République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Estimation non paramétrique du maximum de la fonction de hasard conditionnelle

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des processus et Applications

par

Mohamed Allou [1]

Sous la direction de

Dr. T. Djebbouri

Soutenue le 16/09/2020 devant le jury composé de

S. Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
T. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
R. Rouane	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : medallou26@gmail.com

Table des matières

Dédicace

Je dédie ce travail :

A deux personnes qui m'ont donné leur confiance et leur soutien tout au long de mes études, mon père et ma mère.

A mes très chers *frères* et mes très chères *sœurs* qui m'ont encouragé sur le long de mon parcour universitaire.

Je dédie ce travail à tout mes chères amis.

A tous les membres de ma famille, petits et grands, veuillez trouvez dans ce modeste travail l'expression de mon affection.

A tous mes collègues de Master 2 ASSPA. Et enfin, à tous ceux qui me *sont chers*.

Remerciement

Tout d'abord, nous tenons à remercier le "BON DIEU" le tout puissant de nous avoir accordé patience, courage et volonté afin de réaliser mener à terme ce modeste travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreur ***Mr. Tayeb Djebbouri*** pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger.

Je voudrais également remercier tous les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.

Je remercie chaleureusement toute *ma famille*, qui m'a soutenu, encouragé et poussé durant toutes mes années d'étude.

J'exprime mes remerciements à tous mes enseignants du département de Mathématiques qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour, ainsi que le personnel de l'administration.

Je remercie tous les membres de laboratoire des Modèles Stochastique, Statistique et Application pour leur accueil et leur sympathie.

Merci à tous

Résumé

Le maximum ou encore le point à haut risque d'une fonction de risque conditionnel est un paramètre d'un grand intérêt en statistique, notamment dans l'analyse de risque séismique, car il constitue le risque maximal de survenance d'un tremblement de terre dans un intervalle de temps donné. Au moyen d'estimations non paramétriques basés sur les techniques de noyau de convolution de la premiére dérivée de la fonction de hasard conditionnel, nous établissons le comportement asymptotique d'un taux de hasard d'une variable explicative fonctionnelle ainsi que la normalité asymptotique de la valeur maximale pour un processus mélangeant.

Abstract

The maximum of the conditional hazard function is a parameter of great importance in statistics, in particular in seismicity studies, because it constitutes the maximum risk of occurrence of an earthquake in a given interval of time. Using the kernel nonparametric estimates based on convolution kernel techniques of the first derivative of the conditional hazard function, we establish the asymptotic behavior of a hazard rate in the presence of a functional explanatory variable and asymptotic normality of the maximum value in the case of a strong mixing process.

Chapitre 1

Présentation générale

1.1 Introduction

La statistique fonctionnelle est un champ de recherches d'actualité qui a connu un très important développement ces derniéres années dans lequel viennent se mêler et se compléter plusieurs approches de la statistique qui paraissent éloignées a priori. Cette voie de la statistique étudie des données issues de grands échantillons et les fonctions sont collectées sur des grilles très fines, qui peuvent être assimilées à des courbes ou à des surfaces, par exemple fonctions du temps ou de l'espace. Le besoin de considérer ce type de données, maintenant couramment rencontré sous le nom de données fonctionnelles dans la littérature, est avant tout un besoin pratique. Compte nu des capacités actuelles des appareils de mesure et de stockage informatique, les situations pouvant fournir de telles données sont multiples et issues de domaines variés : on peut imaginer par exemple des courbes de croissance, de température, des images observées par satellite ...

Les tous premiers travaux dans lesquels on retrouve cette idée de données fonctionnelles sont finalement relativement anciens : Rao (1958) [28] et Tucker (1958) [30] envisagent ainsi l'analyse en composantes principales et l'analyse factorielle pour des données fonctionnelles et considérent même explicitement les données fonctionnelles comme un type particulier de données. Par la suite, on trouve les travaux de Deville (1974) [10], Dauxois et Pousse (1976) [9],Besse et Ramsay (1986) [3]. La terminologie

faisant référence à des données fonctionnelles semble être issue du travail de Ramsay, en 1982, dans Psychometrika, sous le titre When the data are functions [24].
Cette dénomination semble rassembler un nombre important de statisticiens qui font les statistiques de courbes, de lissage, de décompositions d'un espace de dimension infinie en base de fonctions (en utilisant le théorème de Riez pour les espaces de Hilbert et des théorèmes un peu plus complexe pour construire une base de Schauder pour certains espaces de Banach), de géométrie diférentielle, ... Pour plus de détails, consulter les monographies de Ramsay et Silverman (2002 et 2005) [26], [27].

Ce mémoire est présenté en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à une présentation générale du modèle fonctionnelle, des déffinitions et des outils techniques que nous allons employer pour obtenir et construire notre estimateur et les vitesses de convergence. En particulier, nous rappelons la déffinition des modèles de survie, les problèmes discutés, traités par la statistique fonctionnelle, les déffinitions de la fonction de survie, hasard et la fonction de hasard conditionnelle, l'inégalité exponentielle de Bernstein et celle de Fuc-Nagaev...

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse à un modèle non paramétrique pour des variables aléatoires fonctionnelles. On construit un estimateur à noyau pour la fonction de hasard conditionnelle avec des données complétes sous des conditions générales moins restrictives, nous établissons la convergence presque complète avec précision dans le cas α-mélangeant. Ces propriétés asymptotiques sont étroitement liées au phénomène de concentration de la mesure de probabilité de la variable explicative sur des petites boules.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la convergence uniforme, les propriétés et la normalité asymptotique d'une estimation du maximum de la fonction de hasard conditionnelle dans le cadre de la dépendance (α-mélangeant), en utilisant les estimations non paramétriques du noyau de la première dérivée de la fonction de hasard conditionnellle.

En fin une courte bibliographie sur les ouvrages de base pour ce sujet.

1.2 Problématique concrète en statistique pour variables fonctionnelles

L'essor que connaît la statistique fonctionnelle au travers de ses divers champs d'application se retrouve au niveau des nombreuses approches théoriques développées pour l'étude de variables aléatoires fonctionnelles, l'étude de ces divers modèles est motivée au départ par des problèmes pratiques. Dans ce paragraphe nous souhaitons citer quelques domaines dans lesquels apparaissent les données fonctionnelles, pour donner une idée du type de problèmes que la statistique fonctionnelle permet de résoudre. c'est une liste non exhaustive de situations oùde telles données sont rencontrées n'est pas envisageable, mais des exemples précis de données fonctionnelles seront abordés dans ces domaines.

- En biologie, on trouve en premier lieu le travail précurseur de Rao (1958)[28] concernant une étude de courbes de croissance. Plus récemment, un autre exemple est l'étude des variations de l'angle du genou durant la marche et les mouvements du genou pendant l'effort sous contrainte (Antoniadis et Sapatinas, 2007)[1]. Concernant la biologie animale, des études de la ponte de mouches méditerranéennes ont été faites par plusieurs auteurs (Chiou et Müller .et al(2007))[5]. Les données consistent en des courbes donnant pour chaque mouche la quantité d'oeufs pondus en fonction du temps.
- La chimiométrie fait aussi partie des champs d'étude propices à l'utilisation de méthodes de la statistique fonctionnelle. Plus récemment, Ferraty et Vieu (2002)[16] se sont intéressés à l'étude de la contenance de graisse de morceaux de viande (variable d'intérêt) étant données les courbes d'absorbsions de longueurs d'ondes infra-rouge de ces morceaux de viande (variable explicative).
- Des applications liées à l'environnement ont été étudiées par plusieur auteur qui ont travaillé sur un problème de prévision de pollution. Ces données consistent en des mesures de pics de pollution par l'ozone chaque jour (variable d'intérêt) étant donné des courbes de polluants ainsi que de courbes météorologiques de la veille (variables explicatives).

- La climatologie est un domaine où les données fonctionnelles apparaissent naturellement. Une étude du phénomène El Niño (courant chaud de l'océan Pacifique) a ainsi été réalisée par Besse, Cardot et Stephenson (2000)[4] ; Ramsay et Silverman (2005)[27], Hall et Vial (2006)[17].
- En linguistique, des travaux ont été réalisés, notamment concernant la reconnaissance vocale. (Ferraty et Vieu (2002,2006)[15][16]). Ces travaux sont fortement liés aux méthodes de classification lorsque la variable explicative est une courbe. Brièvement, les données sont des courbes correspondant à des enregistrements de phonèmes prononcées par différents individus. On associe un label à chaque phonème (variable d'intérêt) et le but est d'établir une classification de ces courbes en utilisant comme variable explicative la courbe enregistrée.
- Dans le domaine de la graphologie, l'apport des techniques de la statistique fonctionnelle a là aussi trouvé une application. Ramsay(2000)[25] par exemple modélise la position du stylo (abscisses et ordonnées en fonction du temps) à l'aide d'équations différentielles.
- Les applications à l'économie sont aussi relativement nombreuses. Récemment les études de Benko, Härdle et Kneip (2006)[2], basés notamment sur une analyse en composantes principales fonctionnelle. Cette méthode d'estimation sera analysée lorsqu'on l'utilisera, même si on peut déjà souligner que l'idée de base est, lors de l'estimation de l'opérateur de covariance, d'estimer des produits scalaires entre les courbes observées au lieu d'estimer des courbes elles-mêmes.

Il existe d'autres domaines où la statistique fonctionnelle a été employée comme par exemple le traitement de signaux sonores ou enregistrés par un radar, les études démographiques, la géologie (Manté et al (2007))[23],... et des applications dans des domaines aussi variés que la criminologie (comment modéliser et comparer l'évolution de la criminalité d'un individu au cours du temps ?) La paléo pathologie (peut-on dire si un individu souffrait d'arthrite à partir de la forme de son fémur ?) L'étude de résultats à des tests scolaires,...

Enfin, on peut être amené à étudier des variables aléatoires fonctionnelles même si l'on dispose de données initiales réelles ou multi variées indépendantes. C'est ainsi le cas lorsque l'on souhaite comparer ou étudier des fonctions que l'on peut estimer à partir des données. Parmi les exemples typiques de ce type de situation on peut évoquer la comparaison de différentes fonctions de densité, de fonctions de régressions, l'étude de la fonction représentant la probabilité qu'un individu a de répondre correctement à un test en fonction de ses "qualités" (Ramsay et Silverman (2002)[26],...

1.3 Modèles de survie

On peut faire remonter l'analyse des données de survie à 1693 avec l'astronome "Halley" qui aprés une étude des relevés d'état civil de Londres donna les premières tables de mortalité et enseigna le moyen d'y lire la probabilité de survie d'un individu. Ces analyses, très générales, ne sont affinées qu'à partir du 19-ème siècle, avec l'apparition de catégorisations suivant des "variables exogènes" (sexe, nationalité, catégories socio-professionnelles, ...). Durant ce siècle, apparaissent également les premières modélisations concernant la probabilité de mourir à un certain âge, probabilité qui sera par la suite désignée sous le terme de "fonction de risque".

Enfin, l'analyse des données de survie commence de déborder le cadre stricte de la démographie pour investir, au 20-ème siècle, notamment dans les années qui ont suivi la seconde guerre mondiale, on s'est intéressé à l'analyse des données de survie plus pour des applications industrielles (avec l'apparition de la théorie de la fiabilité) en utilisant des modèles paramétriques avec des lois exponentielles ou de Weibull. Ce n'est que plus récemment, motivées par des applications médicales (pharmaceutique, biomédicale), que sont apparues les méthodes non-paramétriques (Kaplan-Meier 1958)[19], pour l'estimation non-paramétrique d'une fonction de survie. De l'estimateur résultant, ils étudient l'espérance, la variance et les propriétés asymptotiques. L'aspect semi-paramétrique a été initié par Cox en 1972 [6]. Ce dernier modèle comporte des variables exogànes qui sont introduites, dans la fonction de risque, au moyen d'une composante de régression paramétrique, le reste de cette fonction de risque, non paramétrique, demeurant indéterminée.

Les modèles de survie forment une classe de méthodes statistiques qui ont pour but d'étudier le nombre et la répartition des temps d'apparition des événements. On peut s'intéresser à des modèles où l'on ne considère que le temps d'apparition des événements, mais on s'intéresse plus généralement à des modèles où le risque d'apparition d'un événement dépend de covariables. On retrouve ainsi l'expression d'un modèle de régression.

1.3.1 Analyse des données de survie

L'analyse des données de survie est l'étude de la survenue, au cours du temps, d'un événement précis pour un ou plusieurs groupes d'individus donnés. Cet événement, souvent appelé décès, peut aussi bien être la mort d'un individu que la survenue d'une maladie, la réponse à un traitement ou la panne d'une machine (c'est un changement d'état en général.) Chaque observation est définie par :

Une date d'origine : Cela peut être la date de naissance du sujet, si l'on étudie l'âge du sujet lorsque survient l'événement ou la date de mise en contact avec un agent infectieux, si l'on l'étudie la durée d'incubation d'une maladie infectieuse. Chaque individu a une date d'origine différente sur le calendrier, mais la mesure qui nous intéresse est le délai depuis cette date. La date d'origine définit pour chaque individu le temps 0.

Pour permettre la comparaison des durées de survie entre les individus, une définition précise de **l'événement d'intérêt** est nécessaire. S'il s'agit du décès provoqué par une maladie, il faut s'assurer que chaque décès est effectivement dû à la maladie étudiée, et non à d'autre cause.

La durée de survie : Elle est définie comme le délai entre la date d'origine et la survenue de l'événement d'intérêt. Les durées de survie correspondent à des variables aléatoires positives, de distribution le plus souvent dissymétrique, rendant difficile leur description par les lois de distribution usuelles.

Les individus ou groupes d'individus sont susceptibles de différer pour un ou plusieurs facteurs. Ces facteurs, dénommés variables explicatives ou covariables peuvent expliquer une différence importante de la durée de survie des sujets étudiés. Leurs effets sont analysés par des modèles de régression. Il peut s'agir de facteurs individuels (sexe, âge, paramètres biologiques relatifs à une maladie, paramètres génétiques..), ou liés à un essai thérapeutique (appartenance au groupe de traitement ou au groupe placebo, dosage médicamenteux...).

L'analyse des données de survie s'attache alors à la description des temps de survie et à voir dans quelle mesure ils dépendent de ces variables explicatives. Les approches classiques en analyse des données de survie sont de type stochastique, le temps d'apparition d'un événement est supposé être la réalisation d'un processus aléatoire associé à une distribution particulière.

De nombreux travaux sont consacrés à l'analyse des données de survie : Kalbeisch et Prentice (1980) [18], Cox et Oakes (1984) [7], Klein et Moeschberger (1997) [20], ...

1.3.2 Fonctions associées aux distributions de survie

Soit T la variable aléatoire positive correspondant à la durée de survie. La loi de probabilité de T peut être caractérisée par plusieurs fonctions liées entre elles.

Définition 1.3.1. *La fonction de densité de probabilité, notée $f(t)$:*

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$f(t)\Delta t + o(\Delta t)$ est donc la probabilité de connaître l'événement d'intérêt entre t et $t + \Delta t$.

Définition 1.3.2. *La fonction de répartition, notée $F(t)$, vérifie :*

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \int_0^t f(u)du$$

$F(t)$ définit la probabilité de connaître l'événement d'intérêt entre $[0, t]$, cette fonction est monotone et l'on a

$$F(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t\to\infty} F(t) = 1.$$

Définition 1.3.3. *La fonction de survie, notée $S(t)$ définie par :*

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t)$$

Cette fonction représente la probabilité de connaître l'événement d'intérêt au delà du temps t. C'est une fonction monotone décroissante telle que

$$S(0) = 1 \quad et \quad \lim_{t\to\infty} S(t) = 0.$$

Elle caractérise également la loi de T.

Définition 1.3.4. *La fonction de risque, ou fonction de hasard, ou bien le risque instantané de changement d'état notée $h(t)$, (hazard function en englais, car hazard veut dire risque en anglais), elle est définie comme étant la probabilité instantanée qu'une durée T de "séjour" dans un état se termine à l'instant $t + \Delta t$ sachant qu'on y était à l'instant t, i.e. :*

$$h(t) = \lim_{\Delta t\to 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t / T \geq t)}{\Delta t}$$

On montre facilement que

$$\begin{aligned} h(t) &= \tfrac{f(t)}{S(t)} \\ &= \tfrac{-dlog(s(t))}{d(t)} \end{aligned}$$

donc $h(t)\Delta t$ représente, quand Δt est petit, la probabilité "approchée" pour un individu d'atteindre l'événement d'intérêt avant $t + \Delta t$, conditionnellement au fait qu'il est encore dans l'état précédent juste avant t. Cette fonction est aussi appelée risque instantané à l'instant t.
On constate aussi que la fonction de risque caractérise la loi de T (ou $S(t)$.)

Définition 1.3.5. *La fonction de risque cumulé, notée $H(t)$ définie par :*

$$H(t) = \int_0^t h(u)du$$

Par manipulation des définitions précédentes, on retrouve facilement les relations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & -\frac{dS(t)}{dt} \\ S(t) & = & \exp(-\int_0^t h(u)du) \\ S(t) & = & \exp(-H(t)) \\ f(t) & = & h(t)\exp(-\int_0^t h(u)du) \end{array}$$

Donc la fonction de risque cumulé caractérise la loi de T (ou $S(t)$.)

Définition 1.3.6. *La fonction de durée moyenne de survie, notée $r(t)$ définie par :*

$$r(t) = \mathbb{E}(T - t/T > t)$$

On montre que

$$r(t) = \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty S(u)du \text{ et } S(t) = \frac{r(0)}{r(t)} e^{-\int_0^t \frac{1}{r(u)}du}$$

ce qui permet de dire aussi que la fonction de durée moyenne de survie caractérise la loi de T (ou $S(t)$.)

La distribution de la durée de survie T peut être décrite par l'une des fonctions définies ci-dessus. Toutefois l'une des plus intéressantes est la fonction de risque $h(t)$ car elle est une description probabiliste du futur immédiat du sujet "encore à risque" et reflète des différences entre les modèles souvent moins visibles au travers des fonctions de répartition ou de survie. En épidémiologie, elle peut dans certains cas s'interpréter en termes d'incidence.

On constate que si $h(t)$ est constante (on la note λ), alors

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & \lambda \exp(-\lambda t) \\ F(t) & = & 1 - \exp(-\lambda t) \\ S(t) & = & \exp(-\int_0^t h(u)du) = e^{-\lambda t} \\ H(t) & = & \lambda t \\ r(t) & = & 1/\lambda \end{array}$$

devient la queue d'une distribution de loi exponentielle.

1.4 Estimation de la fonction de hasard

L'estimation de la fonction de hasard à un grand intérêt en statistique. En effet, elle est utilisée dans l'analyse de risque ou pour l'étude des phénomènes de survie. Le taux de hasard inconditionnel est défini comme étant la probabilité instantanée que le changement d'état se fasse dans l'instant infinitésimal qui suit l'instant présent, noté t. Plus précisément, le taux de hasard $h(t)$ est défini par :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t / T \geq t)}{\Delta t} \qquad (t > 0)$$

Il n'est pas difficile de voir que que le taux de hasard peut être réécrit comme étant le rapport de la densité $f(.)$ dont elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et la fonction de survie $S(.) = 1 - F(.)$ de T à l'instant t ; autrement dit :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{1.1}$$

où la fonction de survie $S(t)$ n'est autre que la fonction de répartition du complémentaire de l'évènement considéré. En fait c'est la dérivée d'une probabilité que la durée soit comprise entre t et Δt, sachant que l'on ait atteint la période t. Plus pratiquement il s'agit d'un taux instantané de sortie de l'état à la date t. La courbe de survie prend une signification particulière donnée par :

$$S(t) = \exp(-\int_0^t h(u)du)$$

Il existe une littérature étendue sur l'estimateur du taux hasard non paramétrique, d'une manière approximative et pour le cas non paramétrique, deux méthodes ont été proposées pour estimer le taux du hasard.

La première approche remplace $f(t)$ et $S(t)$ dans l'expression de $h(t)$ par leurs estimateurs $\hat{f}(t)$ et $\hat{S}(t)$ respectivement, ce qui nous donne l'estimateur du taux de hasard par :

$$\hat{h}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{\hat{S}(t)} \tag{1.2}$$

Nielsen et Linton (1995) appellent ce type d'estimateur par (estimateur externe). L'estimateur à noyau externe du taux de hasard des données non censurées a été introduit par Watson et Leadbetter (1964) et Munhy (1965).
La deuxième méthode est basée sur la relation entre le hasard cumulé et le taux de hasard où le hasard cumulé est défini par :

$$H(t) = \int_0^t h(u)du \tag{1.3}$$

Nielsen et Linton (1995) appellent ce type d'estimateurs par (estimateur interne). La relation entre le hasard cumulé et le taux de hasard suggère que $h(t)$ peut être obtenue en lissant $H(t)$ en utilisant un noyau autrement dit :

$$h(t) = \int K_h(t-u)d\hat{H}u$$

où h est une largeur de fenêtre tel que $h \to 0$ quand $n \to \infty$. L'estimateur interne du taux de hasard pour les données censurées à été aussi introduit par Watson et Leadbetter (1964). Ramlau-Hansen (1983), Yandell(1983), Tanner et Wong (1983, 1984), Blum et susarla (1980), Fötdes et Retjö (1981) et Lo, Mack et Wang (1989) ont étudié des estimateurs similaires en présence des données censurées. De plus, Tanner et Wang (1984) ainsi que Sarda et Vieu (1996) utilisent la sélection de la largeur de fenêtre pour ce type d'estimateurs. Jusqu'à maintenant, l'intérêt porté sur le taux de hasard va généralement dépendre de certaines covariances, par exemple, le temps de survie d'un patient va être affecté par plusieurs caractéristiques tels l'âge et le genre. Le taux de hasard conditionnel de t sachant $X = x$ est définie par :

$$h^x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(T \leq t + \Delta t / T > t, X = x)}{\Delta t}$$

Ainsi la fonction de hasard conditionnelle T sachant $X = x$ est définie par :

$$\hat{h}^x(t) = \frac{\hat{f}^x(t)}{1 - \hat{F}^x(t)}$$

tel que F^x (resp f^x) est la distribution conditionnelle (resp. la densité conditionnelle) de T sachant $X = x$ qu'on suppose qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur R.

Afin d'illustrer l'importance de la fonction de hasard conditionnelle on considère l'exemple suivant.

Exemple : Supposons qu'un matériel de durée de vie Y soit en état de bon fonctionnement a l'instant t et on veut calculer la probabilité conditionnelle, sachant $X = x$, d'une panne dans l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$. Cette probabilité est bien $\mathbb{P}^x(Y \in (t, t + \Delta t)/Y > t)$.

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x(Y \in (t, t + \Delta t)/Y > t) &= \frac{\mathbb{P}^x(Y \in (t, t + \Delta t), Y > t)}{\mathbb{P}^x(Y > t)} \\
&= \frac{\mathbb{P}^x(Y \in (t, t + \Delta t))}{\mathbb{P}^x(Y > t)} \\
&= \frac{F^x(t, t + \Delta t) - F^x(t)}{1 - F^x(t)},
\end{aligned}$$

il s'ensuit par passage à la limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}^x(Y \in (t, t + \Delta t)/Y > t) = h^x(t)$$

Autrement dit, la quantité $h^x(t)\Delta(t)$ est une approximation à la probabilité conditionnelle "instantanée" de panne à l'instant t.

1.5 Outils

Proposition 1.5.1. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles. Si* X_n *converge presque complète vers* 0 *et s'il existe* $\exists\delta > 0$ *tel que* $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\{Y_n < \delta\} < \infty$*. Alors, la suite* $(X_n/Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque complète vers* 0.

Lemme 1.5.1. *"Inégalité exponentielle de Bernstein"*
Soit $X_1,\dots,X_n$ *des variables aléatoires réelles centrées, indépendantes et de même loi (i.i.d) définies sur l'espace de probabilité, telles qu'il existe deux réels positifs* θ_1 *et* $\theta_2 2$ *vérifiant* $X_1 < \theta_1$ *et* $\mathbb{E}X_1^2 < \theta_2$ *alors, pour tout* $\varepsilon \in]0, \frac{\theta_1}{\theta_2}[$ *on a :*

$$\mathbb{P}\left(n^{-1}\left|\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{4\theta_2}\right)$$

Lemme 1.5.2. *"Inégalité de type* ***Fuk-Nagaev*** *sous mélange algébrique"*
Soit $\{\Delta_i, i\in\mathbb{N}\}$ *une famille de variables aléatoires à valeur dans* $\mathbb{R}$ *fortement mélangeantes, de coefficient de mélange algébriquement décroissant. On pose*

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|cov(\Delta_i,\Delta_j)|$$

Si $\forall i, \|\Delta_i\|_\infty < \infty$*, alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $r > 1$*, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right| > 4\varepsilon\right) \leq 4\left(1+\frac{\varepsilon^2}{rs_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}\left(\frac{2r}{\varepsilon}\right)^{a+1}$$

Lemme 1.5.3. *"Inégalité de covariance pour variables bornées"*
Soit $\{\Delta_i, i\in\mathbb{N}\}$ *une famille de variables aléatoires à valeur dans* $\mathbb{R}$ *fortement mélangeantes telle que* $\forall i, \|\Delta_i\|_\infty < \infty$*, alors, pour tout* $i \neq j$

$$|cov(\Delta_i,\Delta_j)| \leq 4\|\Delta_i\|_\infty\|\Delta_j\|_\infty\alpha(|i-j|).$$

Définition 1.5.1. ***la dépendance :*** *Nous supposons que les données d'échantillon* $(X_i, Z_i)_{1\leq i\leq n}$ *sont dépendantes et satisfont la condition de mélange fort (*α*-mélange),*

introduite par Rosenblatt (1956)[29], définie comme :
Soit $\mathbb{N}^*$ *désigne l'ensemble des entiers positifs, et pour tout* i *et* j *dans* $\mathbb{N}^* \cup \infty, (i \leq j)$, *de ne* $\mathcal{F}_i^j$ *comme une algèbre étendue par les variables* $(z_i, x_j)...(z_j, x_j)$. *On dit que la séquence* (Z_i, X_i) *se* α*-mélange s'il existe des coefficients de mélange* $\alpha(k)$ *tels que* $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \alpha(k)$, *pour tout ensemble* A *et* B *qui sont respectivement* $\mathcal{F}_i^m$*-mesurable* $\mathcal{F}_{m+k}^\infty$*-mesurable* $(k, m$ *entiers positifs), et* $\alpha(k) \downarrow 0$.

C'est la condition la plus faible utilisée dans les études d'échantillons dépendants (par exemple le processus ARMA généré par un bruit blanc continu le vérifie). Le lecteur peut consulter Doukhan (1994)[8] pour une discussion plus complète de la condition de mélange fort.

Chapitre 2

Estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est consacré au problème de l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle, d'une variable aléatoire réelle Y sachant une variable aléatoire X à valeurs dans un espace fonctionnel (espace probabilisé fonctionnel semi-métrique) avec des données complètes, c'est à dire on observe tout l'événement. Comme dans tout problème d'estimation non-paramétrique, la dimension de l'espace $\mathcal{F}$ joue un rôle important dans les propriétés de concentration de la variable X . L'estimation est faite par la méthode du noyau.

Il est présenté en deux sections. La première section est consacrée à la présentation du modèle et à la construction de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle. Dans la deuxième section, on s'intéresse à la convergence presque complète de l'estimateur construit dans le cas où les observations α-mélangeantes.

2.2 Modèle non paramétrique

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire à valeur dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ où F est un espace semi-métrique muni d'une semi-métrique $d(.;.)$. Ce chapitre est consacré au problème général de l'estimation d'une fonction de hasard conditionnelle d'une variable aléatoire réelle Y sachant une variable aléatoire X à valeurs dans un espace fonctionnel (espace probabilisé fonctionnel semi-métrique,) où X et Y sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Par ailleurs, pour pouvoir étendre au cas dépendant les résultats obtenus dans le cas indépendant. Nous allons adopter certaines hypothèses sur le processus $(X_i; Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Soient :

$$\begin{array}{rcl} Y_i : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) & \rightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \\ X_i : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) & \rightarrow & (\mathcal{F}, \mathfrak{F}) \end{array}$$

où $\mathcal{F}$ est muni d'une semi-métrique $d_i; i \in \mathbb{N}$, on se propose d'estimer la fonction de hasard conditionnelle de Y sachant $X = x$.

On désigne par F^x la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$, on suppose que F^x est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité f^x.

Etant donné $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n; Y_n)$ une suite des observations de même loi que (X, Y) l'éstimateur de la fonction de répartition conditionnelle F^x par la méthode du noyau (noté $\widehat{F}^x$), défini par :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(h_K^{-1} d(x, X_i)\right) H\left(h_H^{-1}(y - Y_i)\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(h_K^{-1} d(x, X_i)\right)} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

où K est un noyau, H est une fonction de répartition et $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) est une suite de réels positifs. On pose

$$K_i(x) = K(h_K^{-1} d(x, X_i)) \text{ et } H_i(y) = H(h_H^{-1}(y - Y_i))$$

Ce qui nous permet d'exprimer $\widehat{F}^x(y)$ par :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\widehat{F}_N^x(y)}{\widehat{F}_D^x}$$

avec

$$\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^n K_i H_i(y) \text{ et } \widehat{F}_D^x = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^n K_i$$

A partir de cette estimateur, on déduit un estimateur pour la densité conditionnelle, noté $\widehat{f}^x$, défini par :

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{h_H^{-1}\sum_{i=1}^n K\left(h_K^{-1}d(x,X_i)\right)H'\left(h_H^{-1}(y-Y_i)\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(h_K^{-1}d(x,X_i)\right)} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\widehat{f}_N^x(y)}{\widehat{F}_D^x}$$

où

$$\widehat{f}_N^x(y) = \frac{1}{nh_H\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^n K_i H_i'(y)$$

Le taux de hasard conditionnel de Y sachant $X = x$ est défini par

$$h^x(y) = \lim_{\Delta\to\infty}\frac{\mathbb{P}(Y \leq y+\Delta y/Y > y, X = x)}{\Delta y} \quad y > 0$$

A présent le taux de hasard peut être écrit comme le taux de la densité conditionnelle $f^x(.)$ et la fonction de survie $S^x(.) = 1 - F^x(.)$ de y, c'est à dire :

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{S^x(y)}$$

Ainsi la fonction de hasard conditionnelle Y sachant $X = x$ est définie par :

$$\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathbb{R} \quad h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)} \tag{2.1}$$

L'objectif principal de ce chapitre est de donner la vitesse de convergence de notre estimateur qui est défini par : $\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)}$ vers $h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1-F^x(y)}$ dans le cas où les observations sont indépendantes identiquement distribuées et le cas des observations α-mélangeantes.

2.3 Cas dépendant

L'objectif de cette section est d'étudié un modèle de hasard conditionnel dans lequel la variable explicative X n'est pas nécessairement réelle ou multidimensionnelle mais seulement supposée être à valeurs dans un espace abstrait $\mathcal{F}$ muni d'une semi-métrique d. Comme dans tout problème d'estimation non-paramétrique, la dimension de l'espace $\mathcal{F}$ joue un rôle important dans les propriétés de concentration de la variable X. Ainsi, lorsque cette dimension n'est pas nécessairement finie, les fonctions de probabilité de petites boules définies par :

$$\phi_x(h) = \mathbb{P}(X \in B(x,h)) = \mathbb{P}(X \in \{x' \in \mathcal{F}/d(x,x') < h\})$$

interviennent de manière directe dans le comportement asymptotique de tout estimateur non-paramétrique fonctionnel.

2.3.1 Notations générales et hypothèses

Tous le long de notre étude, quand aucune confusion ne sera possible, on note A et/ou A' une certaine constante générique de $\mathbb{R}^{*+}$ On fixe un point x dans $\mathcal{F}$ dont on note N_x un voisinage de ce point et on pose $B(x,h) = \mathbb{P}(X \in \{x' \in \mathcal{F}/d(x,x') < h\}$ la boule de centre x et de rayon h.

On introduit les hypothèses suivantes :

(H1) $\forall x \in \mathcal{F}, \forall h > 0, \mathbb{P}(X \in B(x,h)) = \phi_x(h) > 0$

(H2) $\forall y \in S, F^x(y) < 1, \forall (y_1,y_2) \in S \times S, \forall (x_1,x_2) \in N_x \times N_x,$
$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq A_x(d(x_1,x_2)^{b_1} + |y_1-y_2|^{b_2}),\ b_1 > 0, b_2 > 0,$

(H3) $\forall (y_1,y_2) \in S \times S, \forall (x_1,x_2) \in N_x \times N_x$
$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq A_x(d(x_1,x_2)^{b_1} + |y_1-y_2|^{b_2}),\ b_1 > 0, b_2 > 0,$

(H4) $\forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, |H^{(j)}(y_1) - H^{(j)}(y_2)| \leq A|y_1-y_2|$
$\int |t|^{b_2} H^{(1)}(t)dt < 1$ et $\exists \nu > 0, \forall j' \leq j+1,\ \lim_{y\to\infty} |y|^{1+\nu}|H^{(j')}(y)| = 0$ pour $j = 0,1$

(H5) K un noyau à support compact $(0,1)$ vérifiant $0 < A_1 < K(t) < A_2 < 1$

(H6) $\lim_{n\to\infty} h_K = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{log\ n}{nh_H^j\phi_x(h_K)} = 0,\ \forall j = 0,1$

(H7) $\lim_{n\to\infty} h_H = 0$ et $\lim_{n\to\infty} n^\alpha h_H = 0, \quad \forall\alpha > 0.$

(H'1) La suite $(X_i; Y_i)_{i=1,\dots,n}$ est α-mélangeante dont le coefficient de mélange vérifie :

$$\exists a > \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \; c \in \mathbb{R} \quad telque \quad \alpha(n) \leq cn^{-a}$$

(H'2) $\dfrac{\sup_{i\neq j} \mathbb{P}((X_i, X_j) \in B(x,h) \times b(x,h))}{\mathbb{P}X_i \in B(x,h)} = \mathcal{O}((n^{-1}\phi_x(h))^{1/a})$

(H'3) $\exists \eta > 0, \; An^{\frac{3-a}{a+1}+\eta} \leq h_h\phi_x(h_K)$ et $\phi_x(h_K) \leq A'n^{\frac{1}{1-a}}$.

2.3.2 Propriétés asymptotiques

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H7) et (H'1)-(H'3) on a :*

$$\sup |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = \mathcal{O}(h_K^{b_1}) + \mathcal{O}(h_H^{b_2}) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right) \tag{2.2}$$

où $\phi_x(h_K)$ est la concentration de la mesure de probabilité de la variable fonctionnelle X dans la boule de centre x et de rayon h_k.

Preuve :

On peut écrire $\widehat{h}^x(y) - h^x(y)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\widehat{h}^x(y) - h^x(y) &= \frac{\widehat{f}^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)} - \frac{f^x(y)}{1-F^x(y)} \\
&= \frac{\widehat{f}^x(y) - \widehat{f}^x(y)F^x(y) - f^x(y) + f^x(y)\widehat{F}^x(y)}{(1-\widehat{F}^x(y))(1-F^x(y))} \\
&= \frac{1}{1-\widehat{F}^x(y)}\left[(\widehat{f}^x(y) - f^x(y)) + \frac{f^x(y)}{1-F^x(y)}(\widehat{F}^x(y) - F^x(y))\right]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

D'après la décomposition précédente, il suffit de montrer que :

$$\sup |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = \mathcal{O}(h_K^{b_1}) + \mathcal{O}(h_H^{b_2}) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co \tag{2.4}$$

$$\sup |\widehat{f}^x(y) - f^x(y)| = \mathcal{O}(h_K^{b_1}) + \mathcal{O}(h_H^{b_2}) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co \tag{2.5}$$

$$\exists \delta > 0 \ telque \ \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}\left\{\inf_{y \in S} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \delta\right\} < \infty. \tag{2.6}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \widehat{F}^x(y) - F^x(y) &= \tfrac{1}{\widehat{F}_D^x}\left\{\left(\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)\right) - \left(F^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)\right)\right\} \\ &+ \tfrac{F^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left\{\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}^x(y) - f^x(y) &= \tfrac{1}{\widehat{f}_D^x}\left\{\left(\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)\right) - \left(f^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)\right)\right\} \\ &+ \tfrac{f^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left\{\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

■

Ce qui nous permet de conclure que la preuve du théorème est basée sur les résultats ci-dessous.

Lemme 2.3.1. *Sous les hypothèses du théorème (2.3.1) on a :*

$$\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co \tag{2.9}$$

Preuve :
notre objectif est de démontrer ;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{f}_D^x - \mathbb{E}\widehat{f}_D^x\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq \infty \tag{2.10}$$

on a

$$\widehat{f}_D^x - \mathbb{E}\widehat{f}_D^x = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

tel que $\Delta_i = K_i - \mathbb{E}K_i$ Il suffit d'appliquer l'inégalité de Fuc-Nagaev. Pour cela, on doit d'abord calculer asymptotiquement s_n^2 définie par :

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| = s_n^{*^2} + \sum_{i=1}^{n} var(\Delta_i) \tag{2.11}$$

telque

$$s_n^{*^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j} |cov(\Delta_i, \Delta_j)|$$

ainsi pour tout $i \neq j$ on a

$$cov(\Delta_i, \Delta_j) = \mathbb{E}(\Delta_i\Delta_j) - \mathbb{E}(\Delta_i)\mathbb{E}(\Delta_j)$$

Donc Par définition on trouve

$$\begin{aligned} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| &\leq A\mathbb{E}(I_{B(x,h_K)\times B(x,h_K)}(X_i, X_j)) + A\mathbb{E}(I_{B(x,h_K)}(X_i))\mathbb{E}(I_{B(x,h_K)}(X_j)) \\ &\leq A\mathbb{P}((X_i, X_j) \in B(x,h_K) \times B(x,h_K)) + A\mathbb{P}(X_i \in B(x,h_K))\mathbb{P}(X_j \in B(x,h_K)) \\ &\leq A'\phi_x(h_k)\left((n^{-1}\phi_x(h))^{1/a} + \phi_x(h_k)\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

En utilisant les techniques de Masry (1986)[28] et on définit les ensembles $S1, S2$,

$$S1 = \{(i,j) \quad telque \quad 1 \leq j - i \leq m_n\};$$

$$S2 = \{(i,j) \quad telque \quad m_n + 1 \leq j - i \leq n - 1\}.$$

où $(m_n)_n$ est une suite arbitraire d'entier positive vérifiant $m_n \to \infty$. Donc pour n assez grand on obtient

$$s_n^{*^2} = \sum_{S1} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| + \sum_{S2} |cov(\Delta_i, \Delta_j)|$$

D'après la définition de $S1$ et (2.12) on déduit que

$$\sum_{S1} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq A'nm_n\phi_x(h_k)(n^{-1}\phi_x(h))^{1/a}$$

Il résulte d'après l'inégalité de covariance pour variable borné (Lemme 1.5.3) on obtient :

$$\sum_{S2} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq An^2\alpha(m_n) \leq A'n^2 m_n^{-a}$$

On prend $m_n = \left(\frac{n}{\phi_x(h_k)}\right)^{1/a}$, il résulte que

$$s_n^{*^2} = \mathcal{O}(n\phi_x(h_k)).$$

Dans un second temps, on a, pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} var(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\Delta_i^2) - (\mathbb{E}(\Delta_i))^2.$$

On montre par la même méthode utiliser dans le calcul de la $cov(\Delta_i, \Delta_j)$ que

$$cov(\Delta_i, \Delta_j) \leq A'\phi_x(h_k).$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{n} var(\Delta_i) \leq \wr(n\phi_x(h_k)) \tag{2.13}$$

Finalement, d'après ces résultat on trouve

$$s_n^2 = \wr(n\phi_x(h_k)) \tag{2.14}$$

et on a achever à calculer asymptotiquement s_n^2.

L'inégalité de Fuk-Nagaev sur la variable Δ_i entraîne pour $\epsilon > 0$ et $r > 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\right| > \epsilon n \mathbb{E} K_1\right) \\ &\leq 4\left(1 + \frac{\epsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1}{16 r s_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}\left(\frac{8r}{\epsilon n \mathbb{E} K_1}\right)^{a+1} \end{aligned}$$

Ainsi on arrive à

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) &\leq 4\left(1+\frac{\epsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1 \frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}{16 r s_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}\left(\frac{8r}{\epsilon n \mathbb{E}K_1}\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right)^{a+1} \\
&\leq 4\left(1+\frac{\epsilon^2 n \log n \; n\phi_x(h_K)}{16 r s_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + \\
& \quad Anr^a \epsilon^{-(a+1)}(n\log n \; n\phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
&\leq An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \epsilon^{-(a+1)}(n\log n \; n\phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} + \\
& \quad 4\left(1+\frac{\epsilon^2\log n}{16r}\right)^{\frac{-r}{2}} \\
&\leq An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \epsilon^{-(a+1)}(\log n)^{1-\frac{(a+1)}{2}}\phi_x(h_K)^{1-\frac{(a+1)}{2}} + \\
& \quad Ae^{\frac{-r}{2}}\log\left(1+\frac{\epsilon^2\log n}{16r}\right)
\end{aligned}$$

On peut toujours choisir r sous la forme $r = C(\log n)^2$, où C est une constante. $\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq An^{\frac{-\epsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{(a+1)}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}}\phi_x(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}$ Grâce à l'inégalité de gauche en (H'3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) &\leq An^{\frac{-\epsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{(a+1)}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{-\frac{(a+1)}{2}(\frac{3-a}{a+1}+\eta)} \\
&\leq An^{\frac{-\epsilon^2}{32}} + An^{2a-\frac{(a+1)}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{-\frac{(a+1)}{2}(\frac{3-a}{a+1}+\eta)} \\
&\leq An^{\frac{-\epsilon^2}{32}} + An^{-1-(\frac{(1-a)}{2}+\frac{(a+1)}{2}\eta)}
\end{aligned}$$

pour ϵ suffisamment grand et $\nu > 0$ on aboutira,

$$\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq A'n^{-1-\nu} \tag{2.15}$$

finalement,

$$\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} A' n^{-1-\nu} < \infty. \tag{2.16}$$

■

Corollaire 2.3.1. *Sous les hypothèses du lemme (2.3.1), on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\widehat{F}_D^x < 1/2\right) < \infty$$

Preuve :

on a

$$\left\{|\widehat{F}_D^x| < 1/2\right\} \subseteq \left\{|\widehat{F}_D^x - 1| < 1/2\right\}$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{|\widehat{F}_D^x| < 1/2\right\} &\leq \mathbb{P}\left\{|\widehat{F}_D^x - 1| < 1/2\right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x| < 1/2\right\} \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\widehat{F}_D^x = 1$ on applique le résultat du lemme (2.3.1) on montre que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\widehat{F}_D^x < 1/2\right) < \infty$$

■

Lemme 2.3.2. *Sous les hypothèses (H1)-(H6), on a :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in S} |F^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)| = \mathcal{O}(h_K^{b_1}) + \mathcal{O}(h_H^{b_2}) \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y \in S} |f^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)| = \mathcal{O}(h_K^{b_1}) + \mathcal{O}(h_H^{b_2}) \tag{2.18}$$

Preuve :

Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) - F^x(y) &= \tfrac{1}{n\mathbb{E}(K_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(K_i)H_i(y) - F^x(y) \\
&= \tfrac{1}{\mathbb{E}(K_1)} \left[\mathbb{E}K_1 H_1\left(\tfrac{y-Y_i}{h_H}\right) F^x(y)\right] \\
&= \tfrac{1}{\mathbb{E}(K_1)}\mathbb{E}\left(K_1\left[\mathbb{E}\left(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) - F^x(y)\right]\right)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) &= \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{y-u}{h_H}\right) f^x(u)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)F^x(y-h_H t)dt
\end{aligned}$$

par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\left(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) - F^x(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{y-u}{h_H}\right) f^x(u)du - F^x(y)\right| \\
&= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)|F^x(y-h_H t) - F^x(y)|dt
\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à l'hypothèse (H2) on obtient

$$|\mathbb{E}\left(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) - F^x(y)| \leq A_x \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(h_k^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2})dt \tag{2.20}$$

Cette inégalité est uniforme en y, en remplaçant dans l'équation (2.19) et en simplifiant le terme $\mathbb{E}(K_1)$ on trouve

$$\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) - F^x(y) \leq A_x \left(h_k^{b_1} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) + h_H^{b_2} \int_{\mathbb{R}} |t|^{b_2} H^{(1)}(t)dt\right)$$

Finalement, l'hypothèse (H4) et le corollaire (2.3.1) entraînent la preuve de l'équation (2.17).

Il nous reste à montrer l'équation (2.18), en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y) - f^x(y) &= \tfrac{1}{h_H\mathbb{E}(K_1)} \left[\mathbb{E}K_1 H_1^{(1)}\left(\tfrac{y-Y_i}{h_H}\right) - h_H f^x(y)\right] \\
&= \tfrac{1}{h_H\mathbb{E}(K_1)}\mathbb{E}\left(K_1\left[\mathbb{E}\left(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) - h_H f^x(y)\right]\right)
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) &= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}\left(\frac{y-u}{h_H}\right) f^x(u)du \\ &= h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) f^x(y-h_H t)dt\end{aligned}$$

Et par suite

$$|\mathbb{E}\left(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) - h_H f^x(y)| \leq h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)|f^x(y-h_H t) - f^x(y)|dt$$

l'hypothèse (H3) entraîne que

$$|\mathbb{E}\left(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i)/X)\right) - h_H f^x(y)| \leq A_x h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(h_k^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2})dt$$

l'hypothèse (H4) et le corollaire (2.3.1) entraînent la preuve de l'équation (2.18). Ce qui achève la preuve du lemme (2.3.2).

Lemme 2.3.3. *Sous les hypothèses du théorème (2.3.1) on a :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y\in S} |\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y\in S} |\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co \tag{2.22}$$

Preuve :

L'idée de la preuve est de recouvrir le compact S par des intervalles S_k de longueurs égales. Cependant, La compacité de S implique qu'on peut extraire de cet recouvrement un recouvrement fini dont le nombre des intervalles sera noté S_n. Autrement dit, $S \subset \bigcup_{k=1}^{S_n} S_k$ où $S_k = (m_k - l_n, m_k + l_n)$

Posons $m_y = \arg\min_{k\in 1,\ldots,S_n} |y - m_k|$ en ajoutant et retranchant le terme

$\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)$ et appliquant l'inégalité trigonométrique. On montre que :

$|\widehat{F}_N^x(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)| \leq |\widehat{F}_N^x(y)-\widehat{F}_N^x(m_y)|+|\widehat{F}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)|+|\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)|$
Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)| \quad \leq \quad & \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(y)-\widehat{F}_N^x(m_y)|}_{T_1}+\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)|}_{T_2}+ \\
& \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)|}_{T_3}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

• **Concernant** (T_1) L'hypothèse (H4) entraîne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(y)-\widehat{F}_N^x(m_y)| \quad & \leq \quad \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}\frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n}|H_i(y)-H_i(m_y)|K_i \\
& \leq \quad \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}\frac{A|y-m_y|}{h_H}\left(\frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n}K_i\right) \\
& \leq \quad \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}\frac{A|y-m_y|}{h_H}\widehat{F}_D^x \\
& \leq \quad A\frac{l_n}{h_H}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

En prenant $l_n = n^{-\alpha-1/2}$ et on montre que

$$\frac{l_n}{h_H} = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{log\ n(n\phi_x(h_K))^{-1}}\right)$$

En effet

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{l_n}{h_H}\left(\sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{log\ n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{h_H n^{\alpha}}\left(\sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{log\ n}}\right)$$

D'aprés l'hypothèse (H7) on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{h_H n^{\alpha}}\left(\sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{log\ n}}\right) = 0$$

et cela montre que

$$\frac{l_n}{h_H} = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{log\ n(n\phi_x(h_K))^{-1}}\right)$$

d'autre part on a

$$\forall \eta > 0,\ \exists N_\eta > 0 \quad pour\ n > N_\eta,\ \frac{l_n}{h_H}\left(\sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{log\ n}}\right) \leq \eta$$

donc pour

$$\frac{\eta}{3},\ \exists N_0, \quad pour\ n > N_0, \quad \frac{l_n}{h_H}\left(\sqrt{\frac{n\phi_x(h_K)}{log\ n}}\right) \leq \frac{\eta}{3}$$

et d'après le résultat (2.24) ($\leq A\frac{l_n}{h_H}$) on déduit que :

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y)| \leq \frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}},$$

et il résulte que, pour $n > N_0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(m_y)| > \frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) = 0 \tag{2.25}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(T_1 > \frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \quad &\leq \quad \sum_{n=1}^{N_0}\mathbb{P}\left(T_1 > \frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right)\\ &+ \sum_{n=N_0+1}^{\infty}\mathbb{P}\left(T_1 > \frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right)\end{aligned}$$

le premier terme du membre de droit est fini, et le second est nul d'après le résultat (2.25). D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(T_1 > \frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) < \infty \tag{2.26}$$

• **Concernant** (T_2)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)| > \frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq$$

$$\frac{A}{l_n} \max_{m_k \in (m_1, \ldots, m_{S_n})} \mathbb{P}\left(|\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)| > \frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}} \right)$$

ainssi que

$$\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y) = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{H_i(m_y)K_i - \mathbb{E}(H_i(m_y)K_i)}_{\Lambda_i^*}$$

Laquelle nécessite le calcul de $s_n^{'2}$ où

$$s_n^{'2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |cov(\Lambda_i^*, \Lambda_j^*|$$

En utilisant la même méthode utilisé dans s_n^2 et en prenant $m_n = \frac{1}{\phi_x(h_K)}$, on montre que

$$s_n^{'2} = \wr(n\phi_x(h_K)) + \mathcal{O}(n\phi_x(h_K))$$

L'inégalité de Fuk-Nagaev sur la variable Λ_i^* entraîne pour $\epsilon > 0$ et $r > 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)| > \epsilon \right) &= \mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i^* \right| > \epsilon n\mathbb{E}K_1 \right) \\ &\leq 4\left(1 + \frac{\epsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1}{16 r s_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}\left(\frac{8r}{\epsilon n\mathbb{E}K_1}\right)^{a+1} \end{aligned}$$

Ainsi on arrive à

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) &\leq 4\left(1+\frac{\epsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1 \frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}{16 r s_n'^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}\left(\frac{8r}{\epsilon n \mathbb{E}K_1}\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right)^{a+1} \\
&\leq 4\left(1+\frac{\epsilon^2 n \log n \ n\phi_x(h_K)}{16 r s_n'^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + \\
&\quad Anr^a\epsilon^{-(a+1)}(n\log n \ n\phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
&\leq An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \epsilon^{-(a+1)}(n\log n \ n\phi_x(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} + \\
&\quad 4\left(1+\frac{\epsilon^2 \log n}{16r}\right)^{\frac{-r}{2}} \\
&\leq An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \epsilon^{-(a+1)}(\log n)^{1-\frac{(a+1)}{2}}\phi_x(h_K)^{1-\frac{(a+1)}{2}} + \\
&\quad Ae^{\frac{-r}{2}}\log\left(1+\frac{\epsilon^2 \log n}{16r}\right)
\end{aligned}$$

On peut toujours choisir r sous la forme $r = C(\log n)^2$, où C est une constante. ce qui donne $\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq An^{\frac{-\epsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{(a+1)}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} \phi_x(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}$ Grâce à l'inégalité de gauche en (H'3)

$$\mathbb{P}\left(\left|\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)\right| > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq An^{\frac{-\epsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{(a+1)}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{-\frac{(a+1)}{2}\left(\frac{3-a}{a+1}+\eta\right)}$$

donc on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)| > \frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq Al_n^{-1}\left(n^{\frac{-\epsilon^2}{32}} + n^{-1-\frac{(a+1)}{2}\eta}\right)$$

on applique le corollaire (2.3.1), sous un choix convenable de ϵ on montre que

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}\left|\widehat{F}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)\right| > \frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) < +\infty$$

• **Concernant** (T_3) Nous avons

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)|\leq\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{F}_N^x(m_y)-\widehat{F}_N^x(y)|$$

et d'après le résultat (2.24)$(\leq A\frac{l_n}{h_H})$ on a :

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)|\leq A\frac{l_n}{h_H}$$

on a

$$\left\{T_3>\frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right\}\subseteq\left\{T_1>\frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right\}$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}\left\{T_3>\frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right\}\leq\mathbb{P}\left\{T_1>\frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right\}$$

et par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(T_3>\frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(T_1>\frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right)$$

et finalement grâce à (2.26) nous aurions alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(T_3>\frac{\eta}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_K)}}\right)<\infty \tag{2.27}$$

Ce qui prouve l'équation (2.21) du lemme (2.3.3). Il nous reste, maintenant, l'équation (3.22), remarquons que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N^x(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)| \quad\leq\quad & \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N^x(y)-\widehat{f}_N^x(m_y)|}_{F_1}+\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)|}_{F_2}+\\ & \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)|}_{F_3}\end{aligned} \tag{2.28}$$

• **Concernant** F_1 et F_3 On utilise les mêmes arguments employés dans la démonstration de T_1 et T_3, en remplace H par $H^{(1)}$ on montre que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N^x(y)-\widehat{f}_N^x(m_y)|\leq A\frac{l_n}{h_H^2} \text{ et } \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)|\leq A\frac{l_n}{h_H^2}$$

On choisit maintenant l_n sous la forme $l_n = n^{-\frac{3\alpha}{2}-\frac{1}{2}}$ et d'après (H7), on déduit que :

$$\frac{l_n}{h_H^2}=\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right)$$

• **Concernant** F_2

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)|>\frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{nh_h\phi_x(h_K)}}\right)\leq$$

$$\frac{A}{l_n}\max_{m_k\in(m_1,\ldots,m_{S_n})}\mathbb{P}\left(|\widehat{f}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)|>\frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{nh_h\phi_x(h_K)}}\right)$$

On a ainssi que

$$\widehat{f}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)=\frac{1}{nh_h\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^n\underbrace{H_i^{(1)}(m_y)K_i-\mathbb{E}(H_i^{(1)}(m_y)K_i)}_{\Gamma_i^*}$$

Laquelle nécessite le calcul de $s_n^{'2}$ où

$$s_n^{'2}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|cov(\Gamma_i^*,\Gamma_j^*|$$

En utilisant la même méthode que dans s_n^2 et en prenant $m_n=\frac{1}{h_H\phi_x(h_K)}$, on montre que

$$s_n^{'2}=\mathcal{O}(nh_H\phi_x(h_K))$$

L'inégalité de Fuk-Nagaev donne

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)|>\frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{nh_h\phi_x(h_K)}}\right)<A_1+A_2.$$

avec $A_1 = Ae^{\frac{-r}{2}\log\left(1+\frac{\epsilon^2 \log n}{16r}\right)}$ et $A_2 = An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \epsilon^{-(a+1)} (h_H \log n)^{1-\frac{(a+1)}{2}} \phi_x(h_K)^{1-\frac{(a+1)}{2}}$

On applique l'hypothèse (H'3) et un choix de $r = C(logn)^2$ et $l_n = n^{-\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}}$ on montre qu'il existe $\nu > 0$ pour η assez grand, on a

$$\frac{1}{l_n}(A_1 + A_2) \leq An^{-1-\nu}$$

d'après le corollaire (2.3.1), on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S} |\widehat{f}_N^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(m_y)| > \frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{log\ n}{nh_h\phi_x(h_K)}}\right) \leq An^{-1-\nu}$$

Lemme 2.3.4. *Sous les conditions du théorème (2.3.1) on a*

$$\exists\delta > 0, \quad telque \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\inf_{y\in S} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \delta\} < \infty$$

preuve

A partir des lemmes précédents on déduit que

$$\widehat{F}^x(y) \xrightarrow{p.co} F^x(y)$$

Ce qui implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\inf_{y\in S} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| > \epsilon\} < \infty$$

D'autre part, nous aurions par l'hypothèse $F^x < 1$

$$\inf_{y\in S} |1 - \widehat{F}^x(y)| \leq (1 - \sup_{y\in S} F^x(y))/2 \implies \sup_{y\in S} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y\in S} F^x(y))/2$$

Ce qui implique

$$\mathbb{P}\{\inf_{y\in S} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \delta\} \leq \mathbb{P}\{\sup_{y\in S} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y\in S} F^x(y))/2\} < \infty$$

On prend $\delta = 1 - \sup_{y\in S} F^x(y)/2$ ■

Chapitre 3

Estimation non paramétrique du maximum de la fonction de hasard conditionnelle

3.1 Introduction

Ce chapitre présente certaines propriétés asymptotiques liées à l'estimation non paramétrique du maximum de la fonction de risque conditionnel. Dans un paramètre de données fonctionnelles, la variable de conditionnement prends ses valeurs dans un espace semi-métrique. Dans ce cas, Ferraty et cie. (2007) définissent des estimateurs non paramétriques de la densité conditionnelle et de la distribution conditionnelle. Ils donnent les taux de convergence (au sens presque complet) des fonctions correspondantes dans un contexte de dépendance (α-mélangeant). Nous étendons leurs résultats en calculant le maximum de la fonction de risque conditionnel de ces estimations, et en établissant leur normalité asymptotique, en considérant un type particulier de noyau pour la partie fonctionnelle des estimations. Étant donné que l'estimateur de la fonction de risque est naturellement construit à l'aide de ces deux derniers estimateurs.

Ce chapitre est organisé comme suit : La section 2 décrit le cadre fonctionnel non paramétrique : la structure des données fonctionnelles et les conditions de mélange, les opérateurs de densité conditionnelle, de distribution et de risque, et les estimateurs de noyau non paramétriques correspondants. La section 3 présente la convergence presque complète (avec des taux de convergence) pour les estimations non paramétriques de la dérivée du risque conditionnel et du risque maximal. Dans la section 4, nous calculons la variance des estimations conditionnelles de densité, de distribution et de risque maximal, la normalité asymptotique des trois estimateurs considérés est développée dans cette section

3.2 Notations générales et hypothèses

Soit $(X_i; Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un échantillon de n paires aléatoires, chacune distribuée comme $(X; Y)$, où la variable X est de nature fonctionnelle et Y est de nature scalaire. Formellement, nous considérerons que X est une variable aléatoire à valeurs dans un espace fonctionnel semi-métrique $\mathcal{F}$, notons par d la semi-métrique sous-jacente. Pour $x \in \mathcal{F}$, notons h^x la fonction de risque conditionnelle de X_1 en prenant $X_1 = x$. Nous supposons que h^x admet un maximum unique et son point de risque le plus élevé dans le compact S est noté $\theta(y) := \theta$, qui est défini par

$$h^x(\theta(y)) = h^x(\theta) := \max_{y\in S} h^x(y) \tag{3.1}$$

Un estimateur du noyau de θ est défini comme la variable aléatoire $\widehat{\theta}(y) := \widehat{\theta}$ qui maximise un estimateur du noyau $\widehat{h}^x$, c'est-à-dire,

$$\widehat{h}^x(\widehat{\theta}(y)) = \widehat{h}^x(\widehat{\theta}) := \max_{y\in S} \widehat{h}^x(y) \tag{3.2}$$

où h^x et $\widehat{h}^x$ sont définis dans chapitre 2.

Notons que l'estimation θ est une note nécessairement unique et nos résultats sont valables pour tout choix satisfaisant (3.2). Nous rappelons que nous pouvons préciser notre choix en prenant

$$\widehat{\theta}(y) = \inf \left\{ t \in S;\, \widehat{h}^x(t) = \max_{y \in S} \widehat{h}^x(y) \right\}$$

Comme dans tout problème de données fonctionnelles non paramétriques, le comportement des estimations est contrôlé par les propriétés de concentration $\phi_x(h) = \mathbb{P}(X \in B(x,h))$ de la variable fonctionnelle $X = x$.
où $B(x,h)$ est la boule de centre x et de rayon h, à savoir

$$B(x,h) = \mathbb{P}(f \in \mathcal{F}, d(x,f) < h)$$

Pour plus de détails, voir Ferraty et Vieu, 2006 , Chapitre 6 [15].
Dans ce qui suit, x sera un point fixé dans $\mathcal{F}$, $\mathcal{N}_x$ désignera un voisinage fixe de x, S sera un sous-ensemble compact fixe de $\mathbb{R}^+$. Nous allons besoin des hypothèse ci-dessous concernant la fonction de concentration ϕ_x.

(H'4) H est différentiable tel que

$$\begin{cases} \textbf{(H'4a)} \forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, |H^j(y_1) - H^j(y_2)| \leq A|y_1 - y_2| \text{ pour } j = 0,1 \text{ et } \\ H^{(j)} \text{ sont bornés pour } j = 0,1 \\ \textbf{(H'4b)} \int t^2 H^2(t)dt < \infty, \\ \textbf{(H'4c)} \int |t|^\beta H'^2(t)dt < \infty \ . \end{cases}$$

(H'5) $\exists \gamma < \infty, f'^x(y) \leq \gamma, \forall (x,y) \in \mathcal{F} \times S$.

(H'6) $\exists \tau > 0, F^x(y) \leq 1 - \tau, \forall (x,y) \in \mathcal{F} \times S$.

(H'7) Il existe une fonction ζ_0^x telle que pour tout $t \in [0,1]$ $\lim_{h \to 0} \frac{\phi_x(th)}{\phi_x(h)} = \zeta_0^x(t)$.

(H'8) La largeur de bande h_n, la probabilité de petite boule $\phi_x(h_n)$ et le coeffcient de α-mélange arithmétique avec un ordre $a > 3$ satisfaisant

$$\begin{cases} \textbf{(H'8a)}\ \exists C > 0, h_n^{2j+1}\phi_x(h_n) \geq \frac{C}{n^{2/(a+1)}}, \text{ pour} j = 0,1. \\ \textbf{(H'8b)}\ \left(\frac{\phi_x(h_n)}{n}\right)^{1/a} + \phi_x(h_n) = \left(\frac{1}{n^{2/(a+1)}}\right), \\ \textbf{(H'8c)}\ \lim_{n\to\infty} h_n = 0, \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{h_n^{2j+1}\phi_x(h_n)} \ . \end{cases}$$

3.3 Propriétés asymptotiques

Supposons qu'il existe un compact S telque h^x admet son maximum unique au point θ sur S. Nous supposerons que h^x est suffisamment différentiable (au moins de classe C^2) il vérifie que $h'^x(\theta) = 0$ et $h''^x(\theta) < 0$.

Nous pouvons écrire un estimateur de la première dérivée de la fonction de risque conditionnelle en fonction de la première dérivée de l'estimateur (2.1). Notre estimation maximale est définie en supposant qu'il existe un $\widehat{\theta}$ unique sur S tel que $0 = \widehat{h}'(\widehat{\theta}) <| \widehat{h}'^x(y) |$ pour tout $y \in S$ et $y \neq \widehat{\theta}$.

De plus, nous supposons que $\theta \in S^0$, où S^0 désigne l'intérieur de S, et qu'il satisfait la condition d'unicité, c'est-à-dire ; pour tout $\varepsilon > 0$ et $\mu(x)$, il existe $\xi > 0$ tel que $| \theta(x) - \mu(x) | \geq \varepsilon$ implique que $| h^x(\theta(x)) - h^x(\mu(x)) | \geq \xi$.

Nous pouvons écrire un estimateur de la première dérivée de la fonction de risque en fonction la première dérivée de l'estimateur. Notre estimation maximale est définie en supposant qu'il existe un $\widehat{\theta}$ unique sur S^0.

Il est donc naturel d'essayer de construire un estimateur de la dérivée de la fonction h^x à l'aide de cette démarche. Pour estimer la fonction de distribution conditionnelle et la fonction de densité conditionnelle en présence de la variable aléatoire conditionnelle fonctionnelle $X = x$. L'estimateur du noyau de la dérivée de la fonction fonctionnelle aléatoire conditionnelle peut donc être construit comme suit :

$$\widehat{h}'^x(y) = \frac{\widehat{f}'^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)} + (\widehat{h}^x(y))^2 \tag{3.3}$$

l'estimateur de la dérivée du densité conditionnelle est donné par la formule suivante :

$$\widehat{f'}^x(y) = \frac{h_H^{-2} \sum_{i=1}^{n} K\left(h_K^{-1} d(x, X_i)\right) H''\left(h_H^{-1}(y - Y_i)\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(h_K^{-1} d(x, X_i)\right)}; \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Plus tard, nous avons besoin d'hypothèses sur les paramètres de l'estimateur, c'est-à-dire sur K, H, H', h_K et h_H qui soit un peu restrictif. En effet, d'une part, ils ne sont pas spécifiques à l'estimation du problème de h^x (mais à des problèmes inhérents à l'estimation de F^x, f^x et f'^x), et d'autre part ils correspondent aux hypothèses habituellement faites sous des variables fonctionnelles.

Remarque 3.3.1. *Généralement, la fonction de risque a un maximum global dans les intervalles de temps avec des valeurs les plus proches de zéro, correspondant aux tremblements de terre de plus grande intensité (Vere-Jones (1970)[31]).*
De plus, la fonction de risque peut avoir plusieurs maxima locaux, indiquant les moments où le risque est le plus élevé au cours d'une certaine période (voir les exemples dans Estévez-Pérez et cie. (2002)[11]).
L'hypothèse d'unicité n'est établie que par souci de clarté. D'après nos preuves, s'il existe plusieurs maxima estimés locaux, les résultats asymptotiques restent valables pour chacun d'eux.

Nous établissons la convergence presque complète (avec les taux de convergence) de l'estimation maximale par les résultats suivants :

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses **(H1),(H2),(H3),(H5),(H'1),(H'2),(H'4),(H'5) et (H'6)** nous avons*

$$\widehat{\theta} - \theta \to 0 \qquad p.co.$$

Preuve de Théorème (3.3.1) :
Parce que h'^x est continu, nous avons, pour tout $\epsilon > 0. \exists \eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$| t - \theta | > \epsilon \Rightarrow | h'^x(t) - h'^x(\theta) | > \eta(\epsilon).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}\{| \widehat{\theta} - \theta | > \epsilon\} \leq \mathbb{P}\{| h'^x(\widehat{\theta}) - h'^x(\theta) | \geq \eta(\epsilon)\}$$

Nous avons également

$$| h'^x(\widehat{\theta}) - h'^x(\theta) | \leq | h'^x(\widehat{\theta}) - \widehat{h}'^x(\widehat{\theta}) | + | \widehat{h}'^x(\widehat{\theta}) - h'^x(\theta) | \leq \sup_{y \in S} | \widehat{h}'^x(y) - h'^x(y) | \quad (3.5)$$

car $\widehat{h}'^x(\widehat{\theta}) = h'^x(\theta) = 0$.

Ensuite, la convergence uniforme de h'^x sur S impliquera la convergence uniforme de $\widehat{\theta}$. C'est pourquoi, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Sous les hypothèses du Théorème (3.3.1), nous avons*

$$\sup_{y \in S} \mid \widehat{h}'^x(y) - h'^x(y) \mid \to 0 \qquad p.co. \tag{3.6}$$

■

Théorème 3.3.2. *Sous les hypothèses du Théorème (3.3.1) et* ***(H'8c)****, nous avons*

$$\sup_{y \in S} \mid \widehat{\theta} - \theta \mid = \mathcal{O}(h_n^{b_1}) + \mathcal{O}_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{nh_n^3 \phi_x(h_n)}}\right) \tag{3.7}$$

Preuve de Théorème (3.3.2) :

En utilisant le développement de Taylor de la fonction h'^x au point $\widehat{\theta}$, nous obtenons

$$h'^x(\widehat{\theta}) = h'^x(\theta) + (\widehat{\theta} - \theta) h''^x(\theta_n^*) \tag{3.8}$$

avec θ^* un point entre θ et $\widehat{\theta}$.

Maintenant, parce que $h'^x(\theta) = \widehat{h}'^x(\widehat{\theta})$

$$\mid \widehat{\theta} - \theta \mid \leq \frac{1}{h''^x(\theta_n^*)} \sup_{y \in S} \mid \widehat{h}'^x(y) - h'^x(y) \mid \tag{3.9}$$

La preuve du théorème sera complétée en montrant le lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Selon les hypothèses du Théorème (3.3.2) , nous avons*

$$\sup_{y \in S} \mid \widehat{h}'^{x}(y) - h'^{x}(y) \mid = \mathcal{O}(h_n^{b_1}) + \mathcal{O}_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{nh_n^3\phi_x(h_n)}}\right) \tag{3.10}$$

■

Preuves de lemmes (3.3.1) et (3.3.2) :
Soit

$$\widehat{h}'^{x}(y) = \frac{\widehat{f}'^{x}(y)}{1 - \widehat{F}^{x}(y)} + (\widehat{h}^{x}(y))^2 \tag{3.11}$$

avec

$$\widehat{h}'^{x}(y) - h'^{x}(y) = \underbrace{\left\{\left(\widehat{h}^{x}(y)\right)^2 - \left(h^{x}(y)\right)^2\right\}}_{\Gamma_1} + \underbrace{\left\{\frac{\widehat{f}'^{x}(y)}{1 - \widehat{F}^{x}(y)} - \frac{f'^{x}(y)}{1 - F^{x}(y)}\right\}}_{\Gamma_2} \tag{3.12}$$

pour le premier terme de (3.12) on peut écrire

$$\left|\left(\widehat{h}^{x}(y)\right)^2 - \left(h^{x}(y)\right)^2\right| \leq \left|\widehat{h}^{x}(y) - h^{x}(y)\right| . \left|\widehat{h}^{x}(y) - h^{x}(y)\right| \tag{3.13}$$

parce que l'estimateur $\widehat{h}^{x}(.)$ converge p.co. à $h^{x}(.)$ nous avons

$$\sup_{y \in S}\left|\left(\widehat{h}^{x}(y)\right)^2 - \left(h^{x}(y)\right)^2\right| \leq 2\left|h^{x}(\theta)\right| \sup_{y \in S}\left|\widehat{h}^{x}(y) - h^{x}(y)\right| \tag{3.14}$$

pour le second terme de (3.12) nous avons

$$\frac{\widehat{f}'^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)} - \frac{f'^x(y)}{1-F^x(y)} = \frac{1}{(1-\widehat{F}^x(y))(1-F^x(y))}\Big\{\widehat{f}'^x(y) - f'^x(y)\Big\}$$
$$+ \frac{1}{(1-\widehat{F}^x(y))(1-F^x(y))}\Big\{f'^x(y)\Big(\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\Big)\Big\}$$
$$- \frac{1}{(1-\widehat{F}^x(y))(1-F^x(y))}\Big\{F^x(y)\Big(\widehat{f}'^x(y) - f'^x(y)\Big)\Big\}$$

Valable pour tous les $y \in S$. Pour une constante $C < \infty$; Cela conduit

$$\sup_{y\in S}\left|\frac{\widehat{f}'^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)} - \frac{f'^x(y)}{1-F^x(y)}\right| \leq C\frac{\Big\{\sup_{y\in S}|\widehat{f}'^x(y) - f'^x(y)| + \sup_{y\in S}|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)|\Big\}}{\inf_{y\in S}|1-\widehat{F}^x(y)|}$$

Par conséquent, la conclusion du lemme découle des résultats suivants :

$$\sup_{y\in S} \mid \widehat{F}^x(y) - F^x(y) \mid = \mathcal{O}(h_n^{b_1}) + \mathcal{O}_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_n)}}\right) \tag{3.15}$$

$$\sup_{y\in S} \mid \widehat{f}'^x(y) - f'^x(y) \mid = \mathcal{O}(h_n^{b_1}) + \mathcal{O}_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{nh_n^3\phi_x(h_n)}}\right) \tag{3.16}$$

$$\sup_{y\in S} \mid \widehat{h}^x(y) - h^x(y) \mid = \mathcal{O}(h_n^{b_1}) + \mathcal{O}_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{n\phi_x(h_n)}}\right) \tag{3.17}$$

$$\exists\delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \sum_1^\infty \mathbb{P}\Big\{\inf_{z\in S} \mid 1-\widehat{F}^x(y) \mid < \delta\Big\} < \infty \tag{3.18}$$

On trouve les preuves de (3.15) et (3.17) et (3.18) dans le deuxième chapitre. ■

Preuve de (3.16) : Ce résultat est basé sur le même type de décomposition que (2.7). On remplace $\widehat{F}^x(y)$ par $\widehat{f}'^x(y)$ et $F^x(y)$ par $f'^x(y)$ et utilisez les mêmes notations.

$$\widehat{f}'^x(y) - f'^x(y) = \frac{1}{\widehat{F}^x_D}\left\{\left(\widehat{f}'^x_N(y) - \mathbb{E}\widehat{f}'^x_N(y)\right) - \left(f'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}'^x_N(y)\right)\right\}$$
$$+ \frac{f'^x(y)}{\widehat{F}^x_D}\left\{\mathbb{E}\widehat{F}^x_D - \widehat{F}^x_D\right\}$$

où

$$\widehat{f}'^x_N(y) = \frac{1}{nh_H^2\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x,X_i))H''(h_H^{-1}(y-Y_i)).$$

Ensuite, la preuve peut être déduit des deux lemmes suivants, ainsi que du lemme (2.3.1) et du corollaire (2.3.1). ■

Lemme 3.3.3. *Sous les hypothèses (H1)-(H6), on a :*

$$\frac{1}{\widehat{F}^x_D}\sup_{y\in S}|f'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}'^x_N(y)| = \mathcal{O}(h_K^{b_1}) + \mathcal{O}(h_H^{b_2}) \tag{3.19}$$

Preuve :

Soit $H''_i = H''(h_H^{-1}(y-Y_i))$, et notons que nous avons

$$\mathbb{E}\widehat{f}'^x_N(y) - f'^x(y) = \frac{1}{h_H^2\mathbb{E}K_1}\mathbb{E}\left(K_1\left[\mathbb{E}(H''_1(y)/X) - h_H^2 f'^x(y)\right]\right) \tag{3.20}$$

En outre,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_1''(y)/X) &= \int_{\mathbb{R}} H''(h_H^{-1}(y-z))f^X dz \\ &= -h_H\Big[H'(h_H^{-1}(y-z))f^X dz\Big]_{-\infty}^{+\infty} \\ &+ h_H\int_{\mathbb{R}} H'(h_H^{-1}(y-z))(h_H^{-1}(y-z)).\end{aligned} \tag{3.21}$$

La condition (H4) nous permet d'annuler le premier terme du côté droit de (3.21) et nous pouvons écrire :

$$\Big|\mathbb{E}(H_1''(y)/X) - h_H^2 f'^x(y)\Big| \leq h_H^2 \int_{\mathbb{R}} H'(t)\Big|f'^X(y-h_H t) - f'^x(y)\Big|dt.$$

Enfin, (H3) permet d'écrire

$$\Big|\mathbb{E}(H_1''(y)/X) - h_H^2 f'^x(y)\Big| \leq C_x h_H^2 \int_{\mathbb{R}} H'(t)(h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2})dt.$$

Comme cette dernière inégalité est uniforme sur y, l'utilisation de (H4), (3.20) et du corollaire (2.3.1) permet de prouver le lemme (3.3.3). ■

Lemme 3.3.4. *Sous les hypothèses (H1), (H3)-(H5) et (H7) on a :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(y)| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{log\ n}{nh_H\phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co \tag{3.22}$$

Preuve :

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N'^x(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(y)| \quad\leq\quad & \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N'^x(y)-\widehat{f}_N'^x(m_y)|}_{T_1}+\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N'^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(m_y)|}_{T_2}+\\ & \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(y)|}_{T_3}\end{aligned} \tag{3.23}$$

- Concernant $(T1)$ et $(T3)$: On remplace H par H'' et on appliquons la condition de Lipschitz (H4). Cela nous permet d'obtenir :

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N'^x(y)-\widehat{f}_N'^x(m_y)|\leq C\frac{l_n}{h_H^3} \quad \text{et} \quad \sup_{y\in S}|\mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(m_y)|\leq C\frac{l_n}{h_H^3} \tag{3.24}$$

Prenons maintenant $l_n=n^{-\frac{3\alpha}{2}-\frac{1}{2}}$ et notons que **(H7)** implique

$$l_n/h_H^3=\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H^3\phi_x(h_K)}}\right). \tag{3.25}$$

- Concernant (T2) :

$$\widehat{f}_N'^x(m_y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(m_y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left\{\frac{H_i''(m_y)K_i}{h_H^2\mathbb{E}K_1}-\frac{\mathbb{E}(H_i''(m_y)K_1)}{h_H^2\mathbb{E}K_1}\right\}}_{A_i}$$

On a clairement $|A_i|\leq Ch_H^{-2}\phi_x(h_K)^{-1}$. Maintenant, nous montrons que

$$\mathbb{E}A_i^2=\mathcal{O}(h_H^{-3}\phi_x(h_K)^{-1}) \tag{3.26}$$

Premièrement, nous pouvons écrire

$$\mathbb{E}A_i^2\leq\frac{\mathbb{E}\left(H_i''(m_y)^2K_1^2\right)}{\left(h_H^2\mathbb{E}K_1\right)^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(H_i''(m_y)^2K_1^2\right)=\mathbb{E}\left(K_1^2\mathbb{E}\left(H_i''(m_y)^2/X\right)\right)$$

La condition (H'4) implique que $\int_{\mathbb{R}} H''^2(y)dy < +\infty$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h_H}\mathbb{E}\left(H_1''(m_y)^2/X\right) - f^X(m)\int_{\mathbb{R}} H''^2(y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_H}H''^2\left(\frac{u}{h_H}\right)\left(f^X(m_y-u)-f^X(m_y)\right)du\right| \\
&\leq \left|\int_{|u|\leq A} \frac{1}{h_H}H''^2\left(\frac{u}{h_H}\right)\left(f^X(m_y-u)-f^X(m_y)\right)du\right| \\
&+\left|\int_{|u|>A} \frac{1}{h_H}H''^2\left(\frac{u}{h_H}\right)\left(f^X(m_y-u)-f^X(m_y)\right)du\right| \\
&\leq \underbrace{C\sup_{|u|\leq A}|f^X(m_y-u)-f^X(m_y)|}_{B_1} + \underbrace{\sup_{|y|>A/h_H} H''^2(y)}_{B_2} + \underbrace{f^X(m_y)\int_{|y|>A/h_H} H''^2(y)dy}_{B_3}
\end{aligned}$$

Maintenant, nous déduisons de (H'4) que

$$\forall\epsilon>0, \forall A>0, \exists n_{A,\epsilon}, \forall n\geq n_{A,\epsilon}, B_2+B_3<\epsilon.$$

De plus, en raison de la continuité de f^X, nous avons

$$\forall\epsilon>0, \exists A_\epsilon, \forall A\leq A_\epsilon, B_1<\epsilon.$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{h_H}\mathbb{E}\left(H_1''(m_y)^2/X\right) = f^X(m)\int_{\mathbb{R}} H''^2(y)dy.$$

Enfin, puisque $0 < C\phi_x(h_K) < \mathbb{E}K_1$ et $\mathbb{E}K_1^2 < C'\phi_x(h_K)$, nous avons (3.26). Or, l'inégalité de Bernstein nous conduit à :

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{f}_N'^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(m_y)| > \eta\sqrt{\frac{\log n}{nh_H^3\phi_x(h_K)}}\right)$$
$$\leq 2\exp\left\{-nC\frac{\eta^2\log n}{nh_H^3\phi_x(h_K)}h_H^3\phi_x(h_K)\right\}$$
$$\leq C'n^{-C\eta^2}.$$

Encore une fois, des arguments similaires à ceux invoqués pour prouver le lemme (2.3.3) peuvent être utilisés, ce qui nous permet d'obtenir que :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N'^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(m_y)| > \eta\sqrt{\frac{\log n}{nh_H^3\phi_x(h_K)}}\right) \leq \frac{C'}{l_n}n^{-C\eta^2}.$$

En choisissant maintenant tel que $C\eta^2 = \frac{5\alpha}{3} + \frac{3}{2}$, on obtient

$$\sup_{y\in S}|\widehat{f}_N'^x(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(m_y)| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H^3\phi_x(h_K)}}\right) \tag{3.27}$$

Enfin, le lemme (3.22) est une conséquence de (3.24), (3.25), (3.27) et du corollaire (2.3.1).

■

3.4 Normalité asymptotique

Pour obtenir la normalité asymptotique des estimations conditionnelles, nous devons ajouter les hypothèses suivantes :

(H'4d) $\int_{\mathbb{R}} H'^2 dt < \infty$.

(H'9) $0 = \widehat{h}'^x(\widehat{\theta}) < |\widehat{h}'^x(y)|, \forall y \in S, y \neq \widehat{\theta}$.

Le résultat suivant donne la normalité asymptotique du maximum de la fonction de risque conditionnel. On pose

$$\mathcal{A} = \{(x,y) : (x,y) \in S \times \mathbb{R}, a_2^y F^x(y)(1 - F^x(y)) \neq 0\}$$

Théorème 3.4.1. *Dans les conditions (H1)-(H7) et (H'1)-(H'9) nous avons* $(\theta \in S/f^x(\theta), 1 - F^x(\theta) > 0)$

$$(nh_n^3\phi_x(h_n))^{1/2}\left(\widehat{h}'^x(\theta) - h'^x(\theta)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_h^2(\theta))$$

où $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ *désigne la convergence de la distribution,*

$$a_l^y = k^l(1) - \int_0^1 (K^l(u))'\zeta_0^y(u)du \qquad \textit{pour} \quad l = 1, 2$$

et

$$\sigma_{h'}^2(\theta) = \frac{a_2^y h^x(\theta)}{(a_1^y)^2(1 - F^x(\theta))}\int H'^2 dt.$$

Preuve :
On utilisant la décomposition (3.12), et on obtient

$$\frac{(1 - F^x(y))}{(1 - \widehat{F}^x(y))(1 - F^x(y))} \to \frac{1}{1 - F^x(y)}$$

et

$$\frac{\widehat{f}'^x(y)}{(1 - \widehat{F}^x(y))(1 - F^x(y))} \to \frac{f'^x(y)}{(1 - F^x(y))^2}$$

La normalité asymptotique de $(nh_n^3\phi_x(h_n))^{1/2}\left(\widehat{h}'^x(\theta) - h'^x(\theta)\right)$ peut être déduite des lemmes suivants, ■

Lemme 3.4.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H4) et (H7) et (H'1)-(H'3), nous avons*

$$(n\phi_x(h_n))^{1/2}\left(\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2_{F^x}(y))$$

où

$$\sigma^2_{F^x}(y) = \frac{a_2^y F^x(y)(1 - F^x(y))}{(a_1^y)^2}$$

Les preuves du lemme (3.4.1) peuvent être vues dans Laksaci et cie. (2011) [21].

Lemme 3.4.2. *Sous les hypothèses (H1)-(H5) et (H7) et(H'1)-(H'4), nous avons*

$$(nh_n\phi_x(h_n))^{1/2}\left(\widehat{h}^x(y) - h^x(y)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2_h(y))$$

où

$$\sigma^2_{h^x}(y) = \frac{a_2^y h^x(y)}{(a_1^y)^2(1 - F^x(y))}\int H^2(t)dt.$$

Preuve :
On peut écrire pour tout $x \in S$

$$\begin{aligned}
\widehat{h}^x(y) - h^x(y) &= \frac{\widehat{f}^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)} - \frac{f^x(y)}{1-F^x(y)} \\
&= \frac{1}{\widehat{D}^x(y)}\left\{\left(\widehat{f}^x(y) - f^x(y)\right) + f^x(y)\left(\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right) - F^x(y)\left(\widehat{f}^x(y) - f^x(y)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\widehat{D}^x(y)}\left\{(1 - F^x(y))\left(\widehat{f}^x(y) - f^x(y)\right) - f^x(y)\left(\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

avec $\widehat{D}^x(y) = (1 - F^x(y))(1 - \widehat{F}^x(y))$
Conséquence directe du lemme (3.4.1), le résultat (3.29) (voir Ezzahrioui et Ould-Saïd, 2010 [12]) et l'expression (3.28), nous permettent d'obtenir la normalité asymptotique pour l'estimateur du hasard conditionnel.

$$(nh_n\phi_x(h_n))^{1/2}\left(\widehat{f}^x(y) - f^x(y)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2_{f^x}(y)) \tag{3.29}$$

où

$$\sigma^2_{f^x}(y) = \frac{a_2^y f^x(y)}{(a_1^y)^2}\int_{\mathbb{R}}(H(t))^2 dt.$$

■

Lemme 3.4.3. *Sous les hypothèses du théorème (3.4.1), nous avons*

$$(nh_n^3\phi_x(h_n))^{1/2}\left(\widehat{f}'^x(y) - f'^x(y)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2_{f'^x}(y)) \tag{3.30}$$

où

$$\sigma^2_{f'^x}(y) = \frac{a_2^y f^x(y)}{(a_1^y)^2}\int_{\mathbb{R}} H'^2 dt.$$

Preuve :
Pour $i = 1, ..., n$, on considère les quantités $K_i = K(h_n^{-1}d(x, X_i))$, $H_i'(x) = H'(h_n^{-1}(y - Y_i))$ et soit $\widehat{f}'^X_N(y)$ (resp.$\widehat{F}^X_N$) être défini comme

$$\widehat{f}'^x_N(y) = \frac{h_n^{-2}}{n\mathbb{E}k_1}\sum_{i=1}^n K_i H_i'(y) \qquad \left(\text{resp. } \widehat{F}^x_N(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}k_1}\sum_{i=1}^n K_i\right)$$

Cette preuve est basée sur la décomposition suivante

$$\widehat{f}'^x(y) - f'^x(y) = \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\left\{\left(\widehat{f}_N'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(y)\right) - \left(f'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N'^x(y)\right)\right\} + \frac{f'^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left\{\mathbb{E}\widehat{F}_D^x - \widehat{F}_D^x\right\}$$

et sur les résultats intermédiaires suivants.

$$\sqrt{nh_n^3\phi_x(h_n)}\left(\widehat{f}'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}'^x(y)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2_{f'^x}(y)) \tag{3.31}$$

où $\sigma^2_{f'^x}(y)$ est défini comme dans le lemme (3.4.3).

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{nh_n^3\phi_x(h_n)}\left(\widehat{f}'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}'^x(y)\right) = 0 \tag{3.32}$$

$$\sqrt{nh_n^3\phi_x(h_n)}\left(\widehat{F}_D^x(y) - 1\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{comme} \quad n\to\infty. \tag{3.33}$$

Concernant (3.31). Par définition de $\widehat{f}_N'^x(y)$, il s'ensuit que

$$\sqrt{nh_n^3\phi_x(h_n)}\left(\widehat{f}'^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}'^x(y)\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\phi_x(h_n)}}{\sqrt{nh_n}\mathbb{E}K_1}\left(K_iH_i' - \mathbb{E}K_iH_i'\right) = \sum_{i=1}^n \Delta_i,$$

ce qui mène à

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Delta_i^2 = \frac{\phi_x(h_n)}{h_n\mathbb{E}^2K_1}(\mathbb{E}^2K_1H_1')^2 = \Pi_{1n} - \Pi_{2n}. \tag{3.34}$$

Pour Π_{1n}, par la propriété d'espérance conditionnelle, on obtient

$$\Pi_{1n} = \frac{\phi_x(h_n)}{\mathbb{E}^2 K_1}\mathbb{E}\left\{K_1^2 \int H'^2(t)(f'^x(y-th_n) - f'^x(y) + f'^x(y))dt\right\}.$$

Pendant ce temps, par (H1), (H4), (H'4) et (H'9), il s'en suit que :

$$\frac{\phi_x(h_n)\mathbb{E}^2 K_1}{\mathbb{E}^2 K_1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_2^y}{(a_1^y)^2},$$

ce qui mène à

$$\Pi_{1n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_2^y f^x(y)}{(a_1^y)^2} \int H'^2 dt, \tag{3.35}$$

Concernant Π_{2n}, par (H1), (H4) et (H7), on obtient

$$\Pi_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.36}$$

Ce résultat, combiné avec (3.34) et (3.35), nous permet d'obtenir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Delta_i^2 = \sigma^2_{f'^x}(y).$$

Deuxièmement, comme H' est bornée, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\Delta_i\Delta_j|) &\leq \frac{C\phi_x(h_n)}{n\mathbb{E}^2 K_1}(K_iK_j + \mathbb{E}K_iK_j)\\ &\leq \frac{C}{nh_n}\left\{\left(\frac{\phi_x(h_n)}{n}\right)^{1/a} + \phi_x(y)(h_n)\right\}\end{aligned}$$

Puis, en prenant

$$\delta_n = \max_{1\leq i\neq j\leq n}\{\mathbb{E}(|\Delta_i\Delta_j|)\} = \frac{C}{nh_n}\left\{\left(\frac{\phi_x(h_n)}{n}\right)^{1/a} + \phi_x(y)(h_n)\right\}.$$

Conduit à

$$nm_n\delta_n = \frac{Cm_n}{nh_n}\left\{\left(\frac{\phi_x(h_n)}{n}\right)^{1/a} + \phi_x(y)(h_n)\right\}. \tag{3.37}$$

De même, le fait que de H' et K soient bornée permet de prendre $C_i = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{nh_n^3\phi_x(h_n)}}\right)$, ce qui implique que

$$\left(\sum_{j=m_n+1}^{\infty}\alpha(j)\right)\sum_{i=1}^{n}C_i^2 \leq \frac{C}{h_n\phi_x(h_n)}\int_{t\geq m_n} t^{-a}dt = \frac{C}{h_n\phi_x(h_n)}\frac{m_n^{-a+1}}{a-1}. \tag{3.38}$$

Alors, la somme du côté droit de (3.37) et (3.38) est de type $Am_n + Bm_n^{-a+1}$, en parlant

$$m_n = (A/B)^{-1/a} = \left\{(a-1)\phi_x(h_n)\left(\left(\frac{\phi_x(h_n)}{n}\right)^{1/a} + \phi_x(h_n)\right)\right\}^{-1/a} \to \infty$$

il est clair que, dans les conditions (H10a) et (H10b), combiner (3.37) et (3.38) permet d'obtenir

$$nm_n\delta_n = o(1), \tag{3.39}$$

et

$$\left(\sum_{j=m_n+1}^{\infty}\alpha(j)\right)\sum_{i=1}^{n}C_i^2=o(1), \tag{3.40}$$

respectivement. Enfin, en choisissant $\varrho_n = \sqrt{\frac{nh_n^3\phi_x(h_n)}{\log n}}$, sous (H10a) à nouveau et $a>3$, on a

$$\frac{\varrho_n}{\sqrt{n}}=o(1) \tag{3.41}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{n}{\varrho_n}\alpha(\varepsilon\varrho_n) &\leq C\frac{(\log n)^{(a+1)/2}}{n^{(a-1)/2}(h_n^3\phi_x(h_n))^{(a+1)/2}}\\ &\leq C\frac{(\log n)^{(a+1)/2}}{n^{(a-3)/2}}\to 0 \qquad \text{quand} \quad n\to\infty.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Par conséquent, combiner (3.36)-(3.42) avec le corollaire 2.2 dans Liebscher (2001)[22], (3.31) est valide.

• Concernant (3.32). La preuve se fait selon les mêmes étapes que celle de Π_{1n}. Nous l'omettons ici.

• Concernant (3.33). L'idée est similaire à celle donnée par Ferraty et cie. (2007)[13]. Par définition de $\widehat{F}_D^x(y)$, on a

$$\sqrt{nh_n^3\phi_x(h_n)}(\widehat{F}_D^x(y)-1)=\Omega_n-\mathbb{E}\Omega_n,$$

où $\Omega_n = \frac{\sqrt{nh_n^3\phi_x(h_n)}\sum_{i=1}^{n}K_i}{n\mathbb{E}K_1}$. Afin de prouver (3.33), similaire à Ferraty et cie. (2007)[13], il suffit de prouver $Var\ \Omega_n\to 0$, comme $n\to\infty$. En fait, depuis

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}ar\ \Omega_n &= \frac{nh_n^3\phi_x(h_n)}{n\mathbb{E}^2K_1}\left(n\mathrm{V}ar\ K_1 + \sum_{1\le i}\sum_{j\le n}\mathrm{cov}(K_i,K_j)\right)\\
&\le \frac{nh_n^3\phi_x(h_n)}{\mathbb{E}^2K_1}\mathbb{E}K_1^2 + \frac{nh_n^3\phi_x(h_n)}{n\mathbb{E}^2K_1}\sum_{1\le|i}\ \sum_{-j|\le v_n}\mathrm{cov}(K_i,K_j)\\
&+ \frac{nh_n^3\phi_x(h_n)}{n\mathbb{E}^2K_1}\sum_{1\le|i}\ \sum_{-j|\ge v_n}\mathrm{cov}(K_i,K_j)\\
&= \Psi_1+\Psi_2+\Psi_3,
\end{aligned}$$

alors, l'utilisation de la délimitation de la fonction K nous permet d'obtenir cela :

$$\Psi_1 \le Ch_n^3\phi_x(h_n)\to 0, \qquad \text{comme} \quad n\to\infty.$$

Pendant ce temps, par (H1) et (H2), il s'ensuit que

$$\Psi_2 \le v_nh_n^3\left\{\left(\frac{\phi_x(h_n)}{n}\right)^{1/a}+\phi_x(h_n)\right\}. \tag{3.43}$$

Enfin, l'utilisation de l'inégalité de Davydov Rio à Rio (2000) pour mélanger les processus conduit à

$$|\mathrm{cov}(K_i,K_j)| \le C(\alpha|i-j|),$$

pour tout $i\neq j$. Ensuite nous avons

$$\begin{aligned}
\Psi_3 &\le \frac{nh_n^3\phi_x(h_n)}{n\mathbb{E}^2K_1}n^2C(\alpha|i-j|)\\
&\le C\frac{nh_n^3\phi_x(h_n)}{n\mathbb{E}^2K_1}n^2v_n^{-a+1} \qquad (3.44)\\
&\le Ch_n^3nv_n^{-a+1}.
\end{aligned}$$

Puisque le côté droit de (3.43) et (3.44) est également de type $Av_n + Bv_n^{-a+1}$, en choisissant $v_n = \left[n^{-1}\left(\left(\frac{\phi_x(h_n)}{n}\right)^{1/a} + \phi_x(h_n)\right)\right]^{-1/a} \rightarrow \infty$ et des calculs simples, nous obtenons que $\Psi_2 \rightarrow 0$ et $\Psi_3 \rightarrow 0$ comme $n \rightarrow \infty$, respectivement. ■

Par conséquent, la preuve de ce lemme est terminée. Enfin, par (3.30) et (3.8), le théorème suivant suit :

Théorème 3.4.2. *sous les conditions (H1)-(H7) et (H'1)-(H'9) nous avons* $(\theta \in S/f^x(\theta), 1 - F^x(\theta) > 0)$

$$(nh_n^3\phi_x(h_n))^{1/2}\left(\widehat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{\sigma_{h'}^2(\theta)}{(h''^x(\theta))^2}\right)$$

avec $\sigma_{h'}^2(\theta) = h^x(\theta)(1 - F^x(\theta)) \int H'^2 dt$.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement dans ce travail à un modèle non paramétrique qui traite le cas des variables fonctionnelles dans lesquels la variable "réponse" est réelle tandis que la variable explicative est fonctionnelle. L'objectif était l'estimation du dérivée de la fonction de hasard conditionnelle au moyen de la fonction de répartition conditionnelle et sa dérivée par la méthode du noyau. Le cas considéré traite des données complètes

Bibliographie

[1] Antoniadis. A, et Sapatinas. T, *Estimation and inference in functional mixed-effect models* .Computational Statistics and Data Analysis 51 (10) (2007) 4793-4813.

[2] Benko. M, Härdlerdle. W, et Kneip. A, *Common Functional Principal Components* SFB 649 Discussion Papers SFB649 DP 2006-010, Humboldt University, Berlin, Germany.(2006)

[3] Besse.v,Ramsay.J.O, *Principal components analysis of sampled curves.*Psychometrika, 51, (1986) 285-311

[4] Besse. P, Cardot. H, Stephenson. D, *Autoregressive forecasting of some functional climatic variations*, Scand. J. Statist., 27 (2000), 673-687.

[5] Chiou. J.M, and Müller. H.-G, *Diagnostics for functional regression via residual processes.* Computational Statistics and Data Analysis 51, (10) (2007) 4849- 4863.

[6] Cox. D. R, *Regression Models and Life Tables (with Discussion)* Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol. 74 p. 187-220.(1972).

[7] Cox. D. R, Oakes *Analyse of Survival Data*, Chapman and Hall. London (1984)

[8] Doukhan. P, *Mixing : Properties and Examples*, Lecture Notes in Statist. 85, Springer-Verlag, NewYork, 1994.

[9] dauxois. J, pousse. A, *Les analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique : essai d'étude synthétique*, PhD thesis, Thèse d'Etat, Université Toulouse III, (1976).

[10] Deville. J. C, *Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique,*, Ann Insee, 15., (1974).

[11] Estévez-Pérez. G, Quintela-del-Rio. A, Vieu. P, *Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples*, J. Statist. Plann. Inference., 104 (2002), 1-30.

[12] Ezzahrioui. M, Ould Saïd. E, *Some asymptotic results of a nonparametric conditional mode estimator for functional time series data*, Statist. Neerlandica, 64 (2010), 171-201.

[13] Ferraty. F, Mas. A, Vieu. P, *Advances in nonparametric regression for functional variables*, Australian and New Zealand Journal of Statistics., 49 (2007), 1-20.

[14] Ferraty. F, Rabhi. A, Vieu. P, *Estimation non paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle*, Rom. J. Pure & Applied Math., 52 (2008), 1-18.

[15] Ferraty. F, Vieu. P, *Non-parametric Functional Data Analysis*, Springer-Verlag, New-York, (2006).

[16] Ferraty. F, Vieu. P, *The functional nonparametric model and application to spectrometric data.* Comput. Statist. 17 (4) 545-564.(2002)

[17] Hall. P, et Vial. C, *Assessing extrema of empirical principal component. functions.* Ann. Statist. 34 1518-1544.(2006a)

[18] Kalbeisch. J. D, Prentice. R. L, *Estimation of the average hazard ratio. Biometrika* 68(1) :105-112 (1981)

[19] Kaplan. E. L, Meier. P, *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations* Journal of the American Statistical Association,vol. 53 p.457-481. (1958).

[20] Klein. J. P, et Moeschberger. M. L, *Survival analysis : techniques for censored and truncated data.* Springer-Verlag (2003)

[21] Laksaci, A, Lemdani, M. and Ould-Sa¨id, E. *Asymptotic results for an L^1 - norm kernel estimator of the conditional quantile for functional dependent data with application to climatology.* Sankhy : The Indian Journal of Statistics 73(1)-A, (2011) 125-141.

[22] Liebscher. E, *Central limit theorem for α-mixing triangular arrays with applications to nonparemetric statistics*, Mathematical Methods of Statistics, 10, No.2 (2001), 194-214.

[23] Manté. C, Yao. A.F, et Degiovanni. C, *Principal component analysis of measures, with special emphasis on grain-size curves Comp*. Stat. Data Anal. 51 (10) 4969-4984.(2007)

[24] Ramsay. J.O, *When the data are functions. Psychometrika*, 47, (1982) 379-396.

[25] Ramsay. J.O, *Différential equation models for statistical functions*. Canad. J. Statist. 28 (2) 225-240. (2000)

[26] Ramsay. J.O, Silverman. B.W, *Applied functional data analysis : Methods and case studies*, Spinger-Verlag, New York (2002) 2005.

[27] Ramsay. J.O, Silverman. B.W, *Functional Data Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, NewYork, 2005.

[28] Rao. C. R, *Some statistical methods for comparison of growth curves*, Biometrics 14. 1-17. (1958)

[29] Rosenblatt. M, *Acentral limit theorem and a strong mixing condition*, Proc. Nat.Acad. Sci., 42 (1956), 43-47.

[30] Tucker. L. R, *Determination of parameters of a functional relationship by factor analysis.*,Psychometrika, 23, (1958) 19-23.

[31] Vere-Jones. D, *Stochastic models for earthquake occurrence*. J. Roy. Statist. Soc. Ser, B. 32, 1-62.(1970)

[32] Watson. G. S, Leadbetter. M. R, *Hazard analysis. I*, Biometrika., 51 (1964),175-184.