République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Existance de solutions pour des équations différenntielles partielles á l'aide de la théorie des semi-groupes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Mathématique

par

Taouci Youcef[1]

Sous la direction de

Dr O. Bennihi

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

M. S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Président
M. O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
M. F.Z. Mostafai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
M. H. Abbes	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : Youcta@outlook.com

Table des matiére

Introduction

En théorie des semi-groupe le théorème de Hill-Yosida est un outil puissant et fondamental reliant les propriétés d'un opérateur non-borné $A : D(A) \subset E \to E$ (E un espace de Banach) à l'existence et l'unicité et la régularité des solutions d'une équation différentielle

$$\begin{cases} x^{'}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ce résultat permet notament de donner l'existence , l'unicité et la régularité des solutions d'une équation différentielle fonctionnelle partielle plus éfficacement que le théorème de Cauchy-Lipschitz plus adapté au (EDO).
Par une équation différentielle fonctionnelle partielle,nous entendons un systéme d'évolution décrit par

1- L'équation différentielle

$$(P1)\ldots \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u_t), pour, t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_E \end{cases}$$

Oú $C_E = C([-r, 0]; E), r > 0$, désigne l'espace des fonctions continues de $[-r, 0]$ vers un espace de Banach E muni de la topologie de la convergence uniforme et $A : D(A) \subseteq E \to E$ est un opérateur linéaire.pour $u \in C([-r, b]; E)$,
$b > 0$ et $t \in [0, b]$, u_t désigne, l'élement de C_E défini par

$$u_t(\theta) = u(t + \theta), pour, \theta \in [-r, 0].$$

F est une fonction continue de C_E vers E.

2- L'équation intégro- différentielle

$$(P2)\ldots\begin{cases}\frac{du}{dt}(t)=Au(t)+\displaystyle\int_0^t B(t-s)u(s)ds+F(t,u_t), pour, t\geq 0\\ u_0=\varphi\in C_E\end{cases}$$

$$(P2.1)\ldots\begin{cases}\frac{du}{dt}(t)=Au(t)+\displaystyle\int_0^t B(t-s)u(s)ds+g(t), pour, t\geq 0\\ u(0)=u_0\in E\end{cases}$$

Oú $C_E = C([-r,0];E), r > 0$, désigne l'espace des fonctions continues de $[-r,0]$ vers un espace de Banach E muni de la topologie de la convergence uniforme et $A : D(A) \subseteq E \to E$ est un opérateur linéaire.pour $u \in C([-r,b];E)$, $b > 0$ et $t \in [0,b]$, $B(t)$ est un opérateur linéaire fermé avec domaine $D(A) \subset D(B)$, u_t désigne l'élement de C_E défini par, $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, pour, $-r \leq \theta \leq 0$,
$F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to E, et, g : \mathbb{R}^+ \to E$ sont des fonctions continues, dans le cas où $B = 0$. (P2) et (P2.1) devient (P1).

C'est bien connu que si A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateur linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ dans E est équivalent a

(i) $\overline{D(A)} = E$

(ii) il existe $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ tel que si $\lambda > \omega$, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$et

$$|(\lambda-\omega)^n(\lambda I - A)^{-n}| \leq M, pour, n \in \mathbb{N},$$

alors la théorie classique des semi-groupes assure la bonne pose aux problemes (P1) et [(P2),(P2.1) le cas où B=0], l'autre supposé que F est globalement Lipschitzienne continue de C_E vers E.ils ont prouvé leurs résultats en utulisant la formule de variation de la constante suivante

$$(E1)\ldots u(t)=\begin{cases}T(t)\varphi(0)+\displaystyle\int_0^t T(t-s)F(u_s(.,\varphi))ds, pour, t\geq 0\\ \varphi(t), pour, t\in[-r,0],\end{cases}$$

plus récemment, Parrott [7] établi en raison de l'existence local dans le cas oú A satisfait (i) et (ii), et F satisfait la condition(Lipschtzienne continue). Elle utilisait le résultat de Desch et Schappacher [12] pour developper le principe de stabilitée linéaire de (P1) et [(P2),(P2.1) le cas où B=0] .

Dans ce travail, nous invésterons le cas où A satisfait la condition de Hill-Yocida, á savoir (ii) avec un domaine non-dense, et, F satisfait la condition (localement Lipschitzienne).Nous montrons l'existence local des solutions de (P1) et [(P2),(P2.1) le cas où B=0],et dans le cas où F est globalement Lipschitzienne continue, nous étudions le probleme du stabilité linéaire prés d'un point d'équilibre.
Pour (P2),(P2.1) ,i,e $B \neq 0$ l'existence et l'unicité de solution représenté par la formule de variation de la constante avec autres proprietés de l'opérateur résolvant. Rappelons que l'opérateur résolvant joue un role plus important pour la résolution du (P2) et (P2.1), il remplace le role du théorème des C_0-semi-groupe

Chapitre 1

C_0-semi-groupes

Résultats préliminaires

La fonction exponentielle réalise l'isomorphisme fondamental algébrique et topologique entre le groupe topologique aditif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs,on peut constater que la fonction $t \mapsto e^{ta}, a \in \mathbb{R}$, est une solution réele continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$.
D'autre part, il est trés bien connu que la fonction exponentielle $t \mapsto e^{ta}$ est la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^{'} = ax$, avec la condition initiale $x(0) = 1$.
L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance aprés l'année 1888, quand le grand mathématicien Giuseppe Piano a eu l'inspiration d'écrire la solution du probléme de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x^{'} = Ax \\ x(0) = I \end{cases}$$

oú A est une matrice quadratique, sous la forme

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles $X^{'} = AX$, oú A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach $\mathcal{E}$, qui a pour

solution fondamentale la fonction exponentielle $t \mapsto e^{tA}$, $A \in \mathcal{B}(E)$
Ces extentions de la fonction exponentielle admettent un modéle général dans le cadre des algébre de Banach abstraites. Plus précisement, si $\mathcal{B}$ est une algébre de Banach avec l'unité I et $a \in \mathcal{B}$, alors la fonction

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathcal{B} \\ &t \mapsto e^{ta} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!} \end{aligned}$$

est dérivable et elle est l'unique solution du probléme de Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = I \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité des solutions du probléme de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(x) = e^{ta}$ satisfait sur $\mathbb{R}$ á l'équation fonctionnelle de Cauchy.
Le probléme reciproque de savoire si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premiére ordre $x' = ax$, s'est avéré être plus difficile, mais il a été résolu par Nathan et Yosida.
Donc la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéaire de premier ordre a été établie pour le cas général des algébre de Banach abstraites.
Ces caractérisations importantes ont suggéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premiér ordre par des extentions adéquates de la fonction exponentielle.
De cette maniére est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $x' = Ax$ oú A n'est pas un opérteur de l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{B}(E)$.
Mais pour un opérateur linéaire non- borné dans un espace de Banach E. La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été realisée par l'introduction des semi-groupes de classe C_0.
Mais dans ce cas l'équation fonctionnelle de Cauchy se rèfére aux fonctions

$$\begin{aligned} [0, \infty) &\longrightarrow \mathcal{B}(E) \\ t &\mapsto T(t) \end{aligned}$$

avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t+s) = T(t)T(s)$ et qui sont fortement continues, c'est á dire ayant la propriété

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x, pourtout, x \in E$$

Les résultats fondamentaux pour les semi-groupes de classe $\mathcal{C}_0$ dans les espaces de Banach ont été obtenus par Hille-Yosida-Feller- Miadera et Phillips, qui ont crée la théorie des semi-groupes et de leurs générateurs.
Le célébre théorème de Hille-Yosida-Feller-Miadera-Phillips, rétablit le lien entre l'équation fonctionnelle de Cauchy $T(t+s) = T(t) \times T(s)$ et l'équation différentielle $x^{'} = Ax$, oú A est un opérateur non-borné fermé et densément défini dans un espace de Banach E. Dans ce cas-la, $T(t)$ représente dans un certaine sens la fonction exponentielle.
Le moment le plus important concernant la généralisation des semi-groupes de classe $\mathcal{C}_0$ est marqué par l'introduction des semi-groupes intégrés á la fin des années '80. Dans la théorie des semi-groupes intégrés un rôle important revient á un théorème classique de représentation de la transformée de Laplace pour une fonction avec valeurs réelles prouvé par Widder. mais dans 1960. Zaidman a prouvé que le théorème de Widder ne peut être étendu aux fonctions á valeurs dans un espace de Banach arbitraire.
En 1987 Arendt a prouvé un vertion " intégré " du théorème de Widder pour des fonctions dans un espace de Banach, avec lequel il a obtenu une caractérisation compléte pour le générateur d'un semi-groupe intégré.
Dans le cas des smi-groupes intégrés on peut voir que le générateur n'est pas nécessairement á domaine dense, Dans la suite, nous noterons par E un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, par $\mathcal{L}(E)$ l'algébre de Banach des opérateurs linéaire bornés dans E et par I l'unité de $\mathcal{L}(E)$
Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \to E$ nous noterons par

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1}, existe, dans, \mathcal{L}\right\}$$

l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{L}(E)$ et par

$$\begin{aligned} &R(.;A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(E) \\ &R(\lambda;A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

la résolvante de l'opérateur A.

1.1 Générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe

Definition 1.1.1. *On appelle C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant les propriété suivantes ;*

i) $T(0) = I$;

ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$;

iii) $\lim_{t\searrow 0} T(t)x = x, \forall x \in E$.

Definition 1.1.2. *On appelle générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble ;*

$$D(A) = \left\{ x \in E \mid \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} existe \right\}$$

Par

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

Definition 1.1.3. *Nous noterons par $SG(M, \omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas on dit que $(T(t))\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné

Proposition 1.1.1. *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal.Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité ;*

$$T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geq 0.$$

Preuve : Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons ;

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h\searrow 0} \tfrac{T(h)x - x}{h} = \\ &= \lim_{h\searrow 0} \tfrac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = AT(t)x \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in D(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geq 0$.

Remarque : On voit que ;

$$T(t)D(A) \subseteq D(A), \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.1.2. *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal.Alors l'application ;*

$$t \in [0, \infty) \mapsto T(t)x \in E$$

est dérivable sur $[0, \infty)$, pour tout $x \in D(A)$, et nous avons ;

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geq 0.$$

Preuve : Soients $x \in D(A), t \geq 0$ et $h \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} &\|\tfrac{T(t+h)x-T(t)x}{h} - T(t)Ax\| \leq \|T(t)\|\|\tfrac{T(h)x-x}{h} - Ax\| \leq \\ &\leq Me^{\omega t}\|\tfrac{T(h)x-x}{h} - Ax\|. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

d'où

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = R(t)Ax, \forall t \geq 0.$$

Si $t - h > 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned} &\|\tfrac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} - T(t)Ax\| \leq \\ &\leq \|T(t-h)\|\|\tfrac{T(h)x-x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax\| \leq \\ &\leq Me^{\omega(t-h}\left(\|\tfrac{T(h)x-x}{h} - Ax\| + \|T(h)Ax - Ax\|\right) \end{aligned}$$

Par suite

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)Ax$$

et

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \forall t \geq 0.$$

Lemme 1.1.0.1. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h \searrow 0} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$$

quels que soient $x \in E$ et $t \geq 0$.

Prueve : L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation :

$$\|\tfrac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\| = \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s)-T(t))xds\| \leq$$
$$\leq sup_{s\in[t,t+h]}\|T(s)x - T(t)x\|$$

et de la continuité de l'application $t \in [0,\infty) \mapsto T(t)x \in E$

Proposition 1.1.3. *Soient $(T(t))_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in E$, alors $\int_0^t T(s)ds \in D(A)$ et on a l'égalité :*

$$A\int_0^t T(s)ds = T(t)x - x, \forall t \geq 0.$$

Preuve : Soient $x \in E$ et $h > 0$. Alors :

$$\tfrac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds =$$
$$= \tfrac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds =$$
$$= \tfrac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)xdu =$$
$$= \tfrac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)xdu.$$

Par passage á la limite pour $h \searrow 0$ et compte tenu du lemme(0.1), nous obtenons :

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \forall t \geq 0$$

et

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$

Theorem 1.1. *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal.Alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si est seulement si*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds, \forall t \geq 0.$$

Preuve :$\Rightarrow$ Si $x \in D(A)$ et $Ax = y$, alors nous avons :

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y, \forall s \in [0,t], t \geq 0.$$

d'où
$$\int_0^t T(s)yds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)xds = T(t)x - x, \forall t \geq 0.$$
$\Leftarrow$Soient $x, y \in E$ tel que
$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds, \forall t \geq 0.$$
Alors nous avons
$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds, \forall t \geq 0.$$
d'où
$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = T(0)y = y, \forall t \geq 0.$$
compte tenu du lemme (1.1). Finalement on voit que $x \in D(A)$, et $Ax = y$.

Theorem 1.2. *Soient $(T(t))_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal.Alors*
i) $\overline{D(A)} = E$;
ii) A est un opérateur fermé.

Theorem 1.3. *(l'unicité de l'engendrement)Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux C_0-semi-groupes. ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors :*
$$T(t) = S(t), \forall t \geq 0.$$

1.2 La transformée de laplace d'un C_0-semi-groupe.

Dans la suite, nous désignerons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda > \omega\}$. Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $(T(t))_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$. Nous avons :
$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$$
et on voit que :
$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \leq e^{-Re\lambda t}\|T(t)\|\|x\| \leq Me^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|, \forall x \in E.$$
Définissons l'application :
$$R_\lambda : E \to E$$

par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire borné. De plus, on a :

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} T(t) x\| dt \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \|x\|, \forall x \in E.$$

d'oú il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Definition 1.2.1. *L'opérateur :*

$$R : \Lambda_\omega \to \mathcal{L}(E)$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$$

s'appelle la transformée de la place du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0} \in SG(M, \omega)$. *Soit* $D \subset \mathbb{C}$ *un ensemble ouvert. Une application analytique :*

$$\lambda \in D \mapsto R_\lambda \in \mathbb{B}(E)$$

qui vérifie la propriété :

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu, \forall \lambda, \mu \in D,$$

s'appelle une pseudo résolvante.

Theorem 1.4. *Soit* $T : [0, \infty) \to \mathbb{B}(E)$ *une application fortement cotinue pour laquelle il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Alors l'application

$$R : \Lambda_\omega \to \mathcal{L}(E)$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$$

est une pscudo-résolvante si est seulement si on a

$$T(t + s) = T(t) T(s), \forall t, s \geq 0.$$

Theorem 1.5. *Soient $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire fermé á domaine dense et $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un $C_0 -$ semi $-$ groupe. exponentiellement borné ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A ;*

ii) $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in E$ on a $R(\lambda)x = R(\lambda; A)x$.*

Theorem 1.6. *Soient $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupes. et A son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a ;*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

1.3 L'approximation généralisée de Yosida

Lemme 1.3.0.1. *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :*

i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$

ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons :

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x, \forall x \in E.$$

De plus $\lambda R(\lambda; A) \in \mathcal{L}(E)$ et :

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} \lambda AR(\lambda; A)x = Ax, \forall x \in D(A).$$

Remarque : On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda AR(\lambda; A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A.

Definition 1.3.1. *La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset \mathcal{B}(E)$, où $A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)$ s'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.*

Theorem 1.7. *Soient*$(T(t))_{t\geq 0}$ *est un* $C_0-semi-groupe$. *A son générateur infinitésimal et*$\{A_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors pour tout* $\mu \in \Lambda_\mu$, *il existe* $\Omega > \omega$ *tel que* $\Lambda_\Omega \subset \rho(\Lambda_\mu)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_\Omega$ *on a*

$$\|R(\lambda;A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \Omega)}$$

De plus, pour $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $C > 0$ *(qui dépend de* M *et* ε*) tel que :*

$$\|R(\lambda;A)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}(\|x\| + \|Ax\|), \forall x \in D(A).$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *et* $Re\mu > \omega + \frac{|\mu|}{2}$.

Theorem 1.8. *(Hille-Yosida)Un opérateur*

$$A : D(A) \subset E \to E$$

est le générateur infinitésimal d'un $C_0-semi-groupe$. $(T(t))_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$. *si est seulement si :*

i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$

ii) il existe $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$, *on a :*

$$\|R(\lambda;A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chapitre 2

Semi-groupe intégré

Propriétés élémentaires

Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. et A son générateur infinitésimal. Soit

$$S(t) = \int_0^t T(s)ds, \forall t \geq 0.$$

Alors la transformée de Laplace de S satisfait les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t T(s)dsdt = \\ &= \tfrac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)dt = \frac{1}{\lambda} R(\lambda; A).\end{aligned}$$

Le théorème (1.4) conduit á la question suivante : on peut trouver une équation fonctionelle vériffée par S tel que l'application

$$\lambda \in \Lambda_\omega \mapsto \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt$$

est une pseudo-résolvante ? On a le théorème suivant

Theorem 2.1. *Soit $S : [0, \infty) \to \mathcal{L}(E)$ une application fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathcal{L}$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) l'application $R : \Lambda_\omega \to \mathcal{L}(E)$

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$$

est une pseudo-résolvante ;

ii) pour tous $t, s \geq 0$ *on a*

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^s S(r)dr.$$

Definition 2.0.1. *Soit* E *Un espace de Banach. Une famille* $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ *est dite semi-groupe intégré si elle satisfait les conditions suivantes*

(i) $S(0) = 0$

(ii) $\forall x \in E$ *,* $S(t)x$ *est une fonction continue en* $t \geq 0$ *a valeur dans* E

(iii) $\forall t, x \geq 0$, $S(s)S(t) = \displaystyle\int_0^s (S(t+\tau) - S(\tau))d\tau.$

Remarque : Soit $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ un semi-groupe intégré. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, nous désignerons par $\mathbf{C}^n$ l'ensembe

$$\{x \in E \mid S(.)x \in \mathbf{C}^n([0,\infty); E)\}$$

avec la convention $\mathbf{C}^0 = E$.
Alors la propriété(iii) de la définition (1.0.1) peut être remplacée par

$$S(t)x \in \mathbf{C}^1$$

et

$$S^{'}(\tau)S(t)x = S(\tau+t)x - S(\tau)x, \forall \tau, t \geq 0, \forall x \in E.$$

De plus,nous avons

$$S(t); \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}, et, \forall t \geq 0$$

et

$$S^{'}(t); \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n, \forall n \in \mathbf{N}, et, \forall t \geq 0$$

Proposition 2.0.1. *Soit* $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ *un semi-groupe intégré.Alors :*

i) pour tout $x \in \mathbf{C}^1$ *on a*

$$S(\tau)S^{'}(t)x = S(\tau+t)x - S(\tau)x, \forall \tau, t \geq 0,$$

ii) pour tout $x \in \mathbf{C}^1$ *on a*

$$S^{'}(t)x = S^{''}(0)S(t)x + S^{'}(0)x, \forall t \geq 0,$$

iii) pour tout $x \in \mathbf{C}^2$ *on a*

$$S^{''}(0)S(t)x = S(t)S^{''}(0)x, \forall t \geq 0,$$

Preuve :

i) Soit $x \in \mathbf{C}^1$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} S(r)S^{'}(t)x &= \tfrac{d}{dt}[S(r)S(t)]x = \tfrac{d}{dt}[S(t)S(r)]x = \\ &= \tfrac{d}{dt}\left[\int_0^t [S(\tau+r) - S(\tau)]d\tau\right] x = S(t+r)x - S(t)x. \end{aligned}$$

ii) Soit $x \in \mathbf{C}^1$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} S^{''}(r)S(t)x &= \tfrac{d}{dt}[S^{'}(r)S(t)x] = \\ &= \tfrac{d}{dt}\left[S(r+t)x - S(r)x\right] = S^{'}(r+t)x - S^{'}(r)x. \end{aligned}$$

Pour $r = 0$, en résulte :

$$S^{''}(0)S(t)x = S^{'}(t)x - S^{'}(0)x, \forall t \geq 0.$$

d'où on obtient (ii).

iii) Soit $x \in \mathbf{C}^1$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} S(r)S^{''}(t)x &= \tfrac{d}{dt}[S(r)S^{'}(t)]x = \tfrac{d}{dt}\left[S(r+t)x - S(r)x\right] = \\ &= S^{'}(r+t)x - S^{'}(r)x. \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, il vient

$$S(r)S^{''}(0)x = S^{'}(r)x - S^{'}(0)x, \forall r \geq 0.$$

Compte tenu de l'égalité(ii),il en suit (iii).

Exemple : Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0. Alors la famille $(S(t))_{t\geq 0}$

$$S(t) = \int_0^t T(s)ds.$$

est un semi-groupe intégré sur E

2.1 Espace dégénéré du semi-groupe intégré

Definition 2.1.1. *On appelle espace dégénéré du semi-groupe intégré* $(S(t))_{t\geq 0}$ *l'ensemble*

$$\mathcal{N} = \{x \in E \mid S(t)x = 0, \forall t \geq 0\}$$

Remarque : $\mathcal{N}$ est un sous-espace fermé de C^1.

Proposition 2.1.1. *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe intégré et*

$$\mathcal{N}_1 = \{x \in C^1 \mid S^{'}(0)x = 0\}.$$

Alors $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$

Preuve : Soit $x \in \mathcal{N}$. Alors $S(t)x = 0$, pour tout $t \geq 0$. par conséquent $S^{'}(t)x = 0$, pour tout $t \geq 0$, d'où il résulte $S^{'}(0)x = 0$. Donc $x \in \mathcal{N}_1$ et, par suite, $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1$.
Soit $x \in \mathcal{N}_1$. Alors $S^{'}(0)x = 0$. De l'égalité

$$S(r)S^{'}(t)x = S(t+r)x - S(t)x, \forall t, r \geq 0$$

on obtient

$$S(r)x = 0, \forall r \geq 0$$

et on voit que $x \in \mathcal{N}$. Par suite $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$.
Finalement, on voit que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$.

Definition 2.1.2. *On dit que le semi-groupe intégré* $(T(t))_{t\geq 0}$ *et non-dégénéré si* $\mathcal{N} = \{0\}$. *En cas contraire, on dit que* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe intégré dégénéré.*

Remarque : Un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$ est non-dégénéré si

$$\forall t \geq 0, S(t)x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Proposition 2.1.2. *Un semi-groupe intégré* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est non-dégénéré si est seulement si on a* $S^{'}(0)x = x$ *pour tout* $x \in \mathcal{C}^1$.

Preuve : $\Rightarrow$ Soit $(S(t))_{t\geq 0}$un semi-groupe intégré non-dégénéré.Alors $S(t)x = 0$,pour tout $t \geq 0$, implique $x = 0$.
Soit $x \in \mathcal{C}^1$. Avec la proposition(1.0.1). pour tout $t, t \geq 0$ on voit que

$$S(r)S^{'}(t)x = S(r+t)x - S(t)x$$

d'où, pour $t = 0$ il s'ensuit

$$S(r)S^{'}(0)x = S(r)x, \forall r \geq 0.$$

ou bien

$$S(r)[S^{'}(0)x - x] = 0, \forall r \geq 0.$$

Comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré, il en résulte

$$S^{'}(0)x - x = 0 \Rightarrow S^{'}(0)x = x$$

$\Leftarrow$ Soit $(S(t))_{t\geq 0}$un semi-groupe intégré tel que $S(0)x = 0$, pour tout $x \in \mathcal{C}^1$. Soit $x \in \mathcal{N}$. Alors $S^{'}(0)x = 0$ et par conséquent , $x = S^{'}(0)x = 0$, d'où il ensuit que $\mathcal{N} = \{0\}$. Il en résult que $(S(t))_{t\geq 0}$un semi-groupe intégré non-dégénéré

Theorem 2.2. *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$un semi-groupe intégré non-dégénéré.Alors $(S^{'}(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0 - semi - groupe$ sur $\mathcal{C}^1$.*

Preuve : Pour tout $x \in \mathcal{C}^1$, l'application

$$t \in [0, \infty) \longmapsto S^{'}(t)x \in \mathcal{C}^1$$

est continue. Compte tenu de la proposition (1.0.3) on a $S^{'}(0) = I$ et avec la proposition (1.0.1), on voit que

$$S^{'}(r)S^{'}(t)x = S^{'}(r+t), \forall r, t \geq 0.$$

Il en résulte que $(S^{'}(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0 - smi - groupe$ sur $\mathcal{C}^1$.

2.2 Opérateur générateur du semi-groupe intégré

Definition 2.2.1. *Un semi-groupe intégré* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est dit exponentielement borné, s'il existe une constante* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} pour, t \geq 0$$

Si $(S(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe intégré, exponentielement borné, Alors la transformée de Laplace* $R(\lambda) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)dt$ *existe pour tout,* $\lambda > \omega$*.*

Definition 2.2.2. *Un opérateur* A *est dit générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré, s'il existe* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que* $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ *(la résolvante de* A*). et une famille exponentielement bornée* $(S(t))_{t\geq 0}$ *d'opérateurs lineaires bornées tel que* $S(0) = 0$ *et* $R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)dt$ *pour toute* $\lambda > \omega$*, oú* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *pour* $\lambda \in \rho(A)$

Remarque : On voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1$ et

$$S^{'}(t)x - x = S(t)y, \forall t \geq 0.$$

Proposition 2.2.1. *Soit* $A : D(A) \subset E \to E$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré,* $(S(t))_{t\geq 0}$*. Alors*

$$\mathcal{C}^2 \subset D(A) \subseteq \mathcal{C}^1$$

et

$$Ax = S^{''}(0)x, \forall x \in \mathcal{C}^2.$$

Proposition 2.2.2. *Soit* $A : D(A) \subset E \to E$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré,* $(S(t))_{t\geq 0}$*.Alors* A *est un opérateur fermé.*

Proposition 2.2.3. *Soit* A *un générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $(S(t))_{t\geq 0}$*. Alors pour toute* $x \in E$ *et* $t \geqslant 0$

$$\int_0^t S(s)xds \in D(A), et, S(t)x = A\left(\int_0^t S(s)xds\right) + tx$$

En plus, pour toute $x \in D(A), t \geq 0$

$$S(t)x \in D(A), AS(t) = S(t)Ax$$

Et

$$S(t)x = \int_0^t S(t)Axdx + tx$$

Lemme 2.2.0.1. *Soit* $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré,* $(S(t))_{t \geq 0}$. *et*

$$\varphi : [0, \infty) \longrightarrow E$$

une application continue tel que

$$\int_0^t \varphi(s)ds \in D(A), \forall t \geq 0.$$

Si

$$A \int_0^t \varphi(s)ds = \varphi(t), \forall t \geq 0.$$

alors $\varphi(t) = 0$, *pour tout* $t \geq 0$.

Theorem 2.3. *(l'unicité de l'engendrement) Soient* $(S(t))_{t \geq 0}$. *et* $(U(t))_{t \geq 0}$. *deux semi-groupes intégrés ayant pour générateur le même opérateur* $A : D(A) \subset E \rightarrow E$. *Alors pour tout* $t \geq 0$ *on a* $S(t) = U(t)$.

Preuve : Pour tout $x \in E$ on considére l'application

$$\varphi : [0, \infty) \longrightarrow E$$

$$\varphi(t) = S(t) - U(t)$$

compte tenu de la proposition (2.0.6), on obtient

$$\begin{aligned} A \int_0^t \varphi(s)ds &= A \int_0^t S(s)xds - \int_0^t U(s)xds = \\ &= S(t)x - tx - U(t)x + tx = \varphi(t).\forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Avec le lemme (2.0.0.1) il s'ensuit

$$\varphi(t) = 0.\forall t \geq 0.$$

d'où l'affirmation de l'énoncé en découle immédiatement.

Corollaire 2.1. *Soit A un générateur d'un semi-groupe intègré $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors pour toute $x \in E$ et $t \geq 0$ on a $S(t)x \in \overline{D(A)}$. En plus ,*
Soit $x \in E$ Alors $S(.)x$ est differentiable adroite en $t \geq 0$ si est seulement si $S(t)x \in D(A)$. dans ce cas

$$S^{'}(t)x = AS(t)x + x$$

2.3 Opérateur de Hill-Yocida

Le cas le plus important est la où le semi-groupe intégré est localement Lipschitzien continu.

Definition 2.3.1. *Un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit localement Lipschitzien continu, si pour toute $\tau > 0$ il existe un constant $K(\tau) > 0$ tel que*

$$|S(t) - S(s)| \leq K(\tau)|t - s|, pour, t, s \in [0, \tau] .$$

Dans ce cas $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentielement borné.

Definition 2.3.2. *Un opérateur linéair A satisfait la condition de Hill-Yosida (ou est un opérateur de Hill-Yosida) s'il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ et*

$$sup\{(\lambda - \omega)^n |R(\lambda, A)^n| pour, n \in \mathbb{N}, \lambda > \omega\} \leq M.$$

Le theoréme suivant est appelé la condition de Hill-Yosida qui caractérisé les générateurs des semi-groupes intégrés localement Lipschitziens continus.

Theorem 2.4. *Les assertions suivantes sont equivalantes*
(i) A est générateur d'un semi-groupe intégré localement Lipschitzien continu,
(ii) A satisfait la condition de Hill-Yosida

Remarque : Si A est un générateur d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans E Alors la partie A_F de A dans $F = \overline{D(A)}$ est un générateur du C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans F et on a, pour $x \in F, S(t)x = \displaystyle\int_0^t T(s)(x)ds; t \geq 0$. Ainsi pour $x \in E \setminus F$ la fonction $t \longrightarrow S(t)x$ n'est pas différentiable pour $t \geq 0$

Chapitre 3

Équations différentielles fonctionnelles partielles

Résultats préliminaires

Dans cette séction nous donnons quelque resultats pour l'existence des solutions au probleme de Cauchy suivant.

$$(P1.1)\ldots\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t).pourt \geq 0 \\ u(0) = x \in E \end{cases}$$

Où A satisfait la condition de Hill-Yosida dans E sans être densément défini . Par une solution de (P1.1) dans $[0, T]$ où $T \geq 0$, nous comprenons une fonction $u \in C^1([0, T])$ satisfait $u(t) \in D(A)$ pour $t \in [0, T]$, tel que les deux relations de (P1.1) se réalisent.
La définition suivante est de Da Prato et Sinestrari.

Definition 3.0.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(0, +\infty; E)$ et $x \in E$, on sait que $u : [0, +\infty) \to E$ est une solution intégrale de (P1.1) si les assértions suivantes sont vraies*

(i) $u \in C([0, +\infty); E)$,

(ii) $\displaystyle\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ *pour* $t \geq 0$,

(iii) $u(t) = A\left(\displaystyle\int_0^t u(s)ds\right) + \int_0^t f(s)ds$, *pour,* $t \geq 0$.

Remarque : Apartire de cêtte définition, on déduit que pour toute solution intégrale u, on a, $u(t) \in \overline{D(A)}$,pour tout, $t > 0$. car $u(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds$ et $\int_t^{t+h} u(s)ds \in D(A)$, En particulier, $x \in \overline{D(A)}$. est une condition nécéssaire pour l'existence d'une solution intégrale de (P1.1).C'est suggestif á résoudre (P1.1) par la méthode de variation de la constante la où $S(t)$ est un semi-groupe généré par A.

Theorem 3.1. *Supposons que A satisfait la condition de Hill-Yosida dans* E, $x \in \overline{D(A)}$ *et* $f : [0, +\infty) \to E$ *est une fonction continue. Alors (P1.1) admet une unique solution qui est donnée par la formulle de variation de la constante suivante*

$$(E1)\ldots.u(t) = S^{'}(t)x + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)ds, pour, t \geq 0,$$

En plus la fonction u satisfait l'approximation suivante,

$$|u(t)| \leq Me^{\omega t}\left(|x| + \int_0^t e^{-\omega s}|f(s)|ds\right), pour, t \geq 0.$$

Notons que le théorème (3.1) dit encor que $\int_0^t S(t-s)f(s)ds$ est différentiable par rapport á t

3.1 Éxistence local et régularité des solutions

Dans la suite nous considérons que.

(H_1) A est un opérateur de Hill-Yosida.

(H_2) $F : C_E \to E$ est localement Lipschtziene continue, i.e., pour toute $\rho > 0$ il existe une constante $C_0(\rho) > 0$ tel que si $\varphi_1, \varphi_2 \in C_E$ et $|\varphi_1|, |\varphi_2| \leq \rho$ alors

$$|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)| \leq C_0(\rho)|\varphi_1 - \varphi_2|.$$

D'apres le théoreme (2.4), A est le générateur du semi-groupe intégré localement Lipschitzien continu $(S(t))_{t\geq 0}$ dans E et $|S(t)| \leq Me^{\omega t}$ pour $t \geq 0$.

Definition 3.1.1. *On sait que la fonction* $u : [-r, +\infty) \to E$ *est une solution intégrale de (P1) si les conditions suivantes sont vraies,*

(i) $u \in C([-r, +\infty); E)$

(ii) $u_0 = \varphi$,

(iii) $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ *pour,* $t \geq 0$,

(iv) $u(t) = \varphi(0) + A\left(\int_0^t u(s)ds\right) + \int_0^t F(u_s)ds$ *pour,*$t \geq 0$.

Definition 3.1.2. *On sait que la fonction* $u : [-r, +\infty) \to E$ *est une solution stricte de (P1) si les conditions suivantes sont satisfaites,*

(i) $u \in C^1([-r, +\infty); E)$,

(ii) $u_0 = \varphi$,

(iii) u satisfait (P1) pour, $t \geq 0$.

Apartir de la fèrméture de l'opérateur A. on peut voir les résultats suivants.

Proposition 3.1.1. *(i) Si u est une solution intégrale, de, (P1) dans,* $[-r, a]$, *alors pour toute,* $t \in [0, a], u(t) \in \overline{D(A)}$. *En particulier* $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$.

(ii) Si u est une solution intégrale, de (P1), dans, $[-r, a]$,*tel que, u appartienne a* $C^1([0, a]; E)$ *ou* $C([0, a]; D(A))$, *alors u est encor solution stricte de (P1) dans* $[-r, a]$.

D'apres le théoréme (3.1). si la solution intégrale u existe, alors. u est donné par la formulle de variation de la constante suivante.

$$(E2)\ldots.u(t) = \begin{cases} S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(u_s)ds, pourt \in [0, T] \\ \varphi(t), pourt \in [-r, 0], \end{cases}$$

Theorem 3.2. *Supposons que,* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites. Soit,* $\varphi \in C_E$ *tel que,* $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$ *Alors il existe un interval maximal d'existence* $[-r, T_\varphi)$, $T_\varphi > 0$, *et une unique solution intégrale* $u(., \varphi)$ *de (P1) définie sur* $[-r, T_\varphi)$ *et soit.*

$$T_\varphi = +\infty, ou; = \lim_{t \to T_\varphi^-} sup|u(t, \varphi)| = +\infty$$

De plus, $u(t,\varphi)$ *est une fonction continue de* φ*, dans ce sense si,* $\varphi \in C_E$*,* $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$ *et* $t \in [0,\varphi)$*, alors il existe des constantes, L et* ε *tel que, pour,* $\Psi \in C_E$*,* $\Psi(0) \in \overline{D(A)}$ *et* $|\varphi - \Psi| < \varepsilon$*, on a*

$$t \in [0, T_\varphi), et, |u(s,\varphi) - u(s,\Psi)| \leq L|\varphi - \Psi|, pour, s \in [-r, t]$$

Preuve : Notons que (H_2) implique que, $\forall \rho > 0, \exists, C_0 > 0$ tel que pour $\varphi \in C_0$, et, $|\varphi| \leq \rho$,on a

$$|F(\varphi)| \leq C_0(\rho)|\varphi| + |F(0)| \leq \rho C_0(\rho) + |F(0)|.$$

Soit $\varphi \in C_E$, $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$, $\rho = |\varphi| + 1$, $c_1 = \rho C_0(\rho) + |F(0)|$, et $T_1 > 0$, Considérons l'ensemble suivant .

$$Z_\varphi = \left\{u \in C([-r, T_1]; E) : u(s) = \varphi(s), si, s \in [-r, 0], et, sup_{0 \leq s \leq T_1}|u(s) - \varphi(0)| \leq 1\right\},$$

où $C([-r, T_1]; E)$ est doté de la topologie de convergence uniforme.donc il est clair que, Z_φ est un ensemble fèrmé de $C([-r, T_1]; E)$.
Considérer la cartographie.

$$H : Z_\varphi \to C([-r, T_1]; E)$$

Définie par.

$$H(u)(t) = \begin{cases} S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t S(t-s)F(u_s)ds, pour, t \in [0, T_1] \\ \varphi(t), pour, t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Notons que le point fixe de H est une solution intégrale de (P1). Il faux montrér que.

$$H(Z_\varphi) \subseteq Z_\varphi.$$

Soit $u \in Z_\varphi$,et $t \in [0, T_1]$, On a pour des constants quelconques, M, et, w,

$$\begin{aligned} |H(u)(t) - \varphi(0)| &\leq |S'(t)\varphi(0) - \varphi(0)| + |\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(u_s)ds| \\ &\leq |S'\varphi(0) - \varphi(0)| + Me^{wt}\int_0^t e^{-ws}|F(u_s)ds|. \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on suppose que, $w > 0$. Alors,

$$|H(u)(t) - \varphi(0)| \leq |S'(t)\varphi(0) - \varphi(0)| + Me^{wt}\int_0^t |F(u_s)|ds.$$

A partir de $|u(s)-\varphi(0)| \leq 1$, pour, $s \in [0,T_1]$, et $\rho = |\varphi| + 1$, on obtien. $|u(s)| \leq \rho$, pour, $s \in [-r,T_1]$.Alors, $|u(s)| \leq \rho$, pour $s \in [0,T_1]$, et

$$\begin{aligned} |F(u_s)| &\leq C_0(\rho)|u_s| + |F(0)| \\ &\leq c_1 \end{aligned}$$

Considérons la constante, $T_1 > 0$ suffisament grande tel que.

$$sup_{0\leq s\leq T_1}\left\{|S^{'}(s)\varphi(0)-\varphi(0)| + Me^{ws}c_1 s\right\} < 1.$$

Nous déduirons que.

$$\begin{aligned} |H(u)(t)-\varphi(0)| &\leq |S^{'}(t)\varphi(0)-\varphi(0)| + Me^{wt}c_1 t \\ &< 1 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$H(Z_\varphi) \subseteq Z_\varphi.$$

D'autre part, soit, $u, v \in [0,T_1]$. on a.

$$\begin{aligned} |H(u)(t)-H(v)(t)| &= |\tfrac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)(F(u_s)-F(v_s))ds| \\ &\leq Me^{wt}\int_0^t |F(u_s)-F(v_s)|ds \\ &\leq Me^{wt}C_0(\rho)\int_0^t |u_s - v_s|ds \\ &\leq Me^{wT_1}C_0(\rho)T_1|u-v|_{C([-r,T_1];E)}. \end{aligned}$$

Notons que, $\rho = |\varphi| + 1$, alors, $c_1 = \rho C_0(\rho) + |F(0)| > C_0(\rho)$ et

$$\begin{aligned} Me^{wT_1}C_0(\rho)T_1 &\leq Me^{wT_1}c_1T_1 \\ &\leq sup_{0\leq s\leq T_1}\left\{|S^{'}(s)\varphi(0)-\varphi(0)| + Me^{ws}c_1 s\right\} < 1 \end{aligned}$$

Il ensuit que H est une contraction strict en Z_φ et H á un et un seul point fixe u dans Z_φ.Nous concluons que (P1) á une et une seulle solution intégrale qui est définie sur l'interval, $[-r,T_1]$.
Soit $u(.,\varphi)$, l'unique solution intégrale de (P1),définie sur sont interval maximal d'existence, $[0,T_\varphi], T_\varphi > 0$ supposons que, $T_\varphi < +\infty$ et

$$\lim_{t\to T_\varphi^-} sup|u(t,\varphi)| < +\infty.$$

Alors, il existe une constante, ρ telle que, $|u(t,\varphi)| \leq \rho$ pour $t \in [-r, T_\varphi)$.
Soit $t, t+h \in [0, T_\varphi)$ $h > 0$ et $\theta \in [-r, 0]$.
Si $t + \theta \geq 0$, on obtien

$$\begin{aligned} |u(t+\theta+h,\varphi) & -u(t+\theta,\varphi)| \leq |(S'(t+\theta+h) - S'(t+\theta))\varphi(0)| \\ & +|\tfrac{d}{dt}\int_0^{t+\theta+h} S(t+\theta+h-s)F(u_s,\varphi)ds - \frac{d}{dt}\int_0^{t+\theta} S(t+\theta-s)F(u_s,\varphi)ds| \end{aligned}$$

Il ensuit que.

$$\begin{aligned} |u(t+\theta+h,\varphi) & -u(t+\theta,\varphi)| \leq |S'(t+\theta)||S'(h)\varphi(0) - \varphi(0)| \\ & +|\tfrac{d}{dt}\int_{t+\theta}^{t+\theta+h} S(s)F(u_{t+\theta+h-s},\varphi)ds| \\ & +|\tfrac{d}{dt}\int_0^{t+\theta} S(s)(F(u_{t+\theta+h-s},\varphi) - F(u_{t+\theta+h},\varphi))ds|. \end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\begin{aligned} |u_{t+h}(\theta,\varphi) - u_t(\theta,\varphi)| & \leq Me^{wT_\varphi}|S'(h)\varphi(0) - \varphi(0)| + Me^{wT_\varphi}c_1 h \\ & +Me^{wT_\varphi}C_0(\rho)\int_0^t |u_{s+h}(.,\varphi) - u_s(.,\varphi)|ds. \end{aligned}$$

Si $t + h < 0$ alors considérons $h_0 > 0$ suffisament grand tel que pour $h \in (0, h_0)$.

$$|u_{t+h}(\theta,\varphi) - u_t(\theta,\varphi)| \leq sup_{-r\leq\sigma\leq 0}|u(\sigma+h,\varphi) - u(\sigma,\varphi)|.$$

Par conséquent, pour $t, t+h \in [0, T_\varphi), h \in (0, h_0)$;

$$\begin{aligned} |u_{t+h}(.,\varphi) - u_t(.,\varphi)| & \leq \delta(h) + Me^{wT_\varphi}(|S'(h)\varphi(0) - \varphi(0)| + c_1 h) \\ & +Me^{wT_\varphi}C_0(\rho)\int_0^t |u_{s+h}(.,\varphi) - u_s(.,\varphi)|ds. \end{aligned}$$

Où

$$\delta(h) = sup_{-r\leq\sigma\leq 0}|u(\sigma+h,\varphi) - u(\sigma,\varphi)|.$$

D'apres le lemme de Gronwell on a.

$$|u_{t+h}(.,\varphi) - u_t(.,\varphi)| \leq \beta(h)\exp[C_0(\rho)Me^{wT_\varphi}T_\varphi],$$

Avec.

$$\beta(h) = \delta(h) + Me^{wT_\varphi}\left[|S'(h)\varphi(0) - \varphi(0)| + c_1 h\right].$$

Utilisons certainne arguments, Un on peut prouvé quel que résultats pour $h \leq 0$ il ensuit imédiatement que, $\lim_{t \to T_\varphi^-} u(t, \varphi)$ existe. par conséquent, $u(., \varphi)$ peut être étendu á T_φ ce qui contredit que $[0, T_\varphi)$ est maximal.
Autrement, nous prouvons que la solution dépand continument ax condition initial.
Soit, $\varphi \in C_E, \varphi(0) \in \overline{D(A)}$ et $t \in [0, T_\varphi)$. Nouns posons,

$$\rho = 1 + sup_{-r \leq s \leq t} |u(s, \varphi)|$$

et

$$c(t) = Me^{wt} \exp(Me^{wt} C_0(\rho) t)$$

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$ tel que, $c(t)\varepsilon < 1$ et $\Psi \in C_E, \Psi(0) \in \overline{D(A)}$ tel que.

$$|\varphi - \Psi| < \varepsilon$$

On a.

$$|\Psi| \leq |\varphi| + \varepsilon < \rho.$$

Soit

$$T_0 = sup\{s > 0 : |u_\sigma(., \Psi)| \leq \rho, pour, \sigma \in [0, s]\}.$$

Si nous supposons que, $T_0 < t$, nous obtenons pour, $s \in [0, T_0]$,

$$|u_s(., \varphi) - u_s(., \Psi)| \leq Me^{wt} |\varphi - \Psi| + Me^{wt} C_0(\rho) \int_0^s |u_\sigma(., \varphi) - u_\sigma(., \Psi)| d\sigma.$$

D'apré le lemme de Gonwall nous déduirons que.

$$|u_s(., \varphi) - u_s(.\Psi)| \leq c(t) |\varphi - \Psi| \ldots (E3)$$

Ce qui implique que.

$$|u_s(., \Psi)| \leq c(t)\varepsilon + \rho - 1 < \rho, pour, s \in [0, T_0].$$

Il en suit que T_0 ne peut pas être le plus grand nombre $s > 0$ tel que, $|u_\sigma(., \Psi)| \leq \rho$, pour $\sigma \in [0, s]$. donc , $T_0 \geqslant t$ et $t < T_\Psi$.En plus , $|u_s(., \Psi) \leq \rho$ pour $s \in [0, t]$ alors en utilisant l'inégalité (E3) nous deduirons la dépendance continue par rapport aux données initiales .

Theorem 3.3. *Supposons que les hypotheses du théorème(3.5) sont satisfaites en plus supposons que* $F : C_E \to E$ *est continument différentiable et* $F^{'} : C_E \to \mathcal{L}(C_E, E)$ *satisfait la condition* (H_2) *(*$F^{'}$ *est localement lipschitzienne),i.e, pour tout* $\rho > 0$ *il existe un constant* $C_1(\rho) > 0$*, tel que si* $\varphi_1, \varphi_2 \in C_E$ *et* $|\varphi_1|, |\varphi_2| \leq \rho$ *alors*

$$|F^{'}(\varphi_1) - F^{'}(\varphi_2)| \leq C_1(\rho)|\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Pour chaque $\varphi \in C_E^1 = ([-r, 0], E) satisfaisant$

$$\varphi(0) \in D(A), \varphi^{'}(0) \in \overline{D(A)}, et, \varphi^{'}(0) = A\varphi(0) + F(\varphi),$$

Alors l'unique solution intégrale $u(., \varphi) : [-r, T_\varphi) \to E$ *de (P1) est une solution stricte de (P1) sur* $[-r, T_\varphi)$*.*

Preuve : Soit $\varphi \in C_E^1$ tel que $\varphi(0) \in D(A)$, $\varphi^{'}(0) \in \overline{D(A)}$ et $\varphi^{'}(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)$.Soit $u := u(., \varphi)$.l'unique solution intégrale de(P1) sur $[-r, T_\varphi)$ et $T_1 \in (0, T_\varphi)$. il est clair qu'ell'existe une unique fonction $v : [0, T_1] \to E$ qui résout l'équation intégrale suivante.

$$v(t) = \begin{cases} S^{'}(t)\varphi^{'}(0) + \frac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t S(t-s)F^{'}(u_s)(v_s)ds. \\ \varphi^{'}(t), pour, t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

On définie la fonction ω par

$$\omega(t) = \left\{ \varphi(0) + \int_0^t v(s)ds, pourt \in [0, T_1] \in \right.$$

Nous prouverons que $u = \omega$. En utilisant " l'éxprétion de v nous obtenons pour $t \in [0, T_1]$

$$\omega(t) = \varphi(0) + S(t)\varphi^{'}(0) + \int_0^t S(t-s)F^{'}(u_s)(v_s)ds.$$

Nous avons $\varphi(0) \in D(A), \varphi^{'}(0) \in \overline{D(A)}$ et $\varphi^{'}(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)$, alors

$$S(t)\varphi^{'}(0) = S(t)A\varphi(0) + S(t)F(\varphi).$$

En Utulisant le corollaire (2.1).Nous déduirons que

$$S(t)\varphi^{'}(0) = S^{'}(t)\varphi(0) - \varphi(0) + S(t)F(\varphi).$$

On plus, on a

$$\int_0^t S(t-s)F(\omega_s)ds = \int_0^t S(s)F(\omega_{t-s})ds.$$

Et comme les fonctions $t \to \omega\omega_t$ et F sont continuments différentiables, la fonction

$$t \to \int_0^t S(t-s)F(\omega_s)ds$$

est encor continument différentiable et

$$\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(\omega_s)ds = S(t)F(\varphi) + c$$

nous déduirons que

$$S(t)F(\varphi) = \int_0^t S(t-s)F^{'}(\omega_s)(v_s)ds.$$

Par conséquent ω satisfait, pour $t \in [0, T_1]$

$$\omega(t) = S^{'}(t)\varphi(0) + S(t)F(\varphi) + \int_0^t S(t-s)F^{'}(\omega_s)(v_s)ds.$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}\omega(t) = \quad & S^{'}(t)\varphi(0) + \tfrac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(\omega_s)ds \\ & -\int_0^t S(t-s)F^{'}(\omega_s)(v_s)ds + \int_0^t S(t-s)F^{'}(u_s)(v_s)ds.\end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons

$$\begin{aligned}u(t)-v(t) = \quad & \tfrac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)(F(u_s)-F(\omega_s))(v_s)ds \\ & \int_0^t S(t-s)(F^{'}(u_s)-F^{'}(\omega_s))(v_s)ds.\end{aligned}$$

Alors nous déduirons, pour $t \in [0, T_1]$, que

$$|u_t - \omega_t| \leq Me^{\omega T_1}\left(\int_0^t |F(u_s)-F(\omega_s)|ds + \int_0^t |F^{'}(u_s)-F^{'}(\omega_s)||v_s|ds\right)$$

Soit

$$\rho = (sup_{-r\leq s\leq T_1}|u(s)|, sup_{-r\leq s\leq T_1}|v(s)|, sup_{-r\leq s\leq T_1}|\omega(s)|)$$

Ils existes $C_0(\rho), C_1(\rho) \geq 0$ tel que si $\varphi_1, \varphi_2 \in C_E$ et $|\varphi_1|, |\varphi_2| \leq \rho$, alors

$$\begin{cases} |F(u_s) - F(\omega_s)| \leq C_0(\rho)|\varphi_1 - \varphi_2| \\ |F^{'}(u_s) - F^{'}(\omega_s)| \leq C_1(\rho)|\varphi_1 - \varphi_2|. \end{cases}$$

Cela implique que

$$|u_t - \omega_t| \leq Me^{\omega T_1}\left(C_0(\rho) + \rho C_1(\rho)\right)\int_0^t |u_s - \omega_s| ds.$$

Par le lemme de Gronwall nous déduirons que $u = \omega$ dans $[0, T_1]$.

3.2 Stabilité et comportement asymptotique

Dans cette section nous donnons un résultat pour la stabilité linéaire prés d'un point d' équilibre. Par un équilibre nous voulons dire une solution constante.

Sans pert de généralité,nous supposons que 0 est un point d'équilibre . nous gardons l'hypothése (H_1) dans la section (2) et au lieu de (H_2) nous faisons l'hypothése suivante ,

$(H_2^{'})$: F est continument différentiable, $F(0) = 0$ et F est globalement Lipschtzienne continue sur $\mathcal{C}_E$,

Apartir du théorème (3.5) et le lemme de Gronwall's, la condition $(H_2^{'})$ implique que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_E$, tel que $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$, (P1) admet une unique solution intégrale qui est définie sur $[0, \infty)$ par

$$(E3)\ldots.u(t, \varphi) = S^{'}(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(u_s(.,\varphi))ds, pour, t \geq 0.$$

Notons par X l'espace de phase de (P1) défini par

$$X = \{\varphi \in \mathcal{C}_E : \varphi(0) \in \overline{D(A)}\}.$$

On défini sur X l'opérateur $\tilde{U}$ pour $t \geq 0$ par

$$\tilde{U}(t) = u_t(., \varphi),$$

où $u(., \varphi)$ est l'unique slution intégrale de (P1) .

Proposition 3.2.1. *La famille* $(\tilde{U})_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu tel que*

i) $\tilde{U}(0) = 0$

ii) $\tilde{U}(t+s) = \tilde{U}(t)\,\tilde{U}(s)$ *pour* $t, s \geq 0$,

iii) pour tout $\varphi \in X$, $\tilde{U}(t)(\varphi)$ *est une fonction continue en* $t \geq 0$ *avec valeurs dans* X.

iv) pour tout $t \geq 0$, $\tilde{U}(t)$ *est continue de* X *dans* X.

v) $(\tilde{U(t)})_{t\geq 0}$ *satisfaisant pour* $t \geq 0$ *et* $\theta \in [-\tau, 0]$ *la propriété de traduction suivante.*

$$(\tilde{U}(t)(\varphi))(\theta) = \begin{cases} (\tilde{U}(t+\theta)(\varphi))(0), & si, t+\theta \geq 0 \\ \varphi(t+\theta) & si, t+\theta \leq 0, \end{cases}$$

vi) il existe $\gamma > 0$ *et* $M \geq 0$ *tel que*

$$|(\tilde{U}(t)(\varphi_1)) - (\tilde{U}(t)(\varphi_2))| \leq Me^{\gamma t}|\varphi_1 - \varphi_2|, pour, \varphi_1, \varphi_2 \in X.$$

Considérons l'équation linéaire de (P1) correspondant á la dérivée $F'(0)$

$$(P1.2)\ldots \begin{cases} \frac{d(u(t)}{dt} = Au(t) + F'(0)(u_t), pourt \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{C}_E, \end{cases}$$

et soit le semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0})$ *la solution corréspondant sur* X.

Proposition 3.2.2. *La dérivée á zéro du semi-groupe non-linéaire* $(\tilde{U}(t))$ *pour* $t \geq 0$ *est le semi-groupe linéaire associé á (P1.2).*

Definition 3.2.1. *Soit* Y *un espace de Banach et* $(V(t))_{t\geq 0}$ *le semi-groupe fortement continu d'opérateurs* $V(t) : W \subseteq Y \to W$, $t \geq 0$, *et* $x_0 \in W$*un équilibré de* $(V(t))_{t\geq 0}$ *(i.e.,* $V(t)x_0 = x_0$, *pour tout* $t \geq 0$*).*
L'équilibré x_0 *est dit exponentiellement asymptotiquement stable s'il existe* $\delta > 0, \mu > 0, k \geq 1$ *tel que*

$$|V(t)x - x_0| \leq ke^{-\mu t}|x - x_0|, pour, x \in W, avec|x - x_0| \leq \delta, et, t \geq 0.$$

Nous avons le résultat suivant.

Theorem 3.4. *Supposons que* $(U(t))_{t\geq 0})$ *est exponentiellement stable, alors l'équilibré zéro est exponentiellement asymptotiquement stable de* $(\tilde{U}(t))_{t\geq 0}$.

3.3 Analyse spéctrale et équation caractéristique

Dans cette séction, on considére l'équation différentielle linéaire fonctionnelle partielle suivante

$$(P1.3)\dots\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + L(u_t), pour, t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_E \end{cases}$$

Oú L est l'opérateur linéaire borné de $\mathcal{C}_E$ au E. Laissey-nous vous présenter la partie A_0 de l'opérateur A dans $\overline{D(A)}$. qui définie par

$$\begin{cases} D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)}\}, \\ A_0 = A, dans D(A_0). \end{cases}$$

Pour la suite, on introduire l'opérateur $T_0(t) = S^{'}(t), pourt \geq 0$.

Lemme 3.3.0.1. *L'opérateur A_0 est le générateur infinitésimal de$(T_0(t))_{t\geq 0}$ dans $\overline{D(A)}$.*

En plus ; la formulle (E2) est équivalante a la formulle suivante

$$(E4)\dots u(t) = \begin{cases} T_0(t)\varphi(0) + \lim_{\lambda\to\infty}\displaystyle\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda L(u_s)ds, pour, t \geq 0, \\ \varphi(t), pour, t \in [-r, 0], \end{cases}$$

Où $B_\lambda = \lambda(\lambda I - A)^{-1}$. Soit $(U(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe solution associé au (P4) Pour étudier la comportement asymptotique des solutions,nous devons d'abord calculer le générateur infinitésimal A_U de $(U(t))_{t\geq 0}$

Theorem 3.5. *Le générateur infinitésimal A_U de semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ sur X est donnér par*

$$\begin{cases} D(A_U) = \{ & \varphi \in \mathcal{C}^1([-r, 0]; E) : \varphi(0) \in D(A), \varphi^{'}(0) \in \overline{D(A)} \\ & et, \varphi^{'}(0) = A\varphi(0) + L(\varphi)\}, \\ A_U\varphi = \varphi^{'} \end{cases}$$

Preuve : Soit A_U Le générateur infinitésimal de semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$

sur X et soit $\varphi \in D(A_U)$ .Alors

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0^+} \to \frac{U(t)\varphi-\varphi}{t} = \Psi, existe, dansX, \\ A_U\varphi = \varphi^{'} \end{cases}$$

La premiere expression implique que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t+\theta)-\varphi(\theta)}{t} = \Psi(\theta), pour, \theta \in [-r,0).$$

D'autre part , on a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t+\theta)-\varphi(\theta)}{t} = D^+\varphi(\theta), pour, \theta \in [-r,0),$$

Où $D^+\varphi$ est la dérivée a droite du fonction φ. Alors $D^+\varphi = \Psi$ existe et $D^+\varphi$ est continue sur $[-r,0)$.Pour le prochain nous devons utiliser le lemme suivant

Lemme 3.3.0.2. *Soit φ un fonction continue et différentiable a droite sur $[a,b)$. Si la fonction $D^+\varphi$ est continue sur $[a,b)$, alors φ est continument différetiable sur $[a,b)$.*

On déduit d'aprés ce lemme que la fonction φ est continument différentiable sur $[-r,0)$, et $\varphi^{'} = \Psi$, sur $[-r,0)$. Notons que $\Psi \in X$. Alors $\lim_{\theta\to 0}\varphi^{'}(\theta) = \Psi(0)$, existe. Cela prouve que la fonction φ est continument différentiable sue $[-r,0]$ et $\varphi^{'} = \Psi$.D'autre part , comme $\varphi \in D(A_U)$, alors le semi-groupe $t \to U(t)\varphi$ est differetiable. Cela implique que la solution intégrale $u : t \to (U(t)\varphi)(0)$ du (P1) est continument différentiable sur $[0,+\infty)$. Par la proposition (3.2.1) nous déduirons que u est une solution stricte de (P1). Alors on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{u(t)-\varphi(0)}{t} = u^{'}(0) = \varphi^{'}(0), et, u^{'}(0) = Au(0) + L(u_0).$$

Par conséquent

$$\varphi^{'}(0) = A\varphi(0) + L(\varphi).$$

Nous avons prouvé que

$$\begin{cases} D(A_U) = \{ & \varphi \in \mathcal{C}^1([-r,0];E) : \varphi(0) \in D(A), \varphi^{'}(0) \in \overline{D(A)} \\ & et, \varphi^{'}(0) = A\varphi(0) + L(\varphi)\}, \\ A_U\varphi = \varphi^{'} \end{cases}$$

Considérons $\varphi \in \mathcal{C}^1([-r,0];E)$ tel que

$$\varphi(0) \in D(A), \varphi^{'}(0) \in D(A), et, \varphi^{'}(0) = A\varphi(0) + L(\varphi).$$

Soit $u : [-r, +\infty) \to E$ l'unique solution intégrale de (P1) on a

$$u(t) = \begin{cases} (U(t)\varphi)(0), t > 0, \\ \varphi(t), t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

D'aprét le théorème (3.3), nous déduirons que u est une solution stricte . cela implique encor que $t \to u_t$ est continument différentiable sur $[0, +\infty)$. Par conséquent $\varphi \in D(A_U)$.

Dans la suite , on suppose que

(H_3) Le semi-groupe $(T_0(t))_{t\geq 0}$ est compact sur $\overline{D(A)}$, i.e que pour tout $t \geq 0$ l'opérateur $T_0(t)$ est compact sur $\overline{D(A)}$.

Theorem 3.6. *Supposons que (H_3) détient. Alors le semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ est compact sur X, quel que soit $t > r$.*

Corollaire 3.1. *Supposons que (H_3) détient.Alors pour tout $t \geq r$, le spectre$\sigma(U(t))$ est un ensemble dénembrable et il est compact avec le seul point d'accumulation 0 et si $\mu \neq 0 \in \sigma(U(t))$ alors $\mu \in P\sigma(A_U)$. où $P\sigma(A_U)$ désigne le spectre ponctuel .*

Corollaire 3.2. *Supposons que (H_3) détient. Alors il existe un nembre réel δ tel que $Re\lambda \leq \delta$ pour tout $\lambda \in \sigma(A_U)$.En plus si β est un nombre réel donné alors il existe un nombre fini de $\lambda \in P\sigma(A_U)$ tel que $Re > \beta$.*

Nous pouvons maintenant donner une estimation exponentielle de semi-groupe solution.

Proposition 3.3.1. *Supposons que (H_3) détient. Soit δ un nombre réel tel que $Re\lambda \leq \delta$ pour tout valeur caractéristique λ de (P1). Alors , pour $\gamma > 0$ il existe un constant $k(\gamma) \geq 1$ tel que*

$$|U(t)\varphi| \leq k(\gamma)e^{(\delta+\gamma)t}|\varphi|, pour, t \geq 0, et, \varphi \in X.$$

Theorem 3.7. *Supposons que (H_3) détient.Soit δ le plus petit nombre réel tel que si λ est une valeur caractéristique quelconque de (P1). Alors $Re\lambda \leq \delta$. si $\delta \leq 0$,alors pour tout $\varphi \in X, |U(t)\varphi| \to 0$ quand $t \to +\infty$.Si $\delta = 0$ alors il existe $\varphi \in X \setminus \{0\}$ tel que $|U(t)\varphi| = |\varphi|$, pour tout $t \geq 0$. Si $\delta > 0$, alors il existe $\varphi \in X$ tel que $|U(t)\varphi| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.*

3.4 La formulle de variation de la constante

Dans cette séction, nous considérons l'équation différentielle fonctionnelle partielle linéaire non-homogéne suivante

$$(P1.3)\ldots\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + L(u_t) + f(t), pour, t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_E \end{cases}$$

Oú f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers E. Pour construire une formulle de variation de la constante pour (P1.3) , nous définirons l'espace $X \oplus \langle X_0 \rangle$, où $\langle X_0 \rangle$, est l'espace donné par

$$\langle X_0 \rangle = \{X_0 c; c \in E\}$$

et la fonction $X_0 c$ est définie par

$$(X_0 c)(\theta) = \begin{cases} 0 & si, \theta \in [-r, 0), \\ c & si, \theta = 0. \end{cases}$$

$X \oplus \langle X_0 \rangle$ est muni de la norme suivante

$$|\varphi + X_0 c| = |\varphi| + |c|.$$

Theorem 3.8. *L'extention continue $\tilde{A_U}$ de l'opérateur A_U défini sur $X \oplus \langle X_0 \rangle$ par*

$$\begin{cases} D(\tilde{A_U}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^1([-r, 0]; E) : \varphi(0) \in D(A), et \varphi'(0) \in \overline{D(A)}\} \\ \tilde{A_U}\varphi = \varphi' + X_0(A\varphi(0) + L(\varphi) - \varphi'(0)), \end{cases}$$

est un Hill-Yocida opérateur

Considérons maintenant le problème de Cauchy non-homogéne suivant.

$$(P1.4)\ldots\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = \tilde{A_U}u(t) + X_0 f(t), pour, t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_E \end{cases}$$

Definition 3.4.1. *La fonction continue $u : [0, +\infty) \to \mathcal{C}_E$ est dite solution intégrale de (P1.4) si*

(i) $\displaystyle\int_0^t u(s)ds \in D(\tilde{A_U}), pour, t \geq 0,$

(ii) $u(t) = \varphi + \tilde{A_U}\int_0^t u(s)ds + X_0\int_0^t f(s)ds, pour, t \geq 0.$

Appliquons le théorème (3.1),nous conclurons que pour tout $\varphi \in X$ (P1.4) á une unique solution intégrale qui est donné par la formulle suivante

$$u(t) = U(t)\varphi + \lim_{\lambda \to \to +\infty} \int_0^t U(t-s)\tilde{B_\lambda}X_0 f(s)ds, pour, t \geq 0.$$

Où $\tilde{B_U} = \lambda(\lambda I - \tilde{A_U})^{-1}$.

Theorem 3.9. *Soit x une solution intégrale de (P1.3), alors la fonction u donné par*

$$u(t) = x_t, pour, t \geq 0$$

est l'unique solution intégrale de (P1.4).Inversement, si u est une solution intégrale de (P1.4), alors la fonction x est définie par

$$x(t) = \begin{cases} u(t)(0) & si, t \geq 0, \\ \varphi(t) & si, t \leq 0, \end{cases}$$

est une solution intégrale de (P1.3).

3.5 Application

Pour illustrer les résultats ci-dessus,nous considérons l'équation différentielle fonctionnelle partielle suivante avec diffution qui décrit l'évolution d'une espéce animale á diffution unique avec une densité de population u

$$(P1.5)\ldots \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega(t,\xi) = a\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\omega(t,\xi) + b\omega(t,\xi) + & \displaystyle\int_{-r}^0 G(\theta)\omega(t+\theta,\xi)d\theta + f(\omega(t-r,\xi)), \\ & pour, t \geq 0, et, 0 \leq \xi \leq \Pi, \\ \omega(t,0) = \omega(t,\Pi) = 0, & pour, t \geq 0, \\ \omega(\theta,\xi) = \omega_0(\theta,\xi), & pour, -r \leq \theta \leq 0, et, 0 \leq \xi \leq \Pi. \end{cases}$$

Où a, b et r sont des constants positifs, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $G : [-r, 0] \to \mathbb{R}$continue et $\omega : [-r, 0] \times [0, \Pi] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.Dans l'ordre de reécrire (P1.5) dans l'équation abstraite (P1) nous introduisons $E = \mathcal{C}([0, \Pi]; \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de $[0, \Pi]$ vers

$\mathbb{R}$, muni la topologie de la norme uniforme, et nous définissons l'opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq E \to E$

$$\begin{cases} D(A) = \{y \in \mathcal{C}^2([0,\Pi];\mathbb{R}) : y(0) = y(\Pi) = 0\}, \\ Ay = y''. \end{cases}$$

C'est bien connu que

$$\begin{cases} (0,+\infty) \subset \rho(A), \\ |(\lambda I - A)^{-1}| \leq \frac{1}{\lambda}, pour, \lambda > 0. \end{cases}$$

Cela implique que l'hypothése (H_1) est satisfaite.D'autre part,nous pouvons voir que

$$\overline{D(A)} = \{y \in E; y(0) = y(\Pi) = 0\} \neq E.$$

Soit l'ensemble

$$\begin{cases} x(t)(\xi) = \omega(t,\xi), t \geq 0, \xi \in [0,\Pi], \\ \varphi(\theta)(\xi) = \omega_0(\theta,\xi), \theta \leq 0, \xi \in [0,\Pi], \\ F(\phi)(\xi) = a\phi(0)(\xi) + f(\phi(-r)(\xi)) + \displaystyle\int_{-r}^{0} G(\theta)\phi(\theta)(\xi)d\theta, \xi \in [0,\Pi], \phi \in \mathcal{C}_E. \end{cases}$$

Alors, (P1.5) prend la forme abstraite suivante ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + F(x_t), pour, t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{C}_E. \end{cases}$$

Nous supposons que,

(i) f est localement Lipschitzienne continue.Il ensuit que F est localement Lipschtzienne continue,Soit $\varphi \in \mathcal{C}_E$ tel que $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$.Alors le théorème (3.1) assuré l'existence de l'interval maximal d'existence $[-r, b_{\omega_0})$ et une unique solution intégrale $\omega(t,\xi)$ sur $[-r, b_{\omega_0}) \times [0,\Pi]$. Pour enquêter que la solution intégrale ω de (P1.5) est strict, nous ajoutons les hypothéses suivantes,

(ii) f est continument différentiable et f' est localement Lipschitzienne continue,

(iii) $\omega_0 \in \mathcal{C}^2([-r,0] \times [0,\Pi]; E)$, avec $\frac{\partial}{\partial\theta}\omega_0(0,0) = \frac{\partial}{\partial\theta}\omega_0(0,\Pi) = 0$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\omega_0(0,\xi) = \; & a\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\omega_0(0,\xi) + b\omega_0(0,\xi) \\ & + \int_{-r}^{0} G(\theta)\omega_0(\theta,\xi)d\theta + f(\omega_0(-r,\xi)), pour, \xi \in [0,\Pi]. \end{aligned}$$

Alors, F est continument différentiable sur $\mathcal{C}_E$ et $\phi, \psi \in \mathcal{C}_E$,$\xi \in [0, \Pi]$ on a

$$F^{'}(\phi)(\psi)(\xi) = b\psi(0)(\xi) + \int_{-\infty}^{0} G(\theta)\psi(\theta)(\xi)d\theta + f^{'}(\phi(-r)(\xi))\psi(-r)(\xi).$$

$F^{'}$ est encor localement Lipschitzienne continue sur $\mathcal{C}_E$ .Par conséquent , tous les conditions du théorème (3.5) sont satisfaits. Donc ω est une solution strict de (P1.5).Dans l'ordre d'étudier la stabilité, nous supposons que,

(iv) f est continument différentiable á 0 , $f(0) = 0$, $f^{'}(0) = 0$ et f est globalement Lipschitzienne.

Alors F est continument différentiable á 0 avec $F(0) = 0$ est F est globalement Lipschitzienne sur $\mathcal{C}_E$.Considérons l'équation linéarisée de (P1.5) corréspondant a la dérivée $F^{'}(0)$ á 0,

$$(P1.6)\ldots.\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega(t,\xi) = a\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\omega(t,\xi) + b\omega(t,\xi) + & \displaystyle\int_{-r}^{0} G(\theta)\omega(t+\theta,\xi)d\theta, \\ & pour, t \geq 0, et, 0 \leq \xi \leq \Pi, \\ \omega(t,0) = \omega(t,\Pi) = 0, & pour, t \geq 0, \\ \omega(\theta,\xi) = \omega_0(\theta,\xi), & pour, -r \leq \theta \leq 0, et, 0 \leq \xi \leq \Pi. \end{cases}$$

Soit A_0 la partie de l'opérateur A dans $\overline{D(A)}$ donné par

$$\begin{cases} D(A_0) = \{y \in \mathcal{C}^2([0,\Pi];\mathbb{R}) : y(0) = y^{''}(0) = y(\Pi) = y^{''}(\Pi) = 0\}, \\ A_0 y = y^{''}. \end{cases}$$

Alors A_0 généré un semi-groupe fortement continu qui est compact.Soit A_U le générateur infinitésimal du semi-groupe associe á (P1.6) et soit $\sigma_p(A_U)$ dénoter le spectre ponctuel de A_E .Alors $\lambda \in \sigma_p(A_U)$ si est seulement si il existe $\phi \in D(A_E), \phi \neq 0$ tel que $A_U\phi = \lambda\phi$.

Il ensuit que $\phi(\theta) = e^{\lambda\theta}y$ avec $y \neq 0, y \in D(A)$ et $\lambda y = Ay + F^{'}(0)(e^{\lambda}y)$.

Il ensuit que $\lambda \in \sigma_p(A_U)$ si est seulement si il existe $y \in D(A)$ et $y \neq 0$ tel que

$$\lambda y = Ay + by + \left(\int_{-r}^{0} G(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta\right) y.$$

Ce qui signifie que

$$\lambda - b - \int_{-r}^{0} G(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta \in \sigma_p(A) = \sigma_p(A_0).$$

Nous savons que le spectre ponctuel $\sigma_p(A_0)$ de A_0 est donné par

$$\sigma_p(A_0) = \{-an^2 : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Donc la stabilité exponentielle de solutions de (P1.6) est déterminée par l'équation caractéristique suivante

$$(E5)\dots.\lambda - b - \int_{-r}^{0} G(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta = -an^2, pour, n \geq 0.$$

Lemme 3.5.0.1. *Supposons que G est positif,* $\int_{-r}^{0} G(\theta)d\theta = 1$ *et* $1 < a - b$. *Alors, toutes les racines de (E5) a une partie réelle négative.*

Démonstration. Prnant la partie réelle dans l'équation caractéristique (E5),on a

$$Re(\lambda) = b + \int_{-r}^{0} G(\theta)e^{Re(\lambda)\theta}\cos(Im(\lambda\theta))d\theta - an^2,$$

Qui implique que

$$Re(\lambda) \leq b + \int_{-r}^{0} G(\theta)e^{Re(\lambda)\theta}\cos(Im(\lambda\theta))d\theta - a,$$

et

$$Re(\lambda) \leq b + 1 - a < 0.$$

Par conséquent, toute valeur caractéristique avoir une partie réelle négative et nous déduirons que le semi-groupe solution de (P1.6)est exponentiellement stable.

$\square$

Chapitre 4

Équations intégro-différentielles fonctionnelles partielles

Résultats préliminaires

Dans cette séction nous collectons un résultat de base sur les opérateurs resolvants de l'équation linéaire homogéne suivante

$$(P2.2)\ldots\begin{cases}\frac{dv}{dt}(t)=Av(t)+\displaystyle\int_0^t B(t-s)v(s)ds, pour, t\geq 0\\ v(0)=v_0\in E\end{cases}$$

Où A et $B(t)$ sont des opérateurs linéaires fermés sur E.Dans la suite Y dénote l'espace de Banach $D(A)=Y$ muni d'un norme défini par

$$|y|_Y=|Ay|+|y|, pour, y\in Y.$$

$C([0,+\infty);Y)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,+\infty)$ vers Y.

Definition 4.0.1. *L'opérateur resolvant de (P2.2) est l'opérateur borné $R(t)\in E$ pour $t\geq 0$ tel que*

(i) $R(0)=I, et, |R(t)|\leq Ne^{\beta t}$, *pour certaine constante N et β.*

(ii) Pour tout $x\in\mathcal{L}(E)$, $R(t)x$ est fortement continu pour $t\geq 0$.

(iii) $R(t)\in Y$ *pour* $t\geq 0$. *pour* $x\in Y$, $R(.)x\in C^1([0,+\infty);E)\cap$

$C([0, +\infty); Y)$ *et*

$$\begin{aligned} R'(t)x &= AR(t) + \int_0^t B(t-s)R(s)ds \\ &= R(t)Ax + \int_0^t R(t-s)B(s)ds, pour, t \geq 0. \end{aligned}$$

Theorem 4.1. *Supposons que (P2.2) á un opérateur résolvant . Si u est une solution stricte de (P2.1), alors*

$$u(t) = R(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)g(s)ds, pour, t \geq 0. \dots (2.1)$$

Dans la suite.On suppose que

(H_0) (P2.2) a un opérateur résolvant

(H_1) A génére un semi-groupe fortement continu dans E

(H_2) Pour tout $t \geq 0$, $B(t)$ est l'opérateur linéaire fermé de $D(A)$ vers E, et $B(t) \in \mathcal{L}(Y, E)$, où $\mathcal{L}(Y, E)$, est l'espace de tout les 'opérateurs linéaires bornés de Y vers E.Pour tout $y \in Y$, la carte $t \to B(t)y$ est uniformément continue bornée, différentiable et sa dirévée $t \to B'(t)y$ est uniformément continue bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Theorem 4.2. *Supposons que* $(H_1$ *et* (H_2) *sont satisfaites. Alors il existe un unique opérateur résolvant pour (P2.2)*

Le théorème suivant donne la condition suffisante qui assure l'existence du solution stricte pour (P2.1), qui généralisé le résultat bien connu dans la théorie des semi-groupes.

Theorem 4.3. *Soit* $g \in \mathcal{C}^1([0, +\infty); E)$ *et* v *défini par*

$$v(t) = R(t)v_0 + \int_0^t R(t-s)g(s)ds, pour, t \geq 0.$$

Si $v_0 \in D(A)$, *alors* v *est une solution stricte pour (P2.1)*

4.1 Existance global et gonflement de la solution douce

Proposition 4.1.1. *Supposons que* (H_0) *est satisfaite .Si* u *est une solution stricte de (P2) alors*

$$u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)F(s,u_s)ds, pour, t \geq 0. \ldots (2.2)$$

Remarque : La reciproque n'est pas vraie .i.e .Si u satisfait (2.2) ,u peut être non différentiable, c'est pourquoi nous distinguons entre douce et stricte solutions.

Definition 4.1.1. *La fonction continue* $u : [-r, +\infty) \to E$ *est une solution douce de (P2) si elle satisfait l'equation suivante*

$$\begin{cases} u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)F(s,u_s)ds, pour, t \geq 0 \\ u_0 = \varphi. \end{cases}$$

Dans la suite nous donnons l'existence local des solutions douce de (P2).Dans ce but ,nous faisons l'hypothése suivante.
(H_3) F est localement Lipschtzienne.

Theorem 4.4. *Supposons que* (H_0) *et* (H_3) *sont satisfaites.Soit* $\varphi \in \mathbb{C}$. *Alors il exiete un interval maximal d'existence* $[-r, b_\varphi)$ *et une unique solution douce* $u(., \varphi)$ *de (P2) définie sur* $[-r, b_\varphi)$ *et soit*

$$b_\varphi = +\infty, ou, \overline{\lim}_{t \to b_\varphi^-} |u(t,\varphi)| = +\infty.$$

En plus ,$u(t, \varphi)$ *est une fonction continue en* φ *dans le sens que si* $\varphi \in \mathcal{C}$ *et* $t \in [0, b_\varphi)$. *alors il existe des constantes positives* K *et* ε *telles que .pour* $\Psi \in \mathcal{C}$ *et* $|\varphi - \Psi| < \varepsilon$, *on a*

$$t \in (0, b_\Psi), et, |u(s,\varphi) - u(s,\Psi)| \leq K|\varphi - \Psi|, pourtout, s \in [-r, t].$$

Corollaire 4.1. *Supposons que* (H_0) *et* (H_3) *sont satisfaites. Soit* k_1 *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et* $k_2 \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ *soit tel que*

$$|F(t,\varphi)| \leq k_1(t)|\varphi| + k_2(t), pour, t \geq 0, et, \varphi \in \mathcal{C}.$$

Alors (P2) á une unique solution douce qui est définie pour tout $t \geq 0$.

Corollaire 4.2. *Supposons que* (H_0) *est satisfaite, et* F *est Lipschitzienne en ce qui concerne le deuxième argument,á savoir*

$$|F(t,\varphi_1)-F(t,\varphi_2)|\leq L|\varphi_1-\varphi_2|, pour, t\geq 0, et, \varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{C}.$$

Alors (P2) á une unique solution douce qui est définie pour tout $t\geq 0$.

Dans la suite , nous donnons une estimation des solutions

Proposition 4.1.2. *Supposons que* (H_0) *est satisfaite et* F *est Lipschitzienne en ce qui concerne le deuxième argument. Soient* u *et* $\widehat{u}$ *deux solutions douce de (P2) correspondant respectivement á* φ *et* $\widehat{\varphi}\in\mathcal{C}$*.Alors*

$$\begin{cases} |u_t-\widehat{u}_t|\leq N|\varphi-\widehat{\varphi}|e^{(\beta+NL)t} & si\beta\geq 0\\ |u_t-\widehat{u}_t|\leq Ne^{-\beta t}|\varphi-\widehat{\varphi}|e^{(\beta+NLe^{-\beta t})t} & si\beta<0,\end{cases}$$

Où L *est la constante de Lipschitz pour* F.

4.2 Existence des solutions stricts

Theorem 4.5. *Supposons que* (H_0) *et* (H_3) *sont satisfaites.et* F *est continument différentiable, en plus supposons que les dirévées partielles* D_tF *et* $D_\varphi F$ *sont localement Lipschitziennes dans le sens classique .Soit* $\varphi\in\mathcal{C}^1([-r,0],E)$ *tel que* $\varphi(0)\in D(A), et, \varphi'(0)=A\varphi(0)+F(0,\varphi)$.
Alors la solution douce correspondant á u *devient la solution strict de (P2).*

4.3 Cadre général

Dans cette séction nous considérons le cas non autonome

$$(P2)\ldots\begin{cases}\frac{du}{dt}(t)=Au(t)+\displaystyle\int_0^t B(t-s)u(s)ds+F(t,u_t), pour, t\geq 0\\ u_0=\varphi\in C_E\end{cases}$$

Pour tout $t\geq 0$. $A(t)$ est un opérateur linéaire fermé avec domaine dense $D(A)$ qui est indépendant de t et pour $0\leq s\leq t$, $B(t,s)$ est un opérateur

linéaire fermé ,avec domaine $D(A) \subset D(B)$
Consiérons l'équation linéaire homogéne suivante

$$(P2.3)\ldots \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) = Av(t) + \int_0^t B(t-s)v(s)ds, pour, t \geq 0 \\ v(0) = v_0 \in E \end{cases}$$

Supposons $\mathcal{Z}$ est un espace de Banach $D(A)$ muni de la norme

$$|y|_{\mathcal{Z}} = |A(0)y| + |y|, pour, y \in \mathcal{Z}.$$

Definition 4.3.1. *L'opérateur résolvant A de (P2.3) est l'opérateur borné,la fonction valorisée $R(t,s) \in \mathcal{L}(E)$, pour $0 \leq s \leq t$, ayant les propriétés suivantes*

(i) $R(t,s)$ est fortement continu en s et t, $R(s,s) = I$ pour $0 \leq s \leq t$ et $|R(t,s)| \leq N_1 e^{\beta_1(t-s)}$ pour certains constants N_1 et β_1.

(ii) $R(t,s)\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}, R(t,s)$ est fortement continu en s et t dans $\mathcal{Z}$.

(iii) pour chaque $x \in \mathcal{Z}, R(t,s)x$ est fortement continu différentiable en s et t et

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t}(t,s)x = A(t)R(t,s)x + \int_s^t B(t,r)R(r,s)xdr, \\ \frac{\partial R}{\partial s}(t,s)x = -R(t,s)A(s)x - \int_s^t R(t,r)B(r,s)xdr, \end{cases}$$

Definition 4.3.2. *Soit $(A(t))_{t\geq 0}$ une famille des générateurs de C_0-semi-groupe. $(A(t))_{t\geq 0}$ est dite stable s'il existe des reéls constants $N_0 \geq 1$ et α_0 pour que*

$$|\Pi_{j=1}^k (A(t_j) - \lambda I)^{-1}| \leq N_0(\lambda - \alpha_0)^{-k}$$

pour tout $\lambda \geq \alpha_0, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k < +\infty, pour, k = 1, 2, \ldots$
Obtenir l'existence de l'opérateur résolvant de (P2.1) nous supposons les hypothéses suivantes en raison de Grimmer[10].

(H_4) $(A(t))_{t\geq 0}$ est une famille stable des générateurs tel que $A(t)x$ est fortement continu différentiable sur $[0, +\infty)$ pour $x \in \mathcal{Z}$. En plus , $B(t)x$ est fortement continu différentiable sur $[0, +\infty)$ pour $x \in \mathcal{Z}$.

(H_5) $B(t)$ est continu sur $[0, +\infty)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{F})$,où $\mathcal{F}$ est le sous-espace de l'ensemble des fonctions continues unifomément bornées de $\mathbb{R}^+$ vers

E noté par $CUB(\mathbb{R}^+;E)$, $\mathcal{F}$ est un espace de Banach avec une norme plus fort que la norme sup sur $CUB(\mathbb{R}^+;E)$ où $B(.)$ est défini par

$$(B(t)x)(s) = B(t+s,t)x, pour, x \in \mathcal{Z}, et, t, s \geq 0.$$

(H_6) *$B(t) : \mathcal{Z} \to D(D_s)$ pour tout $t \geq 0$, où D_s est le générateur de C_0-semi-groupe. $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{F}$ défini par*

$$S(t)F(s) = F(t+s), pour, t, s \geq 0$$

(H_7) *$D_sB(t)$ est continu sur $[0,+\infty)$ vers $\mathcal{L}(\mathcal{Z},\mathcal{F})$*

Theorem 4.6. *Supposons (H_4),(H_5),(H_6) et (H_7) , alors (P2.1) á un unique opérateur résolvant.*

Definition 4.3.3. *La fonction continue $u : [-r,+\infty) \to E$est une solution strict de (P2) si les conditions suivantes sont satisfaites.*
(i) $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty);E) \bigcap \mathcal{C}([0,+\infty);\mathcal{Z})$.
(ii) u satisfait (P2) sur $[0,+\infty)$.
(iii) $u(\theta) = \varphi(\theta), pour, -r \leq \theta \leq 0$.

Theorem 4.7. *Supposons que (H_4),(H_5),(H_6) et (H_7) sont satisfaites .Si u est une solution strict de (P2), alors*

$$u(t) = R(t,0)\varphi(0) + \int_0^t R(t,s)F(s,u_s)ds, pour, t \geq 0. \ldots (2.3)$$

Remarque :La reciproque n'est pas vraie , si u satisfait (E6) , u n'est pas différentiable en général , c'est pourquoi nous distinguons entre douce et strict solutions.

Definition 4.3.4. *On sait que la fonction continue $u : [0,+\infty) \to E$ est une solution douce de (P2) ,si u satisfait l'équation suivante*

$$\begin{cases} u(t) = R(t,0)\varphi(0) + \int_0^t R(t,s)F(s,u_s)ds, pour, t \geq 0 \\ u_0 = \varphi. \end{cases}$$

Theorem 4.8. *Supposons que (H_4),(H_5),(H_6) et (H_7) sont satisfaites et F est Lipschitzienne en ce qui concerne le deuxième argument.Alors pour n'importe quel $\varphi \in \mathcal{C}$.(P2)á une unique solution douce qui est définie pour $t \geq 0$.*

4.4 Application

Pour illustration, nous proposons d'étudier l'existence des solutions pour le model suivant.

$$(P2.4)\ldots\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}z(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}z(t,x) + \displaystyle\int_0^t \alpha(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}z(s,x)ds \\ + \displaystyle\int_{-r}^0 g(t, z(t+\theta, x))d\theta, pour, t \geq 0, et, x \in [0,\Pi], \\ z(t,0) = z(t,\Pi), pour, t \geq 0, \\ z(\theta, x) = \varphi_0(\theta, x), pour, \theta \in [-r, 0], et, x \in [0,\Pi]. \end{cases}$$

Où $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne continue en ce qui concerne le deuxième argument,$\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue uniformément bornée, continument différentiable et α' est continue uniformément bornée, $\varphi_0 : [-r,0] \times [0,\Pi] \to \mathbb{R}$ sera précisé ultérieurement. Réécrire (P2.4) sous la forme abstraite, nous introduisons l'espace $X = \mathcal{C}([0,\Pi];\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de $[0,\Pi]$ vers $\mathbb{R}$ disparition a 0 et Π, équipé d'une topologie uniforme. Soit $A : D(A) \to X$ être défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{y \in X \cap \mathcal{C}^2([0,\Pi],\mathbb{R}) : y', y'' \in X\} \\ Ay = y''. \end{cases}$$

Soit $B : D(A) \to X$être défini par

$$B(t)(y) = \alpha(t)Ay, pour, t \geq 0.$$

Soit $f : \mathbf{C} \to X$ être définie par

$$f(t,\psi)(x) = \int_{-r}^0 g(t, \psi(\theta)(x))d\theta, pour, x \in [0,\Pi], et, t \geq 0.$$

Les données initiales $\varphi \in \mathcal{C}$ est définie par

$$\varphi(\theta)(x) = \varphi_0(\theta, x), pour, \theta \in [-r,0], et, x \in [0,\Pi].$$

Supposons $v(t) = z(t,x)$.Alors (P2.4) prendre la forme abstraite suivante

$$(P2.5)\ldots\begin{cases} \frac{d}{dt}v(t) = Av(t) + \displaystyle\int_0^t B(t-s)v(s)ds + f(t, v_t), pour, t \geq 0 \\ v_0 = \varphi. \end{cases}$$

C'est bien connu que A est un générateur d'un C_0-semi-groupe,ce qui implique que (H_1) est satisfait.En plus (H_2) est vraie, il en suit que l'équation linéaire (P2.3) á un opérateur résolvant .puisque f est Lipschitzienne continue avec le deuxieme argument, alors par le théorème (0.4), nous déduirons que (P2.5) á une solution douce unique qui est définie pour $t \geq 0$ .Pour la régularitée, nous imposons les conditions suivantes qui impliques les hypothése du théorème (1.5)

(H_8) $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, tel que $\frac{\partial g}{\partial t}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont localement Lipschitziennes continues.

(H_9)

$$\begin{cases} \varphi_0 \in \mathcal{C}^1([-r, 0] \times [0, \Pi]), telque, \varphi_0(0, .) \in D(A) \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\varphi_0(0, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_0(0, x) + \displaystyle\int_{-r}^{0} g(0, \varphi_0(\theta, x))d\theta, pour, x \in [[0, \Pi]. \end{cases}$$

Par conséquent, par le théorème (1.5) nous obtenons le résultat suivant d'existence.

Proposition 4.4.1. *Sous ce qui précède (P2.4) á une unique solution strict* v *et la solution* u *définie par* $u(t, x) = v(t)(x), pour, t \geq 0, et, x \in [0, \Pi]$ *est une solution de (P2.4).*

Bibliographie

[1] L.D.Lemle.-Semi-groupes intégrés d'opérateurs,l'unicité des pre-générateurs et applications

[2]Cerrai,S,-A Hill-Yocida theorem for weakly continuous semi-groups Forum,49(1994),349-367.

[3] Neubrander, F ,-Integrated semi-groups and their applications to the abstract Cauchy problem.Pacific j.Math.,(1)135(1988),111-155.

[4]Pazy,A.-Seml-groups of linear operators and applicationq to partial differntial equations.Springer Verlag, New york,Berlin , 1983.

[5]Yocida,K. Lectures on semi-group theory and its application to Cauchy problem in partial differential equations.Tata institute of fundamental esearch. Bombay,1957.

[6] M.Adimy ,and, K.Ezzinbi.-Existece,regularity,stability and boundedness for some partial functional differential equations.1997,Société Mathématique de France.

[7]M.E.Parrot.- Linearized stability and Irreducibility for a functional differeltial equation. SIAM Journal of Mathematical Analysis 23,649-661,1992.

[8]K.Ezzinbi,H.Toure ,I.Zabsonre.-Existence and regularity of solutions for some partial functional integrodifferential equations in Banach spaces.2008.

[9]G.Chen,R.Grimmer.-Semlgroup and integral equations.Journal of integral equations .2(1980)133-154.

[10]R.Grimmer.-Resolvent operators for integral equations in a Banach space.Transaction of america mathematical society .273(1982)333-349.

[11]Wu.- Theory and applications of partial functional differential equations.Springer Verlag.1996.

[12]W.Desch And W.Schappacher.-Linearized Stability For Nonlinear Semi-Group In Differential Equations In Banach Space.(A.Favini And E.Obrecht,Eds), Lecture Notes In Mathematics, Vol.1223, Springer-Verlag, New York .Berlin, 61-73,1986.

[13]G,Da Prato and E,Sinestrari,- Differential operators with non-dense domains, Ann, Scuola Norm, Sup, Pisa Cl Sci, 14,285-344,1987