République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Sur les valeurs propres du laplacien sur une surface

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie différentielle

par

Sahi **F**atima [1]

Sous la direction de

Dr K. Djerfi

Soutenue le 16/09/2020 devant le jury composé de

N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : fatimazohra.sahi@gmail.com

Remerciement

Voilà enfin, aprés de longues années de travail avec l'aide d'Allah, j'ai réussi à mettre en forme le manuscrit que vous avez entre les mains.

Un énorme remerciement que dois présenter en premier lieu à mon encadreur **K.Djerfi** qui m'a soutenue et m'a guidée au cours de la réalisation de ce mémoire, merci pour leur temps qu'elle m'a consacré.

J'adresse un garnd merci a les membres du jury d'avoir bien voulu présider mes jury et d'avoir examiner ce travail.

Mes remerciments s'adressent également à tout mes enseignants de l'université Dr.Moulay Tahar de Saida.

Je remercie mon père, ma mère, mes soeurs, mes frères et mes amies pour leur soutien durant toute la péroide de ma préparation de mon mémoire.

Sahi Fatima

Table des matières

Introduction

La géométrie spectrale des une spécialité qui se trouve au carrefour géométrie différentielle, théorie spectrale et analyse mathématique. Cette discipline trouve naissance au milieu des années soixante. A partir de son article historique "Can we hear the form of a tambor", Mark Kack présente une conjecture qui relie le spectre du laplacien d'une variété riemannienne au invariants géométriques de cette variété. Cette question motive beaucoup de mathématiciens qui cherchent autour des questions liées avec le spectre d'une variété riemanniennes. Même si la réponse vient plus tard négativement par un premier contre-exemple de Milnor, qui a construit deux variétés riemanniennes iso-spectrales non isométriques, les motivations de la question de M. Kack donnent des résultats en matière de compréhension des phénomènes en correspondance avec la première valeur propre du laplacien, l'estimation au voisinage de l'infini des valeurs des spectres, le comportement asymptotiques des fonctions propres, les ensembles nodaux,...etc. Dans notre mémoire on tient part des questions classiques de la géométrie spectrale dans un cadre spécifique restreint à la dimension deux, c'est le cas des surfaces compactes. Le premier chapitre est consacré à la définition d'une surface et aux définitions élémentaires des caractéristiques géométriques dont elle est liée. Dans le deuxième chapitre on aborde la du laplacien comme un opérateur linéaire non-borné, défini sur une variété riemannienne quelconque. En partant des connaissances classiques de la théorie spectrale, on constate que dans le cas où la variété riemannienne est compacte, cet opérateur est auto-adjoint, défini positif, donc son spectre est une suite de réels positif qui tend vers l'infini. Cette suite sera appelée dans la littérature "spectre de la variété riemannienne" est beaucoup de questions seront par suite abordées à propos de ce spectre.

Le troisième chapitre est consacré à un cas particulier de résultats obtenus pour les surfaces. La question principale évoquée à ce sujet est l'estimation de la première valeur propre du laplacien sur la surface. Les résultats obtenus portent sur la minimisation ou la maximisation de cette première valeur propre par rapport à des quantités géométriques de la surface.

Chapitre 1

Introduction aux surfaces paramétrées

1.1 surface paramétrée

On remplace dans $\mathbb{R}^3$ espace affine euclidien orienté $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ l'espace vectoriel associe
$\mathbb{R} = (o, B_o)$ un repère de $\mathbb{R}^3$avec o= origine de $B_O = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ b.o.n derecte de $\mathbb{R}^3$
e.v euclidien orienté par le choix de cette base.

Définition 1.1.1.
On appelle surface paramétrée *de classe* $\mathcal{C}^k$,*une application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & D \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) \quad de \quad classe \quad \mathcal{C}^k \end{array}$$

$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
On notera S *l'image de* D *par* φ
S $= \varphi(D)$ *est la Surface engendrée par* φ

Exemple 1.1.1.

1. *Le graphe d'une fonction Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^k$.

On définit La surface S *paramétrée par :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,y,z=f(x,y)) \end{array}$$

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2+y^2 \leq 1\}$ *D :Disque unité*

$$\begin{array}{rccc} f : & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{1-x^2-y2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & D & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,y,\sqrt{1-x^2-y2}) \end{array}$$

1.1.1 Surface régulière :

Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) \end{array}$$

$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$

On fixe un point $(u_0, v_0) \in D$

1. Pour $u = u_0$, On obtient une application notée γ_{u_0},définie par :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{u_0} : & I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \gamma_{u_0}(t) = \varphi(u_0,t) \end{array}$$

γ_{u_0} est donc une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ tracée sur S

– Le vecteur tangent à γ_{u_0} au point de paramètre $t = V_0$ est donne par : $\gamma'_{u_0}(t)|_{t_0=V_0}$

$$\begin{array}{rcl} \gamma'_{u_0}(v_0) & = & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v=v_0) \\ & = & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\overrightarrow{k} \end{array}$$

Notons ce vecteur tangent a la courbe γ_{u_0} au point de paramètre v_0 par :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{T}_v(u_0,v_0) & = & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) \\ & = & \varphi_v(u_0,v_0) \end{array}$$

2. Pour $v = v_0$,On obtient une application notée γ_{v_0} définie par :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{v_0}: & j \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \gamma_{v_0}(t) = \varphi(t, v_0) \end{array}$$

γ_{v_0} est donc une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ tracée sur S le vecteur tangent à γ_{v_0} au point de paramètre $t = u_0$ est donne par : $\gamma'_{v_0}(t)|_t = u_0$

$$\begin{array}{rcl} \gamma'_{v_0}(u_0) & = & \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u = u_0, v_0) \\ & = & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\overrightarrow{k} \end{array}$$

Notons ce vecteur tangent à γ_{v_0} au point de paramètre u_0 par

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{T}_u(u_0, v_0) & = & \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \\ & = & \varphi_u(u_0, v_0) \end{array}$$

Définition 1.1.2.
Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & \varphi(u, v) \end{array}$$

Une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$
Soit $(u_0, v_0) \in D$ *,On dit :*
Que la paramétrisation est régulièr *ou point* $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ si *les deux vecteurs tangents* $\overrightarrow{\mathrm{T}_u}(u_0, v_0) = \varphi_u(u_0, v_0)$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{T}_v}(u_0, v_0) = \varphi_v(u_0, v_0)$
Soit Linéairement indépendents $(\Leftrightarrow \varphi_u(u_0, v_0) \cap \varphi_v(u_0, v_0) \neq 0_{\overrightarrow{R^3}})$
Sinon, On dit que le point $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ *est un point singulier*
La surface est dit régulièr *si* tous ses points sont reguliers.

$$\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0 \qquad \forall (u, v) \in D$$

Définition 1.1.3. *(Plan tangent)*
Soit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & \varphi(u, v) \end{array}$$

Une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k(k \geq 1)$ *avec* $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ *un point régulier de cette surface.*

– *On appelle* Plan tangent *à la surface au point* P_0 *le plan affine passant par*
$p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ *et dirigé par les deux vecteurs* $\varphi_u(u_0, v_0)$ *et* $\varphi_v(u_0, v_0)$
Puisque $\overrightarrow{N}(\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0) = \varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)$ *est perpendiculaire au plan tangent en* $\varphi(u_0, v_0)$,*On en déduit :*

$$P = \varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

T_pS =*plan tangent à la surface au point* P
$\mathrm{S} = \varphi(D)$

$$M(x, y, z) \in T_pS \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{N}(u_0, v_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X - x_0 \\ Y - y_0 \\ Z - z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$a(X - x_0) + b(Y - y_0) + c(Z - z_0) = 0$
$aX + bY + cZ - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$ *un équation de* T_pS *avec* $\overrightarrow{N}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

les deux vecteur $\varphi_u(u_0, v_0)$ *et* $\varphi_v(u_0, v_0)$ *forment une base de* T_pS *en* P.

Définition 1.1.4. *Soit :*
$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *une Surface paramétrée de classe* $\mathcal{C}^k(K \geq 1)$,$\mathrm{S} = \varphi(D)$
Soit :
$P = \varphi(u_0, v_0) \in \mathrm{S}$ *un point régulier le vecteur* $\overrightarrow{W}_p = \frac{(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_0, v_0)}{\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_0, v_0)\|}$ *est appelé vecteur unitaire à* S *en* $p = \varphi(u_0, v_0)$ *et on a* $\overrightarrow{N}_p \perp \mathrm{T}_p\mathrm{S}$

Proposition 1.1.1. *Soit :*
$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *une surface régulier de classe* $\mathcal{C}^k$,$k \geq 1$,*On définit*

– $E = \|\varphi_u\|^2 = \varphi_u.\varphi_u$
– $F = \varphi_u.\varphi_v$
– $G = \|\varphi_v\|^2 = \varphi_v.\varphi_v$

Alors :$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$
S *est reguliére* $\Leftrightarrow EG - F^2 \neq 0$

1.1.2 Orientation d'une surface :

Soit : S une surface régulière de classe $\mathcal{C}^k(k \geq 1)$paramétrée par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) \end{array}$$

$(\mathrm{S} = \varphi(D))$ Soit $p = \varphi(u,v) \in \mathrm{S}$

$$\overrightarrow{N}_p = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\| \varphi_u \wedge \varphi_v \|}$$

$\overrightarrow{N}_p \perp \mathrm{T}_p\mathrm{S}$
(on a aussi $-\overrightarrow{N}_p \perp \mathrm{T}_p\mathrm{S}$) une surface Orientée est une surface avec deux Côtés dont on sait définir un coté comme le coté Interieure et l'autre coté comme le coté extérieure
En chaque point Régulier de la surface, il ya deux normales unitaires $\overrightarrow{N}_1$ et $\overrightarrow{N}_2$ ($\overrightarrow{N}_2 = -\overrightarrow{N}_1$) la surface est Orientée si on peut associe à chacune de ces normales un coté de la Surface

1.1.3 Flux d'un champ de vecteurs à travers une Surface

Soit S une surface orientée est soit : $\overrightarrow{N}$ un choix de normale unitaire . On suppose que S est paramètre par :

$$\begin{array}{rcccc} \varphi : & D \subset \mathbb{R}^2 & \overset{\mathcal{C}^k}{\to} & \mathbb{R}^3 & k \geq 1 \\ & (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) & \end{array}$$

On définit l'élément d'aire vectoriel $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{N} ds (ds = (\varphi_u \wedge \varphi_v) du \wedge dv)$
Soit $\overrightarrow{v}$ un champ de Vecteurs continue définie sur S(oû un voisinage de S)
On appelle flux de $\overrightarrow{v}$ à travers S (oû integrale de $\overrightarrow{V}$ sur S) l'integrale notée

$$\int_{\mathrm{S}} \overrightarrow{V} \overrightarrow{ds}$$

$$Flux_S(\overrightarrow{V}) = \int_{\mathrm{S}} \overrightarrow{V} ds = \int_D \overrightarrow{V} \overrightarrow{N} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Soit : $(u,v) \mapsto \varphi(u,v) \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$
une représentation paramétrique de classe $\mathcal{C}^k(k \geq 1)$ de la surface S On

considéré deux application $\begin{array}{ccc}(u,v) & \overset{P}{\mapsto} & P(u,v)\\ (u,v) & \overset{q}{\mapsto} & q(u,v)\end{array}$ de classe $\mathcal{C}^k$ de u dans le plan tel que le jacobien

$$\frac{\partial(P,q)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v}\\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

il est possible que l'application
$(u,v)\mapsto(P(u,v),q(u,v))$ ne sont pas bijective de u dans le plan (p,q)
En utilisant le théorème des fonctions inverses ,pour chaque $(u_0,v_0)\in u\subset\mathbb{R}^2$,il existe ω un voisinage de ce point et ω^* un voisinage de $(P_0,q_0)=(P(u_0,v_0),q(u_0,v_0))$ des le plan tel que $(u,v)\mapsto(P(u,v),q(u,v))$ est une bijection de $\omega\rightarrow\omega^*$ et sont inverse $(P,q)\mapsto(u,v)$ et aussi de classe $\mathcal{C}^k$.
Considérons la composée des ces applications
$\varphi^*(P,q)=\varphi(u(P,q),v(P,q))$ c'est une applications $\varphi^*(P,q)=\varphi(u(P,q),v(P,q))$
C'est une application de
$\omega^*\rightarrow$ S et on a :

$$\varphi_p^*\wedge\varphi_q^*=(\varphi_u U_p+\varphi_v V_p)\wedge(\varphi_u U_q+\varphi_v V_q)$$

où $u_p=\frac{\partial v}{\partial P}$,$v_P=\frac{\partial v}{\partial P}$,$u_q=\frac{\partial u}{\partial q}$,$v_q=\frac{\partial v}{\partial q}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\varphi_p^*\wedge\varphi_q^* &= (\varphi_u\wedge\varphi_v)u_pv_q+(\varphi_v\wedge\varphi_u)u_qv_p\\ &= \varphi_u\wedge\varphi_v(u_pv_q-u_qv_p)\\ &= |\tfrac{\partial(u,v)}{\partial(q,p)}|\varphi_u\wedge\varphi_v\end{aligned}$$

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(P,q)}=\left(\frac{\partial(P,q)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\neq 0$
si :$\varphi_u\wedge\varphi_v\neq 0_{\overrightarrow{\mathbb{R}}^3}$
Alors :$\varphi_p^*\wedge\varphi_q^*\neq 0_{\overrightarrow{\mathbb{R}}^3}$
Doû $(P,q)\mapsto\varphi^*(P,q)$ le vecteur de représentation régulière de classe $\mathcal{C}^k$ de la surfaces .

Définition 1.1.5.
Une coordonnée locale de classe $\mathcal{C}^k$ sur une surface S *dans* $\mathbb{R}^3$ *est une application $\varphi=\varphi(u,v)$ d'une ouvert ω du plan (u,v) dans* S

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \omega & \rightarrow & S\\ & (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v)\end{array}$$

– *φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur ω*
– *$\forall (u,v) \in \omega$ on a :$\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0_{\overrightarrow{\mathbb{R}}^3}$*
– *φ est un homéomorphisme locale .*
le couple (ω, φ) est appelé carte locale

Soit :$\varphi : (u,v) \subset D$
$\varphi : (u,v) \mapsto \varphi(u,v)$ une représentation paramétrique Régulière d'une Surface S
Soit P le plan tangent passant par le point M et les vecteurs φ_u et φ_v définis par une coordonnée locale qui passant par M de Soit que les vecteurs $(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_u \wedge \varphi_v)$ forment un Trièdre direct

$$\overrightarrow{n} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u, \varphi_v\|} \quad \textit{vecteur} \quad \textit{normale} \quad \textit{unitaire}$$

Soit $\varphi^*(P,q)$ une autre représentation paramétrique de la surface régulière S dont la carte contre le point M,

$$\begin{pmatrix} P: & (u,v) & \mapsto & P(u,v) \\ q: & (u,v) & \mapsto & q(u,v) \end{pmatrix}$$

$\varphi_p^* \wedge \varphi_q^* = \frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)} \varphi_u \wedge \varphi_v,$
$\overrightarrow{n}^* = \frac{\varphi_p^* \wedge \varphi_q^*}{\|\varphi_p^* \wedge \varphi_q^*\|} = \frac{1}{|\frac{\partial(u,v)}{\partial(P,q)}|.\|\varphi_u.\varphi_v\|} . \frac{\partial(u,v)}{\partial(P,q)} \varphi_u \wedge \varphi_v$
$\mathrm{J} = \frac{\partial(P,q)}{\partial(u,v)}$ $\quad \mathrm{J}' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(P,q)} = \mathrm{J}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{J}}$

$$\overrightarrow{n}^* = \frac{\mathrm{J}}{|\mathrm{J}'|} \overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{n}^* = sign\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(P,q)} \right) \overrightarrow{n}$$

1.2 Les formes fondamentales

1.2.1 la première forme fondamentale

Soit S une surface régulière de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 1$ sont $\varphi = \varphi(u,v)$ les coordonnée locales

On appelle la différentielle de φ note $d\varphi$ une application bijective du vecteur (du, dv) dans le plan (u,v) qui associe le vecteur

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv \\ &= \varphi_u du + \varphi_v dv \end{aligned}$$

dans le plan tangent .

$$I = \|d\varphi\|^2 =< d\varphi, d\varphi >=< \varphi_u du + \varphi_v dv, \varphi_u du + \varphi_v dv >$$

$$I = \|\varphi_u\|^2 du^2 + 2 < \varphi_u, \varphi_v > dudv + \|\varphi_v\|^2 dv^2$$

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

La forme quadratique.

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

E,F et G sont appelés les coefficients de la 1 ère forme fondamentale

Remarques :

1. $I(du, dv) = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$
   la matrice $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ Symétrique réel toujours diagonalisable la 1 ère forme fondamental $I(du, dv)$ est formée par la matrice $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$
   on à : $\begin{cases} E = & \|\varphi_u\|^2 > 0 \\ detA = & EG - F^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ La matrice $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique définie positive $A \in \mathrm{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ toutes les valeurs propres sont Strictement positives. $I(du, dv)$ est une forme définie positive.
2. La forme $I(du, dv)$ ne dépend pas de la coordonnée locale choisie :
   Preuve : Soient (u, φ) et (v, φ^*) deux cartes local $G = U \cap V \neq \varnothing$ $det\left(\frac{\partial(P,q)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0$ on a :

$$\varphi(u, v) = \varphi^*(p(u, v), q(u, v)) \in G$$

$$\begin{array}{rcc} I^*(du,dv) & = & <\varphi_p^* dp + \varphi_q^*, \varphi_p^* dp + \varphi_q^* dq> \\ & = & \|\varphi_p^* dp + \varphi_q^* dq\|^2 \\ & = & \|\varphi_p^*(P_u du + P_v dv) + \varphi_q^*(q_u du + q_v dv)\|^2 \\ & = & \|(\varphi_p^* P_u + \varphi_q^* q_u)du + (\varphi_p^* P_v + \varphi_q^* q_v)dv\|^2 \\ & = & \|\varphi_u du + \varphi_v dv\|^2 \\ & = & \|d\varphi\|^2 = I(du,dv) \end{array}$$

3. $(E(u,v), F(u,v), G(u,v)) \neq (E^*(p,q), F^*(p,q), G^*(p,q))$

$$\begin{array}{rcc} E(u,v) & = & \|\varphi_u\|^2 \\ & = & \|\varphi_p^* P_u + \varphi_q^* q_u\|^2 \\ & = & <\varphi_p^* P_u + \varphi_q^* q_u, \varphi_p^* P_u + \varphi_q^* q_u> \\ & = & E^*(p,q)Pu^2 + 2F^*(p,q)P_u q_u + G^*(p,q)q_u^2 \end{array}$$

De même :

$F(u,v) = E^*(p,q)P_u P_v + F^*(P,q)P_u q_v + F^*(P,q)(P_u q_v + P_v q_u) + G^*(P,q)q_u q_v$

et

$G(u,v) = E^*(P,q)P_v^2 + 2F^*(P,q)P_v q_v + G^*(P,q)q_v^2$

Exemple 1.2.1. *Soit S la surface définie par :*

$$\begin{array}{rcc} \varphi(u,v) & = & (u+v)e_1 + (u-v)e_2 + uve_3 \\ & = & (u+v, u-v, uv) \end{array}$$

$\varphi_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$

$\varphi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}$

- $E = \|\varphi_u\|^2 = 2 + v^2$
- $F = \varphi_u.\varphi_v = uv$
- $G = \|\varphi_v\|^2 = 2 + u^2$

$I(du,dv) = (2+v^2)du^2 + 2uvdudv + (2+u^2)dv^2$

$E > 0, EG - F^2 = 2(2+u^2+v^2) > 0$ *On cosidére un changement de Paramétre*

$P = u+v, \varphi = u - v$

$$\left| \frac{\partial(P,q)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

c'est un changement admissible de paramétre

$$\varphi(u,v) = (u+v)e_1 + (u-v)e_2 + uve_3$$

$$\varphi^*(P,q) = pe_1 + qe_2 + \frac{1}{4}(P^2 - q^2)e_3$$

$$\varphi_p^*(P,q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{2} \end{pmatrix}, \varphi_q^*(P,q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-q}{2} \end{pmatrix}$$

$$E^*(P,q) = 1 + \frac{P^2}{4}$$

$$F^*(P,q) = \frac{-Pq}{4}$$

$$G^*(P,q) = 1 + \frac{q^2}{4}$$

On prend :$(u,v) = (1,1) \Rightarrow (P,q) = (2,0)$

$$E(1,1) = 3, F(1,1) = 1, G(1,1) = 3$$

$$E^*(2,0) = 2, F^*(2,0) = 0, G^*(2,0) = 1$$

les coefficients de la 1 ére forme fondamentales ne sont pas invariant par un changement admissible de paramétre .

1.2.2 la deuxième forme fondamentale

Soit $(u,v) \mapsto \varphi(u,v)$ une représentation paramétrique D'une surface régulière S de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 2$
$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$, Notons : $dN = N_u du + N_v dv$

$$N_u = dN_p(\varphi_u) \qquad N_v = dN_p(\varphi_v)$$

on a :$\|N\|^2 = 1$
$\Rightarrow < N, N >= 1 \Rightarrow 2 < dN, N >= 0$
$\Rightarrow$ N est orthogonal à dN,au point $\varphi(u,v) \Rightarrow$ en ce point $\varphi(u,v)$
dN est dans le plan tangent T_pS

$$\begin{aligned} II(du,dv) &= -d\varphi - dN \\ &= -< d\varphi, dN > \\ &= -< \varphi_u du + \varphi_v dv, N_u du + N_v dv > \\ &= -< \varphi_u, N_u > du - (< \varphi_u.N_v > + < \varphi_v.N_u >)dudv - < \varphi_v, N_v > dv^2 \end{aligned}$$

Oû :

- $L = -< \varphi_u, N_u >$
- $M = -\frac{1}{2}(< \varphi_u, N_v > + < \varphi_v, N_u >)$
- $N = -< \varphi_v, N_v >$

$II(du,dv)$ est appelée la 2 éme forme fondamentale associée à $\varphi(u,v)$ L,M,N sont appelés les coefficients de la 2 éme forme fondamentale (les Seconds coefficients fondamentaux)

Or on a

- $< \varphi_u, N >= 0 < \varphi_{uu}, N > + < \varphi_u, N_u >= 0$

  $L =< \varphi_{uu}, N >$ ou $\varphi_{uu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u}$
- $\begin{cases} < \varphi_u, N > &= 0 \\ < \varphi_v, N > &= 0 \end{cases}$

  $\begin{cases} < \varphi_{uv}, N > + < \varphi_u, N_v > &= 0 \\ < \varphi_{uv}, N > + < \varphi_v, N_u > &= 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow M =< \varphi_{uv}, N > \qquad \varphi_{uv} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}$
- $< \varphi_v, N >= 0$

  $\Rightarrow < \varphi_{vv}, N > + < \varphi_v, N_v >= 0$

  $N =< \varphi_{vv}, N > \qquad \varphi_{vv} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$

Remarque :

La 2 éme forme fondamentale est aussi invariante par un changement admissible de paramètre .

Si $\varphi^*(P,q)$ est une autre représentation paramétrée que De la surface.

telque : $\quad \varphi(u,v) = \varphi^*(p(u,v), q(u,v))$

$|\frac{\partial(P,q)}{\partial(u,v)}| \neq 0$

- $L = L^* P_u^2 + 2M^* P_u q_u + N^* q_u^2$
- $M = L^* P_u q_v + M^*(P_u q_v + p_v q_u) + N^* q_u q_v$
- $N = L^* P_v^2 + 2M^* P_v q_v + N^* q_v^2$

$II^{**}(P,q) = II(du,dv)$
$LN - M^2 = |\frac{\partial(P,q)}{\partial(u,v)}|(L^*N^* - (M^*)^2)$
$II(du,dv) =< d^2\varphi, N >$
$d^2\varphi = \varphi_{uu}du^2 + 2\varphi_{uv}dudv + \varphi_{vv}dv^2$
La fonction

$$\delta = \frac{1}{2}II(du,dv) = \frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)$$

S'appelle **paraboloïde osculateur** du point p et la nature de cette paraboloïde dépend du signe de $LN - M^2$ distingue quatre cas :

1. **cas elliptique** :
   $LN - M^2 > 0$ un point est dit **elliptique** si
   $$LN - M^2 > 0$$
   en ce point la fonction δ gande un signe Constant dans un voisinage du point p.
2. **cas hyperbolique** :
   $(LN - M^2 < 0)$un point est dit **hyperbolique** si
   $$LN - M^2 < 0$$
   en ce point .
3. **cas parabolique** : $(LN - M = 0)$
   $$LN - M^2 = 0$$
   en ce point sans que tous les coefficient L,M et N sont nuls
4. **cas planaire** : $(LN - M^2 = 0 \quad et L^2 + M^2 + \omega^2 = 0)$
   Dans ce cas on a
   $$L = M = N$$
   Et la 2 éme forme fondamentale sera identiquement nulle.

Chapitre 2

Le laplacien

2.1 Le laplacien

2.1.1 Divergence d'un champ de vecteurs. Opérateur δ

Sur la variété riemannienne (M,g) nous définissons une application linéaire de $\mathfrak{X}(M)$ dans $\mathcal{C}^{\infty}(M)$, Appelée Divergence, et définie comme suit :

Définition 2.1.1. *:*
La divergence d'un champ de vecteur ξ sur M est la fonction $div\xi$ définie, localement, par l'égalité :

$$d(\xi \lrcorner \omega) = div\xi.\omega$$

où ω désigne la forme volume correspondant à une Orientation Locale.

Note : Dans cette définition, $\xi \lrcorner \omega$ Désigne le produit contracté De ξ et de la n-forme ω (n, dimension de la variété M), C'est-à-dire la $(n-1)$-forme définie par :

$$(\xi \lrcorner \omega)(X_1, ..., X_{n-1}) = \omega(\xi, X_1, \ldots, X_{n-1}) \qquad \forall (X_1, ..., X_n) \in \mathfrak{X}(M) \quad (2.1)$$

On vérifie immédiatement que $div\xi$ ne dépend pas de La forme locale ω choisie ; la divergence est donc définie globalement sur (M,g).
On vérifiera aisément la proposition Suivante :

Proposition 2.1.1.
La divergence vérifie l'égalité :

$$div(f.\xi) = f.div\xi + df(\xi) \qquad \begin{array}{c} \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(M) \\ \forall \xi \in \mathfrak{X}(M) \end{array}$$

Par dualité, nous obtenons à partir de div un opérateur sur l'espace $A^1(M)$ *des l-formes, appelé* δ *et défini comme suit :*

Définition 2.1.2.
on appelle δ *l'opérateur de* $A^1(M)$ *dans* $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ *défini par :*

$$\delta_{\alpha} = div(\alpha^{\#}) \qquad \forall \alpha \in A^1(M))$$

.

Note :L'espace des p-formes sera dèsormais not $A^p(M)$ au lieu de T($\wedge^p T^* M$) . Ainsi, ici,$A^1(M)$ au lieu de T(T^*M) , et aussi $A^0(M)$ au lieu de $\mathcal{C}^{\infty}(M)$.

Si M est compacte, les espaces $A^p(M)$ sont munis d'une structure Préhilbertienne, définie à partir du produit scalaire (.|.) Sur l'espace euclidien T$(\wedge^p T^* M)_p$ et de la mesure canonique V_g sur (M,g) ; le produit scalaire global est noté $< ., . >$. On a donc, si α et β sont deux-formes sur M ,leur produit scalaire local est la fonction $(X|Y)$ définie par

$$(X|Y)(m) = (X_m|Y_m) = g_m(X_m, Y_m)$$

Leur produit scalaire global est défini par .

$$< \alpha, \beta >= \int_M (\alpha|\beta).V_g \tag{2.2}$$

Nous nous proposons de montrer que les opérateurs d et δ sont, par rapport aux structures préhilbertiennes de $A^{\circ}(M)$ et $A^1(M)$, adjoins l'un de l'autre, c'est-à-dire :

Proposition 2.1.2.

$$< df, \alpha >=< f, \delta\alpha > \qquad \begin{array}{c} \forall f \in A^0(M) \\ \forall \alpha \in A^1(M) \end{array}$$

L'égalité 2.1.2 s'écrit encore :

$$\int_M (df|\alpha).V_g = \int_M f.\delta\alpha.V_g$$

et il nous suffit, pour la démontrer, de montrer que l'on a :

$$\int_M (df|\alpha).\omega = \int_M f\delta\alpha.\omega$$

où ω est n-forme volume définie localement au voisinage d'un point quelconque de la variété. Soit donc :

$$I = \int_M (df|\alpha).\omega - \int_M (f\delta\alpha).\omega$$

. A cause de 2.1.1 et 2.1.2, nous avons

$$I = \int_M [(df|\alpha) + fdiv\alpha].\omega$$

.

Or, du fait de 2.1.1, nous avons :

$$fdiv\alpha^{\#} = div(f\alpha^{\#}) - df(\alpha^{\#})$$

et, par définition,

$$(df|\alpha) = df(f\alpha^{\#})$$

si bien que :

$$\begin{array}{rlr} I = & \int_M div(f\alpha^{\#}).\omega & = \ldots \\ = & \int_M d(f\alpha^{\#} \lrcorner \omega) & \end{array}$$

C'est-à-dire, à cause de Stokes :

$$I = 0$$

ce qui démontre 2.1.2

De même que d est défini, non seulement sur $A^0(M)$, mais aussi sur $A^p(M)$, pour tout p , l'opérateur δ est lui-même défini sur $A^p(M)$. Le couple

$$A^p \quad \begin{array}{c} \overset{\delta}{\leftarrow} \\ \overset{d}{\rightarrow} \end{array} \quad A^{p+1}(M)$$

Est encore adjoint.

2.1.2 Calcul explicite de la divergence et de δ

Calcul en coordonnées locales :

Nous nous donnons en m, une carte locale (X^i) , à laquelle est attachée une fonction réelle $\theta = \sqrt{det(g_{ij})}$, telle que, localement, la forme volume associée s'exprime par :

$$\omega = \theta.dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{2.3}$$

si (X_i) est le champ local de repére associé à la carte (X^i) . (c'est-à-dire $X_i = \frac{\delta}{\partial X_i}$),on a :

$$\begin{aligned} \xi \lrcorner \omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n) &= \omega(\xi, X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n) = ... \\ &= (-1)^{i-1}\omega(X_1, \ldots, \xi, \ldots, X_n) = \ldots \\ &= (-1)^{i-1\theta}.\xi^i \end{aligned}$$

Où, ξ^i désigne la $i^{\text{éme}}$ composante de ξ .
On a donc :

$$\xi \lrcorner \omega = \sum_i (-1)^{i+1}(\theta.\xi^i)dx^i \wedge, \ldots, \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots dx^n \tag{2.4}$$

et, par conséquent

$$\begin{aligned} d(\xi \lrcorner \omega) &= \sum_i (-1)^{i+1}\tfrac{\partial(\theta.\xi^i)}{\partial X^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots dx^n = \ldots \\ &= \sum_i \tfrac{\partial(\theta.\xi^i)}{\partial X^i} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \ldots \\ &= \theta^{-1}(\sum_i \tfrac{\partial(\theta.\xi^i)}{\partial X^i}).\omega \end{aligned} \tag{2.5}$$

Si bien que

$$div\xi = \theta^{-1}\sum_i \frac{\partial(\theta.\xi^i)}{\partial X^i}) \tag{2.6}$$

Dans la même carte, une l-forme α s'exprime par :

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i \tag{2.7}$$

et par conséquent :

$$\alpha^{\#} = \sum_{i,j} (g^{ij}\alpha_j)X_i \tag{2.8}$$

où g^{ij} est l'élément générique de la matrice inverse de (g_{ij}). il Suit alors de 2.1.2,que :

$$\delta\alpha = -\theta^{-1}\left(\sum_{i,j} \frac{\partial(\theta g^{ij}\alpha_j)}{\partial x^i} \right) \tag{2.9}$$

Formulation géométrique :

La dérivée covariante d'une 1-forme α est une 2-forme $D\alpha$ qui possède une trace égale à :

$$trace \quad D\alpha = \sum_i D\alpha(X_i, X_i) \tag{2.10}$$

où $\{X_i\}$ est un champ de repères orthonormés.
Comme on a L'égalité :

$$(D_{X_i}\alpha^{\#}|X_i) = D\alpha(X_i, X_i) \tag{2.11}$$

on voit que la trace $D\alpha$ est égale à la trace de l'endomorphisme :

$$X \to D_X\alpha^{\#}$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.3.
Pour toute 1-forme α définie sur la v.r. (M,g) :

$$\delta\alpha = -trace \quad D\alpha$$

Notons d'abord que, si ω est une p-forme quelconque et ξ un champ de vecteur sur M , alors nous avons l'égalité :

$$D_X(\xi \lrcorner \omega) = D_X\xi \lrcorner \omega + \xi \lrcorner D_X\omega \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

que l'on déduit par exemple de (2.1.3). Comme, la dérivée covariante D_ω d'une forme volume est nulle (invariance du volume par transport parallèle), on a donc :

$$D_X(\xi \lrcorner \omega) = D_X\xi \lrcorner \omega \qquad \forall X, \xi \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.12}$$

D'autre part, si ω est une p-forme alternée sur M , sa différentielle extérieure $d\omega$ est l'anti-symétrisée de sa dérivée covariante,

$$d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{P}(-1)^i D_{X_i}\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_1}, \ldots, X_p) \tag{2.13}$$

Soit maintenant, $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ un repère orthonormé sur un voisinage U d'un point m de M.

Considérons la (n-1)-forme $\xi \lrcorner \omega$ où ξ est un champ de vecteur et ω une forme volume sur U . On a :

$$\begin{aligned} d(\xi \lrcorner \omega)(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} D_{X_i}(\xi \lrcorner \omega)(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n) = \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(D_{X_i}\xi \lrcorner \omega)(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n) = \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \ldots, D_{X_i}\xi, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

Comme $\{X_i\}$ est orthonormé on a :

$$D_X\xi = \sum_i (D_X \quad \xi | X_i) X_i$$

si bien que l'on a finalement :

$$\begin{aligned} d(\xi \lrcorner \omega)(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_i (D_{X_i} \quad \xi | X_i).\omega(X_1, \ldots, X_n) = \ldots \\ &= \sum_i (D_{X_i} \quad \xi | X_i) \end{aligned}$$

d'oû, finalement :

$$div\xi = -\sum_i (D_{X_i}\xi | X_i)$$

et

$$\delta\alpha = -trace D\alpha$$

c'est à dire (2.1.3)

2.1.3 Le laplacien

Définition 2.1.3. *:*

Le laplacien, noté $\bigtriangleup$ *, est l'opérateur de* $A^0(M)$ *dans* $A^0(M)$ *défini par :*

$$\bigtriangleup f = \delta df \qquad\qquad f \in A^0(M).$$

Expression en coordonnes locales :

Elle est donnée par 2.9 où l'on remplace α par df , c'est-à-dire α_j par $\frac{\partial f}{\partial X^j}$.

il vient :

$$\Delta f = -\theta^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial \left(\theta \times g^{ij} \frac{\partial f}{\partial X^j} \right)}{\partial X^i} \tag{2.14}$$

Le laplacien est donc un opérateur différentiel du second ordre ; sa partie homogéne du second ordre s'écrit :

$$\sigma = -\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j} \tag{2.15}$$

c'est une forme quadratique formelle, égale a l'opposé du carré de la norme. Elle est donc non-dégénérée ; on dit alors que le laplacien est un opérateur différentiel elliptique du second ordre ; sur les opérateurs différentiels elliptiques.

Considérons, maintenant, autour de m , la carte exponentielle ; le développement limité du relèvement de g sur l'espace $T_m M$ ne contient pas de terme du ler ordre .ce qui montre qu'en m les dérivées premières de g sont nulles ; en outre, le repère

$\{\frac{\partial}{\partial X^i}\}$est orthonormé en m ce qui veut dire que l'on a, en m :

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \quad 1 \\ g^{ij} &= 0 \quad i \neq j \end{aligned}$$

Nous avons donc, dans cette carte, une expression très simple du laplacien, *au point* m :

$$\Delta = -\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial X^{i^2}} \tag{2.16}$$

Application :
Considérons la fonction f.g , produit des deux fonctions réelles f et g . Plaçons-nous encore au point m ; nous avons, dans une carte exponentielle :

$$\Delta(f.g) = \sum_i \frac{\partial^2(f,g)}{\partial X^{i^2}}$$

c'est-à-dire,

$$\Delta(f.g) = f \times \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial X^{i^2}} - 2\sum_i \frac{\partial f}{\partial X^i}.\frac{\partial g}{\partial X^i} - g \times \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial X^{i^2}}$$

C'est à dire que les deux fonctions sur M , $\Delta(f \times g)$ et $f\Delta g \quad -2(df|dg)+ g \quad \Delta f$, ont même valeur en m , quel que soit m . On a donc :

Proposition 2.1.4.

$$\Delta(f.g) = f.\Delta g - 2(df|dg) + g.\Delta f \qquad \forall f, \forall g \in A^\circ(M)$$

Sur (R^n, g_0) les g_{ij} sont constants, si bien que 2.14 s'écrit :

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i^2}}$$

c'est-a-dire l'opposé du Laplacien usuel. Prolongeant la notion connue sur $\mathbb{R}^n$, on dira qu'une fonction réelle définie sur une v.r. est harmonique si elle vérifie l'égalité :

$$\Delta f = 0 \tag{2.17}$$

Formulation géométique du laplacien :
De 2.1.3 on tire l'égalité suivante par le laplacien :

$$\Delta f = -trace(D \quad df) \tag{2.18}$$

c'est à dire

$$\Delta f = -trace(Hessf) \tag{2.19}$$

Proposition 2.1.5. *Pour* $X \in T^\circ(TN)$,$S \in T^1_s(TM)$,*et* $f \in \mathcal{C}^1(N)$,

i) *L'application* $(X,S) \to D_X S$ *est* $\mathbb{R}$*-bilinéare*

ii) *on* $D_X fS = f.D_X S,$

iii) *on a* $D_X fS = fD_X S + (X,f)s$

Si $N \overset{S}{\to} M$ est une sous-variété paramétrée de M , si S est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ le long de s , et si $X \in T_m N$, on appel-lera dérivée covariante de S le long de S en X , et on notera $D_X S$, le vecteur $V[T_m S(x)] \in T_{S(m)}M$.
Remarquons que $D_X S$ est local en S , c'est-à-dire ne dépend que des valeurs de S au voisinage de m .

Désignons par $T^\circ(TN)$ l'ensemble des champs de vecteurs continus sur N , et par $T_S^1(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$ le long de S . On définit une application de
$T^\circ(TN) \times T_S^1(TM)$ dans $T^\circ(TM)$, espace des champs de vecteurs continus le long de S , par $(X,S) \to D_X S$ avec $(D_X S)_m = D_{X_m} S$.

considérons, en m , un repére orthonormé $\{X_i\}$, chaque vecteur x_i définissant une géodésique γ_i ,D'aprés $D_x fS = f.D_x S + (X.f)S$ nous avons :

$$\Delta f = -\sum_i \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2} \tag{2.20}$$

Cette expression du laplacien nous sera, par la suite, de la plus grande utilité.
La définition du laplacien ne fait intervenir que des invariants riemanniens ; la laplacien lui-méme est donc un tel invariant.Plus précisment ,si l'on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (M,g) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & (N,h) \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

et $\sigma = f \circ \varphi$

Où φ est une isométrie de (M,g) sur (N,h) , alors :

$$\Delta^M (f \circ \varphi) = \overset{N}{\triangle} f \circ \varphi$$

Proposition 2.1.6.

si $p : (M, g) \to (N, h)$ est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésique, alors, pour toute fonction f définie sur N ,on a :

$$\overset{M}{\triangle}(f \circ p) = \overset{N}{\triangle} f \circ p \tag{2.21}$$

On sait que l'espace tangent en un point m de (M,g) se scinde canoniquement en deux sous-espaces orthogonaux dont le second, dit horizontal, se projette isométriquement sur $T_{p(m)N}$; soit, donc, $\{X_i, Y_j\}_{i,j}$ une base de $T_m M$, ou X_i est une base du sous-espace i,j horizontal et Y_j une base du sous-espace vertical. Les géodésiques correspondantes sont notées Y_i et δ_j respectivement. D'aprés 2.20. on a :

$$\Delta^M (f \circ p) = -\sum_i \frac{d^2}{dt^2}(f \circ p \circ \gamma_i) - \sum_j \frac{d^2}{dt^2}(f \circ p \circ \delta_j)$$

Comme p est une submersion riemannienne la projection de γ_i est la géodésique attachée à la projection de x_i
Le premier terme du second membre de 2.20 est donc égal à $\Delta^n f \circ p$.
Le second terme est nul, car δ_j. est contenu, par hypothése, dans le fibre de p en m ,donc $f \circ p \circ \delta_j$ est constante.
L'égalité 2.20 est donc vérifiée.

L'hypothèse de 2.1.6 est très restrictive. Un cas particulier important où elle se trouve vérifiée est celui du produit $(M \times N, g \times h)$ des deux variétés riemanniennes (M,g) et (N,h).

$$\begin{tikzcd} & (M \times N, g \times h) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ (M,g) \arrow[dr, "a"'] & & (N,h) \arrow[dl, "b"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme ,p et q sont deux submersions riemanniennes a et b sont deux fonctions réelles définies respectivement sur M et N .

nous nous proposons de calculer , à l'aide de 2.1.6, le laplacien de $(a \circ p) \times (b \circ q)$ définie sur $M \times N$.

On a, d'aprés 2.1.4 :

$$\Delta^{M \times N}[(a \circ p) \times (b \circ q)] = (b \circ q) \times \Delta^{M \times N}(a \circ p) - \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots - 2(d(a \circ p)|d(b \circ q) + (a \circ p) \times \Delta^{M \times N}(b \circ q)).$$

Le deuxième terme est nul comme produit scalaire de deux formes orthogonales.

Le premier terme, d'après 2.1.4, vaut $(b \circ q) \times [\Delta^M(a) \circ p]$.

Le troisième, de même $(a \circ p) \times [\Delta^N(b) \circ q]$.

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta^{M \times N}[(a \circ p) \times (b \circ q)] = (b \circ q) \times [\Delta^M(a) \circ p] + \ldots \\ +(a \circ p)[\Delta^N(b) \circ q]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Si a est une fonction propre de Δ^M pour la valeur propre λ, et de même b pour Δ^N pour la valeur μ , il vient alors :

$$\Delta^{M \times N}[(a \circ p) \times (b \circ q)] = (\lambda + \mu)[(a \circ p) \times (b \circ q)]. \tag{2.23}$$

c'est-a-dire, $(a \circ p) \times (b \circ q)$ est une fonction propre de $\Delta^{M \times N}$ pour la valeur propre $\lambda + \mu$.

2.1.4 Le laplacien d'une variété compacte

comme les opérateurs d et δ sont adjoints sur la v.r. compacte (M,g), on à les deux égalités :

$$< \Delta f, g >=< f, \Delta g > \tag{2.24}$$

$$< \Delta f, f >= \|df\|^2 \qquad \forall f, \forall g \in A^\circ(M) \tag{2.25}$$

D'où :

Proposition 2.1.7.
Le laplacien d'une v.r. compacte (M,g) est un opérateur auto-adjoint et défini-positif.

De 2.25 on déduit qu'une fonction harmonique est localement constante, c'est-à-dire constante sur chaque composante connexe de M . Ceci n'est pas vrai sur une variété non compacte.

Formule de Bochner-Lichnerowicz :
Pour tout $f \in A^\circ(M)$,On a :

$$-\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) = |Hessf|^2 - |\Delta f|^2 + \rho(df^\#, df^\#)$$

où ρ désigne la courbure de Ricci de la v.r (M,g)

Lemme :
Pour toute forme $\alpha \in A^1(M)$ et tous X , $Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a :

$$D_X D_Y \alpha - D_Y D_X \alpha - D_{[X,Y]}\alpha = (R(X,Y)\alpha^\#)^b$$

Le lemme résulte immédiatement de la définition de la courbure, puisque la dérivée covariante commute aux isomorphismes musicaux.

Démonstration :

Nous nous donnons, en m , une base orthonormée pour $T_m M$: $\{X_i\}$; nous transportons cette base parallélement le long des géodésiques Y_i issues de m de façon à obtenir un champ de repères orthonormés $\{X_i\}$. En particulier, nous avons ainsi

$$D_{X_i} X_j(m) = 0_m \qquad \forall i, j. \tag{2.26}$$

En m , nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta(|df|^2) &= -\sum_i D_{X_i} D_{X_i}(|df|^2) = \dots \\ &= -2\sum_i D_{X_i}(D_{X_i} df|df) = \dots \\ &= -2\sum_i (D_{X_i} D_{X_i} df|df) - 2\sum_i (D_{X_i} df|D_{X_i} df). \end{aligned}$$

Le laplacien, après division par -2 , se trouve donc être la somme de deux termes dont le second n'est autre que le carré de la norme de Hessien

de f.
Le premier terme s'écrit $\sum_i (D_{X_i}D_{X_i}df|df)$; C'est la somme sur i ,de termes de la forme $(D_{X_i}D_{X_i}df|df)$,que s'écrivent encore ,puisque $\{X_i\}$ est orthonormé :

$$(D_{X_i}D_{X_i}df|df) = \sum_j [D_{X_i}D_{X_i}df](X_j) \times df(X_j)$$

calculons ,séparément ,le nombre $[D_{X_i}D_{X_i}df](X_j)$;il est égal ,par définition ,à

$$\begin{aligned} D_{X_i}D_{X_i}df(X_j) &= X_i.[D_{X_i}df(X_j)] - D_{X_i}df(D_{X_i}X_j) \\ &= X_i.[Hess(X_i,X_j)] - 0 \end{aligned} \quad (\text{ } cause \quad de \quad 2.1.4)$$

comme le hessien est symétrique on a finalement :

$$[D_{X_i}D_{X_i}df](X_j) = [D_{X_i}D_{X_j}df](X_i), \tag{2.27}$$

et donc :

$$(D_{X_i}D_{X_i}df|df) = \sum_i [D_{X_i}D_{X_j}df](X_i) \times df(X_j)$$

égal encore,à cause du lemme 2.1.4 ,à

$$\sum_j [D_{X_j}D_{X_i}df](X_i) \times df(X_j) + \sum_j (R(X_j,X_i)df^{\#}|X_i) \times df(X_j)$$

$+\sum_j D_{[X_i,X_j]}df(X_i) \times df(X_j)$
la dernier terme de cette somme est nul à cause de 2.26 .
Nous obtenons donc l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_i (D_{X_i}D_{X_i}df|df) &= \sum_{i,j} [D_{X_j}D_{X_i}df](X_i) \times df(X_j) + \dots \\ &+ \sum_{i,j} (R(X_j,X_i)df^{\#}|X_i) \times df(X_j) \end{aligned} \tag{2.28}$$

à cause de 2.26, le premier terme de cette somme peut s'écrire :

$$\sum_{i,j} D_{X_j}(D_{X_i}df(X_i)) \times df(X_j)$$

Soit

$$\sum_j D_{X_j}(\sum_i D_{X_i} df(X_i)) \times df(X_j).$$

c'est à dire :

$$-\sum_j D_{X_j}(\Delta f) \times df(X_j)$$

Soit,enfin :

$$-(d(\Delta f)|df) = -|\Delta(f)|^2$$

comme $\{X_i\}$est orthonormé ,on a :

$$df^{\#} = \sum_j df(X_j)X_j. \tag{2.29}$$

si bien que la second terme de 2.28 s'écrit :

$$\sum_i (R(df^{\#}, X_i)df^{\#}|X_i)$$

c'est à dire exactement la courbure de Ricci appliquée au couple $(df^{\#}, df^{\#})$: $\rho(df^{\#}, df^{\#})$ ceci achève la démonstration de 2.1.4

Le laplacien est défini sur les $A^p(M)$, pour tout p , par la formule :

$$\Delta\alpha = d\delta(\alpha) + \delta d(\alpha) \qquad \forall \alpha \in A^p(M) \tag{2.30}$$

Pour le laplacien, ainsi défini sur les p-formes, nous avons la formule de Bochner-Lichnerowicz généralisée suivante :

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) = |D\alpha|^2 - (\alpha|\Delta\alpha) + WBL(R,\alpha) \qquad \forall \alpha \in A^p(M) \tag{2.31}$$

Où WBL(R,α) est quadratique en α et linéaire en le tenseur de courbure R .

2.2 Le spectre d'une variété riemannienne

Dorénavant, par v.r. nous entendrons toujours variété riemannienne connexe et compacte.

Définition 2.2.1. *(premieres propriétés)*
Soit (M,g) une v.r A l'aide de la structure g , on a mis sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ un opérateur Δ , qui est un opérateur différentiel elliptique autoadjoint défini positif .

Définition 2.2.2. *On appelle spectre de la v.r. (M,g), et on note Spec(M,g), l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $f \neq 0$, vérifiant $\Delta f = \lambda f$*

soit $\mathrm{C}^\infty(M)$ l'espace des fonctions C^∞ sur M à valeurs dans C, muni de la structure préhilbertienne $< f, h >_{\mathbb{C}} = \int_M f\overline{h}v_g$.
Soit $\Delta_{\mathbb{C}}$ l'extension de Δ à $\mathrm{C}^\infty_{\mathbb{C}}(M)$. C'est un opérateur réel autoadjoint défini-positif.
Donc Spec(M,g) est aussi l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbb{C}}(M)$, $f \neq 0$, vérifiant $\Delta f = \lambda f$.
Toute $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ telle que $\Delta f = \lambda f$, avec $\lambda \in$Spec(M,g) est dite une **fonction propre** associée à λ . Le sous-espace de $\mathrm{C}^\infty(M)$ formé des fonctions propres relatives à λ est appelé **sous-espace propre** relatives à λ et se note $\wp_\lambda(M,g)$.
Enfin $\wp(M,g) = \sum_{\lambda \in spec(M,g)} \wp_\lambda(M,g)$ est appelé le sous-espace propre de (M,g) . La somme est d'ailleurs directe et méme est une décomposition orthogonale. Les propriétés de Δ que nous avons rappelées ci-dessus entranent les consequences suivantes :

Theorem 2.1.

S.1. *Spec(M,g) forme une suite $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\}$ discret, tendant vers $+\infty$.*

S.2. *Pour tout $\lambda \in Spec(M,g)$,$\wp_\lambda(M,g)$ est de dimension finie.*
Pour $i \in$ N, $\wp_{\lambda_i}(M,g)$ sera encore noté $\wp_i(M,g)$. Sa dimension se note m_i et est appelée la <u>multiplicit</u> de λ_i

S.3. *$\wp(M,g)$ est dense dans $\mathrm{C}^\infty(M)$ au sens de la topologie de la convergence uniforme, et a fortiori au sens de la topologie de la convergence en moyenne quadratique .*

La multiplicité de 0 est 1 . En effet les fonctions propres relatives à 0 sont les fonctions harmoniques donc, (M,g) étant compacte et connexe, les constantes

$$(car < f, \Delta f > = < df, df >, \quad donc \quad \Delta f = 0 \Rightarrow df = 0)$$

. notation. $Spec(M, g)$ s'écrira

$$Spec(M, g) = \{0 < \lambda_1, \ldots, \lambda_1 < \lambda_2, \ldots, \lambda_2 < \ldots\}$$

où λ_i sera écrit m_i fois.

Définition 2.2.3.
On appelle fonction de partition de (M,g) et on note $\mathrm{Z}(M, g)$ *la fonction définie pour* $t > 0$ *par*

$$\mathrm{Z}(M, g; t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\lambda_i t}$$

Nous démontrerons plus loin que cette fonction est bien définie pour $t > 0$ *. Admettant provisoirement cela, on voit alors que la série converge uniformément sur* $[t_0, +\infty]$ *pour tout* $t_0 > 0$ *, de sorte que la fonction est continue sur* $]0, +\infty[$*. Elle est décroissante, tend vers 1 pour* $t \to +\infty$ *et vers* $+\infty$ *pour* $t \to 0_+$

2.3 Exemple de laplacien en coordonnés sphériques

$$\Delta = \overrightarrow{\nabla}^2 = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}$$

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r.sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{e}_\varphi)(\frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r.sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{e}_\varphi)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e}_r & = (\sin\theta\cos\varphi)\overrightarrow{i} + (\sin\theta\sin\varphi)\overrightarrow{j} + (cos\theta)\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e}_\theta & = (\cos\theta\cos\varphi)\overrightarrow{i} + (\cos\theta\sin\varphi)\overrightarrow{j} - \sin\theta\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e}_\varphi & (-\sin\varphi)\overrightarrow{i} + (\cos\varphi)\overrightarrow{j} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = (\cos\theta\cos\varphi)\vec{i} + (\cos\theta\sin\varphi)\vec{j} - \sin\theta\vec{k} = \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = (-\sin\theta\sin\varphi)\vec{i} + (\sin\theta\cos\varphi)\vec{j} = \sin\theta\vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + -\sin\theta\sin\varphi\vec{j} - \cos\theta\vec{k} = -\vec{e}_r \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\cos\theta\sin\varphi\vec{i} + \cos\theta\cos\varphi\vec{j} = \cos\theta\vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\vec{e}_\varphi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\vec{e}_\varphi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j} \end{array} \right\}$$

$$\Delta = (\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r.sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

$$\Delta = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})$$
$$+ \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})$$
$$+ \vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

$$\Delta = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_r\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}) \quad *$$
$$+ \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}) \quad **$$
$$+ \vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r^2.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}) \quad ***$$

$$* = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_r\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi})$$
$$= \vec{e}_r\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_r.\vec{e}_r\frac{\partial^2}{\partial^2 r} + \vec{e}_r\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_r\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r}\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_r.\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}$$
$$+ \vec{e}_r\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_r\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(1/r)}{\partial r}\vec{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_r\frac{1}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}$$

$$* = \frac{\partial^2}{\partial^2 r}$$

$$** = \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})$$
$$= \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\vec{e}_r\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\vec{e}_\theta\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}$$
$$+ \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial(1/\sin\theta)}{\partial\theta}\vec{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r^2}\vec{e}_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}$$

$$** = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}$$

$$*** = \vec{e}_\varphi\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r^2.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

$= \overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{1}{r.\sin\theta} \frac{\partial \overrightarrow{e}_r}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{1}{r.\sin\theta} \overrightarrow{e}_r \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} + \overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{1}{r^2.\sin\theta} \frac{\partial \overrightarrow{e}_{\theta}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{1}{r^2.\sin\theta} \overrightarrow{e}_{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta}$
$+ \overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{1}{r^2.\sin^2\theta} \frac{\partial \overrightarrow{e}_{\varphi}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{1}{r^2.\sin^2\theta} \overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi}$

$*** = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2.\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2.\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi} \left(\overrightarrow{e}_{\varphi} \frac{\partial \overrightarrow{e}_{\varphi}}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi \overrightarrow{i} + \cos\varphi \overrightarrow{j})(-\cos_{\varphi} \overrightarrow{i} - \sin\varphi \overrightarrow{j}) \right.$

$(*) + (**) + (***) \Leftrightarrow$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi}$$

Chapitre 3

Problème de valeurs propres sur les surfaces

3.1 introduction

Soit M une variété riemannienne n-dimensionnelle complète de bordes $\partial M(\partial M$ peut être vide). En termes de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$, la mètrique peut être exprimè en $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$, et l'opérateur laplaçien est défini par :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}.g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j})$$

où $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, g = det(g_{ij})$.
ici, nous pouvons remarquer que l'opèrateur de laplace ne dépend que de la métrique riemannienne donnée. si

$$\text{F} : (M, g) \to (N, h)$$

est une isométrie , alors (M,g) et (N,h) ont le mème spectre (on dit qu'ils sont isospectraux et on note $Spec(M, g) = spec(N, h)$).
nous pouvons ainsi divisés les problémes concernant la relation entre les valeurs propes du laplaçien et la géométrie d'une variété riemannienne (la géométrie spectrale) en deux catégories :

1. Problémes directs :
   calcul des spectres, méthode explicites et numérique de détermina-

tion des valeurs propres , bornes supérieure et inferieure sur les valeus propres, Inégalités isopérimétriques et universelles pour les valeurs propres .

En général, le spectre ne peut pas être calculé explicitement . les très rares exceptions sont les variétés comme les sphères rondes , les tores plats , les billes (voir 1 et 5 pour quelques exemples classiques où le spectre est connu).

Cependant , il n'est possible d'obtenir qu'une estimations du spectre, et ces estimations sont liées à la gèométrie du variété .

Asymptotique, nous savons comment le spectre se comporte . c'est la formule de Weyl's

$$\lambda_k(M,g) \sim \frac{(2\pi)^2}{\omega_n^{2/n}}(\frac{k}{Vol(M,g)})^{2/n} \qquad ainsi \qquad k \to \infty$$

où ω_n est le volume de la boule unitaire de $\mathbb{R}^n$. donc le volume est en effet déterminé par le spectre .

la formule de Weyl's est le premier exemple de la relation entre les propiétés analytiques et géométriques de la variété riemannienne. en même temps , les valeurs propres et leurs fonctions propre résultent de l'idéalisation mathématique de problèmes physiques (l'équation d'onde , l'équation de chaleur ....)

2. Problemes inverses

   Ce que nous pouvons savoir sur la géométrie d'une variété riemannienne à partir de la connaissance des valeurs propres de son opérateur laplce-Beltrami ?

   l'une des quesstions importantes en géométrie spectrale a été formulée par M.

   Kac en 1966 avec un titre impressionnont "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?"

   ou bien deux variétés rimanniennes isospectrales sont-elles isométriques ? . Ici, notre discussion ne porte que sur le probléme direct.

   avant d'étudier le spectre de l'opérateur de laplace , rappelons quelques faits bien connus. Étant donné $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, soit : $\|\varphi\|^2 = \int_M \varphi^2 + \int_M |\nabla_\varphi|^2$. l'achèvement de $\mathcal{C}^\infty(M)$ par rapport à la norme ci-dessus est

l'espace bien connu de sobolev dénoté par $L_1^2(M)$, et l'achèvement de $C_0^\infty(M)$ est dénoté par $L_{0,1}^2(M)$.
D'après la théorie fondamentale des espaces de sobolev, nous pouvons voir que si M est complet, alors $L_1^2(M) = L_{0,1}^2(M)$ et $\varphi \in L_1^2(M) \Leftrightarrow \varphi$ agénéralisé des dérivées de premier ordre dans $L^2(M)$.
Si $\partial M = \emptyset$ et M est compact (problème de valeur propre fermée), alors Δ est un opérateur elliptique auto-adjoint sur $L_1^2(M)$(voir pour preuve Berger-Gauduchon-Mazet).
Par la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints , nous savons que Δ a une valeur propre discret :$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n \to \infty$. et les fonctions propres correspondantes $\{\phi_i\}$ satisfaisant :

$$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i; \phi_i \in C^\infty(M) \cap L_1^2(M)$$

peut être choisi de sorte que $\{\phi_i\}$ forme une base orthonormale de $L_1^2(M)$.
quand $\partial M \neq \emptyset$ nous devons spécifier des conditions aux limites pour que Δ soit auto-adjoint . généralement , nous avons deux des conditions aux limites :

(A) conditions aux limites de Dirichlet :
Dans ce cas , $Dom(\Delta) = L_{0,1}^2(M)$ et ses valeurs propres et les fonctions propres correspondantes sont $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$(remarquez que λ_1 a une multiplicité 1), et $\{\phi_i\}$:

$$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i; \phi_i|_{\partial M} = 0; \phi_i \in C^\infty(M)$$

$\{\phi_i\}$ à partir d'une base orthonormée de $L_{0,1}^2(M)$.

(B) conditions aux limites de Newmann :
Dans ce cas , $Dom(\Delta) = L_1^2(M)$ et sa valeur propre et ses fonctions propres sont $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, et $\{\phi_i\}$à patir d'une base orthonormée de $L_1^2(M)$, avec

$$\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i; \frac{\partial\phi_i}{\partial\eta}|\partial M = 0; \phi_i \in C^\infty(M)$$

oû η est la direction normale exterieure le long de ∂M.

Dans la théorie spectrale de Δ, le principe Min-Max joue un rôle fondamental il peut étre formulé comme suit pour simplifier , Soit H :

1. Si $\partial M = \emptyset, H = \{f \in L_1^2(M)/ \int_M f = 0\}$;
2. si $\partial M \neq \emptyset$ et la condition de Dirichlet est posée, $H = L_{0,1}^2(M)$
3. si $\partial M \neq \emptyset$ et la condition de Newmann est posée, $H = \{f \in L_1^2/ \int_M f = 0\}$

Alors Δ est un opérateur élliptique auto-adjoint sur H, et nous pouvons trouver ortho-base normale $\{f_i\}$, avec $\Delta f_i = -\lambda_i f_i ; f_i \in H \cap \mathcal{C}^\infty(M)$, telle que

$$\lambda_1 = inf\left\{\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M |f|^2}, f \in H\right\}$$

$$\lambda_i = inf\left\{\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M |f|^2}, f \in H, \int_M f.f_j = 0, j = 1, 2, 3 \ldots, i-1\right\}$$

En particulier ,

$$\forall c \in \mathbb{R}, c \leq \lambda_1 \Leftrightarrow \int_M |\nabla f|^2 \geq c \int_M |f|^2, \forall f \in H$$

ie : λ_1 est la plus grande constante pour laquelle l'inegalité ci-dessus tient. ce type d'inégalité est appelée "une inégalité de Poincaré " . c'est l'un des plus fondamentaux l'inégalité totale dans la théorie de P.D.E. Aussi d'une importance fondamentale est l'inegalité sobolev suivante.

1. *Inégalité de sobolev :*

   Soit M une variété riemannienne compacte avec frontière , alors il existe une constante c telle que :

   $$c\left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_M |\nabla f|, \forall f \in H$$

   oû H est définie comme (b) ou (c)ci-dessus .

   Si M n'est pas compact , alors l'inégalité de sabolev ci-dessus peut ne pas tenir. sa validité est équivalente de l'inégalité isopérimétrique .

2. *Inégalité isoperimètrique :*

   Soit M une variété riemmannienne, Ω un domaine avec fermeture compacte en M, alors il existe une constante c indépendante de Ω telque :

   $$c(Vol(\Omega))^{\frac{n}{n-1}} \leq Vol(\partial\Omega).$$

En utilisant la formule co-Area, nous pouvons montrer que pour la variété riemannienne générale l'inégalité sobolev est équivalente à l'inégalité isopéramétrique (5).
A fin d'étudier la signification géométrique de λ_1(la première valeur propre positive), J.Cheeger a introduit deux constantes isopérimétriques et les a reliés à λ_1.

Définition 3.1.1. *(Cheeger)*
Soit M une variété riemannienne compacte

1. *Si* $\partial M \neq \emptyset$ *définisez* $h_D(M) = inf\{\frac{Vol(\partial\Omega)}{Vol(\Omega)} / \Omega \subset\subset M\}$
2. *Si* $\partial M = \emptyset$, *définissez*

$$h_N(M) = inf\left\{\frac{Vol(H)}{min(Vol(M_1), Vol(M_2))}\right\}$$

Oû H est une hypersurface en M, divisant M en M_1, M_2
avec $\partial M_1 = \partial M_2 = H$
Peut être , le résultat le plus important des limites inférieures de λ_1 est peut être le suivant

Theorem 3.1. *(Cheeger)*
Soit M une variété riemannienne compacte dans le cas de Dirchlet , $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}h_D^2(M)$ *et dans le cas de Neumann,* $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}h_N^2(M)$

Preuve : (voir 1)
En utilisant la formule co-Area et L'inegalité isopérimétrique , nous pouvons prouver la conjecture de Rayleigh suivante

Theorem 3.2. *(Faber-krahn)*
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un domaine , B(R) une balle dans* $\mathbb{R}^n$ *de raduis R avec l'origine comme centre tel que* $Vol(\Omega) = Vol(B(R))$
alors , nous avons L'inegalité :

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B(R)).$$

Preuve : (voir 5)
nous pouvons voir plus loin que l'inégalité de Faber-Krahn est un cas particulier affine du théoréme de comparaison des valeurs propres de cheng .

3.2 Limites supérieures pour la premiére valeur propre :

Soit M une variété riemannienne compacte qui peut avoir un borde non vide ∂M.
Dans cette section, nous obtiendrons des limites supérieures pour λ_1 dans certaines conditions de courbure sur M.
le résultat de base est donné par S.Y.Cheng.
il a prouvé un théorème de comparaison pour la première valeur propre pour les noyaux de chaleur il obtienne donc :

Theorem 3.3. *(Cheng).*
Soit M une variété riemannienne compacte, $Ric(M) \geq (n-1)k$, $n = dim(M)$, $B(x_0, r)$ la boule géodésique en M de rayon r au centre x_0.
Soit V(k,r) être une boule de rayon r dans l'espace de courbure de forme k .
Ensuite en ce qui concerne les conditions aux limites de dirichlet .

$$\lambda_1(B(x_0, r)) \leq \lambda_1(V(k, r)).$$

Preuve :
Notons les noyaux de chaleur de $B(x_0, r)$, $V(k, r)$ par $H(x, y, t)$, $\epsilon(r(x, y), t)$ respectivement,
Ensuit par le théoréme de comparaison $H(x, x, t) \geq \epsilon(0, t)$.
Maintenant

$$H(x, x, t) = \sum e^{-\lambda_i t} \tilde{\phi}_i^2(x),$$

$$\epsilon(0, t) = \sum e^{-\tilde{\lambda}_i t} \tilde{\phi}_i^2(0)$$

où $\lambda_i = \lambda_i(B(x_0, r))$, $\tilde{\lambda} = \lambda_i(V(k, r))$ et $\phi_i, \tilde{\phi}_i$, sont les fonctions propres correspondants, donc

$$e^{-\lambda_1 t}[\phi_1^2(x) + e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}\phi_2^2(x) + \ldots] \geq e^{-\tilde{\lambda}_1 t}[\tilde{\phi}_1^2(0) + e^{-(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)t}\tilde{\phi}_2^2(0) + \ldots]$$

c'est à dire

$$\phi_1^2(x) + e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}\phi_2^2(x) + \cdots \geq e^{-(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)t}.[\tilde{\phi}_1^2(0) + e^{-(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)t}\tilde{\phi}_2^2(0) + \ldots]$$

Notez que de $\phi_1^2(x) > 0, \tilde{\phi}_1^2(0) > 0$ et $\lambda_m > \lambda_1, \tilde{\lambda}_m > \tilde{\lambda}_1$ pour $m \geq 2$. Laissant $t \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus , nous obtenons $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$, c'est à dire

$$\lambda_1(B(x_0, r)) \leq \lambda_1(V(k, r)).$$

Corollaire 3.1. *avec les même hypothèses que ci-dessus,* $\lambda_1(M) \leq \lambda_1(V(k, \frac{d}{2}))$ *où*
$d = diam(M)$.

Theorem 3.4. *(Cheng)*
Soit M une variété riemannienne compacte sans borde, $Ric(M) \geq (n-1)k$, alors

$$\lambda_m(M) \leq \lambda_1(V(k, \frac{d}{2m}))$$

où $d = diam(M)$

Preuve :
Nous pouvons trouver $x_1, \ldots, x_{m+1} \in M$ tels que $B(x_i, \frac{d}{2m})(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ sont disjoints deux à deux . Soit $\varphi_i(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ les premières fonctions propres sur $B(x_i, \frac{d}{2m})$ avec des conditions aux limites de Dirichlet . alors par le première théorème

$$\begin{aligned} \int_{B(x_i, \frac{d}{2m})} |\nabla_{\varphi_i}|^2 &= \lambda_1(B(x_i, \tfrac{d}{2m})) \int_{B(x_i, \frac{d}{2m})} |\varphi_i|^2 \\ &\leq \lambda_1(V(k, \tfrac{d}{2m})) \int_{B(x_i, \frac{d}{2m})} |\varphi_i|^2 \end{aligned}$$

Soit $\{\psi_i\}$ des fonctions propres sur lesquelles forment une base orthonormale de $L^2(M)$.
Extendr $\{\psi_i\}$ à Zéro à l'extérieur $B(x_i, \frac{d}{2m})$, il existe des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ telles que $\sum_1^{m+1} a_i\varphi_i \neq 0$ et

$$\sum_1^{m+1} a_i\varphi_i \perp \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m / \Delta\psi_i = -\lambda_i\psi_i\}$$

Par le principe Min-Max

$$\lambda_m(M) \int_M \left(\sum_1^{m+1} a_i\varphi_i\right)^2 \leq \int_M \left|\sum_1^{m+1} a_i\nabla\varphi_i\right|^2$$

Aussi par orthogonalité et inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}
&\le \quad \int_M \sum_1^{m+1} a_i^2 |\nabla \varphi_i|^2 \\
&\le \lambda_1(V(k, \tfrac{d}{2m})) \int_M \sum_1^{m+1} a_i^2 |\varphi_i|^2 \\
&\le \lambda_1(V(k, \tfrac{d}{2m})) \int_M (\sum_1^{m+1} a_i \varphi_i)^2
\end{aligned}$$

cela signifie que $\lambda_m(M) \le \lambda_1(V(k, \frac{d}{2m}))$ En estimant la première valeur propre des boules géodésiques dans l'espace , S.Y.Cheng a obtenu les résultats suivants 7 :

- si $Ric(M) \ge 0$ alors $\lambda_1 \le \frac{\mathcal{C}_n}{d^2}$ oû nous pouvons prendre $\mathcal{C}_n = 2n(n+4)$
- si $Ric(M) \ge n-1, \lambda_1 \le \frac{n\pi^2}{d^2}$
- si $Ric(M) \ge -(n-1)k, (k > 0), \lambda_1 \le \frac{(n-1)^2}{4} k + \frac{\mathcal{C}_n}{d^2}$

3.3 Limites inférieures pour la première valeur propre

En général, il est beaucoup plus difficile de donner une borne inférieure pour λ_1 qu'une borne supérieure. Pour une variété riemannienne simple, complète et non compacte, une question importante :
Dans quelles conditions $\lambda_1 = \lim_{R \to \infty} \lambda_1(B(x_0, R))$ a-t-il une borne inférieure positive ?
Notez que $\lambda_1(B(x_0, R))$ est décroissant en R et positif, donc la limite ci-dessus existe toujours.
En utilisant le théorème de cheeger et le théorème de comparaison pour une variété avec le curvature sectionnelle négative, nous pouvons avoir ce qui suit :

Theorem 3.5. *(Mckean)*
Si M est une variété riemannienne complète, non compacte, simplement connexe avec une courbure sectionnelle $\le -\mathcal{C} < 0$, alors $\lambda_1 = \lim_{R \to \infty} \lambda_1(B(x_0, R))$ existe et a une borne inférieure positive qui ne dépend que de $\mathcal{C}$ et $n = dimM$

Preuve :
Par le théorème de cheeger ,

$$\lambda_1(B(x_0, R)) \geq \frac{1}{4} h_D^2(B(x_0, R))$$

donc il faut donner une limite inférieure pour $h_D(B(x_0, R))$.
soit $\Omega \subset\subset M, \quad x_0 \in \Omega, \quad r(x) = dist(x_0, x)$. comme M est simplement relié à une courbure négative, $r(x)$ est differentiable , et

$$Aire(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \geq \int_{\partial\Omega} \frac{dr}{d\eta} = \int_{\Omega} \Delta r,$$

Oû nous avans utilisé le fait que $|dr| = 1, \quad \frac{dr}{d\eta} \leq 1$ et η est la normale extérieure le long $\partial\Omega$. puisque M is simplement connexe et sa courbure sectional $\leq -\mathcal{C}$, donc par le théoréme de comparaison

$$\Delta r \geq \frac{n-1}{r} + \mathcal{C}'$$

Où $\mathcal{C}' > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\mathcal{C}$ et n Par conséquent

$$Aire(\partial\Omega) \geq \int_{\Omega} \Delta r \geq \mathcal{C}' \int_{\Omega} 1 = \mathcal{C}' Vol(\Omega).$$

i.e.$h_D(\Omega) \geq \mathcal{C}'$.
Dans ce qui suit, nous étudions le cas des variétés riemanniennes compacts . Pour les domaines délimités dans $\mathbb{R}^n$, l'estimation de la première valeur propre λ_1 est un problème avec un longue histoire , entre autres, Faber-krahn, Polya-Szegö, Payne, weinbergre avait contribué à ce probléme .
Pour les variétés compacts sans borde, la première estimation pour la limite de λ_1 sous les hypothéses sur les courbures est un important théorème de Lichnerowicz en 1958.

Theorem 3.6. *(Lichnerowicz)*
Soit M une variété riemannienne compacte sans borde, telle que $n = dimM$.si

$$Ric(M) \geq (n-1)k > 0$$

$$\lambda_1(M) \geq nk$$

Preuve :(voir 1)
Plus tard en 1962, Obàta a prouvé que si l'égalité $\lambda_1(M) = nk$ tient, alors M est isométrique à S^n, avec une courbure constant k.
En 1970, cheeger a donnée quelques bornes inférieures pour la première valeur propre λ_1 En termes de ses constantes isoperemétrique sur cette base , S.T.Yau donne quelques estimations en termes de quantités géométriques .
À partir de 1979, li et Yau ont développé la méthode pour obtenir des estimations sur λ_1 via l'estimation du gradient sur la premiére fonction propre .
En utilisant cette méthode , nous pouvons prouver les trois résultats suivantes ci-dessous

Theorem 3.7. *(Li-Yau)*
Soit M une variété riemanniene compacte, $\partial M = \emptyset, \quad Ric(M) \geq 0$, *alors*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{2d^2},$$

Où $d = diam(M)$. *ici, Li et Yau utilisent le fait que si u est la première fonction propre, de puis*

$$0 = \int u = -\frac{1}{\lambda_1} \int \Delta u$$

On peut supposer

$$-1 \leq -k = \quad inf \quad u \quad < sup \quad u \quad = 1, \qquad 0 < k \leq 1$$

Donc , si $Ric(M) > 0$, alors

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{2\lambda_1}{1+k}(1-u)(k+u)$$

En utilisant une technique similaire , Zhong et Yang dans 12 ont amélioré le résultat ci-dessus à

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{d^2}$$

cette istimations est optimal prolongé l'hypothèse $\quad Ric(M) \geq 0$.
Dans le cas $\partial M \neq \emptyset$ et ∂M est convexe , en utilisant la même méthode dans la première valeur propre normalisée, Li et Yau prouvent ce qui suit

Theorem 3.8. *(Li-Yau)*
Soit M une variété riemannienne compacte à bordes , si ∂M est convexe et $Ric(M) \geq 0$, alors $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{2d^2}$ est la première valeur propre confermement aû problème de Newmann .

3.4 Problèmes de valeurs propres pour les surfaces

Dans cette section, nous nous concentrons sur les problèmes de valeures propres sur les surfaces. et aussi les questions de base est de donner une estimation par les limites supérieures et inférieures les valeurs propres en termes de quantités géométriques, par exemple le volume, le diamètre et les courbures. Daprés la conjecture de Polya's, il semble que pour les domaines en $\mathbb{R}^n$, on de vrait avoir

$$\lambda_1 \sim \frac{C}{(Vol(M))^{\frac{n}{2}}}$$

donc, dans le cas des surfaces , $\lambda_1 \sim \frac{C}{Aire(M)}$.
ce fut G.Szegö le premier qui a donné une réponse affirmative à cet égard-il a prouvé que pour $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné simplement connecté, en ce qui concerne la condition aux limites de Newmann, la première valeur propres de λ_1 satisfait

$$\lambda_1 \leq \frac{C}{A(D)}$$

Où C est une constante liée au premier Zéro d'une fonction de Bassel, et d'une fonction de holds si D est le disque .
Dans le théoréme suivant, J.Hersch a généralisé les méthodes de Szegö au cas de la surface compacte S^2.

Theorem 3.9. *(Hersch)*
Pour toute métrique sur S^2

$$\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{A(S^2)}$$

est l'aire par rapport à la métrique donnée .

Preuve :

Pour toute métrique $d\tilde{s}^2$ sur S^2 , Soit $\varphi : (S^2, d\tilde{s}^2) \to (S^2, ds_0^2)$ être une carte conforme. Où ds_0^2 est la métrique standard. Un tel φ existe toujours en raison du fait bien connu que S^2 qu'une seule structure conforme .
Par le principe Min-Max

$$\lambda_1 = \inf_{\int_{S^2} f=0} \frac{\int_{S^2} \mid \nabla f \mid^2 d\tilde{v}}{\int_{S^2} f^2 d\tilde{v}}$$

Où $d\tilde{v}$ est la forme volume de $d\tilde{s}^2$.
Soit $x^i(i = 1, 2, 3)$ les fonctions de coordonnées de $\mathbb{R}^3$ induite sur $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / |x| = 1\}$ çe sont les premières fonctions propres sur (S^2, ds_0^2). par rapport à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ Puisque φ est conforme, et l'intégrale dirichlet est invariante conformément en dimension 2.

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{S^2} |\nabla(x^i \circ \varphi)|^2 d\tilde{v} &= \textstyle\int_{S^2} |\nabla x^i|^2 dv \\
&= -\textstyle\int_{S^2} x^i \Delta x^i \\
&= 2\textstyle\int_{S^2} (x_i)^2 dv \\
&= \tfrac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

et nous avons $Aire(S^2) = \int_{S^2} 1.d\tilde{v} = \sum \int_{S^2} (x_i \circ \varphi)^2 d\tilde{v}$
Donc au moins pour un indice $i, (1 \leq i \leq 3)$,

$$\int_{S^2} (x_i \circ \varphi)^2 d\tilde{v} \geq \frac{Aire(S^2)}{3}$$

Ainsi, si nous pouvons choisir φ tels que $\int_{S^2} (x_i \circ \varphi) d\tilde{v} = 0$ alors

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{S^2} \left| \tilde{\nabla}(x^i \circ \varphi) \right|^2 d\tilde{v}}{\int_{S^2} (x^i \circ \varphi)^2 d\tilde{v}} \leq \frac{8\pi}{A(S^2)}$$

La question réduit maintenant à trouver une carte conforme :

$$\varphi : (S^2, d\tilde{s}^2) \to (S^2, ds_0^2)$$

tel que

$$\int_{S^2} (x_i \circ \varphi) d\tilde{v} = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

Soit $\varphi_0 : S^2 \to S^2$, liasser G_0 le sous groupe de transformation conforme de S^2, pour tout $g_a \in G_0(a \in S^2), g_a \circ \varphi_0 : S^2 \to S^2$ est également conforme. définir $H : B^3 \to B^3$,

$$H(a) = -\frac{1}{A(S^2)}(\int_{S^2} x^i \circ g_a \circ \varphi d\tilde{v}), i = 1, 2, 3$$

on a $a \in S^2$, nous avons

$$g_a(S^2 \setminus \{a\}) \to -a, et \qquad \int_{S^2} x^i \circ g_a \circ \varphi d\tilde{v} \to -a^i$$

Par conséquent, H peut être etendu à $\overline{B} \to \overline{B}$ et sa restriction à S^2 est l'identité. de la topologie de base, H est surjectif, donc il existe un point $a \in B^3$ tel que $H(a) = 0, i.e$,

$$\int_{S^2} x^i \circ g_a \circ \varphi d\tilde{v} = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Pour la métrique standard sur S^2, la zone $A_0(S^2) = 4\pi$ et $\lambda_1 = 2$ Donc H, le théorème de Hersch peut être exprimé comme

$$\lambda_1 A(S^2) \leq \lambda_1(standard) A_0(S^2).$$

S^2 est une surface riemannienne du genre 0, Plus généralement , pour les surfaces riemanniennes compactes du genre $g > 0$. le théorème corespendant de Herschs est :

Theorem 3.10. *(P.Yang,S,T.Yau).*
Soit Σ_g une surface riemannienne compacte du genre g, alors nous avons pour tout métrique sur Σ_g

$$\lambda_1 \leq \frac{8\pi(1+g)}{A(\Sigma_g)}$$

la notion de base utilisée par Yang et Yau est le volume conforme. (M, ds^2) une surface riemannienne compacte, $\phi : M \to S^n$ une carte conforme si ds_0^2 est la métrique standard sur S^n, alors $\phi^* ds_0^2 = \alpha(x) ds^2$, oû $\alpha(x)$ est une fonction positive sur M.
Soit G le groupe de transformation conforme de S^n, alors $\forall g \in G, g \circ \phi : M \to S^n$ est toujours conforme. soit dV_gla forme volume de $(g \circ \phi)^* ds_0^2$ sur M. Nous avons :

Définition 3.4.1.
le volume conforme de M par rapport à ϕ est défini par

$$V_c(n, \phi) = \sup_{g \in G} \int_M dV_g$$

et le volume conformes de M est défini par

$$V_c(n, M) = \inf_{\phi} V_c(n, \phi)$$

La proposition suivante montre que $V_c(n, M)$ est étroitement lié à λ_1, par conséquent, la définition de $V_c(n, M)$ est non triviale.

Proposition 3.4.1. *(Li-Yau)*
Soit M une surface riemannienne compacte, s'il existe une carte conforme $\phi : M \to S^n$, alors $\lambda_1 Vol(M) \leq 2V_c(n, M)$. En outre, si M est un surface minimale dans S^n, et l'immersion isométrique $M \to S^n$ est induite par les première fonctions propres de S^n

Corollaire 3.2. *Soit M une surface riemannienne compacte, s'il existe un prolongement minimal isométrique $\phi : M \to S^n$, tel que $(\phi^1, \ldots, \phi^{n+1})$ est donné par les première fonctions propres, alors $V_c(n, M) = Vol(M)$.*

Exemple 3.4.1. $V_c(n, S^2) = 4\pi, V_c(n, \mathbb{RP}^2) = 6\pi$

Revenons mantenant à la preuve du théoréme de Li-Yau

Preuve :
Par la proposition ci-dessus, nous avons

$$\lambda_1 A(\Sigma_g) \leq 2V_c(2, \Sigma_g)$$

Prenez tout coverture ramifiée conforme :

$$\phi : \Sigma_g \to S^2 / \quad deg\phi \leq 1 + g$$

l'existence d'un tel ϕ est gardée par le théorème de Riemann-Roch. nous pouvons voir que si $N \to M$ est une coverture conforme de degré d, alors

$$V_c(2, N) \leq dV_c(2, M)$$

donc

$$\lambda_1 A(\Sigma_g) \leq 2V_c(2, \Sigma_G) \leq 2V_c(2, S^2)(1 + g) = 8\pi(1 + g)$$

3.4.1 Conclusion :

nous voyons dans cet mémoire qu'en étudiant les valeurs propres sur une variété (et spécialement sur les surface) nous pouvons obtenir des informations sur la géométrie de cette variété. Plus d'information sont incluses dans le processus de comparaison des inégalités des bornes superieures et des bornes inférieures .

Bibliographie

[1] M.Berger,P. Gauduchon, E. Mazet : Le spectre dune variété riemannienne, Lecture Notes in Math, 194, Springer, Berlin, 1971.

[2] P. Bérard : Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques, Séminaire N. Bourbaki, 1988-1989, exp.n 705.

[3] J.M BONY : Cours danalyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier, Editions de lécole Polytechnique - Février 2010.

[4] I. Chavel, The Laplacian on riemannian manifolds, Spectral theory and geometry (Edinburgh, 1998), 30-75, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 273, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999

[5] I. Chavel, Eigenvalues in riemannian Geometry, volume 115 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984.

[6] J. Cheeger, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, in Problem in Analysis, Princeton University Press, (1970), 195-199.

[7] S.Y. Cheng, Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. Math. Z.143, (1975), 289-297.

[8] Y.C. De Verdière : Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien, Comment. Math. Helvetici 61, 1986.

[9] J. Hersch, Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes, C.R.A.S 270, (1970), 1645-1648.

[10] P.Li and S.T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold, in Proceeding of Symposium in Pure Math. vol. 36 (1980), 205-239.

[11] P. Li and S.T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the willmore conjecture and the first eigenvalue of the compact surfaces, Invent. Math. 69 (1982), 269-291.

[12] J.Q Zhong and H.C Yang, On the estimate of the rst eigenvalue of a compact riemannian manifold, Scientia, Sinica, vol XXVII, $N°$.12 (1984), 1265- 1273.