c, f(t,a,b) \rangle_{XX^*} - L(t,a,b). \end{aligned}$$

**Theorem 2.2** *(P.M)*

*Soient $(\bar{x}(.), \bar{u}(.))$ optimal local et $\bar{y}(.)$ l'état adjoint associé alors pour tout $t$ point de continuité du contrôle $\bar{u}(.)$, nous avons :*

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{y}(t)) = \max_{b \in K} H(t, \bar{x}(t), b, \bar{y}(t)).$$

### 2.2.2 Problème Feedback.

C'est le problème :

$$\mathrm{P}_{feed} \begin{cases} \sup\limits_{b \in K} H(t,a,b,c). \end{cases}$$

Considérons l'opérateur multivoque dit minimiseur associé:

$$\begin{aligned} M \quad &: \quad [0,T] \times X \times X^* \rightrightarrows K \ \text{ défini par} \\ M(t,a,c) \quad &= \quad \left\{ b \in K \ \ / \text{ solution optimale de } \mathrm{P}_{feed} \right\}. \end{aligned}$$

**Theorem 2.3** **(***Principe du Feedback***)** *Tout état optimal* $\bar{x}(.)$ *et tout état adjoint* $\bar{y}\,(.)$ *sont reliés aux contrôles optimaux correspondants par le principe du Feedback:*

$$\bar{u}(t) \in M(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)), \quad ppt \in [0, T]\,.$$

*Si* $P_{feed}$ *admet une solution unique alors le minimiseur* $M\,(.,.,.)$ *est univoque et le contrôle optimal Feedback est unique.*

### 2.2.3 Limite de l'approche par le Principe du maximum.

Le principe du Maximum permet en principe d'obtenir le contrôl optimal $\bar{u}(.)$ en fonction de l'état $\bar{x}(.)$ et de l'état adjoint $y(.)$, mais ceci n'est qu'une résolution théorique qui nécessite de coupler les équations d'états du problème $(P)_{cont}$, à celles de l'état adjoint $y(.)$ et nous renvoie donc à des difficultés de même ordre que celui du paragraphe de la synthèse état - état adjoint (2.1).

La dernière approche que nous allons présenter rassemble les travaux de Hamilton Jacobi et Bellman et présente l'avantage de mener à des synthèses optimales même pour des contrôles contraints.

## 2.3 Théorie d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

### 2.3.1 Paramétrisation par la condition initiale.

Le problème $(P)_{cont}$ initial est plongé dans une famille de problèmes du même type à deux paramètres $(t,z) \in [0,T] \times X$ comme suit :

$$\mathrm{P}\,(t,z)_{cont} \begin{cases} \inf\limits_{(x(.),u(.))} \displaystyle\int_t^T L(s,x(s),u(s))ds + g(x(T)) \\ \dot{x}(s) = f(s,x(s),u(s)) \quad \; pp \; s \in [t,T] \\ x(t) = z \\ u(.) \in \mathcal{U}_{[t,T]} = \{u(.) \in L^1(t,T;Z) / \; u(s) \in K\}\,. \end{cases}$$

On notera par $D(t,z)$ le domaine du problème $\mathrm{P}(t,z)_{cont}$

$$(x(t),u(t)) \in D(t,z) \Leftrightarrow \begin{cases} x(.) \in W^{1,1}(t,T;X),\; u(.) \in L^1(t,T;Z) \\ \dot{x}(s) = f(s,x(s),u(s)) \qquad pp \; s \in [t,T] \text{ et} \\ x(t) = z. \end{cases}$$

$\mathrm{P}(t,z)_{cont}$ est un problème du contrôle paramétré par la condition initiale $(t,z)$.

### 2.3.2 Fonction de Bellman.

C'est la fonction valeur de $\mathrm{P}(t,z)_{cont}$ c'est à dire :

$$\begin{aligned} V(.,.) \quad &: \quad [0,T] \times X \to \mathbb{R} \text{ donnée par :} \\ V(t,z) \quad &= \inf_{(x(.),u(.)) \in D(t,z)} \int_t^T L(s,x(s),u(s))\; ds + g(x(T)) \end{aligned}$$

**Theorem 2.4** (*Equation Hamilton − Jacobi − Bellman*) *Si* $V(.,.)$ *est continument différentiable alors* $V(.,.)$ *est solution de l'équation aux dérivés partielles dite (HJB):*

$$(HJB)\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t}(t,z) = \inf\limits_{b\in K}\left\{\left\langle \frac{\partial V}{\partial z}(t,z), f(t,z,b)\right\rangle_{XX^*} + L(t,z,b)\right\} \\ V(T,z) = g(z). \end{cases}$$

**Proof.** Pour $h$ petit, décomposons le contrôle $u(.)$ en :

$$u(s) = u_1(s) + u_2(s)$$

avec

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \begin{cases} u(s) \text{ sur } ]t, t+h[ \\ 0 \text{ sur } [t+h, T[ \end{cases} \\ u_2(s) &= \begin{cases} 0 \text{ sur } ]t, t+h[ \\ u(s) \text{ sur } [t+h, T[ \end{cases} \end{aligned}$$

La solution $x(.)$ se décompose en :

$$(EDO)_1 \quad \begin{cases} \dot{x}_1(s) = f(s, x(s), u_1(s)) \qquad s \in ]t, t+h[ \\ x_1(t) = y. \end{cases}$$

$$(EDO)_2 \quad \begin{cases} \dot{x}_2(s) = f(s, x(s), u_2(s)) \qquad s \in [t+h, T[ \\ x_2(t+h) = x_1(t+h). \end{cases}$$

par suite

$$\begin{aligned} V(s+h, x_2(s+h)) &= V(s+h, x_1(s+h)) \\ &= \inf_{u_2(.)} \int_{s+h}^{T} L(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta))d\theta + g(x_2(T)). \end{aligned}$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned}
V(t,z) &= \inf_{u_1(.),u_2(.)} \left[\int_t^T L(s,x(s),u_1(s)+u_2(s))ds + g(x(T))\right] \\
&= \inf_{u_1(.),u_2(.)} \left[\int_t^{t+h} L(s,x_1(s),u_1(s))ds + \int_{t+h}^T L(s,x_2(s),u_2(s))ds + g(x(T))\right] \\
&= \inf_{u_1(.)} \left[\int_t^{t+h} L(s,x_1(s),u_1(s))ds + \inf_{u_2(.)}\left(\int_{t+h}^T L(s,x_2(s),u_2(s))ds + g(x(T))\right)\right] \\
&= \inf_{u_1(.)} \left[\int_t^{t+h} L(s,x_1(s),u_1(s))ds + V(t+h,x_1(t+h))\right]
\end{aligned}$$

comme :

$$\begin{aligned}
x_1(t+h) &= x_1(t) + h\dot{x}_1(t) + o(h) \\
&= x_1(t) + \eta \\
&= z + \eta \quad \text{ et } \eta \to 0
\end{aligned}$$

où $o(h) = h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, et comme $V(.,.)$ est supposée $C^1$, on obtient par développement :

$$\begin{aligned}
V(t+h,z+\eta) &= V(t,z) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,z)h + \langle \frac{\partial V}{\partial z}(t,z),\eta\rangle_{XX^*} + o((h,\eta)) \\
&= V(t,z) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,z)h + \langle \frac{\partial V}{\partial z}(t,z),\dot{x}_1(t)\rangle_{XX^*}h + \langle \frac{\partial V}{\partial z}(t,z),\varepsilon(h)\rangle_{XX^*}h + o((h,\eta))
\end{aligned}$$

et avec $\eta = h\dot{x}_1(t) + o(h)$ nous avons

$$\begin{aligned}
V(t+h,z+\eta) &= V(t,z) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,z)h + \langle \frac{\partial V}{\partial z}(t,z),\dot{x}_1(t)\rangle_{XX^*}h + o(h) \\
&= V(t,z) + \left[\frac{\partial V}{\partial t}(t,z) + \langle \frac{\partial V}{\partial z}(t,z),\dot{x}_1(t)\rangle_{XX^*}\right]h + o(h)
\end{aligned}$$

et comme par ailleurs

$$\int_t^{t+h} L(s,x_1(s),u_1(s))ds = L(t,x_1(t),u_1(t))h + o(h)$$

on aboutit à :

$$V(t,z)=\inf_{u_1(.)}\left[L(t,x_1(t),u_1(t))h+V(t,z)+\frac{\partial V}{\partial t}(t,z)h+\langle\frac{\partial V}{\partial z}(t,z),\dot{x}_1(t)\rangle_{XX^*}h+o(h)\right]$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,z)h+\inf_{u_1(.)}\left[L(t,x_1(t),u_1(t))h+V(t,z)-V(t,z)+\langle\frac{\partial V}{\partial z}(t,z),\dot{x}_1(t)\rangle_{XX^*}h+o(h)\right]=0$$

et donc

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,z)+\inf_{u_1(.)}\left[L(t,y,u_1(t))+\langle\frac{\partial V}{\partial z}(t,z),f(t,y,u_1(t))\rangle_{XX^*}+\varepsilon(h)\right]=0$$

et pour $h \to 0$, on aboutit à :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,z)=\inf_{b\in K}\left[L(t,z,b)+\left\langle\frac{\partial V}{\partial z}(t,z),f(t,z,b)\right\rangle_{XX^*}\right]$$

car $u_1(t)=u(t)=b$ quelconque dans $K$.

Enfin

$$V(T,z)=\inf_{(x(.),u(.))\in D(T,z)}\int_T^T L(s,x(s),u(s))ds+g(x(T)) \ =g(x(T))$$

et comme $x(T)=z$, on obtient

$$V(T,z)=g(z).$$

■

Nous savons que la fonction de Bellman solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman $(HJB)$ permet une synthèse optimale mais sous la condition d'être $C^1$, régularité qui est rarement satisfaite. De façon générale, la résolution de l'équation de $(HJB)$ ne sont pas plus faciles à résoudre que la fonction de Bellman non diférentiables.

## 2.4 Synthèse (HJB)-(PM).

Remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}(t,z) &= \sup_{b\in K}\left\{H(t,z,b,-\frac{\partial V}{\partial z}(t,z))\right\} \\ &= \sup_{b\in K}\left[-L(t,z,b)+\left\langle -\frac{\partial V}{\partial z}(t,z),f(t,z,b)\right\rangle_{XX^*}\right].\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,z)=\max_{b\in K}\left\{H(t,z,b,-\frac{\partial V}{\partial z}(t,z))\right\}$$

et pour $z=x(t)$ on aboutit à :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x(t))=\max_{b\in K}\{H(t,x(t),b,y(t))\}$$

avec

$$y(t)=-\frac{\partial V}{\partial z}(t,x(t)).$$

Ainsi $-\frac{\partial V}{\partial z}(t,x(t))$ est l'état adjoint associé à $x(t)$ et tout contrôl optimal $\bar{u}(.)$ satisfait :

$$\bar{u}(t)\ \in\ M(t,\bar{x}(t),-\frac{\partial V}{\partial z}(t,\bar{x}(t)))$$

où $M$ est le minimiseur de problème $\mathrm{P}_{feed}$.

**Synthèse optimale**

La détermination à priori de la fonction valeur solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman $(HJB)$ donne dans le cas semi linéaire (c'est à dire lineaire seulement par rapport au contr à contrôle libre le contrôle optimal sous la forme Feedback :

$$\bar{u}(s)=-Q^{-1}(s)B^*(s,\bar{x}(s))\frac{\partial V}{\partial z}(s,\bar{x}(s))$$

qui mène alors l'état optimal par retour à l'équation d'état :

$$(EDO)_{syth} \begin{cases} \dot{x}(s) = F(s, x(s)) \qquad pp \quad s \in [t, T] \\ \\ x(t) = z, \end{cases}$$

avec

$$F(s, x(s)) \ = A(s, x(s)) - B(s, x(s))Q^{-1}(s)B^{*}(s, x(s))\frac{\partial V}{\partial z}(s, x(s)).$$

On a alors :

1) L'état optimal $\bar{x}(t)$ comme solution de $(EDO)_{syth}$.

2) Le contrôl optimal

$$\bar{u}(t) = -Q^{-1}(t)B^{*}(t, \bar{x}(t))\frac{\partial V}{\partial z}(t, \bar{x}(t)).$$

3) L'état adjoint associé

$$\bar{y}(t) = -\frac{\partial V}{\partial z}(t, \bar{x}\,(t))\cdot$$

# Chapter 3

# Calcul numérique de la fonction valeur

## 3.1 Programmation Dynamique discrète

L'algorithme présenté ci dessous est très simple (Programmation Dynamique discrète). La programmation Dynamique est une méthode exacte de résolution de problèmes discrets de commande optimale du type :

$$\mathrm{P}_{cont}^{dis}(z) \begin{cases} \inf\limits_{\{u_i\}_{i=0,1,\dots N-1}} \sum\limits_{i=0}^{N-1} \tilde{L}_i(x_i,u_i) + \tilde{L}_N(x_N) \\ (EDO)_d \begin{cases} x_{i+1} = \tilde{f}\ _i(x_i,u_i) \\ x_0 = z & \qquad\qquad i = 0,1,...,N-1 \\ u_i \in K_i \end{cases} \end{cases}$$

Le problème consiste à trouver un processus

$$\begin{cases} u_0,\ u_1\ ,...,\ u_N \\ x_0,\ x_1\ ,...,x_N \end{cases}$$

minimisant l'objectif et la forme additive de l'objectif donne lieu au schéma de calcul suivant :

1) Le problème est plongé dans un cadre plus large de recherche d'une suite de commandes minimisant le critère :

$$(p^i_{cont}) \begin{cases} I_i\ (x_i) = \displaystyle\sum_{l\ =i}^{N-1}\ \tilde{L}_i(x_i, u_i) + \tilde{L}_N(x_N) \text{ à partir de l'état } x_i \text{, pour } i = 0, 1, ..., N-1 \\ \begin{cases} x_{i+1} = \tilde{f}\ _i(x_i, u_i) \\ u_i \in K_i \end{cases} \end{cases}$$

à partir de l'état initial $x_i$.

2) La solution si elle existe s'exprime sous la forme :

$$(p^i_{cont}) \begin{cases} J_i(x_i) = \min_{\substack{u_i \in K \\ \vdots \\ u_N \in K}}\ I_i(x_i) \qquad\qquad i = 0, 1, ..., N-1 \\ \begin{cases} x_{i+1} = \tilde{f}\ _i(x_i, u_i) \\ u_i \in K_i. \end{cases} \end{cases}$$

3) L'objectif $I_i(x_i)$ peut s'écrire sous la forme

$$I_i(x_i) = \tilde{L}_i(x_i, u_i) + \left[\sum_{l=i+1}^{N-1} \tilde{L}_l(x_l, u_l) + \tilde{L}_N(x_N)\right] \qquad i = 0, 1, ..., N-1.$$

le terme entre crochet du second membre étant égal à $I_{i+1}(x_{i+1})$.

4) En explicitant la relation entre les solutions et les données entre les étapes $i$ et $i+1$, on voit que l'optimum de l'objectif à l'instant i est égal à l'optimum de l'objectif

immédiat $\tilde{L}_i(x_i, u_i)$ plus la valeur de l'objectif $J_{i+1}(x_{i+1})$ en partant du nouveau point $x_i$.

Ce qui mène à :

$$(p^i_{cont})\begin{cases} J_i(x_i) = \min\limits_{\substack{ui\in K\\ \vdots \\ u_N\in K}} \tilde{L}_i(x_i, u_i) + I_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, ..., N-1 \text{ avec} \\ \begin{cases} x_{i+1} = \tilde{f}\ _i(x_i, u_i) \\ u_i \in K_i \end{cases} \end{cases}$$

c'est à dire

$$J_i(x_i) \quad = \quad \min_{u_i\in K} \left[ \tilde{L}_i(x_i, u_i) + \min_{\substack{u_{i+1}\in K\\ \vdots \\ u_N\in K}} I_{i+1}(x_{i+1}) \right] \qquad i = 0, 1, ..., N-1$$

$$\text{avec} \begin{cases} x_{i+1} = \tilde{f}\ _i(x_i, u_i) \\ u_i \in K_i \end{cases}$$

par suite

$$(p^i_{cont})\begin{cases} J_i(x_i) = \min_{u_i\in K} \left[ \tilde{L}_i(x_i, u_i) + J_{i+1}(x_{_{i+1}}) \right] \quad i = 0, 1, ..., N-1 \text{ avec} \\ \begin{cases} x_{i+1} = \tilde{f}\ _i(x_i, u_i) \\ u_i \in K_i \end{cases} \end{cases}$$

Remplaçant dans le second membre $x_{i+1}$ par $\tilde{f}\ _i(x_i, u_i)$, la relation prend la forme définitive, dite equation de Bellman :

$$(Eq\text{-}Bellman)\begin{cases} J_i(x_{_i}) = \min_{u_i\in K} \left[ \tilde{L}_i(x_i, u_i) + J_{i+1}(\tilde{f}\ _i(x_i, u_i)) \right] \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 & (5.1) \\ J_N(x_N) = \tilde{L}_N(x_N) & (5.2) \end{cases}$$

Elle permet de calculer de proche en proche les valeurs $J_N(x_N)$, $J_{N-1}(x_{N-1})$, ..., $J_1(x_1)$, $J_0(x_0)$ et s'effectue à partir de l'état final $x_N$.

La méthode de recherche de la fonction inconnue $J_0(x_0)$ à l'aide des relations (5.1) et (5.2) s'appelle Programmation Dynamique discrète. Elle est due a R.Bellman [2].

## 3.2 Discrétisation de Problème continu.

Rappelons le problème de contrôle $\mathrm{P}(t,z)_{cont}$

$$\mathrm{P}\,(t,z)_{cont} \begin{cases} \inf\limits_{(x(.),u(.))} \displaystyle\int_t^T L(s,x(s),u(s))ds + g(x(T)) \\ \begin{cases} \dot{x}(s) = f(s,x(s),u(s)) \qquad pp\ s \in I(t) \\ x(t) = z \\ u(.) \in \mathcal{U}_{I(t)} = \{u(.) \in L^1(I(t);\mathbb{R}^m)/\ u(s) \in K\} \end{cases} \end{cases}$$

Une discrétisation en temps de $\mathrm{P}(t,z)_{cont}$ ramène à un problème discret de type précédant, que par une discrétisation de type d'Euler.

Pour des discrétisations différentes nous aurons des systèmes discrétisés soit avancés, soit retardés, soit implicites ou finalement mixtes qui ne relevent pas de la Programmation Dynamique classique.

Soit $h = \frac{T-t}{N}$ le pas de discrétisation.

Nous noterons

$$s_i(t) = t + ih, \qquad i = 0, \cdots, N-1$$

1) La Discrétisation de $\dot{x}(s) = f(s,x(s),u(s))$ s'obtient alors par :

$$\frac{x(s_{i+1}(t)) - x(s_i(t))}{h} + \epsilon\,(h) = f(s_i(t), x(s_i(t)), u(s_i(t)))$$

avec $\epsilon\,(h) \to 0$ pour $h \to 0$.

En introduisant les notations :

$$\begin{cases} x_i = x(s_i(t)), \\ u_i = u(s_i(t)), & i \ = 0, 1, ..., N \\ f(s_i(t), ., .) = f_i(., .). \end{cases} \tag{5.3}$$

La discrétisation de l'équation d'état revient à choisir h suffisamment petit pour pouvoir remplacer l'équation continue par l'équation discrète.

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} - f_i(x_i, u_i) = 0$$

c'est à dire

$$x_{i+1} = x_i + hf_i(x_i, u_i) \qquad i = 0, ..., N-1.$$

2) La Discrétisation de l'objectif

Elle revient à discrétiser l'integrale par la méthode des Trapèzes**.** Ce qui donne la forme

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{s_i(t)}^{s_{i+1}(t)} L(s, x(s), u(s))ds + g(x(T))$$

Et comme par ailleurs $h = s_{i+1}(t) - s_i(t)$, la formule de la moyenne donne :

$$\int_{s_i(t)}^{s_{i+1}(t)} L(s, x(s), u(s))ds = hL(s_i(t), x(s_i(t)), u(s_i(t))) + \circ(h) \tag{1}$$

En notant $L(s_i(t), x(s_i(t)), u(s_i(t)))$ par $L_i(x_i, u_i)$.

L'objectif prend la forme

$$\sum_{i=0}^{N-1} hL_i(x_i, u_i) + g(x_N) + \circ(h) \ \ N.$$

Le probleme discrétise revient donc à minimiser l'objectif

$$\sum_{i=0}^{N-1} hL_i(x_i, u_i) + g(x_N).$$

reste à expliciter les contraintes sur le controle.

Soient

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{I(t)} = \{u(.) \in L^1(I(t);\mathbb{R}^m)/ \ u(s) \in K\} \\ x(t) = z, \end{cases}$$

et avec les notations (5.3) la contraint $u(.) \in \mathcal{U}_{I(t)}$ devient

$$\begin{cases} u_i \in K \qquad\qquad i = 0, ..., N-1 \\ x_0 = z \end{cases}$$

où

$$I(t) = \bigcup_{i=0}^{N-1} [s_i(t), s_{i+1}(t)[\,.$$

Nous obtiendrons en definitive le problème discret

$$(\mathrm{P}(t,z)_{cont}\,)_d \begin{cases} V(h,t,z) = \inf\limits_{\{x_i,u_i\}_{i=0,1,\ldots N-1}} \sum\limits_{i=0}^{N-1} hL_i(x_i,u_i) + g(x_N), \\ \qquad V(h,T,z) = g(z) \qquad\qquad\qquad i = N \\ (Sys_{dis}) \begin{cases} x_{i+1} = x_i + hf_i(x_i,u_i), \\ x_0 = z, \qquad\qquad\qquad\qquad i = 0,1,...,N-1 \\ u_i \in K_i. \end{cases} \end{cases}$$

avec comme équation de Bellman

$$(Eq\text{-}Bellman) \begin{cases} V(h,x_i) = \min_{u_i \in K_i} \left[hL_i(x_i,u_i) + V(h, x_i + hf_i(x_i,u_i))\right], \quad i = 0,1,\ldots,N-1 \\ V(h,x_N) = g(x_N). \end{cases}$$

**Remarque :**

T.Havârneanu [6] et M.Bardi [1] ont montré que pour une discrétisation du Problème continu, la solution discrète obtenue par le principe Bellman donne une convergence uniformément continue.

**Conclusion**

Nous présentons une synthèse optimale pour les problèmes de contrôle optimal en équation différentielle ordinaire, cette synthèse est basée sur les solutions $C^1$ de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

## REFERENCES

1 M. Bardi and I. C. Dolcetta Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations (1997).

2 R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press (1957).

3 L. D. Berkovitz, Optimal Feedback Controls, SIAM. J. Cont Opt. V 27, N5, (1989) 991-1006.

4 J. F. Bonnans, On an algorthm for optimal control using pontryagins Maximum Principle, INRIA, N 254, (1983).

5 H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et Applications, Paris, New york, Masson, (1983) .

6 T. Havârneanu, An approximation scheme for the variational solutions of the Hamilton-Jacobi equations of control theory.(1994), 87-87.

7 C. Kacast and M. Vier, Convex Analysis and Measurable, Lecture Notes in Mathematics N, 580.

8 P. L. Lions, Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi-equations, Pittman Boston, (1982).

9 H. Reinhard, Equations Différentielles Fondements et Applications Gaulhier-Villars (1982).