République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année univ.: 2019/2020

Étude de quelques fonctions spéciales via la théorie des représentations des groupes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Mokhtari Mohamed [1]

Sous la direction de

Dr K. Djerfi

Soutenue le 16/09/2020 devant le jury composé de

M. S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Président
M. K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
M. A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
M. H. Abbes	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : medmokhtari72@gmail.com

Remerciement

Voilà enfin, aprés de longues années de travail avec l'aide d'Allah, j'ai réussi à mettre en forme le manuscrit que vous avez entre les mains.

Un énorme remerciement que dois présenter en premier lieu à mon encadreur **K.Djerfi** qui m'a soutenue et m'a guidée au cours de la réalisation de ce mémoire, merci pour leur temps qu'elle m'a consacré.

J'adresse un garnd merci a les membres du jury d'avoir bien voulu présider mes jury et d'avoir examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à tout mes enseignants de l'université Dr.Moulay Tahar de Saida.

Je remercie mon père, ma mère, mes soeurs, mes frères et mes amies pour leur soutien durant toute la péroide de ma préparation de mon mémoire.

Mokhtari Mohamed

Table des matières

Introduction

Les fonctions spéciales de la physique mathématique apparaissent le plus souvent à l'occation de la résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables ou á propos de la recherche des fonctions propres d'opérateurs différentiels dans certains systèmes des coordonnées curvilignes.Mais, les opérateurs différentiels de la physique mathématique se définissent usuellement par rapport à une propriété d'invariance.Ainsi,l'opérateur de LAPLACE est invariant pour les déplacements du plan euclidien,l'opérateur des ondes est invariant pour les transformations du groupe de LORENTZ etc. La détermination des fonctions propres de ces opérateurs en est ainsi facilitée et leurs propriétés d'invariance s'expriment naturellement dans le cadre de la théorie de la représentation des groupes. Considérons en effet un opérateur A, invariant par rapport à un certain groupe G de transformations.On peut alors montrer que ces transformations font correspondre, aux fonctions propres de l'opérateur. d'autres fonctions propres associées à la même valeur propre.Par la aux éléments du groupe G, sont assignées des transformations $T(g)$ dans l'espace des fonctions propres, et l'égalité

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2) \tag{1}$$

est, de plus, satisfaite. Les opérateurs, définis sur un groupe et qui possèdent la propriété ,sont appelés représentations du groupe.Ainsi, les fonctions propres d'un opérateur invariant sont liées aux représentations du groupe par rapport auquel cet opérateur est invariant. La connaissance de ces représentations simplifie la recherche des fonctions propres et permet d'éclairer leur comportement sous les transformations du groupe donné.On peut donner aux opérateurs de la représentation $T(g)$ une forme matricielle, une certaine base ayant été choisie dans l'espace de la représentation.En outre, apparaissent des fonctions numériques, qui sont définies sur le groupe et qui sont les éléments matriciels de la représentation. Mais, les élément des groupes qui interviennent en physique mathématique sont usuellement définis par des paramètres numériques.Ainsi, les éléments du groupe des déplacements du plan euclidien sont donnés par les coordonnées (a, b) de l'image du point $O(0, 0)$ et par l'angle de rotation φ, Les éléments du groupe des rotations de l?espace euclidien à trois dimensions sont définis par les angles d'EULER φ, θ, ψ,etc ... .Ainsi ,par l'étude des représentations des groupes,nous arrivons aux fonctions numériques de plusieurs variables. Bien entendu,il est souhaitable de ne manipuler que des fonctions ne comportant que le nombre minimal de variables et, si possible, d'une seule variable .Il a été montré qu'une telle circonstance se présente pour certains groupes (groupe des rotations de l'espace à trois dimensions,groupe des déplacements du plan euclidien. etc...).Dans le cas de ces groupes ,on peut choisir une base,dans l'éspace de la représentation,telle qu'aux éléments d'un certain sous-groupe H.soient associées des matrices diagonales,dont la diagonale principale est composée de fonctions exponentielles.Les autres éléments du groupe peuvent alors être mis sous la forme $h_1\theta h_2$,où $h_1, h_2 \in H$ et où $\theta(t)$ parcourt une certaine variété à un paramètre. Il est alors possible d'exprimer les éléments matriciels des représentations de ces groupes en n'utilisant que la fonction exponentielle ou des fonctions d'une seule variable t .On montre que ces fonctions Coïncident avec les fonctions spéciales.qui sont classiques en physique mathématique.Ainsi, les représentations du groupe des déplacements du plan euclidien sont associées aux fonctions de BESSEL$J_n(t)$,celles du groupe des rotations de l ?espace euclidien à trois dimensions,aux fonctions de LEGENDRE et de JACOBI.etc... .Remarquons que le role joué par la fonction exponentielle n'a rien de fortuit :les fonctions de la forme e^{int} ,où n est un entier,donnent les représentations du groupe des rotations du plan euclidien. Dans le cas de groupes plus complexes(groupe des rotations de l ?espace euclidien à n dimensions, groupe de tous les déplacements de ce même espace,groupe de LORENTZ.etc...).on montre que tous les éléments matriciels de leurs représentations ne peuvent s'exprimer au moyen des fonctions spéciales déjà connues.Celles-ci ne sont utiles que pour une partie des éléments matriciels : pour les autres, d'autres fonctions sont nécessaires que l'Analyse mathématique n'avait pasencore rencontrées.Ces nouvelles fonctions possèdent la même diversité de propriétés que les fonctions spéciales classiques. Il existe ainsi un lien entre les fonctions spéciales et les éléments matriciels des représentations des groupes.Il est nécessaire de noter que ce lien dépend également du choix du sous-groupe H.dont les éléments, dans la réalisation correspondante, sont représentés par des matrices diagonales(ou,plus généralement,diagonales par blocs). Par conséquent, dans le cas d'un groupe donné, des fonctions spéciales différentes peuvent apparaitre comme associées puisqu'elles dépendent des divers sous-groupes H pour lesquels les opérateurs $T(h)$ sont diagonalisai. Par exemple, si G est le groupe des matrices réelles unimodulaires du second ordre et H sous-groupe des matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ alors on obtient les fonctions coniques. Si on choisit pour H le sous-groupe des matrices diagonales, alors on obtient la fonction hypergéométrique. Enfin, si H est le sous-groupe des matrices triangulaires de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$,alors on obtient les fonctions de HANKEL. Sur ce lien que l'on a établi entre les éléments matriciels des représentation et les fonctions spéciales, on fonde une méthode générale qui permet d'établir les propriétés de ces fonctions. Par exemple, il suit, de l'égalité(1).que les éléments matriciels des représentations satisfont

$$t_{ij}(g_1 g_2) = \sum_k t_{ik}(g_1) t_{kj}(g_2). \tag{2}$$

Mais, ces éléments s'expriment au moyen de fonctions spéciales. Donc (2) peut s'écrire en terme des fonctions spéciales ; et c'est ainsi que l'on obtient, en particulier, les théorique d'addition pour les fonctions de Bissi LEGENDRE, GEGENBAUER, étc.... Si l'on supposé que l'un des éléments de l'égalité (2) est "infiniment proche de l'unité du groupe", alors on aboutir à une relation de récurrence satisfaire par les fonctions spéciales correspondantes.Cette approche, fondée sur la théorie des groupes, conduit, de façon naturelle, aux représentations intégrales des fonctions spéciales. Si, dans l'espace de la représentation $T(g)$, on choisit une base orthonormée $[e_k]$, alors les éléments matriciels sont donnés par

$$t_{ij}(g) =< T(g)e_j, e_i > . \tag{3}$$

Mais, le plus souvent, l'espace de la représentation se réalise un certain espace fonctionnel (l'espace des fonctions propres d'un opérateur invariant. Par exemple), et le produit scalaire dans cet espace est sous forme intégrale. Donc, le second membre de (3) s'exprime aussi sous forme intégrale. tandis que le premier membre se réduit à des fonctions spéciales. Ce qui donne une représentation intégrale pour les fonctions spéciales.Il peut arriver que l'on ne puisse pas toujours choisir dans l'espace de la représentation, une base telle que les éléments d'un sous-groupe donné soient représentés par des matrices diagonales (ou, tout au moins, diagonales par blocs). Parfois encore, on doit choisir une réalisation de la représentation pour laquelle les éléments de H sont représentés par des opérateurs de multiplication par une fonction (analogue continu de la matrice diagonale). Dans ces cas, les opérateurs de la représentation $T(g)$ deviennent des opérateurs intégraux, dont les noyaux s'expriment au moyen de fonctions spéciales. Ce qui conduit à diverses relations intégrales entre les fonctions spéciales et, en particulier, à des analogues continus des théorèmes d'addition. L'analyse harmonique joue un rôle important dans la théorie des fonctions spéciales. Considérons, à titre d'exemple, la représentation

$$T(g_\alpha)f(\varphi) = f(\varphi + \alpha). \tag{4}$$

du groupe des rotations du cercle ($f(\varphi)$ est une fonction définie sur le cercle et dépendant de l'angle φ et est la rotation d'angle α). Développons la fonction $f(\varphi)$ en série de FOURIER :

$$f(\varphi) = \sum_{n=-1}^{1} c_n e^{in\varphi}. \tag{5}$$

Les espaces à une dimension des fonctions de la forme $c_n e^{in\varphi}$ restent invariants sous les transformations $T(g_\alpha)$:

$$T(g_\alpha)e^{in\varphi} = e^{in(\varphi+\alpha)} = e^{in\alpha}e^{in\varphi}. \tag{6}$$

On dit que l'espace des fonctions $f(\varphi)$ définies sur le cercle a été décomposé en sous-espaces mono dimensionnels invariants, la représentation $T(g)$ ayant été décomposée par rapport aux représentations $T_n(g_\alpha) = e^{ni\alpha}$. Le but de ce mémoire est de comprendre les fonctions spéciales à l'aide de la théorie de représentations de groupes. Dans une première partie, nous introduirons les définitions élémentaires des représentations de groupes ainsi que les résultats qui nous seront utiles par la suite. Dans une seconde partie, nous nous intéresserons au groupe des matrices d'ordre deux unitaires complexes de déterminant 1, SU(2), et en déterminerons les représentations irréductibles ; ensuite, nous en déduirons des relations fonctionnelles sur les coefficients matriciels et appliquerons ceci à la résolution de l'équation de Laplace. Le deuxième chapitre traite quelques fonctions spéciales connus dans la littérature. L'approche classique suivi dans ce chapitre est celui qu'on trouve dans toutes les références d'analyse mathématique, c'est aborder les fonctions spéciales sans tenir compte du groupe de symétrie en question. Dans le troisième chapitre, on traite un exemple d'utilisation de la théorie des représentations des groupes pour avoir des formules d'addition, de multiplication et de récurrence qui concerne les polynômes de Legendre.

Chapitre 1

Représentation Des Groupes

1.1 Rappel de quelques dèfinition

Un groupe est une ensemble muni d'une loi de composition associative,possèdant un élément neutre et elle que chaque élément possède un inverse.L'élément neutre,encore appelé élément unité,est diversement notè e,1 ou souvent I s'il s'agit d'un groupe des matrices.
Un groupe est dit commutatif ou abélien si la loi de composition est commutative.Dans ce cas la composition est en général notèe + et l'élément neutre est en général notèe 0.
On notera $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini, X. L'ordre d'un groupe fini, G,est le nombre,$|G|$,d'élément du groupe.Un élément $g \in G$ et dit d'ordre $n(n > 0)$ si n est le plus petit entier tel que $g^n = e$

1.2 Exemples de groupes finis

1.2.1 Groupe cyclique d'ordre n

Les groupes suivants sont isomorphes et sont appelès groupe cyclique d'ordre n :

1. $Z_n = Z/nZ$,en particulier $Z_2 = Z/2Z$,noté additivement$\{0, 1\}$ ou multiplicativement$\{1, -1\}$.

2. Le groupe des rotations du plan de centre O,d'angles $\frac{2k\pi}{n}$,$0 \leqslant k \leqslant n-1$,
pour la composition.
3. Le groupe des nombres complexes,$\{e^{\frac{2ki\pi}{n}} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$,pour la multiplication.
4. Le sous-groupe $\{1, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$ si g est un èlèment d'ordre n dans un groupe G.

1.2.2 Groupe symétrique $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$

Le groupe des permutation d'un ensemble de cardinal n est noté $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$ et appelé groupe symètrique sur n éléments .L'ordre de $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$ est $n!$.
Tout èlèment de $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$ s'écrit comme un produit de transpositions. à tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_\mathfrak{n}$ on associe le nombre égale à 1 ou-1 suivant la parité du nombre de transpositions.
Ce nombre est noté$(-1)^\sigma$ et appelé signature de σ.
L'application $\sigma \in \mathfrak{S}_\mathfrak{n} \mapsto (-1)^\sigma \in \mathbb{Z}_2$ est un morphisme de groupes.
Le groupe alterné $\mathfrak{V}_\mathfrak{n}$ est le noyau du morphisme de signature. Si $n \geqslant 2$, c'est un sous-groupe distingué d'indice 2 de $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$.

1.3 Représentations des Groupes Finis

1.3.1 Généralités

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$), On désigne par $GL(E)$ le groupe des isomorphismes $\mathbb{K}$-linéaire de E.

Définition 1.3.1.0.1. *Une représentation d'un groupe G est la donné d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, E, et d'un morphisme de groupes,*

$$\rho : G \longrightarrow GL(E)$$

Donc, pour tous $g, g' \in G$,

$$\rho(gg') = \rho(g) o \rho(g'), \rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}, \rho(e) = Id_E$$

L'espace vectoriel E est appelé le support de la représentation et sa dimension s'appelle la dimension de la représentation. On désigne une telle représentation par (E, ρ) ou simplement ρ.
Si en particulier, $E = \mathbb{C}^n$, on dit que la représentation est une représentation matricielle de dimension n. la représentation standard ou fondamentale d'un sous groupe G de $GL(E)$ est la représentation de G dans E définie par l'injection canonique de G dans $GL(E)$. On appelle représentation triviale toute représentation telle que $\rho(g) = Id_E$ pour tout $g \in G$.

voici un premier exemple de représentation d'un groupe finie.
Soit $t \in \sigma_3$ la transposition $123 \longmapsto 132$ et c la permutation circulaire $123 \longmapsto 231$ qui engendrent σ_3. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On peut représenter σ_3 dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\rho(e) = I, \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

Définition 1.3.1.0.2. *Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E. On dit que la représentation est unitaire si $\rho(g)$ est unitaire $\forall g$, c'est-à -dire,*

$$\forall g \in G, \forall x, y \in E, \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Une représentation est dite unitarisable s'il existe un produit scalaire sur E tel que $(\rho, \langle , \rangle)$ est unitaire.

Lemme 1.3.1. *Soit G un groupe fini. Pour toute fonction φ sur G à valeur dans un espace vectoriel*

$$\forall g \in G, \sum_{h \in G} \varphi(gh) = \sum_{h \in G} \varphi(hg) = \sum_{k \in G} \varphi(k) \tag{1.1}$$

Démonstration : *En effet, g est fixé, tout élément de G s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme gh (resp., hg), ou $h \in G$.*

Théorème 1.3.1. *Toute représentation d'un groupe fini G est unitarisable.*
Démonstration : *Soit (E, ρ) une représentation d'un groupe fini, G, et soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E considérons :*

$$\langle x, y \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle$$

qui est un produit scalaire sur E. En effet, supposons $\langle x,x\rangle' = 0$,

$$\Rightarrow \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)x,\rho(g)x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle\rho(g)x,\rho(g)x\rangle = 0 \quad \forall g \in G$$

en particulier pour $g = e$, $\rho(g) = id_E$ *donc :* $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
Montrons que $\langle,\rangle'$ *est invariant par* ρ *(*ρ *unitaire par rapport à* $\langle,\rangle'$*)*
En effet :

$$\begin{aligned}
\langle\rho(g)x,\rho(g)y\rangle' &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\langle\rho(h)\rho(g)x,\rho(h)\rho(g)y\rangle \\
&= \tfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\langle\rho(hg)x,\rho(hg)y\rangle \\
&= \tfrac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\langle\rho(k)x,\rho(k)y\rangle \\
&= \langle x,y\rangle'
\end{aligned}$$

oú nous utilisè la relation fondamentale(1,1),valable pour toute φ *fonction sur G*

Donc ρ *est une Représentation unitaire de G dans* $(E,\langle,\rangle')$

1.3.2 Représentations irréductibles

Définition 1.3.2.0.1. *Soit* (E,ρ) *une représentation d'un groupe* G, $F \subset G$ *un sous espace vectoriel de* E*, On dit que* F *est invariant par* ρ *(stable) si est seulement si :*

$$\rho(g)F \subset F, \forall g \in G$$

ce qui entraine $\rho(g)F = F, \forall g$
Donc on peut parler d'une représentation ρ *restreinte à* F *: c'est une représentation de* G *dans* F
ρ/F *est appelée sousreprésentation.*

Définition 1.3.2.0.2. *Une représentation* (E,ρ) *de* G *est dite irréductible. Si* $E \neq \{0\}$ *et les seules sous espaces vectoriels de* E *invariants par* ρ *sont 0 et* E

Exemple *La représentation de dimension 2 de σ_3 dans l'exemple précédent 1.3.1 est irréductible, car les sous espaces propres de $\rho(t)$ et de $\rho(c)$ sont d'intersection nulle.*

Proposition 1.3.1. *Toute représentation irréductible d'un groupe fini G est de dimension finie.*

Démonstration *Soit (E, ρ) une représentation irréductible d'un groupe fini G et soit $x \in E$. Le sous ensemble $\{\rho(g)x/g \in G\}$ étant fini, Cette ensemble engendre un sous espace vectoriel de dimension fini de E. Si $x \neq 0$, ce sous-espace vectoriel de E n'est pas réduit à $\{0\}$ et c'est un espace invariant par ρ. il coincide donc avec E, qui est donc $dim E < \infty$.*

1.4 Opération sur les représentations

1.4.1 Somme directe de représentations

Définition 1.4.1.0.1. *Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de G. Alors on définit $(E_1 \oplus E_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$ par :*

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x_1, x_2) = (\rho_1(g)x_1, \rho_2(g)x_2), \forall g \in G, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$$

Si ρ_1 et ρ_2 sont matricielles, Alors la matrice de $\rho_1 \oplus \rho_2(g)$ est :

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

Plus généralement si $m > 0$ on définit $\rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_m$
En particulier : Si (E, ρ) est une représentation de G, On note :

$$\underbrace{\rho \oplus \rho \oplus ... \oplus \rho}_{m fois} = \bigoplus_m \rho = m\rho$$

Définition 1.4.1.0.2. *Une représentation est dite complètement réductible si elle est somme directe de représentation irréductible.*

Lemme 1.4.1. *Soit ρ une représentation unitaire d'un groupe G dans $(E, \langle , \rangle)$. Si $F \subset E$ est invariant par ρ.*

Démonstration *Soit* $y \in F^{\perp} = \{y \in E / \langle x, y \rangle\}$
$\langle x, \rho(g)y \rangle = \langle \rho(g^{-1})x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in F, \forall g$
car F *est invariant par* ρ
$\Rightarrow \rho(g)y \in F^{\perp}$
$\Rightarrow F^{\perp}$ *est invariant par* ρ

Théorème 1.4.1. *(Théorème de Maschke) Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible.*
Démonstration *Soit* (E, ρ) *une représentation de* G *d'après le théorème 1.3.1,* ρ *est supposé unitaire. Si* ρ *n'est pas irréductible.*
Soit F *un sous espace vectoriel invariant par* ρ *avec* $F \neq \{0\}$ *et* $F \neq E$
Alors : $E = F \oplus F^{\perp}$
$F^{\perp}$ *aussi invariant par* ρ *et* $dimF < dimE$ *et* $0 < dimF^{\perp} < dimE$
par récurrence sur la dimension de E*, on obtient le résultat :*
$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_m$
Remarque *ce théorème est vrai sous des hypothèses plus général (groupes compacts et localement compacts).*

1.4.2 Produits tensoriels de représentations

Définition 1.4.2.0.1. *Soit*(E_1, ρ_1)*et*(E_2, ρ_2)*des représentations d'un même groupe* G*.Rappelons que, par définition,*$\rho_1 \otimes \rho_2$ *est la représentation de* G *dans*$E_1 \otimes E_2$ *définie par :*

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(x_1 \otimes x_2) = (\rho_1(g)x_1 \otimes \rho_2(g)x_2), \forall g \in G, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$$

1.4.3 Opérateurs d'entrelacement et lemme de Schur

Définition 1.4.3.0.1. *Soit*(E_1, ρ_1)*et*(E_2, ρ_2)*des représentations de groupe* G*.On dit qu'une application linére,* $T : E_1 \longrightarrow E_2$*, entrelace* ρ_1 *et* ρ_2 *si*

$$\forall g \in G, \rho_1(g) \circ T = T \circ \rho_2(g)$$

et T *s'appelle alors opérateur d'entrelacement entre* ρ_1 *et* ρ_2*.*
La définition exprime la commutativité du diagramme suivant, pour tout $g \in$

G,

$$\begin{array}{ccccc} & E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 & \\ \rho_1(g) & \downarrow & & \downarrow & \rho_2(g) \\ & E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 & \end{array}$$

Les expression suivantes sont diversement utilisées pour exprimer cette même propriété :

- T *est un opérateur d'entrelacement entre* ρ_1 *et* ρ_2*,*
- T *est équivariant pour* ρ_1 *et* ρ_2*,*
- T *est un morphisme de* G*-espace vectoriels,*
- T *est un morphisme,*
- $T \in Hom_G(E_1, E_2)$.
  Si $E_1 = E_2 = E$ *et si* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*,un opérateur qui entrelace* ρ_1 *et* ρ_2 *est simplement un opérateur commute avec* ρ.

Définition 1.4.3.0.2. *Les reprèsentations* ρ_1 *et* ρ_2 *sont èquivalentes s'il existe un opèrateur d'entrelacement bijective entre* ρ_1 *et* ρ_2
Dans ce cas :

$$\forall g \in G, \rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1} \tag{1.2}$$

La relation dèfinie par (1.2) *est bien une relation d'èquivalence sur les reprèsentation d'où la notation : (1.2)=*$\rho_1 \sim \rho_2$*, (ce cas n'est vérifier que si* E_1 *et* E_2 *sont isomorphes).*
En particulier pour des reprèsentations matricielles on obtient des matrices semblables : ie :
$\forall g \in G : [\rho_1(g)]$ *est semblable á* $[\rho_2(g)]$ *avec la même matrice de passage.*

Lemme 1.4.2. *Si* T *entrelace* ρ_1 *et* ρ_2 *,le noyau de* T *,*$KerT$*, est invariant par* ρ_1 *et l'image de* T*,* ImT*, est invariante par*ρ_2.
Démonstration.*Si* $x \in E_1$ *et* $Tx = 0$*,alors* $T(\rho_1(g)x) = \rho_2(g)(Tx) = 0$.

Donc $KerT$ *est un sous-espace de* E_1*,invariant par* ρ_1 *.*
Soit $y \in ImT$*. Il existe* $x \in E_1$ *tel que* $y = Tx$*.Alors*

$$\rho_2(g)y) = \rho_2(g)(Tx) = T(\rho_1(g)x$$

, donc ImT *est unsous-espace de* E_2*,invariant par* ρ_2 *.*

Lemme 1.4.3. *Si* T *commute avec*ρ*,tout sous-espace propre de* T *est invariant par* ρ*.*
Démonstration*. En effet,si* $Tx = \lambda x$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$*,alors* $T(\rho(g)x) = \lambda\rho(g)x$*.Donc le sous- espace propre de* T *correspondant à la valeur propre* λ *est invariant par* ρ*.*

Théorème 1.4.2. *(Lemme de Schur).Soit* T *un opèrateur entrelaçant des reprèsentations irrèductibles de* G *,*$(E_1, \rho_1)et(E_2, \rho_2)$*.*

- *Si* ρ_1 *et* ρ_2 *ne sont pas équivalentes, alors* $T = 0$*.*
- *Si* $E_1 = E_2 = E$ *et* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*,alors* T *est un multiple scalaire de l'identité de* E*.*

Démonstration*.Si* ρ_1 *et* ρ_2 *ne sont pas équivalentes,*T *n'est pas bijectif, donc ou bien* $KerT \neq 0$*,ou bien* $ImT \neq E_2$*.D'aprè le lemme1.4.2,*$KerT$ *est invariant par* ρ_1*.*
Commeρ_1 *est irrèductible, si* $KerT \neq 0$*, alors* $KerT = E_1$*, donc*$T = 0$*. D'après le lemme1.4.2,*ImT *est invariant par* ρ_2*.*
Commeρ_2 *est irrèductible, si* $ImT \neq E2$*, alors* $ImT = 0$*, donc*$T = 0$*.*
Si $E_1 = E_2 = E$ *et* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$*,alors, pour tout* $g \in G, \rho(g) \circ T = T \circ \rho g$*,et* T *commute avec la re présentation* ρ*. Soit* λ *une valeur propre de* T*, qui existe car* T*est un endomorphisme de* E*, espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$*,et soit* E_λ *le sous-espace propre associé à* λ*. D'après le lemme1.4.3,* E_λ *est invariant par*ρ *Par hypothè est non nul, donc, comme* ρ *est irréductible,* $E_\lambda = E$*, ce qui sinifie que* $T = \lambda Id_E$*. Remarquons que la démonstration de la deuxième partie du théorème utilise l'hypothèse que l'espace de la reprèsentations considérée est un espace vectoriel complexe.*

1.5 Caractère d'une représentation

1.5.1 Fonctions sur un groupe, coefficients matricieels

On désignera par $\mathcal{F}(G)$,ou parfois par $\mathbb{C}[G]$,l'espace vectoriel des fonctions sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$, Lorsque cet espace vectoriel est muni du produit scalaire défini ci-dessous, on désigne hilbertien ainsi défifni par $L^2(G)$

Définition 1.5.1.0.1. *Sur $L^2(G)$,le produit scalaire est défini par*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{f_1(g)}f_2(g).$$

On va s'intéresser aux coefficents matriciels des représentations. definition

Définition 1.5.1.0.2. *Si ρ est une représentation deG dans $\mathbb{C}^n$, pour tout couple (i,j), $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$, la fonction $\rho_{ij} \in L^2(G)$ qui associe à $g \in G$ le coefficient de la matrice $\rho(g)$ situé sur la i^e ligne et j^e colonne , $(\rho(g))_{ij} \in \mathbb{C}$ est appelée un coefficient matriciel de ρ.*
Pour une représentation ρ dans un espace vectoriel E , on définit les coefficients matriciels ρ_{ij} relativement à une base (e_i) , qui vérifient

$$\rho(g)e_i = \sum_i \rho_{ij}(g)e_i$$

Si ρ est une représentation unitaire dans un expace de Hilbert de dimension finie, alors

$$\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1} = \overline{{}^t\rho(g)}$$

d'où, dans une base orthonormale,

$$\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ij}(g)}$$

et, en particulier, les coefficients diagonaux de $\rho(g)$ et $\rho(g^{-1})$ sont des nombres complexes conjugués.

1.5.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité

On désigne par Tr la trace d'un endomorphisme.

Définition 1.5.2.0.1. *Soit* $(E;\rho)$ *une représentation du groupe fini* G. *On appelle caractère de* ρ *la fonction* χ_ρ *sur* G *à valeurs complexes définie par*

$$\forall g \in G, \chi_\rho(g) = tr(\rho(g)).$$

Des représentations équivalentes ont même caractère.
Pour une représentation matriciel de dimension n *;*

$$\chi_{\rho(g)} = \sum_{i=1}^{n} (\rho(g))_{ii} \tag{1.3}$$

Sur chaque classe de conjugaison de G *, la fonction* χ_ρ *est constante.*

Définition 1.5.2.0.2. *On appelle fonction centrale sur* G *une fonction constante sur chaque classe de conjugaison.*
Les caractères des représentations sont donc des fonctions centrales sur le groupe.

Proposition 1.5.1. *Soit* $(E;\rho)$ *une représentation de degré* n *et* χ_ρ *son caractère.*

- $\chi_\rho(e) = dim\rho$.
- $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
- *Le caractère d'une somme directe de représentations et la somme des caractères,*

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}.$$

- *Le caractére d'un produit tensoriel de représentations est le produit des caractéres,*

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \chi_{\rho_2}.$$

Démonstration.*La première propriété est conséquenceé de la formule* (1.3).
Pour démontrer la seconde formule, on peut supposer que ρ *est unitaire pour un certain produit scalaire et choisir une base orthonoemale. La propriété des somme directes est évidente.*
La relation suit du fait que la trace d'un produit tensoriel de matrices est le produit de traces.

On a ; d'apprès la proposition1.5.1, pour des représentations ρ_1 et ρ_2 de G,

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g^{-1}) \chi_{\rho_2}(g). \tag{1.4}$$

Les caractéres de représentations irréductibles inéquivalentes sont orthogonaux et que le caractère d'une représentations irréductibles est de norme 1.

Proposition 1.5.2. *Soient $(E_1; \rho_1)$ et $(E_2; \rho_2)$ deux représentations irréductibles de G et soit $u : E_1 \longrightarrow E_2$ application linéaire ,T_u, de E_1 dans E_2, définie par*

$$T_u := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g) u \rho_1(g)^{-1}, \tag{1.5}$$

entrelace ρ_1 et ρ_2.

Démonstration. *Calculons*

$$\rho_2(g) T_u = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_2(gh) u \rho_1(h^{-1})$$

$$\rho_2(g) T_u = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_2(k) u \rho_1(k^{-1} g),$$

d'aprés la relation fondamentale (1.1).D'où,

$$\rho_2(g) T_u = T_u \rho_1(g).$$

L'opérateur T_u est donc un opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2.

Proposition 1.5.3. *Soient $(E_1; \rho_1)$ et $(E_2; \rho_2)$ deux représentations irréductibles de G et soit $u : E_1 \longrightarrow E_2$ application linéaire ,et soit T_u défini par la formule (1.5).*

(i) *Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes, alors $T_u = 0$.*

(ii) *Si $E_1 = E_2$ et $\rho_1 = \rho_1 = \rho$, alors*

$$T_u = \frac{tr(u)}{dimE} Id_E$$

.

Preuve. *La premiére assertion est claire d'après le lemme de Schur. Pour la deuxième, il faut seulement calculer λ sachant que $T_u = \lambda Id_E$.*

Or

$$trT_u = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} tr(u) = tr(u),$$

donc $\lambda = \dfrac{tr(u)}{dimE}$.

Proposition 1.5.4. *Soient $(E_1;\rho_1)$ et $(E_2;\rho_2)$ deux représentations irréductibles de G. On choisit des bases dans E_1 et E_2 .*

(i) Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes,

$$\forall i,j,k,l, \sum_{g\in G}(\rho_2(g))_{kl}(\rho_1(g^{-1}))_{ji} = 0.$$

(ii) Si $E_1 = E_2$ et $\rho_1 = \rho_1 = \rho$,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g))_{kl}(\rho(g^{-1}))_{ji} = \frac{1}{dimE}\delta_{ki}\delta_{lj}.$$

Démonstration. *Utilisons une base (e_i) de E_1, $1 \leqslant j \leqslant dimE_1$, et une base (f_l) de E_2, $1 \leqslant l \leqslant dimE_2$.Pour $u : E_1 \longrightarrow E_2, T_u$ est défini par(1.5).On a, pour $1 \leqslant i \leqslant dimE_1, 1 \leqslant k \leqslant dimE_2$,*

$$(T_u)_{ki} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{m=1}^{dimE_1}\sum_{p=1}^{dimE_2}(\rho_2(g))_{kp}u_{pm}(\rho_1(g^{-1}))_{mi}.$$

Choisissons, pour application linéaire u, l'application $u_{lj} : E_1 \longrightarrow E_2$ défini par $u_{lj}(e_k) = \delta_{jk}f_l$. Alors

$$(u_{(lj)})_{pm} = \delta_{lp}\delta_{jm},$$

et par conséquent

$$(T_{u_{(lj)}})_{ki} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_2(g))_{kl}(\rho_1(g^{-1}))_{ji}$$

On applique maintenant la proposition 1.5.2.
Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes,toujours nul, d'où (i).
Si $E_1 = E_2$ et $\rho_1 = \rho_1 = \rho$, alors

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g))_{kl}(\rho(g^{-1}))_{ji} = (T_{u_{(lj)}})_{ki} = \frac{\delta_{ki}\delta_{lj}}{dimE} = \frac{tru_{(lj)}}{dimE}\delta_{ki}.$$

ce qui démontre (ii).

Corollaire 1.1. *Soient $(E_1;\rho_1)$ et $(E_2;\rho_2)$ deux représentations unitaires irréductibles de G. On choisit des bases orthonormales dans E_1 et E_2 .*

(i) Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes,pour tous i,j,k,l,

$$\langle(\rho_1)_{ij},(\rho_2)_{kl}\rangle = 0.$$

(ii) Si $E_1 = E_2$ et $\rho_1 = \rho_1 = \rho$,

$$\langle\rho_{ij},\rho_{kl}\rangle = \frac{1}{dimE}\delta_{ki}\delta_{lj}.$$

Démonstration.*En effet, si ρ_1 est unitaire pour un produit scalaire sur E_1 et si la base choisie dans E_1 est orthonormale,*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_2(g))_{kl}(\rho_1(g^{-1}))_{ji} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_2(g))_{kl}\overline{(\rho_1(g))_{ji}} = \langle(\rho_1)_{ij},(\rho_2)_{kl}\rangle.$$

La proposition 1.5.4 entraîne donc (i) et (ii)

Théorème 1.5.1. *(Relation d'orthogonalité).*

(i) Si ρ_1 et ρ_2 sont des représentations irréductibles inéquivalentes,de G,

$$\langle\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_2}\rangle = 0.$$

(ii) Si ρ est une représentation irréductible de G,

$$\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle = 1.$$

Démonstration.*D'aprés la relation (1.4) et la proposition éprécédente, si ρ_1 et ρ_2 sont des représentations irréductibles inéquivalentes,alors $\langle\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_2}\rangle = 0$.*

Si $\rho_1 = \rho_1 = \rho$,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g))_{ii}(\rho(g^{-1}))_{jj} = \frac{\delta_{ij}}{dimE},$$

d'oú $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle = 1$.

1.6 Représentations des groupes compacts

Définition 1.6.0.0.1. *Un groupe G muni d'une structure d'espace topologique est dit être un groupe topologique si et seulement si les fonctions $G \times G \longrightarrow G$, définie par $(x;y) \longmapsto xy$; et $G \longrightarrow G$, définie par $x \longmapsto x^{-1}$, sont continues, où la topologie sur $G \times G$ est celle de la topologie produit. Nous dirons qu'un groupe topologique G est compact si et seulement si G est compact comme espace topologique et qu'un groupe topologique G est localement compact si et seulement si tout $g \in G$ a un voisinage compact. Nous allons maintenant présenter quelques exemples de groupes localement compacts. Tous ces groupes seront des sous-ensembles de $\mathbf{R^N}$ pour un $N \in \mathbf{N}$ avec la topologie induite par la métrique usuelle, à savoir si $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$, alors la distance $d(x;y)$ est*

$$d(x;y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}$$

et G sera muni de la topologie comme sous-espace de$\mathbf{R^N}$. Noter qu'avec cette topologie un sous-ensemble X de $\mathbf{R^N}$ est compact si et seulement si X est un fermé borné par le théorème de Heine-Borel. Le groupe additif $(\mathbf{R^n};+)$ des nombres réels est un groupe topologique localement compact. $\mathbf{R^n}$ n'est pas compact, parce que $\mathbf{R^n}$ n'est pas borné.

1.6.1 Mesure de Haar

Sur un groupe fini G, on sait que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(G)$ et $\forall g \in G$,

$$\sum_{h \in G} f(h) = \sum_{h \in G} f(gh) = \sum_{h \in G} f(hg)$$

Si l'on désigne par l_g (resp.,r_g) la multiplication à gauche (resp., droite) par $g \in G$, on a par définition $f(gh) = (f \circ l_g)(h)$ et $f(hg) = (f \circ r_g)(h)$. Par conséquent, l'opération de moyenne,

$$M : f \longmapsto M(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$$

vérifie :

- *M est une forme linéaire sur $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, positive, c'est-à -dire prenant des valeurs positives sur les fonctions réelles positives.*
- *M est invariante à gauche et à droite, c'est-à -dire*

$$\forall g \in G, M(f \circ l_g) = M(f \circ r_g) = M(f)$$

- *M(1)=1*

Sur les groupes compacts, il existe une mesure, la mesure de Haar, qui possède des propriétés analogues. Plus généralement sur un groupe localement compact, il existe des mesures ayant une propriété d'invariance soit à gauche, soit à droite (mais pas les deux en général).

Théorème 1.6.1. *Soit G un groupe localement compact.*

(i) Il existe sur G une mesure positive, finie sur les compacts, non identiquement nulle et invariante à gauche, i.e., pour toute fonction intégrable f et pour tout $h \in G$,

$$\int_G f(hg)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g)$$

Une telle mesure est unique à un facteur scalaire réel positive près. Si f est continue, $f \geqslant 0$ et $\int_G f(g)d\mu(g) = 0$, alors f=0.

(ii) Si G est compact, il existe sur G une unique mesure invariante à gauche μ telle que $\int_G d\mu(g) = 1$.

(iii) Sur un groupe compact, toute mesure invariante à gauche est invariante à droite.

Démonstration

(i) Nous admettrons ce résultat.

(ii) Si μ_0 est une mesure invariante à gauche sur G compact et si

$$\int_G d\mu_0(g) = m$$

On pose $\mu = \frac{1}{m}\mu_0$ et μ est clairement l'unique mesure invariante à gauche telle que $\int_G d\mu(g) = 1$.

(iii) Soit μ une mesure invariante à gauche sur G localement compact. Pour f continue à support compact, posons $\mu(f) = \int_G f(g)d\mu(g)$. Soit $h \in G$ et considérons $\mu_h(f) = \int_G f(gh)d\mu(g)$, c'est-à -dire

$$\mu_h(f) = \mu(f \circ r_h)$$

Alors,

$$\forall k \in G, \mu_h(f \circ l_k) = \int_G f(kgh)d\mu(g) = \int_G f(gh)d\mu(g) = \mu_h(f)$$

donc, d'après l'unicité des mesures invariantes à gauche à un facteur prés, il existe un scalaire $\Delta(h) \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\mu_h(f) = \Delta(h)\mu(f)$$

Si G est compact, on peut intégrer la fonction constante 1. On obtient $\mu_h(1) = \mu(1) = \Delta(h)\mu(1)$. D'où $\Delta = 1$ et μ est donc aussi invariante à droite, i, e.,

$$\int_G f(gh)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g), \quad \forall h \in G$$

Définition 1.6.1.0.1. *Sur un groupe compact, l'unique mesure invariante á gauche et á droite, et de masse totale 1, s'appelle la mesure de Haar.*
Sur un groupe localement compact G, la fonction $\Delta : h \in G \longmapsto \Delta(h) \in \mathbb{R}^+$ est appelée la fonction modulaire de G.
Elle vérifie $\Delta(hh') = \Delta(h)\Delta(h')$ car

$$\Delta(hh')\mu(f) = \mu_{hh'}(f) = \mu(f \circ r_{hh'}) = \mu(f \circ r_{h'} \circ r_h) = \Delta(h)\mu(f \circ r_{h'}) = \Delta(h)\Delta(h')\mu(f)$$

On dit que le groupe localement compact G est unimodulaire si $\Delta = 1$.
Le théorème précédent dit que si G est compact, alors G est unimodulaire.
On écrit souvent $\int f(g)dg$ ou lieu de $\int f(g)d\mu(g)$. Ainsi, si G est compact, pour toute fonction mesurable f,

$$\forall h \in G, \int_G f(g)dg = \int_G f(hg)dg = \int_G f(gh)dg$$

et l'on impose à μ de satisfaire la condition de normalisation, $\int_G dg = 1$

1.7 Représentations des groupes de Lie. Lemme de Schur

Tous les espaces de Hilbert considérés sont sur le corps des complexes et supposés séparables, c'est-á-dire possédant une base hibertienne dénombrable.

1.7.1 Généralités

Définition 1.7.1.0.1. *Soit G un groupe de Lie.On appelle représentation continue, ou simplement représentation,de G la donnée d'un espace de Hilbert E et d'un morphisme de groupes tel que , pour tout $x \in E$,*

est une application continue. Une condition suffisante pour que la condition de continuité ci-dessus soit satisfaite est que c'est-á-dire que ρ soit continue comme application de G dans $GL(E)$ muni de la topologie induite par la norme de $\mathfrak{L}(E, E)$.Si E est de dimension finie, cette condition suffisante est aussi nécessaire. La dimension, finie ou infinie, de E s'appalle la dimension de ρ. La représentation triviale dans un espace vectoriel$E$ EST Définie par $\rho(g) = Id_E$, pour tout g. Soit E un espace de Hilbert complexe. Si $u \in \mathfrak{L}(E, E)$, l'adjoint u^* de u est défini par

$$\forall x, y \in E, \langle ux, y\rangle = \langle x, u^* y\rangle,$$

et un élément $u \in GL(E)$ est un opéréateur unitaire si $uu^* = u^* u = Id_E$. Le groupe des opéréateurs unitaires de$E$ est noté $U(E)$.En dimension finie et dans une base othonormale, un opéréateur unitaire est représenté par une matrice unitaire. Une représentation ρ de G dans E est dite unitaireėėėėė si E est un espace de Hilbert complexe et si , pour tout $g \in G, \rho(g)$ est un opérateur unitaire. Alors , pour tous $g \in G, x, y \in E, \langle\rho(g)x, \rho(g)y\rangle = \langle x, y\rangle$ et , en particulier, $\|\rho(g)x\| = \|x\|$.

Remarque*. On peut définir deé la même manière les représéentation dans des espaces de Hilbert réels. Dans ce cas, on parlera de représentations orthogonales.*

1.7.2 Coefficients d'une représentation

Pour $x \in E$ et $\xi \in E^*$,on pose

$$\rho_{x\xi}(g) =< \xi, \rho(g)x >,$$

où $< , >$ désigne le crochet de dualité.En dimension finie, étant donnée une base (e_i) de E, de base duale (e_i^*),on retrouve les coefficients matriciels ρ_{ij} , définis

$$\rho_{e_j e_i^*}(g) =< e_i^*, \rho(g)e_j >= \rho_{ij}(g).$$

On peut aussi considérer, pour $x, y \in E$,

$$\varphi^{\rho}_{xy}(g) =< x, \rho(g)y > .$$

Si ρ est unitaire,

$$\varphi^{\rho}_{xy}(g^{-1}) = \overline{\varphi^{\rho}_{yx}(g)}.$$

En dimension finie, pour toute base (e_i) de E, on considère les coefficients

$$\varphi^{\rho}_{ij}(g) =< e_i, \rho(g)e_j > .$$

Si la base (e_i) est orthonormale,

$$\varphi_{ij} = \rho_{ij}.$$

1.7.3 Complète réductibilité

Théorème 1.7.1. *Toute représentation d'un groupe compact est unitarisable.*

Schéma d'une démonstration. Soit G un groupe compact, et soit (E, ρ) une représentation de G. On pose, pour $x, y \in E$,

$$\langle x, y\rangle' = \int_G \langle \rho(g)x, \rho(g)y\rangle dg$$

où dg est la mesure de Haar sur G. C'est bien un produit scalaire car, si $\langle x, x'\rangle = 0$, alors d'après le théorème (1.6.1) ,$\langle \rho(g)x, \rho(g)x\rangle = 0, \forall g \in G$, et par conséquent, x=0. D'autre part,

$$\langle \rho(g)x, \rho(g)y\rangle' = \int_G \langle \rho(hg)x, \rho(hg)y\rangle dh = \int_G \langle \rho(h)x, \rho(h)y\rangle dh = \langle x, y\rangle'$$

Ainsi $\rho(g)$ est unitaire pour $\langle , \rangle'$.

Corollaire 1.7.1. *Toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est complètement réductible.*

Théorème 1.7.2. *Toute représentation irréductible d'un groupe compact est de dimension finie.*

Remarque *Cet énoncé, comme spécifié plus haut, sous-entend qu'il s'agit de représentations continues dans des espaces de Hilbert complexes séparables. Il n'est pas vrai en toute généralité, mais reste vrai pour des représentations continues à valeurs dans certains espaces vectoriels topologiques plus généraux que les espaces de Hilbert.*

1.7.4 Relations d'orthogonalité

Définition 1.7.4.0.1. *On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes sur G par*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg$$

où dg est la mesure de Haar. On désigne par $L^2(G)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant cet espace pré hilbertien pour la norme définie par ce produit scalaire. C'est l'espace de Hilbert des classes d'équivalences (pour la relation d'égalité presque par tout) de fonctions de carré intégrable sur G.
On sait que les représentations irréductibles de G sont de dimension finie. Les relations d'orthogonalité des caractères des représentations irréductibles des groupes finis s'étendant au cas compact.

Théorème 1.7.3. *Soit G un groupe compact et soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations unitaires irréductibles de G. $\forall x_1, y_1 \in E_1$ et $\forall x_2, y_2 \in E_2$,*

$$\langle \varphi^{\rho_1}_{x_1 y_1}, \varphi^{\rho_2}_{x_2 y_2} \rangle = \begin{cases} 0 & si \quad \rho_1 \nsim \rho_2 \\ \frac{1}{dim E} \langle x_2, x_1 \rangle \langle y_1, y_2 \rangle & si \quad E_1 = E_2 = E \ et \ \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{cases}$$

Démonstration *En généralisant le procédé utilisé dans la proposition (1.5.2) et (1.5.4), pour toute application linéaire continue $u : E_1 \to E_2$, on définit l'opérateur qui entrelace ρ_1 et ρ_2,*

$$T_u = \int_G \rho_2(g) u \rho_1(g)^{-1} dg$$

On considère l'application linéaire $u_{y_1y_2} : E_1 \longrightarrow E_2$ *définie par* $u_{y_1y_2}(x) = \langle y_1, x\rangle y_2$ *pour* x *dans* E_1. *En utilisant le fait que* ρ_1 *est unitaire, on obtient alors la relation* $\langle \varphi^{\rho_1}_{x_1y_1}, \varphi^{\rho_2}_{x_2y_2}\rangle = \langle x_2, T_{u_{y_1y_2}} x_1\rangle$.
On applique ensuite le lemme de Schur. Cette quantité est nulle si ρ_1 *n'est pas équivalente à* ρ_2. *Si* $E_1 = E_2 = E$ *et* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, *alors* $T_{u_{y_1y_2}} = \tau(y_1, y_2) Id_E$, *où* $\tau(y_1, y_2)$ *est antilinéaire en* x_1 *et linéaire en* x_2. *On calcule* $\tau(y_1, y_2)$ *en calculant la trace de* $T_{u_{y_1y_2}}$. *Celle-ci est égale à la trace de* $u_{y_1y_2}$ *car, pour toute application linéaire* u, $TrT_u = \int_G Tr(\rho(g) \circ u \circ \rho(g^{-1}))dg = \int_G Trudg = Tru$.
Comme on a $Tru_{y_1y_2} = \langle y_1, y_2\rangle$, *on obtient le résultat cherché.*
En particulier, si ρ_1 *et* ρ_2 *ne sont pas équivalentes, dans toute bases orthonormales,*

$$\langle \varphi^{\rho_1}_{ij}, \varphi^{\rho_2}_{kl}\rangle = 0 \tag{1.6}$$

et, si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, *alors*

$$\langle \varphi^{\rho}_{ij}, \varphi^{\rho}_{kl}\rangle = \frac{1}{dimE}\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{1.7}$$

On désigne par $\widehat{G}$ *l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles d'un groupe compact* G. *Lorsque* $L^2(G)$ *est séparable, ce qui a lieu dans les cas que l'on rencontre en pratique, les relations d'orthogonalité ci-dessus impliquent que* $\widehat{G}$ *est dénombrable.*
D'après (1.6) et (1.7) les coefficients matriciels dans des bases orthonormales des représentations unitaires irréductibles inéquivalentes de G *forment un système orthogonal dans* $L^2(G)$. *On démontre qu'ils forment une base orthogonale de* $L^2(G)$ *au sens hilbertien. Ce résultat constitue le théorème de Peter-Weyl qui peut s'énoncer :*

Théorème 1.7.4. ***(Théorème de Peter-Weyl pour les groupes compacts)*** *Toute fonction* $f \in L^2(G)$ *admet un développement de Fourier convergent au sens de* L^2,

$$f = \sum_{\alpha\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{dim\rho^\alpha} c^\alpha_{ij}\rho^\alpha_{ij} \tag{1.8}$$

où les ρ^α *sont des représentants unitaires des classes de représentations irréductibles inéquivalentes de* G, *les* ρ^α_{ij} *sont leurs coefficients matriciels dans des bases orthonormales, et*

$$c^\alpha_{ij} = (dim\rho^\alpha)\langle \rho^\alpha_{ij}, f\rangle = (dim\rho^\alpha)\int_G f(g)\overline{\rho^\alpha_{ij}(g)}dg \tag{1.9}$$

Théorème 1.7.5. *(Relation d'orthogonalité) Soient ρ_1 et ρ_2 des représentations irréductibles de G. Alors*

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = \begin{cases} 0 & si \quad \rho_1 \nsim \rho_2 \\ 1 & si \quad \rho_1 \sim \rho_2 \end{cases}$$

Démonstration *Compte tenu du théorème (1.7.1), ces relations sont une conséquence des formules précédentes (1.6) et (1.7).*
Une représentation ρ est irréductible si et seulement si $\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 1$
Si ρ est une représentation de G, on peut la décomposer en somme hilbertienne de représentations irréductibles, $\rho_i \in \widehat{G}$. On écrira

$$\rho = \widehat{\bigoplus}_{\rho_i \in \widehat{G}} m_i \rho_i$$

où

$$m_i = \langle \chi_{\rho_i}, \chi_\rho \rangle$$

On peut avoir $m_i = \infty$

Chapitre 2

Quelques fonctions spéciales

2.1 Fonction Gamma

Définition 2.1.0.0.1. *Pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma, et notée par la lettre grecque Γ*

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{2.1}$$

Cette intégrale impropre converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive. Cette fonction peut être prolongée analytiquement en une fonction méromorphe sur l'ensemble des nombres complexes, excepté pour $z = 0, -1, -2, -3...$ qui sont des pôles.
C'est ce prolongement qu'on appelle généralement « fonction gamma ». L'unicité du prolongement analytique permet de montrer que la fonction prolongée vérifie encore l'équation fonctionnelle précédente. Cela permet une définition plus simple, à partir de l'intégrale, et un calcul de proche en proche de Γ pour $z-1, z-2, etc.$.
Par changement de variable, l'intégrale précédente pour $(Re(z) > 0)$ s'écrit aussi :

$$\Gamma(z) = 2\int_0^{+\infty} u^{2z-1}\mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u \quad \textit{et} \quad \Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln s)^{z-1}\, \mathrm{d}s$$

La définition suivante de la fonction gamma par produits infinis, due à Euler, a un sens pour les nombres complexes z qui ne sont pas des entiers *négatifs ou nuls :*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{(1+1/k)^z}{1+z/k}.$$

Elle est équivalente à celle donnée par Schlömilch,$[sourceinsuffisante]$ *:*

$$\Gamma(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{z/k}}{1+z/k}$$

où

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$$

Propriétés $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *et* $\Gamma(1) = 1$, *on déduit :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!.$$

On interprète donc la fonction gamma comme un prolongement de la factorielle à l'ensemble des nombres complexes (à l'exception des entiers négatifs ou nul). Une notation alternative est la fonction Γ, *introduite par Gauss :* $\Pi(z) = \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ *(et donc* $\Gamma(z) = \Pi(z-1) = \Pi(z)/z$ *de telle façon que :*

$$\Pi(n) = n!.$$

Caractérisations *Sur l'ensemble des réels La fonction gamma est entièrement caractérisée sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par les trois propriétés suivantes (théorème de Bohr-Mollerup) :*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. *Pour tout* $x > 0$, *on a :* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. *la fonction composée* $\ln \circ \Gamma$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^*$ *Sur le demi-plan complexe Re(z)>0*

La fonction gamma est entièrement caractérisée parmi les fonctions holomorphes du demi-plan complexe Re(z)>0 par les trois propriétés suivantes (théorème de Wielandt) :

1. $\Gamma(1) = 1$

2. *Pour tout z tel que $Re(z) > 0, \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$*
3. *$|\Gamma(z)|$ est bornée dans la bande $1 \leq Re(z) \leq 2$*

Autres propriétés Formule des compléments La fonction gamma vérifie la formule de réflexion d'Euler, ou formule des compléments

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \Gamma(1-z)\,\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

Formule de multiplication La fonction gamma vérifie également la formule de duplication : $\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$.

La formule de duplication est un cas particulier du théorème de multiplication :

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\,\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2}\,m^{1/2-mz}\,\Gamma(mz).$$

Dérivées La fonction gamma est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire p fois dérivable pour tout entier p). Sa dérivée est exprimée à l'aide de la fonction digamma : $\Gamma'(z) = \Gamma(z)\psi_0(z)$.

Plus généralement, sa dérivée p-ième possède sur $\mathbb{R}_+^*$ l'expression intégrale suivante :

$$\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

La définition de la fonction gamma sous forme d'intégrale la fait apparaître comme une convolution entre un caractère additif (l'exponentielle) et un caractère multiplicatif ($x \longmapsto x^s$).

Lien avec d'autres fonctions La fonction gamma est reliée à la fonction ζ de Riemann par :

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

Elle est reliée à la fonction êta de Dirichlet par :

$$\Gamma(s)\,\eta(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(-\ln(xy))^{s-2}}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dans la définition de la fonction gamma sous forme d'intégrale, les bornes de l'intégrale sont fixées ; la fonction gamma incomplète est la fonction obtenue en en modifiant la borne inférieure ou la borne supérieure. La valeur de

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *est celle de l'intégrale de Gauss ; elle peut aussi se déduire de la formule des compléments. Cette valeur permet, par récurrence, de déterminer les autres valeurs de la fonction gamma pour les demi-entiers positifs :*

$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \ldots,$

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$

mais aussi négatifs, par exemple :

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$$

En ce qui concerne ses dérivées, avec ? la constante d'Euler-Mascheroni :

$$\Gamma'(n+1) = \Gamma(n+1)\psi_0(n+1) = n!\left(-\gamma + \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}\right)$$

$$\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi_0\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\left(-\gamma - 2\ln 2 + \sum_{1\le k\le n}\frac{2}{2k-1}\right)$$

$\Gamma''(1/2) = \sqrt{\pi}(\gamma + 2\,\ln(2))^2 + \frac{\pi^{5/2}}{2}, \quad \Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}, \quad \Gamma''(2) = (1-\gamma)^2 + \frac{\pi^2}{6} - 1$

On connaît quelques résultats de transcendance et même d'indépendance algébrique sur les valeurs de Γ *en certains points rationnels.*

2.2 Fonction Bêta

Définition 2.2.0.0.1. *la fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexes,* x *et* y *de parties réelles strictement positives par :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

La fonction bêta a été étudiée par Euler et Legendre et doit son nom à Jacques Binet. Elle est en relation avec la fonction Gamma d'Euler.

Il existe aussi une version incomplète de la fonction bêta, la fonction bêta incomplète ainsi qu'une version régularisée de celle-ci, la fonction bêta incomplète régularisée.

Propriétés

. *Dans sa définition sous forme d'intégral le changement de variable* $u = 1 - t$ *prouve que cette fonction est symétrique c'est-à-dire que :*

$\mathrm{B}(x, y)=\mathrm{B}(y, x)$.

. *Elle peut prendre aussi les formes intégrales*

$\mathrm{B}(x, y)=2 \int_0^{\pi / 2} \sin^{2 x-1} \theta \ \cos^{2 y-1} \theta \ \mathrm{d} \theta$ *(par le changement de variable* $t=\sin^2 \theta$*),*

. $\mathrm{B}(x, y)=\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \ \mathrm{d} t$

Elle satisfait des équations fonctionnelles telles que :

$\mathrm{B}(x, y+1)=\frac{y}{x+y} \mathrm{B}(x, y)$

$\mathrm{B}(x, y) \ \mathrm{B}(x+y, 1-y)=\dfrac{\pi}{x \sin (\pi y)}$,

$\mathrm{B}(x, x)=2^{1-2 x} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, x\right)$

Elle est liée à la fonction gamma par l'équation suivante :

$$\mathrm{B}(x, y)=\frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Si x et y sont des entiers strictement positifs, cette équation se réécrit, en termes de factorielles ou de coefficient binomial :

$$\frac{x+y}{x y \mathrm{B}(x, y)}=\frac{(x+y)!}{x! y!}=\binom{x+y}{x}$$

Si x et y sont deux rationnels et si ni x, ni y, ni $x+y$ ne sont entiers, alors$\mathrm{B}(x, y)$ *est un nombre transcendant.*

Dérivation *Nous avons :*

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{B}(x, y)=\mathrm{B}(x, y)\left(\frac{\Gamma^{\prime}(x)}{\Gamma(x)}-\frac{\Gamma^{\prime}(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right)=\mathrm{B}(x, y)(\psi(x)-\psi(x+y)),$$

où $\psi(x)$ est la fonction digamma.

Fonction bêta incomplète La fonction bêta incomplète est définie par :

$$\mathrm{B}(x ; a, b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} \mathrm{d} t$$

et vérifie trivialement :

$$\mathrm{B}(x ; a+1, b)+\mathrm{B}(x ; a, b+1)=\mathrm{B}(x ; a, b)$$

et

$$x^a(1-x)^b = a\mathrm{B}(x;\, a, b+1) - b\mathrm{B}(x;\, a+1, b)$$

Pour $x = 1$, *elle correspond à la fonction bêta de paramètres* a *et* b.

La fonction bêta incomplète régularisée consiste à diviser la fonction bêta incomplète par la fonction bêta complète

$$I_x(a,b) = \frac{\mathrm{B}(x;\, a,b)}{\mathrm{B}(a,b)}.$$

Les relations précédentes deviennent ainsi

$$aI_x(a+1,b) + bI_x(a,b+1) = (a+b)I_x(a,b)$$
$$I_x(a,b+1) - I_x(a+1,b) = x^a(1-x)^b\frac{a+b}{ab\mathrm{B}(a,b)}.$$

On déduit de la seconde (par une récurrence immédiate) le lien suivant avec le développement binomial et la loi binomiale :

$$I_p(a, n-a+1) = \sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

2.3 Fonction de Bessel .

2.3.1 Équation de Bessel

Définition 2.3.1.0.1. *les fonctions de Bessel interviennent dans de nombreux proplèmes physiques, par l'intermédiaire de solutions particulières de certaines équations aux dérivées partielles.On les voit notamment apparaître dans des solutions de l'equation de Laplace*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.2}$$

Rappelons qu'une telle fonction u. *dite fonction harmonique du point* $M(x,y,z)$ *est l'expression la plus générale du potentiel d'un champ de gradients qui est aussi á flux conservatif*
Transformons(2.1), où x, y, z *sont les coordonnées de* M *dans un repère orthonormé, en exprimant* $u(M)$ *à l'aide desà coordonnées cylindriques associées, définies par* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = v$.

De $r^2 = x^2 + y^2$*, on tire*

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = x, \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$r\frac{\partial r}{\partial y} = y, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

De $\tan\theta = \frac{y}{x}$*, on tire*

$$(1+\tan^2\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$(1+\tan^2\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x}, \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

En outre

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 1$$

on a donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}) - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta} +$$

$$+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x})$$

(sant les dérivées secondes continues).

Aprés réduction on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sin^2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} +$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

On obtiendrait de même :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\cos^2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} +$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$$

D'où

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$$

Cherchons de solutions de $\Delta u = 0$ sous la forme

$$u = f(r)g(z)h(\theta)$$

conduit à $f(r) = y(\alpha r)$, $y(t)$ étant solution de l'equation de Bessel d'ordre λ

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (t^2 - \lambda^2)y = 0 \tag{2.3}$$

Une solution particuliére de cette équation est

$$J_\lambda(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda}, où - \lambda \notin \mathbb{N}^*, t > 0$$

Si λ n'est pas entier, (2.2)a pour solution général

$$y(t) = aJ_\lambda(t) + bJ_{-\lambda}(t)$$

On a $J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t, J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$
Si λ est un entier n les fonctions de Bessel de première espèce J_n sont définies par la série entière (de rayon de convergence infini) suivante :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(n+p)!}x^{2p}$$

et on peut, par un passage à la limite, définir

$$J_{-n(t)} = (-1)^n J_n(t)$$

En particulier

$$J_0(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{t^{2p}}{2^{2p}(p!)^2}$$

La solution générale de (2.2) est alors

$$y(t) = aJ_n(t) + bY_n(t), oùY_n(t) = \lim_{\lambda\to n}\frac{J_\lambda(t)\cos\lambda\pi - J_{-\lambda(t)}}{\sin\lambda\pi}$$

est une fonction de Bessel de seconde espèce.

2.3.2 Relations de récurence sur les fonctions de Bessel.

- $J_{n+1}(t) = \frac{nJ_n(t)}{x} - J_n'(t)$
- $J_{n+1}(t) + J_{n-1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t)$
- $J_{n+1}(t) - J_{n-1}(t) = -2J_n'(t)$

  On en déduit :
- $J_1(t) = -J_0'(t)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^n J_n(t)) = t^n J_{n-1}(t)$

2.3.3 Forme intégrale de J_n, n entier.

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau - t\sin\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

ou encore par :

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}\,(n\tau - t\sin\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

2.3.4 Dévloppement en série de Fourier de $e^{it\sin x}$.

$$e^{it\sin x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(t) e^{inx}$$

2.3.5 Fonction génératrice.

$$e^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(t) z^n, z \neq 0$$

2.4 Polynômes de Legendre

Définition 2.4.0.0.1. *Les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux. Ce sont des solutions polynomiales $P_n(x)$ de l'équation différentielle de Legendre :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right] + n(n+1)\,P_n(x) = 0 \qquad (2.4)$$

dans le cas particulier où le paramètre n est un entier.
Les polynômes de Legendre sont définis uniquement pour $x \in [-1;1]$ puisque les points $x = \pm 1$ sont des points singuliers réguliers de cette équation différentielle. Ces polynômes orthogonaux ont de nombreuses applications tant en mathématiques, par exemple pour la décomposition d'une fonction en série de polynômes de Legendre, qu'en physique, où l'équation de Legendre apparaît naturellement lors de la résolution des équations de Laplace ou de Helmholtz en coordonnées sphériques.

Définition 2.4.0.0.2. *les polynômes de Legendre sont les fonctions propres de l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :*

$$P \in \mathbb{R}[X] \mapsto u(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] \tag{2.5}$$

pour la valeur propre $-n(n+1),\ n \in \mathbb{N}$.
Remarque *: Les polynômes de Legendre constituent le cas particulier des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, pour lequel les paramètres α et β sont nuls :*

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}$$

Définition 2.4.0.0.3. *On appelle équation de Legendre l'équation*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \alpha(\alpha+1)\,y = 0 \tag{2.6}$$

avec en général $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.4.1. *le polynôme de LegendreP_n (pour tout entier naturel n, et pour $x \in [-1;+1]$) est une solution de l'équation différentielle :*

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)\,P_n(x) = 0, \qquad P_n(1) = 1. \tag{2.7}$$

Cette équation est naturellement liée à l'équation de Laplace $\Delta f = 0$, écrite en coordonnées sphériques, qui intervient notamment en électrostatique. En effet, lors de la recherche d'une solution ne dépendant pas de l'angle d'azimut φ sous la forme d'un produit $f(r,\theta) = A(r)B(\theta)$ de deux fonctions d'une seule variable, l'équation vérifiée par B ainsi obtenue est de la forme :

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\theta}\right)+n(n+1)\,B=0$$

où $n(n{+}1)$ est la constante de séparation. Le changement de variable $x = cos\theta$ permet de vérifier que B suit l'équation de Legendre2. Les seules solutions physiquement acceptables, c'est-à-dire qui ne divergent pas pour $x \to \pm 1$ sont alors celles pour lesquelles n est entier, donc les polynômes de Legendre ***Dèmonstration*** *En effet, en coordonnées sphériques (r, θ, φ) l'équation de Laplace s'écrit :*

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=0$$

. Dans le cas où le problème est telle que la solution ne dépend pas de l'angle d'azimut φ, et en recherchant donc une solution par la méthode de séparation des variables, soit de la forme $f(r,\theta) = A(r)B(\theta)$ il vient par substitution :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA}{dr}\right)B(\theta)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dB}{d\theta}\right)A(r)=0$$

soit en divisant membre à membre par le produit $A(r)B(\theta)$:

$$\frac{1}{A(r)r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA}{dr}\right)=-\frac{1}{B(\theta)r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dB}{d\theta}\right)$$

Comme on doit avoir égalité entre chacun des deux membres, dépendant de deux variables différentes, pour toutes les valeurs possible de ces dernières, chacun d'eux doit être égal à une constante, dite de séparation, qu'il est possible d'écrire sans perte de généralité sous la forme $\alpha(\alpha+1)$ avec α réel. Le changement de variable $x = cos\theta$ permet de mettre l'équation issue du second membre sous la forme d'une équation de Legendre. Toutefois en physique on cherche des solutions définies pour toutes les valeurs possibles de l'angle θ, soit en fait régulières en $x = \pm 1$, donc avec $\alpha = n$, n entier, la partie angulaire de l'équation de Laplace se met donc bien sous la forme indiquée.

2.4.1 Fonction génératrice

Définition 2.4.1.0.1. *On peut aussi définir cette suite de polynômes par sa série génératrice :*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n$$

Cette expression intervient notamment en physique, par exemple dans le développement à grande distance du potentiel électrostatique ou gravitationnel (développement multipolaire).
Si l'on considère qu'en général z est complexe, le calcul des coefficients de la série de Laurent donne alors :

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint (1-2xz+z^2)^{-1/2}\, z^{-n-1}\, \mathrm{d}z$$

où le contour entoure l'origine et est pris dans le sens trigonométrique.
Il est possible de définir les polynômes de Legendre par cette fonction génératrice, comme les coefficients de l'expansion.

2.4.2 Formule de récurrence de Bonnet

Cette formule permet rapidement d'obtenir l'expression du polynôme de Legendre d'ordre $(n+1)$ à partir de ceux d'ordres n et $(n-1)$.

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x) \tag{2.8}$$

avec $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$. ***Démonstration*** *Elle se démontre facilement à partir de la fonction en dérivant par rapport à la variable t la définition des polynômes de Legendre à partir de la fonction génératrice, il vient après réarrangement :*

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

En utilisant à nouveau

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

, il vient
$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)xP_{n+1}(x)t^{n+1} +$
$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^{n+2}$.
En identifiant alors les coefficients des termes de même puissance de t, il vient alors :

- *pour* $n = 0, xP_0(x) = P_1(x)$*, soit en prenant pour condition de normalisation* $P_0(x) = 1, \forall x \in [-1, 1]$*, il vient* $P_1(x) = x$ *;*
- *pour* $n = 1, 3xP_1(x) - P_0(x) = 2P_2(x)$*, soit avec la même condition de normalisation que précédemment* $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$
- *de façon générale pour* $n \geq 1$*,* $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$*, ce qui redonne bien la formule de récurrence précédente.*

Propriétés

- *Degré Le polynôme Pn est de degré n.*
- *Base La famille* $(P_n)_{n\leq N}$ *étant une famille de polynômes à degrés étagés, elle est une base de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_N[X]$*.*
- *Parité Les polynômes de Legendre suivent la parité de n. On peut exprimer cette propriété par :*

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).\, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

  (en particulier, $P_n(-1) = (-1)^n$ *et* $P_{2n+1}(0) = 0$*.*
- *Orthogonalité Une propriété importante des polynômes de Legendre est leur orthogonalité. Il est possible de montrer, pour tout m, n entiers, que :*

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

  Il est possible d'interpréter cette relation en introduisant le produit scalaire de deux fonctions, défini à partir de l'intégrale du produit des deux fonctions sur un intervalle borné :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)W(x)\;\mathrm{d}x$$

où w(x) est appelé « fonction poids », [a , b] étant l'intervalle d'orthogonalité des deux fonctions, qui peut être infini sous réserve de convergence de l'intégrale. Dans le cas des polynômes de Legendre l'intervalle d'orthogonalité est [?1, 1] et la fonction poids est simplement la fonction constante de valeur 1, il est donc possible d'écrire : ces polynômes sont orthogonaux par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *défini sur* $\mathbb{R}[X]$ *par la relation :*

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

Démonstration

De plus, comme $(P_n)_{n \leq N}$ *est une base de* $\mathbb{R}_N[X]$*, on a* $P_{N+1} \in (\mathbb{R}_N[X])^{\perp}$*, c'est-à-dire :*

$$\forall Q \in \mathbb{R}_N[X], \int_{-1}^{1} P_{N+1}(x) Q(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

- *Norme Le carré de la norme, dans L2([-1,1]), est*

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

En effet, pour tout $n > 1$*, on peut établir la relation*

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1) P_n,$$

dont on déduit (en utilisant que pour tout k, P'_{k-1} *est de degré* $k-2 < k$ *donc est orthogonal à* P_k*, et en effectuant une intégration par parties) :*

$$\langle P_n, (2n+1) P_n \rangle = \langle P_n, P'_{n+1} - P'_{n-1} \rangle = \langle P_n, P'_{n+1} \rangle =$$

$$= [P_n P_{n+1}]_{-1}^{1} - \langle P'_n, P_{n+1} \rangle = [P_n P_{n+1}]_{-1}^{1}.$$

Comme $P_n P_{n+1}$ *est impair et pour tout* $k, P_k(1) = 1$*, on aboutit ainsi à* $(2n+1)||Pn||^2 = 2$*.*

2.4.3 Décomposition en série de polynômes de Legendre

- ***Décomposition d'une fonction holomorphe :*** *Toute fonctions* f*, holomorphe à l'intérieur d'une ellipse de foyers -1 et +1, peut s'écrire* *sous la forme d'une série qui converge uniformément sur tout compact à l'intérieur de l'ellipse :*$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n(z) \tag{2.9}$$

- ***Décomposition d'une fonction lipschitzienne :***

On note $\tilde{P}_n$ *le quotient du polynôme* P_n *par sa norme.*

Soit f *une application continue sur* $[-1;1]$*. Pour tout entier naturel* n *on pose*

$$c_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\tilde{P}_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

Alors la suite $(c_n(f))$ *est de carré sommable, et permet d'expliciter le projeté orthogonal de* f *sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *:*

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\tilde{P}_k. \tag{2.11}$$

On a de plus :

$$\forall x \in [-1,1],\ S_n f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,\ y) f(y)\,\mathrm{d}y \tag{2.12}$$

avec le noyau

$$K_n(x,\ y) = \frac{n+1}{2}\frac{\tilde{P}_{n+1}(x)\tilde{P}_n(y) - \tilde{P}_{n+1}(y)\tilde{P}_n(x)}{x-y} \tag{2.13}$$

et

$$S_n f(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,\ y)(f(y) - f(x))\,\mathrm{d}y. \tag{2.14}$$

Supposons de plus que f *est une fonction lipschitzienne. On a alors la propriété supplémentaire :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ \lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x). \tag{2.15}$$

autrement dit, l'égalité

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\tilde{P}_n \tag{2.16}$$

est vraie non seulement au sens L^2 *mais au sens de la convergence simple sur* $]-1;1[$.

2.5 Polynômes de Jacobi

Définition 2.5.0.0.1. *les polynômes de Jacobi sont une classe de polynômes orthogonaux. Ils sont obtenus à partir des séries hypergéométriques dans les cas où la série est en fait finie :*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n, 1+\alpha+\beta+n; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right), \tag{2.17}$$

où $(\alpha+1)_n$ *est le symbole de Pochhammer pour la factorielle croissante, (Abramowitz - Stegun p561 [archive].) et ainsi, nous avons l'expression explicite*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^m, \tag{2.18}$$

pour laquelle la valeur finale est

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{2.19}$$

Ici, pour l'entier

$$n\binom{z}{n} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(z-n+1)}, \tag{2.20}$$

et $\Gamma(z)$ *est la fonction gamma usuelle, qui possède la propriété* $1/\Gamma(n+1) = 0$ *Ainsi,*

$\binom{z}{n} = 0 \quad pour \quad n < 0.$

Les polynômes ont la relation de symétrie

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-z) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(z) \tag{2.21}$$

ainsi, l'autre valeur finale est

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n} \tag{2.22}$$

Pour un nombre réel x*, le polynôme de Jacobi peut être écrit alternativement sous la forme*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_s \binom{n+\alpha}{s}\binom{n+\beta}{n-s}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s}\left(\frac{x+1}{2}\right)^s \tag{2.23}$$

où $s \geq 0$ *et* $en - s \geq 0$ *Dans le cas particulier où les quatre quantités* $n, n+\alpha, n+\beta$ *et* $n+\alpha+\beta$ *sont des nombres entiers positifs, le polynôme de Jacobi peut être écrit sous la forme*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (n+\alpha)!(n+\beta)! \sum_s [s!(n+\alpha-s)!(\beta+s)!(n-s)!]^{-1} \times$$
$$\times \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{s} \tag{2.24}$$

La somme sur s s'étend sur toutes les valeurs entières pour lesquelles les arguments des factorielles sont positives. ***Dérivées*** *La k-éme dérivée de l'expression explicite conduit à*

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1+k)}{2^k \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(z). \tag{2.25}$$

2.6 Les Harmonique Sphériques

Les harmonique spheriques jouent un rôle imporôtant en électrodynamique et en mécanique .Nous allons montrer comment elles apparaissent dans la théorie des représentations du groupe des rotations, $SO(3)$ *.Chaque représentations irréductible de* $SO(3)$ *peut être réalisée dans un espace de Hilbert de dimension finie de fonction sur la sphère, les restrictions de polynômes homogènes, de degré donné, qui sont harmoniques, et cette représentation est unitaire.*

2.6.1 Rappel sur $L^2(S^2)$

On désigne par S^2 *la sphère unité de* $\mathbb{R}^3$,

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

On introduit sur $\mathbb{R}^3$ *les coordonnées sphériques,* $(r, \theta, \phi), r \geqslant 0, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi[$, *tel que*

$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi, x_2 = r \sin\theta \sin\phi, x_3 = r\cos\theta$$

L'angle ϕ *est la longitude et* θ *est la co-latitude. Sur* $\mathbb{R}^3$ *privé de l'axe* $Ox_3(r > 0$ *et* $0 < \theta < \pi)$*,le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées*

sphériques est de classe C^∞.
On désigne par $L^2(S^2)$ *l'espace de Hilbert séparable des fonctions complexes sur* S^2 *de carré intégrable pour le produit scalaire,*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{f_1(\theta,\phi)}f_2(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi.$$

En coordonnées sphériques, le laplacien,$\Delta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_3})^2$,*s'ecrit*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2},$$

2.6.2 Les polynômes harmoniques

Si f *est une fonction sur* $\mathbb{R}^3$, *et si* $g \in SO(3)$, *on pose pour* $x \in \mathbb{R}^3$,

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}x),$$

et l'on définit ainsi une représentation de $SO(3)$ *dans l'espace vectoriel des fonction sur* $\mathbb{R}^3$,
On notera σ *cette représentation, définit par*

$$\sigma(g)f = g.f$$

Nous introduisons les polynômes harmoniques, on obtient toutes les représentations irréductibles de $SO(3)$.

Définition 2.6.2.0.1. *On appelle fonction harmonique sur* $\mathbb{R}^3$ *toute fonction* f *de classe* C^2 *telle que*

$$\Delta f = 0$$

Pour l *entier positif ou nul, on désigne par* $P^{(l)}$ *l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré* l *à coefficients complexes sur* $\mathbb{R}^3$.
On considère alors le sous-espace vectoriel de $P^{(l)}$ *constitué des polynômes harmoniques,c'est-à-dire à laplacien nul, que nous noterons* $H^{(l)}$.

Lemme 2.6.2.1. *L'espace vectoriel de* $H^{(l)}$ *est de dimension* $2l+1$.
Démonstration. *Un polynôme homogène de degré* l *sur* $\mathbb{R}^3$ *est déterminé par* $l+1$ *polynômes homogènes en deux variables, de degrés respectifs* $0, 1, ..., l$.*on obtient*

$$dim P^{(l)} = 1 + 2 + ... + (l+1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Montrons que l'application linéaire, $\Delta : P^{(l)} \longrightarrow P^{(l-2)}$*,est surjective.On remarque d'abord que , pour tout* $q_3 \in \mathbb{N}, x_3^{q_3} \in Im(\Delta)$ *puisque*

$$\Delta(x_3^{q_3+2}) = (q_3+2)(q_3+1)x_3^{q_3}.$$

De même, on voit facilement que $x_1 x_3^{q_3}$ *et* $x_2 x_3^{q_3}$ *sont dans* $Im\Delta$*.La formule, valable pour tous* $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$*,*

$$\Delta(x_1^{q_3}x_2^{q_3}x_3^{q_3}) = q_1(q_1-1)x_1^{q_1-2}x_2^{q_2}x_3^{q_3}+q_2(q_2-1)x_1^{q_1}x_2^{q_2-2}x_3^{q_3}+q_3(q_3-1)x_1^{q_1}x_2^{q_2}x_3^{q_3-2},$$

montre que si la propriété $x_1^{q_3}x_2^{q_3}x_3^{q_3} \in Im\Delta$ *est vraie pour* $q_1+q_2 = q-2$*, elle est vraie pour* $q_1+q_2 = q$*. Cette propriété étant vraie pour* $q=0$ *et pour* $q=1$ *, la surjectivité de l'application linéaire,* $\Delta : P^{(l)} \longrightarrow P^{(l-2)}$ *est donc démontrée par récurrence sur* q *. Par conséquent,*

$$dimH^{(l)} = dimP^{(l)} - dimP^{(l-2)} = 2l+1.$$

Proposition 2.6.1. *Le sous-espace* $H^{(l)}$ *de* $P^{(l)}$ *est invariant par* σ*.*
Démonstration*.Soit* f *une fonction de trois variables de classe* C^2 *et soit* g *dans* $SO(3)$*. Désignons par* $(A_{ij}), i,j = 1,2,3$*, la matrice de* g *et par* (y_i) *les composantes de* $y = g(x)$*, pour* $x \in \mathbb{R}^{\nVdash}$*. On a*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ g)(x) = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial f}{\partial y_i}(y).$$

D'oú

$$(\Delta(f\circ g))(x) = \sum_{i,j,k=1}^{3} A_{ji}A_{ki}\frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}(y).$$

Puisque (A_{ij}) *est une matrice orthogonale, on obtient*

$$(\Delta(f\circ g))(x) = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}(y) = (\Delta f)(g(x)),$$

c'est-à-dire

$$\Delta(f\circ g) = (\Delta f)\circ g.$$

Par conséquent, si P *est un olynôme harmonique, pour tout* $g \in SO(3)$*, le polynôme*

$$\sigma(g)P = g.P = P\circ g^{-1}$$

est aussi harmonique.D'autre part, un polynôme homogène P étant donné, les coefficients des polynômes $g.P$ dépendent continûment des coefficients de la matrice $g \in SO(3)$.On peut donc énoncer ce qui suit .

Proposition 2.6.2. *. Par restriction de σ, on obtient, pour chaque $l \in \mathbb{N}$, une représentation (H^l, σ^l) de $SO(3)$ de dimension $2l+1$.*
La représentation σ^l de $SO(3)$ dans $H^{(l)}$ est équivalente à la représentation $\mathcal{D}^l$. ***Démonstration****.Le polynôme $P_l = (x_1 + ix_2)^l$ appartient à $P^{(l)}$.*
On vérifie facilement qu'il est harmonique.De plus, dans la représentation σ^l de $SO(3)$ dans $H^{(l)}$, il est fonction propre de $\varphi(g_\theta)$ pour la valeur propre $e^{-2il\theta}$, car

$$\varphi(g_\theta) = \varphi(\exp 2\theta\xi_3) = Rot(e_3, 2\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, par conséquent,

$$(\varphi(g_\theta)).P_l = e^{-2il\theta} P_l.$$

Proposition 2.6.3. *Pour tout $l \geqslant 2$,*

$$P^{(l)} = H^{(l)} \oplus r^2 P^{(l-2)}.$$

Démonstration*.La somme des dimensions des sous-espaces $H^{(l)}$ et $r^2 P^{(l-2)}$ de $P^{(l)}$ est égale à la dimension de $P^{(l)}$, Montrons que leur intersection est nulle. Si $P \in P^{(l)}$, à l'aide de l'identité d'Euler,*

$$x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial P}{\partial x_3} = lP$$

on établit, pour tout entier $k \geqslant 0$, la formule

$$\Delta(r^{2k} P) = 2k(2l + 2k + 1) r^{2k-2} P + r^{2k} \Delta P$$

Soit $P \in H^{(l)}$, et soit k le plus grand entier tel qu'il existe un polynôme $Q \in P^{(l-2k)}$ vérifiant $P = r^{2k} Q$.Né cessairement $k = 0$, car sino Q serait divisible par r^2 , ce qui contredit l'hypothèse faite sur k .
On déduit de cette proposition que

$$P^{(l)} = H^{(l)} \oplus r^2 H^{(l-2)} \oplus ...., \tag{2.26}$$

où le dernier terme est $r^l H^{(0)}$ si l est pair, et $r^{l-1} H^{(1)}$ si l est impair.

2.6.3 Les harmoniques sphériques

Un polynôme homogène sur $\mathbb{R}^3$ est entièrement déterminé par sa restriction à la sphère unité S^2.

Définition 2.6.3.0.1. *Les fonctions sur la sphère obtenues par restriction de polynôme homogènes harmoniques sont des harmoniques sphériques.*
Pour chaque entier positif ou nul l,les harmoniques sphériques de degré l forment un espace vectoriel $\tilde{H}^{(l)}$ de dimension $(2l+1)$,isomorphe $\tilde{H}^{(l)}$, et contenu dans l'espace des fonctions de classe C^∞ sur la sphère, lui-même contenu dans $L^2(S^2)$.

Remarque 2.6.1. *Remarquons d'abord que, d'aprés la relation(2.1),l'espace des restrictions à la sphère de polynômes homogènes de degré l s'écrit*

$$\tilde{P}^{(l)} = \tilde{H}^{(l)} \oplus r^2\tilde{H}^{(l-2)} \oplus ...., \tag{2.27}$$

où le dernier terme est $r^l\tilde{H}^{(0)}$ si l est pair, et $r^{l-1}\tilde{H}^{(1)}$ si l est impair.

2.6.4 Représentations de SO(3) dans les espaces d'harmoniques sphériques

Pour chaque $l \in \mathbb{N}$, par l'identification de $\tilde{H}^{(l)}$ avec H^l, on obtient une représentation, encore notée σ^l, de $SO(3)$ dans l'espace des harmoniques sphériques de degré l.
Ces représentations sont unitaires, comme on le voit facilement en utilisant l'invariance par rotation de la mesure sur S^2 .
En effet, pour toutes fonctions

$$\langle \sigma(g)f_1, \sigma(g)f_2\rangle = \int_{S^2} \overline{f_1(g^{-1}x)} f_2(g^{-1}x)d\mu(x) = \int_{S^2} \overline{f_1(x)} f_2(x)d\mu(x) = \langle f_1, f_2\rangle.$$

2.6.5 Bases des espaces d'harmoniques sphériques

On appelle plus particuliè harmoniques sphériques les élééments d'une base orthonormale,Y^l_m, $-l \leqslant m \leqslant l$, de $\tilde{H}^l \subset L^2(S^2)$, pour chaque entier naturel l.
Soit par rapport au produit scalaire non normalisé défini par

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f_1(\theta,\phi)} f_2(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi$$

On définit les fonctions suivantes, pour $l \geqslant 0. Si 0 \leqslant m \leqslant l$, on pose

$$Y_m^l(\theta,\phi) = C_m^l Z_m^l(\theta) e^{im\phi},$$

où

$$Z_m^l(\theta) = \sin^m \theta Q_m^l(\cos\theta), Q_m^l(x) = \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l,$$

C_m^l *est nombre réelé,*

$$C_m^l = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}.$$

Si $-l \leqslant m < 0$, on pose

$$Y_m^l = (-1)^m \overline{Y_{-m}^l}.$$

On définit ainsi, pour chaque $l \geqslant 0$, une famille Y_m^l, $-l \leqslant m \leqslant l$, de $2l+1$ fonctions sur la sphère.

Nous allons montrer que ces fonctions sont des harmoniques sphériques au sens précédent, et qu'elles forment une base orthonormale de l'espace $\tilde{H}^{(l)}$ pour le produit scalaire non normalisé, $\langle,\rangle$.

D'une part, les fonctios Y_m^l sont vecteurs propres de l'opérateur$J_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$ avec la valeur propre m,

$$J_3 Y_m^l = m Y_m^l \tag{2.28}$$

D'autre part, les fonctions Y_m^l satisfont les relations

$$J_+ Y_m^l = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}Y_{m+1}^l \tag{2.29}$$

où

$$J_- Y_m^l = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}Y_{m-1}^l \tag{2.30}$$

que l'on vérifie faccilement en distinguant les cas $m \geqslant 0$ et $m < 0$.

On voit donc que les fonctios Y_m^l sont vecteurs propres de $J^2 = -\Delta_{S^2}$ avec la valeur propre $l(l+1)$, celle-ci étant indépendante de m,

$$J^2 Y_m^l = l(l+1) Y_m^l \tag{2.31}$$

Chaque fonction Y_m^l est donc bien une harmonique sphérique.
L'opérateur J_3 étant hermitien, les fonctions Y_m^l sont deux à deux orthogonales.
Ces $2l+1$ fonctions de $\tilde{H}^{(l)}$ en forment donc une base orthogonale.

Théorème 2.6.1. . *Les harmoniques sphériques $Y_m^l, l \in \mathbb{N}? - l \leqslant m \leqslant l$, forment une base hilbertienne de $L^2(S^2)$ muni du produit scalaire non normalisé.*
En d'autres termes, toute fonction appartenant à $L^2(S^2)$ a un développement en harmoniques sphériques, convergent au sensde la norme de $L^2(S^2)$,

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l \leqslant m \leqslant l} f_m^l Y_m^l = f_0^0 Y_0^0 + f_1^1 Y_1^1 + f_0^1 Y_0^1 + f_{-1}^1 Y_{-1}^1 + ...,$$

où les coefficients du développement sont donnés par les produits scalaires non normalisés de fonctions sur la sphère,

$$f_m^l = \langle Y_m^l, f \rangle.$$

Remarque 2.6.2. *Les polynômes de Legendre sont définis, pour $l \in \mathbb{N}$, par*

$$P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l,$$

et les fonctions de Legendre sont définies, pour $m \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [-1,1]$,par

$$P_{l,m} = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (1-x^2)^l.$$

On exprime en général les harmoniques sphériques Y_m^l, à l'aide des fonctions de Legendre, $P_{l,m}$.On voit que, pour $m \geqslant 0$,

$$Y_m^l(\theta, \phi) = C_{l,m} P_{l,m}(\cos\theta) e^{im\phi},$$

où

$$C_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}.$$

Les fonctions notées $Z_m^l(\theta)$ ci-dessus ne diffèrent des fonctions $P_{l,m}(\cos\theta)$ que par un facteur numérique,

$$Z_m^l(\theta) = (-1)^{l+m} 2^l l! P_{l,m}(\cos\theta) e^{im\phi},$$

et les constantes C^l_m *et* $C_{l,m}$ *sont liées par*

$$C^l_m = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} C_{l,m}$$

Exemple $P^0_0(\cos\theta) = 1$ *(Y0 0 est isotrope) ;*

$$P^0_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P^1_1(\cos\theta) = -\sin\theta$$

$$P^1_3(\cos\theta) = \frac{3}{2} \cdot \sin\theta \cdot (-5 \cdot \cos^2\theta + 1)$$

Les fonctions $Y^l_m(\theta, \phi)$ *présentent de plus en plus de symétries au fur et à mesure que l croît (sauf lorsque l = 0, puisque Y0 0 est une fonction constante et décrit donc une sphère).*

Polynômes de Legendre

Pour les harmoniques circulaires, on utilise des polynômes Pl de la fonction cosinus :

$Y_l(\theta) = P_l(\cos\theta)$ *Les polynômes Pl utilisés sont les polynômes de Legendre :*

$$P_l(X) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dX^l} \left[(X^2 - 1)^l\right]$$

(formule de Rodrigues, mathématicien français) On obtient :

$P_0(\cos\theta) = 1$ *(fonction isotrope) ;* $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

;

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

Harmoniques sphériques normalisées

Base orthonormale des harmoniques sphériques Parmi les 2l +1 fonctions, l'habitude a été prise de sélectionner une base orthonormale sur la sphère $\mathbb{S}^2$ *munie de la mesure*

$$\mathrm{d}\mu = \frac{1}{4\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

soit le produit scalaire (hermitien en fait) :

$$\langle f_1 \mid f_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint_{S^2} f_1^* f_2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

Les harmoniques sphériques sont les solutions de l'équation aux valeurs propres1 :

$$-\Delta Y_{l,m}(\theta,\varphi) = l(l+1) Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

où l'opérateur laplacien s'écrit en coordonnées sphériques sur la sphère de rayon unité J2 :

$$\Delta f(\theta,\varphi) \overset{def}{=} J^2 f = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Elles sont fonctions propres de l'opérateur

$$J_3 = -\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial\phi} J_3 = -\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial\phi}$$

$$J_3 Y_{l,m} = m \cdot Y_{l,m}$$

Chapitre 3

Exemple d'aplication polynômes de Legendre

3.1 Éléments matriciels des représentations $T_l(g)$

Nous allons maintenant calculer les éléments matriciels des représentations unitaires irréductibles $T_l(u)$ du groupe $SU(2)$.
Nous nous placerons d'abord dans le cas des représentations $T_l(g)$ du groupe $SL(2,\mathbb{C})$, qui s'obtient, rappelons le, par complexification de $SU(2)$.
Il suffira ensuite de donner aux paramétres des valeurs réelles pour revenir aux représentations $T_l(u)$.
On montrera que ces éléments matriciels s'expriment au moyen de la fonction exponentielle et des polynômes $P^l_{mn}(z)$, qui ont un lien étroit avec les polynômes classiques de Legendre et de Jacobi . C'est en exploitant cette situation que nous établirons la plupart de leurs propriétés.

Calcul des éléments matriciels.

On a vu que les représentations $T_l(g)$ du groupe $SL(2,\mathbb{C})$ étaient donnée par la formule

$$T_l(g)\varphi(x) = (\beta x + \delta)^{2l}\varphi(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}) \tag{3.1}$$

où $\varphi(x)$ *est un polynôme de degré* $2l$ *et* $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *Considérons dans la base formée des monômes*

$$\psi_n(x) = \frac{x^{l-n}}{\sqrt{(l-n)!(l+n)!}}, -l \leqslant n \leqslant l. \tag{3.2}$$

On a démontré que cette base est orthonormée relativement au produit scalaire dans $\mathfrak{H}_{\mathfrak{l}}$, *et invariante par l'action des opérateurs* $T_l(u)$, $u \in SU(2)$. *Il s'ensuit qu'aux opérateurs* $T_l(u)$ *des représentations unitaires irréductibles du groupe* $SU(2)$ *correspondent, dans cette base , des matrices unitaires.*
Posons alors

$$a_{ij} = < Ae_j, e_i >, \tag{3.3}$$

où e_i *est une base orthonormée. Dans le cas présent , cette formule devient*

$$t^l_{mn}(g) = < T_l(g)\psi_n, \psi_m > = \frac{< T_l(g)x^{l-n}, x^{l-m} >}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}. \tag{3.4}$$

Mais

$$T_l(g)x^{l-n} = (\alpha x + \gamma)^{l-n}(\beta x + \delta)^{l+n}. \tag{3.5}$$

Par conséquent

$$t^l_{mn}(g) = \frac{< (\alpha x + \gamma)^{l-n}(\beta x + \delta)^{l+n}, x^{l-m} >}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}. \tag{3.6}$$

Dévloppons(3.6)*en tenant compte que* $< x^{l-k}, x^{l-m} >= 0$ *pour* $k \neq m$ *et vaut* $(l-m)!(l+m)!$ *pour* $k = m$. *D'où*

$$\begin{aligned} t^l_{mn}(g) &= \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!}} \sum_{j=M}^{N} C^{l-m-j}_{l-n} C^l_{l+n} \alpha^{l-m-j}\beta^j\gamma^{m+j-n}\delta^{l+n-j} = \\ &= \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}\alpha^{l-m}\gamma^{m-n}\delta^{l+n} \times \\ &\times \sum_{j=M}^{N} \frac{1}{j!(l-m-j)!(l+n-j)!(m-n+j)!}(\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta})^j \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $M = max(0, n-m)$ *et* $N = min(l-m, l+n)$. *Ainsi, nous avons trouvé l'expression des éléments matriciels des représentations* $T_l(g)$ *en fonction de ceux des matrices* g. *Remarquons qu'en fait , cette expression est indépendante de* β, *puisque l'unimodularité de* g *implique* $\beta\gamma = \alpha\delta - 1$.

3.2 théorème d'addition.

De nombreuses et importantes propriétés des fonctions $P^l_{mn}(z)$ *sont liées à leur théorème d'addition. Pour l'obtenir ,nous allons utiliser la relation*

$$T_l(g_1g_2) = T_l(g_1)T_l(g_2), \tag{3.8}$$

qui s'écrit

$$t^l_{mn}(g_1g_2) = \sum_{k=-l}^{l} t^l_{mk}(g_1)t^l_{kn}(g_2). \tag{3.9}$$

Introduisons les angles d'Euler des matrices g_1 *et* g_2*, c'est-à-dire, respectivement,* $0,\ \theta_1,\ 0$ *et* $\varphi_2,\ \theta_2,\ 0$*.On a donc*

$$t^l_{mk}(g_1) = P^l_{mk}(\cos\theta_1) \tag{3.10}$$

et

$$t^l_{kn}(g_2) = e^{-ik\varphi_2}P^l_{kn}(\cos\theta_2) \tag{3.11}$$

Les éléments matriciels $t^l_{mn}(g_1g_2)$*sont la forme*

$$t^l_{mn}(g_1g_2) = e^{-i(m\varphi+n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta). \tag{3.12}$$

où $\theta,\ \varphi,\ \psi$ *sont les angles d'Euler de la matrice* g_1g_2*. l'on a les formules*

$$\cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2 \tag{3.13}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_2\cos\varphi_2 + i\sin\theta_2\sin\varphi_2}{\sin\theta} \tag{3.14}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i\varphi_2}{2}} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}} \tag{3.15}$$

où, rappelons-le $0 \leqslant Re\theta < \pi,\ 0 \leqslant Re\varphi < 2\pi,\ -2\pi \leqslant Re\psi < 2\pi$ *Reportant les expressions précédents dans* (3.9)*,on obtient le théorème d'addition suivant :*

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta) = \sum_{k=-l}^{l} e^{-ik\varphi_2}P^l_{mk}(\cos\theta_1)P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{3.16}$$

Considérons certains cas particuliers du théorème précédent.Soit $\varphi_2 = 0$. *Alors, si* $Re(\theta_1 + \theta_2) < \pi$, *nous avons* $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\varphi = \pi = 0$,(3.16) *devient*

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1 + \theta_2)] = \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{3.17}$$

Et, si $Re(\theta_1 + \theta_2) > \pi$, *alors* $\theta = 2\pi - \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \pi$ *et* $\psi = \pi$. *D'où la formule* (3.16) *prend la forme*

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1 + \theta_2)] = (-1)^{m+n} \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{3.18}$$

Soit, maintenant, le cas $\varphi_2 = \pi$.*Si* $Re\theta_1 \geqslant Re\theta_2$, *alors* $\theta = \theta_1 - \theta_2$,$\varphi = 0, \psi = \pi$,*et l'on a*

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1 - \theta_2)] = \sum_{k=-l}^{l} (-1)^{n-k} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{3.19}$$

En particulier, pour $\theta_1 = \theta_2 = \theta$:

$$\sum_{k=-l}^{l} (-1)^{n-k} P^l_{mk}(\cos\theta) P^l_{kn}(\cos\theta) = \delta_{mn}. \tag{3.20}$$

Si θ *réel, on peut écrire*

$$\overline{P^l_{mn}(\cos\theta)} = (-1)^{n-m} P^l_{mn}(\cos\theta)$$

Dans le cas où θ_1 *et* θ_2 *sont réels, la formule* (3.19) *devient :*

$$P^l_{mn}[\cos(\theta_1 - \theta_2)] = \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) \overline{P^l_{kn}(\cos\theta_2)}. \tag{3.21}$$

où $\theta_1 \geqslant \theta_2$. *Si* $\theta_1 = \theta_2$:

$$\sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) \overline{P^l_{kn}(\cos\theta_1)} = P^l_{mn}(1) = \delta_{mn}. \tag{3.22}$$

L'égalité (3.22) *s'interpréte facilement en termes des groupes. Si* θ *est réel, la matrice* $g(0, \theta, 0)$ *appartient au sous-groupe* $SU(2)$. *Mais,* $T_l(u)$ *est une* *représentation unitaire de ce sous-groupe et, par conséquent, la matrice d'éléments* $P^l_{mn}(\cos\theta)$ *est unitaire. Nous aurons encore besoin, pour ce qui suit, du cas* $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. *Dans ce cas ,les formule* $(3.13) - (3.14)$ *se simplifient :*

$$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \tag{3.23}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + i\sin\theta_2}{\sin\theta} \tag{3.24}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} = \frac{\sqrt{2}[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}]}{2\cos\frac{\theta}{2}} \tag{3.25}$$

Au lieu des formules $(3.23) - (3.25)$, *il convient de prendre les formules*

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2}, \tag{3.26}$$

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2\cos\theta_1}, \tag{3.27}$$

qui s'obtiennent immédiatement à partir des formules $() - ()$ *Ainsi,*

$$e^{-i(m\varphi+n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta) = \sum_{k=-l}^{l} i^{-k} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2). \tag{3.28}$$

3.2.1 Théorème d'addition pour les polynômes de Legendre.

Il ne s'agira que d'un cas particulier du théorème précédent. Les polynômes et les polynômes associés de Legendre sont respectivement définis par

$$P_l(z) = P^l_{00}(z) \tag{3.29}$$

et

$$P^m_l(z) = l^m \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P^l_{m0}(z) \tag{3.30}$$

En faisant $n = 0$ *dans la formule*(3.16) *et en utilisant les relations* $(3.29) - (3.30)$ *, on obtient*

$$e^{-im\varphi} P^m_l(\cos\theta) =$$

$$= l^m \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \sum_{k=-l}^{l} l^{-k} \sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}} e^{-lk\varphi_2} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^k_l(\cos\theta_2). \tag{3.31}$$

Et si $m = n = 0$:

$$P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2) =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l}(-1)^k\frac{(l-k)!}{(l+k)!}e^{-ik\varphi_2}P_l^k(\cos\theta_1)P_l^k(\cos\theta_2) \qquad (3.32)$$

On peut simplifier cette relation de la faÇon suivante : en vertu de la symétrie $P^l_{m0}(z) = P^l_{-m0}(z)$ et de la formule(3.30)*, nous avons*

$$P_l^{-m}(z) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(z).$$

Par conséquent, les polynômes de Legendre satisfont au théorème d'addition suivant

$$P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2) = \sum_{k=-l}^{l} e^{-ik\varphi_2}P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2). \qquad (3.33)$$

3.3 La formule de multiplication.

Supposons que , dans la formule(3.28) l'angle d'Euler φ_2 soit réel.Alors, on peut considérer que l'on se trouve en présence du développement en série de fourier de la fonction $e^{-i(m\varphi+n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta)$ (où φ, ψ et θ dépendent de φ_2 par les formules(3.13) − (3.15)*. Par conséquent,*

$$P^l_{mk}(\cos\theta_1)P^l_{kn}(\cos\theta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\varphi_\alpha - m\varphi - n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta)d\varphi_2 \qquad (3.34)$$

Nous dirons que cette formule est la formule de multiplication pour les fonctions $P^l_{mn}(z)$. La formule(3.34)admet le cas particulier $m = n = 0$, qui s'écrit en vertu de la relation(3.35) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\varphi_\alpha}P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)d\varphi_2 =$$

$$= (-1)^k\frac{(l-k)!}{(l+k)!}P_l^k(\cos\theta_1)P_l^k(\cos\theta_2) = P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2). \qquad (3.35)$$

Puisque $P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)$ *est une fonction paire en* φ_2*, on a*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)\cos k\varphi_2 d\varphi_2 =$$

$$= P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2). \tag{3.36}$$

Si on fait également $k = 0$*, nous obtenons*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2)d\varphi_2 =$$

$$= P_l(\cos\theta_1)P_l(\cos\theta_2). \tag{3.37}$$

La signification géométrique de la formule (3.34) est la suivante. Choisissons sur la sphère unité un point A *tel que sa latitude par rapport au pôle nord* N *soit* θ_1 *et traçons sur la sphère un cercle de centre* A *et de rayon sphérique* θ_2*.Notons par* θ *la distance polaire du point* B *de ce cercle tel que l'arc* AB *de grand cercle forme un angle* φ_2 *avec le méridien* AN*.la formule (3.34)signifie que* $P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2)$ *est la valeur moyenne de* $P_l(\cos\theta)e^{ik\varphi_2}$ *sur ce cercle. En particulier, le produit* $P_l(\cos\theta_1)P_l(\cos\theta_2)$ *est la valeur moyenne de* $P_l(\cos\theta)$*. Transformons la formule (3.35). Nous supposerons que* $\theta_1, \theta_2, \varphi_2$ *sont des nombres réels tels que* $0 \leqslant \theta_1 < \pi$, $0 \leqslant \theta_2 < \pi$, $0 \leqslant \theta_1 + \theta_2 < \pi$ *(si cette dernière condition n'est pas remplie, on doit changer* θ_1 *et* θ_2 *en* $\pi - \theta_1$ *et* $\pi - \theta_2$*),et faisons le changement de variables*

$$\cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi_2. \tag{3.38}$$

Notons par $T_n(x)$ *la fonction* $\cos(n\arccos x)$*. Cette fonction est le polynôme de Cebysev de première espèce. De (3.38), il suit que*

$$\cos k\varphi_2 = T_k\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\right). \tag{3.39}$$

et, de plus,

$$d\varphi_2 = \frac{-\sin\theta d\theta}{\sqrt{[\cos\theta - \cos(\theta_1+\theta_2)][\cos(\theta_1-\theta_2) - \cos\theta]}}. \tag{3.40}$$

Puisque, φ_2 *variant de* 0 *à* π*, la variable* θ *varie de* $\theta_1 + \theta_2$ *à* $\theta_1 - \theta_2$ *alors le changement de variables défini par (3.38) transforme l'intégrale(2)de la façon suivante :*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\theta_1-\theta_2}^{\theta_1+\theta_2} P_l(\cos\theta)T_k\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\right)\times$$

$$\times \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{[\cos\theta - \cos(\theta_1+\theta_2)][\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos\theta]}} =$$
$$= P_l^k(\cos\theta_1)P_l^{-k}(\cos\theta_2). \tag{3.41}$$

L'expression qui figure au dénominateur de (3.41), a une signification géométrique simple : elle représente l'aire du triangle sphérique de côtés θ_1, θ_2, θ, *divisée par* $4\pi^2$.

3.4 Formules de récurrence.

Nous allons maintenant établir les formule de récurrence pour les fonctions $P^l_{mn}(z)$, *relatives aux indices* m *et* n. *On peut les considérer comme des formes infinitésimales du théorème d'addition. Elles s'obtiennent,à partir de ce théorème, pour* θ_2 *infiniment petit.On devra différentier les deux membres de la formule générale (7) en* θ_2 *et faire* $\theta_2 = 0$. *Il nous suffira, au lieu de la formule générale (7) d'utiliser ses cas particuliers* $\varphi_2 = 0$ *et* $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ *(formule (3.17)et (3.28). Calculons d'abord* $\frac{d}{d\theta}[P^l_{mn}(\cos\theta)]$ *pour* $\theta = 0$.*On obtient*

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{mn}(\cos\theta)]_{\theta=0} = \frac{i}{4\pi}\sqrt{\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!}}\times$$
$$\times \int_0^{2\pi}[(l-n)e^{-i(n+1)\varphi} + (l+n)e^{-i(n-1)\varphi}]e^{im\varphi}d\varphi. \tag{3.42}$$

Il est clair que le membre de driote de(3.42)est nul si m *est différent de* $(n+1)$ *ou* $(n-1)$. *Si* $m = n+1$, *il vient*

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{n+1,n}(\cos\theta)]_{\theta=0} = \frac{l}{2}\sqrt{(l-n)(l+n+1)}. \tag{3.43}$$

Demême, pour $m = n-1$ *:*

$$\frac{d}{d\theta}[P^l_{n-1,n}(\cos\theta)]_{\theta=0} = \frac{l}{2}\sqrt{(l+n)(l-n+1)}. \tag{3.44}$$

Venons-en maintenant aux formules de récurrence proprement dites.
kDifférentions en θ_2 *les deux membres de la formule(3.17) faisons* $\theta_2 = 0$ *et utilisons les relations (3.43)et (3.44).Posant* z *au lieu de* $\cos\theta_1$, *nous obtenons la formule cherchée :*

$$\sqrt{1-z^2}\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz} = \frac{l}{2}[\sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(z)+$$

$$+\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(z)]. \tag{3.45}$$

Pour obtenir une deuxiéme formule de récurrence, partons de la formule (3.41) que l'on différentie en θ_2*. On donne ensuite à* θ_2 *la valeur* 0 *et on utilise les relation (3.24)-(3.26).Aprés des transformations simples, il vient*

$$l[m\frac{d\varphi}{d\theta_2}+n\frac{d\psi}{d\theta_2}]_{\theta_2=0}P^l_{mn}(\cos\theta_1)-\frac{dP^l_{mn}(\cos\theta_1)}{d\theta_1}\frac{d\theta}{d\theta_1}|_{\theta_2=0}=$$

$$=\frac{l}{2}[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(\cos\theta_1)-$$

$$-\sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(\cos\theta_1)]. \tag{3.46}$$

où θ,φ,ψ *s'expriment au moyen de* θ_1 *et* θ_2 *par les formule (3.24)-(3.26) précitées. Il nous reste à trouver les valeurs des dérivées*

$$\frac{d\varphi}{d\theta_2}|_{\theta_2=0}=\frac{1}{\sin\theta_1} \qquad et \qquad \frac{d\psi}{d\theta_2}|_{\theta_2=0}=-\cot\theta_1$$

Reportant ces valeurs dans (3.46)et rempla Çant $\cos\theta_1$ *par* z*, nous obtenons*

$$l[\frac{m-nz}{\sqrt{l-z^2}}]P^l_{mn}(z)=$$

$$=\frac{l}{2}[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(z)-$$

$$-\sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(z)]. \tag{3.47}$$

Des formules (3.45)et(3.47), on déduit facilement :

$$\sqrt{1-z^2}\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{nz-m}{\sqrt{l-z^2}}P^l_{mn}(z)=$$

$$=-l\sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(z). \tag{3.48}$$

et

$$\sqrt{1-z^2}\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{nz-m}{\sqrt{l-z^2}}P^l_{mn}(z)=$$

$$=-l\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(z). \tag{3.49}$$

En vertu des relations de symétrie, il vient :

$$\sqrt{1-z^2}\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz}+\frac{mz-n}{\sqrt{l-z^2}}P^l_{mn}(z)=$$

$$= -l\sqrt{(l-m)(l+m+1)}P^l_{m+1,n}(z). \qquad (3.50)$$

et

$$\sqrt{1-z^2}\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz} - \frac{mz-n}{\sqrt{l-z^2}}P^l_{mn}(z) =$$
$$= -l\sqrt{(l+m)(l-m+1)}P^l_{m-1,n}(z). \qquad (3.51)$$

Par soustration de (3.48)et (3.49), nous obtenons une relation de récurrence, qui lie trois fonctios P^l_{mn}*, d'indices* n *en progression arithmétique de raison 1.*

$$2\frac{nz-m}{\sqrt{l-z^2}}P^l_{mn}(z) =$$
$$= l[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(z) -$$
$$- \sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(z)] \qquad (3.52)$$

Par addition de (3.48)et (3.49) :

$$\sqrt{1-z^2}\frac{dP^l_{mn}(z)}{dz} =$$
$$= -\frac{l}{2}[\sqrt{(l+n)(l-n+1)}P^l_{m,n-1}(z) +$$
$$+ \sqrt{(l-n)(l+n+1)}P^l_{m,n+1}(z)] \qquad (3.53)$$

Faisons dans (3.48)et (3.49) $m = 0$ *et utilisons l'égalité*

$$P^l_{0n}(z) = l^{-n}\sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}}P^n_l(z).$$

Nous obtenons des formules de récurrence pour les fonctions associées de Legendre P^l_{mn} *:*

$$\sqrt{1-z^2}\frac{dP^n_l(z)}{dz} + \frac{nz}{\sqrt{l-z^2}}P^n_l(z) = -P^{n+1}_l(z). \qquad (3.54)$$

Bibliographie

[1] W.Fulton, J. Harris, Representation Theory*, Springer, New York,1991.*

[2] N.Vilenkin, A. Klimyk, Representation of Lie Groups and Special Functions*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.*

[3] D.René, Formes quadratiques et groupes classiques*, Presses Universitaires de France, 1981.*

[4] G.Rauch, Les groupes finis et leurs représentations*, Ellipses, Paris, 2000.*

[5] K. S.Yvette. Groupes et symétries, Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2011.*