République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Etude de stabilité des équations différentielles stochastiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Hayat Boukheris [1]

Sous la direction de

Dr. L. Bousmaha

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

Dr. N. Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. L. Bousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. L. Y ahiaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. K. M ehdi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : hayet.b03@gmail.com

Dédicace

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux, je dédie ce modeste travail :
À
Mes chers parents "Boukheris Noureddine et Mezouri Miassa"qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ce travail de recherche dans les meilleures conditions
À
mes chèr frères "MOHAMED, HICHEM", ma sœur "SOUAD", ma belle sœur "HAJER" et ma nièce "Illine Miassa" .
À
ma chère grand mère.
À
toute ma grande famille.
À
toutes mes proches amies "Amina, sakina et bakhtia" et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.
Et toute la famille de département de mathématiques et ma promo.

Remerciement

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Dr. L. Bousmaha qui fut pour moi un encadreur de mémoire attentive et très disponible malgré ses nombreuses charges. Ses compétences et sa rigueur scientifiques, ses qualités humaines et sa clairvoyance m'ont beaucoup apporté et appris.

je tiens à remercie aussi les jury à leur tète la présidente Dr. N. Ait Ouali et les examinateurs Dr. L. Yahiaoui et Dr. K. Mehdi pour avoir honorer de leurs présences à notre soutenance. Sans oublier tous les professeurs de notre laboratoire LMSSA et très spécialement Pr. Kandouci, Dr. S. Drissi, Dr. F. Mokhtari et Dr. F. Benziadi.

Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées par le biais du cette Université, surtout Sakina, Bakhtiya, Mokhatria, rihab...etc.

Mention spéciale à mon boss de travail le chirurgien Moullay Touhami, je voudrais te dire merci pour ton aide.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier à ma maman qui m'a fait comprendre que la vie n'est plus qu'un challenge de compétence et à mon papa qui ma fait une femme musulmane cultivé et à mon grand frère qui m'a toujours encouragé moralement et financièrement. Sans eux, il ne serait pas possible de réaliser ce travail.

Table des matières

Symboles et notations

p.s.	*presque surment.*
A^c	*complementaire de* A ($A^c = \Omega - A$).
$\emptyset$	*l'emsemble vide.*
$\mathbb{R}_+$	*l'ensemble de tous les nombres réels non négatifs.*
$\mathbb{R}^d$	*l'espace euclidien de dimension d.*
$C^{m,n}(D \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$	*la famille de toute les fonctions V(x, t) à valeurs réelles définies sur* $D \times \mathbb{R}_+$ *qui sont continuellement m fois différentiables sur* $x \in D$ *et n fois sur* $t \in \mathbb{R}_+$.
$\mathcal{K}$	*la famille des fonctions* μ *continues et non-décroissantes telles que* $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *avec* $\mu(0) = 0$ *et* $\mu(r) > 0$ *si r>0*
S_h	$= \{x \in \mathbb{R}^d : \lvert x\rvert < h\} \quad pour\, h > 0.$
$\mathbf{I}$	*la matrice identité.*
$\langle M, M\rangle_t$	*la variation quadratique.*
$\mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^d)$	*la famille des processus* $(f(t))_{a\leq t\leq b}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}_t$*-adapté telles que* $\int_a^b \lvert f(t)\rvert^p dt < \infty$ *P.s.*
$\mathcal{M}^p([a,b];\mathbb{R}^d)$	*la famille des processus* $(f(t))_{a\leq t\leq b}$ *dans* $\mathcal{L}^p([t_0,T];\mathbb{R}^d)$ *telles que* $E\left[\int_a^b \lvert f(t)\rvert^p dt\right] < \infty.$

Introduction générale

Dans le dictionnaire "Le Petit Robert", l'adjective "stabilité" signifie le caractère de ce qui tend à demeurer dans le même état, l'état d'une construction capable de demeurer dans un équilibre permanent, tendance à rester dans un état défini.

En mathématiques, la théorie de la stabilité traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations des conditions initiales où on formalise la question suivante : supposons qu'on initialise un système dynamique en un point voisin d'un point d'équilibre x_0, qu'a devient t-il pour la trajectoire de la solution ?

Des définitions mathématiques exactes de la stabilité pour un système dynamique, ainsi que des théorèmes généraux de stabilité pour les systèmes non linéaires, ont été formulées pour la première fois par des scientifiques russes à la fin du XIXe siècle. Le scientifique russe N.E. Zhukovskii [18], a introduit en 1882 un concept fort de stabilité orbitale basé sur une reparamétrisation de la variable temporelle.

En 1892, dix ans après les travaux de N. E. Zhoukovski, le scientifique russe A.M. Lyapunov [9] a défini son doctorat sur : "Une tache générale sur la stabilité du mouvement [35]" où il a prouvé sa stabilité en utilisant deux méthodes. Dans la première méthode ; connue sous le nom de première méthode de Lyapunov ou méthode indirecte de Lyapunov, la stabilité d'un équilibre est étudiée par linéarisation. La deuxième méthode, également appelée méthode directe de Lyapunov, est beaucoup plus générale. L'idée fondamentale derrière la méthode directe de Lyapunov est le théorème de stabilité de Lagrange–Dirichlet, qui est basé sur l'énergie mécanique. La méthode directe de Lyapunov est capable de prouver la stabilité des équilibres d'équations différentielles non linéaires en utilisant une notion généralisée de fonctions énergétiques. Dans la terminologie moderne, un équilibre est défini comme étant Lyapunov-stable si tout mouvement d'un système issu d'un voisinage suffisamment petit d'un point d'équilibre demeure au voisinage de ce point, alors ce système est stable au sens de Lyapunov.

La notion de stabilité des solutions des EDS a été introduite par I. Kats et N. N. Krasovskii [4]. Puis, avec les travaux de J. Kushner [7, 6, 8], R. Z. Has'minski [3], Kozin[5], W. M. Wonham [12], M. Zakai [16, 17], I. I. Gikhman et A. V. Skorokhod [2] et A. Friedman [1], plusieurs type de stabilité ont été définis pour les EDS et une approche de type Lyapunov pour étudier ces stabilités a été élaborée.

Le but de ce travail est d'étudier la stabilité d'une équation différentielle stochastique, pour cela j'ai partagé mon memoire en trois chapitres. Dans le premier, nous allons rappeler brièvement les notations de base de la théorie des probabilités et des processus stochastiques. Nous présentons ensuite la définition mathématique de mouvement Brownien et ses propriétés importantes. En utilisant ces propriétés, nous procédons à la définition de l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien et établissons la formule bien connue d'Itô.

Le deuxième chapitre diverse en deux sections, la première est pour présenter les équations différentielles stochastiques non-linéaires où nous allons étudier l'existence et l'unicité des solutions [2.2.1], l'estimation dans L^p [2.2.2] et l'estimation asymptotique presque sûre [2.10]. Dans la deuxième section, nous allons définir les équations différentielles stochastiques linéaire où nous allons motionner quelques formules (la formule de Liouville [2.3.1] et la formule de variation de constante [2.3.2]), puis, nous donnons des exemples sur les équations différentielles stochastiques linéaires.

Le dernier chapitre qui est le cœur de notre travail, est consacré à la stabilité des équations différentielles stochastiques. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première, nous allons présenter des notions préliminaires nécessaires pour établir nos principaux résultats, la deuxième section se rapporte à la stabilité au cas déterministe avec les deux méthodes (méthode classique et la méthode de Lyapunov). Dans la troisième section, nous allons étudier la stabilité au cas aléatoire où nous allons donner les différentes sorte de stabilité (la stabilité en probabilité [3.4.1.1], la stabilité exponentielle presque sûre [3.4.1.2], la stabilité exponentielle des moments [3.4.1.3] et la stabilité assymptotique p.s.[3.4.1.4]). A la fin de ce chapitre, nous spécifié une dernière section pour la stabilisation et la déstabilisation des équations différentielles stochastiques par l'ajout d'un bruit.

Chapitre 1

Mouvement Brownien et intégrale stochastique

1.1 Notes de base

La probabilité est une évaluation du caractère probable d'un évènement et la probabilité d'un évènement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus le risque (ou la chance, selon le point de vue) que évènement se produise est grand. Les évènements élémentaires "possibles" ω sont regroupés dans un ensemble Ω. Les parties de Ω observable ou intéressante constituent une tribu $\mathcal{F}$.

On définit donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ avec

- Ω est l'ensemble des événements,
- $\mathcal{F}$ est une tribu,
- $\mathbf{P}$ est la mesure de la probabilité sur $\mathcal{F}$.

Définitions 1.1.

- Tribu(σ-algèbre) : Une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est une famille de parties de Ω si :
  i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
  ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
  iii) $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F} \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
- Espace probabilisé : Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $\mathbf{P}$ une application de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ telle que
  i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

ii) pour toute suite d'événements $\{A_i\}_{i\geq 1}$ disjointe deux à deux avec $\{A_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{F}$ (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ s'appelle un espace probabilisé ou espace de probabilité.

Remarque 1.1. On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est complet si $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ avec

$$\bar{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega : \exists B, C \in \mathcal{F} \ telle\ que\ B \subset A \subset C, \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C)\}$$

- Filtration : Une filtration $\mathcal{F}_t$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, (i.e $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ pour tout $0 \leq t < s < \infty$).

- Fonction $\mathcal{F}$-mesurable :
  - une fonction $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}$-mesurable si

    $$\{\omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F} \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

    La fonction X est également appelée variable aléatoire à valeurs réelles.
  - une fonction X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (i.e. $X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega))^T$) est $\mathcal{F}$-mesurable si tous les éléments de X_i sont $\mathcal{F}$-mesurable.
- Processus stochastique : Un processus stochastique X est la donnée de $\{X_t\}_{t\in I}$ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec I est l'ensemble des paramètre $I = \mathbb{R}_+$.

- Temps d'arrêt : une variable aléatoire $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ est appelé $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt (simplement temps d'arrêt) si

  $$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Lemme 1.1. *Soit $\{A_k\}$ une suite d'ensembles dans $\mathcal{F}$. On définit la limite supérieure des ensembles par*

$$\lim_{k\to\infty} \sup A_k = \{\omega : \omega \in A_k, \text{ pour une infinité de k}\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k.$$

1 Si $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ *et* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$*, Alors*

$$\mathbb{P}(\lim_{k\to\infty} \sup A_k) = 0.$$

1 Si la suite $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ *est indépendante et* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$*, Alors*

$$\mathbb{P}(\lim_{k\to\infty} \sup A_k) = 1.$$

Définition 1.1. Soit $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable ($\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}(|\mathbf{M}_t|) < \infty$), on dit que $\mathbf{M}$ est

1. Une**martingale** si
$$\forall\ 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(\mathbf{M}_t/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbf{M}_s.$$
2. Une **surmartingale** si
$$\forall\ 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(\mathbf{M}_t/\mathcal{F}_s\Big) \leq \mathbf{M}_s.$$
3. Une **sousmartingale** si
$$\forall\ 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(\mathbf{M}_t/\mathcal{F}_s\Big) \geq \mathbf{M}_s.$$

Théorème 1.2. {Loi forte des grands nombres}
Soit $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *une martingale locale continue à valeur réelle avec* $M(t = 0) = 0$*.*
Alors
$$\lim_{t\to\infty} \langle M, M\rangle_t = \infty \ p.s. \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{\langle M, M\rangle_t} = 0 \ p.s.$$
et aussi
$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\langle M, M\rangle_t}{t} < \infty \ p.s. \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{t} = 0 \ p.s.$$

1.2 Mouvement Brownien

D'après le professeur Jean Pierre Kahane, le mouvement Brownien est un phénomène naturel et un objet mathématique à la fois. Le phénomène naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide et ce dernier a été observé dès le 18 ème siècle. L'objet mathématique est un processus gaussien dont la variance des accroissements est égale au temps écoulé.

Définition 1.2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Un mouvement Brownien unidimensionnel (standard) $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus continue à valeur réelle et $\mathcal{F}_t$-adapté avec les propriétés suivantes :

i) $B_0 = 0$ *p.s.*;

ii) pour tout $0 \leq s < t < \infty$, l'incrément $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$;

iii) pour tout $0 \leq s < t < \infty$, l'incrément $B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$.

Le mouvement Brownien a de nombreuses propriétés importantes et certaines d'entre elles sont résumées ci-dessous :

Propriétés 1.3.
- *$(-B_t)$ est un mouvement Brownien par rapport à la même filtration $(\mathcal{F}_t)$,*
- *Soit $c > 0$. On définit X_t par*

$$X_t = \frac{B_{ct}}{\sqrt{c}} \quad pour\ t \geq t_0.$$

  Alors (X_t) est un mouvement Brownien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{ct})$,
- *(B_t) est une martingale carré intégrable continue et sa variation quadratique $\langle B, B\rangle_t = t, \quad pour\ tout\ t \geq 0.$*
- *La loi forte des grands nombres spécifie que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad p.s.$$

1.3 L'intégrale d'Itô

Définition 1.3. {Processus simple}
un processus stochastique a valeur réel $g = (g(t))_{a\leq t\leq b}$ est dit un processus simple s'il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ de $[a,b]$,$(\xi_i)_{0\leq i\leq k-1}$ un variable aléatoire borné tel que ξ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et

$$g(t) = \xi_0 \mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\xi_i.$$

Définition 1.4. Soit $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$. L'intégrale d'Itô de f par rapport à B_t est définie par

$$\int_a^t f(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_a^t g_n(t)dB_t \quad sur\ \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R})$$

où g_n est une suite de processus simples tels que

$$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b |f(t)-g_n(t)|^2 dt = 0.$$

L'intégrale stochastique a de nombreuses propriétés intéressantes. Nous observons d'abord ce qui suit :

Théorème 1.4. *Soient $f,g \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ et soient α,β deux nombres réels. Alors*

i) $\int_a^b f(t)dB(t)$ *est $\mathcal{F}_b$-mesurable ;*

ii) $E\left[\int_a^b f(t)dB(t)\right] = 0$ *;*

iii) $E\left|\int_a^b f(t)dB(t)\right|^2 = E\left[\int_a^b |f(t)|^2 dt\right]$*;*

vi) $\int_a^b [\alpha f(t)+\beta g(t)]dB(t) = \int_a^b \alpha f(t)dB(t) + \int_a^b \beta g(t)dB(t).$

Théorème 1.5. *Si $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, alors l'intégrale indéfinie $\mathrm{I}(t)$ est une martingale carré intégrable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec*

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^T f(s)dB(s) \quad pour\ tout\ 0 \le t \le T$$

En particulier,

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)dB(s)\right|^2\right) \le 4E\int_0^T |f(s)|^2 ds.$$

1.3.1 Processus d'Itô

Définition 1.5. Un processus d'Itô unidimensionnel $(x(t))_{t\ge 0}$ est un processus continu adapté tel que

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dB(s),$$

où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Nous dirons que $x(t)$ a une formule différentielle stochastique donné par

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t \quad avec\ t \ge 0.$$

1.3.2 La formule d'Itô

Théorème 1.6.
Soit $x(t)$ un processus d'Itô sur $t \geq 0$ avec sa formule différentiel stochastique

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t \quad avec\ t \geq 0,$$

où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Soit $V \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Alors $V(x(t),t)$ est à nouveau un processus d'Itô avec la formule différentielle stochastique donné par

$$\begin{aligned} dV(x(t),t) = \ & [V_t(x(t),t) + V_x(x(t),t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t),t)g^2(t)]dt \\ & +V_x(x(t),t)g(t)dB_t \quad p.s. \end{aligned}$$

1.4 Les inégalités

1.4.1 Inégalité du moment

Théorème 1.7. *Soient $p \geq 2$ et $g \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ tels que*

$$E\left[\int_0^T |g(s)|^p ds\right] < \infty.$$

Alors

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t g(s)dB(s)\right|^p\right) \leq \left(\frac{P^3}{2(p-1)}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{P-2}{2}} E\left[\int_0^T |g(s)|^p ds\right].$$

1.4.2 Inégalité de Gronwall

Théorème 1.8. *Soient $T > 0$ et $c \geq 0$. Soit $u(\cdot)$ une fonction borélienne ,non-négative et bornée sur $[0,T]$ et soit $v(\cdot)$ une fonction intégrable non-négative sur $[0,T]$. Si*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

Alors

$$u(t) \leq c\exp\left(\int_0^t v(s)ds\right) \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

Chapitre 2

Équation différentielle stochastique

2.1 Introduction

L'un des problèmes importants dans de nombreuses branches de la science et de l'industrie, par example l'ingénierie, la gestion, la finance et la sciences sociale, est la spécification du processus stochastique régissant le comportement d'une quantité sous-jacente. Nous utilisons ici le terme quantité sous-jacente pour décrire tout objet intéressé dont la valeur est connue actuellement mais elle est susceptible de changer à l'avenir. Des exemples typiques sont

- nombre de cellules cancéreuses,
- nombre de personnes infectées par le VIH,
- prix de l'action dans une entreprise,
- prix de l'or,pétrole ou électricité.

2.2 EDS non-linéaire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Tout au long de ce chapitre, on pose $B(t) = (B_1(t), ..., B_m(t))^T$, $t \geq 0$ un mouvement Brownien de dimension m définie sur l'espace. Soit $0 \leq t_0 < T < \infty$. Soit x_0 une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_{t_0} - mesurable$ telle que $\mathbb{E}|x_0|^2 < \infty$. Soient $f : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d\times m}$ des fonctions borélienne. Considérons l'équation différentielle stochastique de dimension d au sens d'Itô

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \qquad t_0 \leq t \leq T \tag{2.1}$$

cette équation est équivalente à l'équation suivante

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)dB(s) \qquad t_0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

avec $x(t_0) = x_0$.

Définition 2.1. Un processus stochastique $(x(t))_{t_0 \leq t \leq T}$ a valeur dans $\mathbb{R}^d$ est appelé une solution de l'équation (2.1) s'il a les propriétés suivantes :

(i) $x(t)$ est continu et $\mathcal{F}_t$-adapté ;

(ii) $f(x(t),t) \in \mathcal{L}^1([t_0,T];\ \mathbb{R}^d)$ et $g(x(t),t) \in \mathcal{L}^2([t_0,T];\ \mathbb{R}^{d\times m})$;

(iii) l'équation (2.2) est satisfaite pour tout $t \in [t_0,T]$ avec probabilité 1.

Une solution $x(t)$ est dite unique si toute autre solution $\bar{x}(t)$ est indistinguable de $x(t)$, c'est à dire

$$\mathbb{P}\{x(t) = \bar{x}(t)\ \forall t_0 \leq t \leq T\} = 1.$$

2.2.1 Existence et unicité des solution

Théorème 2.1. *Supposons qu'il existe deux constantes positives K et $\bar{K}$ telles que*

(i) (la condition de Liptchiz) Pour tout $x,y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [t_0,T]$

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \bigvee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq \bar{K}|x-y|^2; \tag{2.3}$$

(ii) (la condition de croissance linéaire) pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0,T]$

$$|f(x,t)|^2 \bigvee |g(x,t)|^2 \leq K(1+|x|^2). \tag{2.4}$$

Alors,il existe une unique solution $x(t)$ à l'équation (2.1) et la solution appartient à $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$.

Lemme 2.2. *Supposons que la condition de croissance linéaire (2.4) soit vérifiée. Si $x(t)$ est une solution de l'équation (2.1), alors*

$$E\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)|^2\right) \leq \left(1 + 3E|x_0|^2\right) e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}.$$

En particulier, $x(t)$ appartient à $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$.

Preuve: { Preuve du Théorème (2.1)}

L'unicité :

On considère deux solutions $x(t)$ et $\bar{x}(t)$ de l'équation (2.1) avec $x_0 = \bar{x}_0$ et par le lemme (2.2), les deux solutions appartiennent à $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$. Pour tout $n \geq 1$, on considère le temps d'arrêt

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in [t_0, T] : |x(t)| \geq n\}.$$

Clairement, $\tau_n \uparrow T$ p.s. Posons $x_n(t) = x(t \wedge \tau_n)$ pour $t \in [t_0, T]$. Alors $x_n(t)$ satisfait l'équation suivante

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_n(s), s)\mathbb{1}_{[[t_0, \tau_n]]}(s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x_n(s), s)\mathbb{1}_{[[t_0, \tau_n]]}(s)dB(s);$$

Vu que $\bar{x}$ est aussi une solution, nous avons l'équation analogue :

$$\bar{x}_n(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f(\bar{x}_n(s), s)\mathbb{1}_{[[t_0, \tau_n]]}(s)ds + \int_{t_0}^{t} g(\bar{x}_n(s), s)\mathbb{1}_{[[t_0, \tau_n]]}(s)dB(s).$$

Par différence,

$$x_n(t) - \bar{x}_n(t) = \int_{t_0}^{t} [f(x_n(s), s) - f(\bar{x}_n(s), s)\mathbb{1}_{[[t_0, \tau_n]]}(s)ds + \int_{t_0}^{t} [g(x_n(s), s) - g(\bar{x}_n(s), s)]\mathbb{1}_{[[t_0, \tau_n]]}(s)dB(s).$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $|a+b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\left|\int fg\right|^2 \leq \int |f|^2 \int |g|^2$ et la condition de Liptchiz (2.3), on peut montrer que

$$\begin{aligned}
|x_n(t)-\bar{x}_n(t)|^2 &\leq 2\left|\int_{t_0}^{t}[f(x_n(s),s)-f(\bar{x}_n(s),s)]\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)ds\right|^2 \\
&+2\left|\int_{t_0}^{t}[g(x_n(s),s)-g(\bar{x}_n(s),s)]\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)dB(s)\right|^2 \\
&\leq 2\int_{t_0}^{t}|f(x_n(s),s)-f(\bar{x}_n(s),s)|^2 ds\times\int_{t_0}^{t}|\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)|^2 ds \\
&+2\left|\int_{t_0}^{t}[g(x_n(s),s)-g(\bar{x}_n(s),s)]\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)dB(s)\right|^2 \\
&\leq 2(t-t_0)\int_{t_0}^{t}|f(x_n(s),s)-f(\bar{x}_n(s),s)|^2 ds \\
&+2\left|\int_{t_0}^{t}[g(x_n(s),s)-g(\bar{x}_n(s),s)]\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)dB(s)\right|^2 \\
&\leq 2\bar{K}(t-t_0)\int_{t_0}^{t}|x_n(s)-\bar{x}_n(s)|^2 ds \\
&+2\left|\int_{t_0}^{t}[g(x_n(s),s)-g(\bar{x}_n(s),s)]\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)dB(s)\right|^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par le Théorème (1.7) et la condition (2.3), on peut montrer en outre que

$$\begin{aligned}
h(t) &= E\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|x_n(s)-\bar{x}_n(s)|^2\right) \\
&\leq 2\bar{K}(T-t_0)E\left[\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\int_{t_0}^{s}|x_n(u)-\bar{x}_n(u)|^2 du\right)\right] \\
&+2E\left[\sup_{t_0\leq s\leq t}\left|\int_{t_0}^{s}[g(x_n(u),u)-g(\bar{x}_n(u),u)]\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(u)dB(u)\right|^2\right] \\
&\leq 2\bar{K}(T-t_0)\int_{t_0}^{t}E|x_n(s)-\bar{x}_n(s)|^2 ds \\
&+8E\left[\int_{t_0}^{t}|g(x_n(s),s)-g(\bar{x}_n(s),s)|^2\,\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)ds\right] \\
&\leq 2\bar{K}(T-t_0)\int_{t_0}^{t}E|x_n(s)-\bar{x}_n(s)|^2 ds \\
&+8\bar{K}E\left[\int_{t_0}^{t}|x_n(s)-\bar{x}_n(s)|^2\,\mathbb{1}_{[[t_0,\tau_n]]}(s)ds)\right] \\
&\leq 2\bar{K}(T-t_0+4)\int_{t_0}^{t}E|x_n(s)-\bar{x}_n(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

par conséquent

$$h(t) \quad \leq 2\bar{K}(T - t_0 + 4) \int_{t_0}^{s} E\left(\sup_{t_0 \leq r \leq s} |x_n(r) - \bar{x}_n(r)|^2 \right) dr.$$

Si on pose $C = \bar{K}(T - t_0 + 4)$, alors on a établi que h vérifie pour $t \in [t_0, T]$

$$h(t) \leq C \int_{t_0}^{t} h(s) ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall et nous obtient

$$h(t) \leq 0.$$

c'est à dire

$$E\left(\sup_{t_0 \leq s \leq T} |x_n(s) - \bar{x}_n(s)|^2 \right) \leq 0$$

ainsi

$$E\left(\sup_{t_0 \leq s \leq \tau_n} |x(s) - \bar{x}(s)|^2 \right) \leq 0.$$

Finalement, en faisant tendre $n \to \infty$ et donc $x(t) = \bar{x}(t)$ p.s. pour tout $t \in [t_0, T]$.

<u>L'existence</u> :

On procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose $x(t_0) \equiv x_0$ et pour $n = 1, 2, \ldots$ on défini les itérations de Picard

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_{n-1}(s), s) ds + \int_{t_0}^{t} g(x_{n-1}(s), s) dB(s) \tag{2.5}$$

avec $t \in [t_0, T]$. Évidemment, $x_0(t) \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$. De plus, $x_n(t) \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$

parce que nous avons de (2.5) que

$$
\begin{aligned}
E|x_n(t)|^2 &\leq 3\left(E|x_0|^2 + E\left|\int_{t_0}^t f(x_{n-1}(s),s)ds\right|^2 + E\left|\int_{t_0}^t g(x_{n-1}(s),s)dB(s)\right|^2\right)\\
&\leq 3\left(E|x_0|^2 + (t-t_0)E\left[\int_{t_0}^t |f(x_{n-1}(s),s)|^2 ds\right] + E\left[\int_{t_0}^t |g(x_{n-1}(s),s)|^2 ds\right]\right)\\
&\leq 3\left(E|x_0|^2 + (T-t_0)E\left[\int_{t_0}^t (K+K|x_{n-1}(s)|^2) ds\right] + E\left[\int_{t_0}^t (K+K|x_{n-1}(s)|^2) ds\right]\right)\\
&\leq 3\left(E|x_0|^2 + (T-t_0+1)E\left[\int_{t_0}^t (K+K|x_{n-1}(s)|^2) ds\right]\right)\\
&\leq 3\left(E|x_0|^2 + K(T-t_0)(T-t_0+1) + (T-t_0+1)E\left[\int_{t_0}^t |x_{n-1}(s)|^2 ds\right]\right)\\
&\leq C_1 + 3K(T-t_0+1)\int_{t_0}^t E|x_{n-1}(s)|^2 ds,
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

où $C_1 = 3E|x_0|^2 + 3K(T-t_0)(T-t_0+1)$. Il découle également de (2.6) que pour tout $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
\max_{1\leq n\leq k} E|x_n(t)|^2 &\leq C_1 + 3K(T-t_0+1)\int_{t_0}^t \max_{1\leq n\leq k} E|x_{n-1}(s)|^2 ds\\
&\leq C_1 + 3K(T-t_0+1)\int_{t_0}^t (E|x_0|^2 + \max_{1\leq n\leq k} E|x_n(s)|^2) ds\\
&\leq C_1 + 3K(T-t_0+1)\left((T-t_0)E|x_0|^2 + \int_{t_0}^t \max_{1\leq n\leq k} E|x_n(s)|^2 ds\right)\\
&\leq C_2 + 3K(T-t_0+1)\int_{t_0}^t \max_{1\leq n\leq k} E|x_n(s)|^2 ds,
\end{aligned}
$$

où $C_2 = C_1 + 3K(T-t_0+1)(T-t_0)E|x_0|^2$. Alors l'inégalité de Gronwall implique

$$
\max_{1\leq n\leq k} E|x_n(t)|^2 \leq C_2 + e^{3K(T-t_0+1)(T-t_0)}.
$$

Puisque k est arbitraire, nous devons avoir

$$
E|x_n(t)|^2 \leq C_2 + e^{3K(T-t_0+1)(T-t_0)} \quad \textit{pour tout } t \in [t_0, T], n \geq 1. \tag{2.7}
$$

Ensuite, nous notons que

$$
\begin{aligned}
|x_1(t) - x_0(t)|^2 &= |x_1(t) - x_0|^2\\
&= \left|\int_{t_0}^t f(x_0,s)ds + \int_{t_0}^t g(x_0,s)dB(s)\right|^2\\
&\leq 2\left|\int_{t_0}^t f(x_0,s)ds\right|^2 + 2\left|\int_{t_0}^t g(x_0,s)dB(s)\right|^2.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'espérance et en utilisant (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
E|x_1(t)-x_0(t)|^2 &\leq 2(t-t_0)E\left[\int_{t_0}^t |f(x_0,s)|^2 ds\right] + 2E\left[\int_{t_0}^t |g(x_0,s)|^2 ds\right] \\
&\leq 2K(T-t_0)E\left[\int_{t_0}^t (1+|x_0|^2)ds\right] + 2KE\left[\int_{t_0}^t (1+|x_0|^2)ds\right] \\
&\leq 2K(T-t_0+1)E\left[\int_{t_0}^t (1+|x_0|^2)ds\right] \\
&\leq 2K(T-t_0+1)(T-t_0)\left[1+E|x_0|^2\right] \\
&\leq C.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous affirmons maintenant que pour $n \geq 0$,

$$E|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2 \leq \frac{C[M(t-t_0)]^n}{n!} \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{2.9}$$

où $M = 2\bar{K}(T-t_0+1)$. Nous le montrerons par récurrence. Au vu de (2.8), nous voyons que (2.9) est vrai lorsque $n = 0$. Sous l'hypothèse de récurrence que (2.9) est vrai pour certains $n \geq$, nous montrerons que (2.9) est toujours vérifiée pour $n+1$. Notons que

$$\begin{aligned}
|x_{n+2}(t)-x_{n+1}(t)|^2 &\leq 2\left|\int_{t_0}^t [f(x_{n+1}(s),s)-f(x_n(s),s)]ds\right|^2 \\
&\quad +2\left|\int_{t_0}^t [g(x_{n+1}(s),s)-g(x_n(s),s)]dB(s)\right|^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

En appliquant l'espérance et en utilisant (2.3) ainsi que l'hypothèse de récurrence, nous obtenant cela

$$\begin{aligned}
E|x_{n+2}(t)-x_{n+1}(t)|^2 &\leq 2\bar{K}(T-t_0+1)E\left[\int_{t_0}^t |x_{n+1}(s)-x_n(s)|^2 ds\right] \\
&\leq M\int_{t_0}^t E|x_{n+1}(s)-x_n(s)|^2 ds \\
&\leq M\int_{t_0}^t \frac{C[M(s-t_0)]^n}{n!} ds \\
&\leq \frac{CM^{(n+1)}}{n!(n+1)}[(t-t_0)^{(n+1)}-(t_0-t_0)^{(n+1)}] \\
&\leq \frac{C[M(t-t_0)]^{(n+1)}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Autrement dit, (2.9) est satisfaite pour $n+1$. Donc, par récurrence, (2.9) est satisfaite pour tout $n \geq 0$. De plus, en remplaçant n dans (2.10) par $n-1$, nous voyons que

$$\begin{aligned}\sup_{t_0\le t\le T}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2 &\le 2\bar{K}(T-t_0)\int_{t_0}^{T}|x_n(s)-x_{n-1}(s)||^2ds\\ &+2\sup_{t_0\le t\le T}\left|\int_{t_0}^{T}[g(x_n(s),s)-g(x_{n-1}(s),s)]dB(s)\right|^2.\end{aligned}$$

En appliquant l'espérance et en utilisant le théorème (1.7) et (3.8), nous constatons que

$$\begin{aligned}E\left(\sup_{t_0\le t\le T}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2\right) &\le 2\bar{K}(T-t_0)E\left(\int_{t_0}^{T}|x_n(s)-x_{n-1}(s)||^2ds\right)\\ &+2E\left(\sup_{t_0\le t\le T}\left|\int_{t_0}^{T}[g(x_n(s),s)-g(x_{n-1}(s),s)]dB(s)\right|^2\right)\\ &\le 2\bar{K}(T-t_0)\int_{t_0}^{T}E|x_n(s)-x_{n-1}(s)||^2ds\\ &+8\bar{K}\int_{t_0}^{T}E|x_n(s)-x_{n-1}(s)|^2ds\\ &\le 2\bar{K}(T-t_0+4)\int_{t_0}^{T}E|x_n(s)-x_{n-1}(s)||^2ds\\ &\le 4M\int_{t_0}^{T}\frac{C[M(s-t_0)]^{n-1}}{(n-1)!}ds\\ &\le \frac{4C[M(T-t_0)]^n}{(n)!}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t_0\le t\le T}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|>\frac{1}{2^n}\right\}\le\frac{4C[M(T-t_0)]^n}{(n)!}.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4C[M(T-t_0)]^n}{(n)!}<\infty$, le lemme de Borel-Cantelli (1.1) donne que pour presque $\omega\in\Omega$ il existe un entier positif $n_0=n_0(\omega)$ tel que

$$\sup_{t_0\le t\le T}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|>\frac{1}{2^n}\qquad\forall n\ge n_0.$$

Il s'ensuit que, avec la probabilité 1, les sommes partielles suivants

$$x_0+\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}(t)-x_i(t)]=x_n(t)$$

convergent uniformément dans $t \in [0,T]$. Notons la limite par $x(t)$. Clairement, $x(t)$ est continu et adapté à $\mathcal{F}_t$. De l'autre côté, on voit a partir de (2.9) que pour tout t, $(x_n(t))_{n\geq 1}$ est également une suite de Cauchy. Par conséquent, nous avons également $x_n(t) \to x(t)$ en $\mathbf{L}^2$. Quand $n \to \infty$ dans (2.7) on obtient

$$E|x(t)|^2 \leq C_2 + e^{3K(T-t_0+1)(T-t_0)} \quad pour\ tout\ t \in [t_0,T]\,, n \geq 1.$$

Ce qui prouve que $x(t) \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$. Reste à montrer que $x(t)$ satisfait l'équation (2.2). Notez que

$$\begin{aligned}
E|x_n(t)-x(t)|^2 &\leq 2E\left|\int_{t_0}^t [f(x_n(s),s)-f(x(s),s)]ds\right|^2 \\
&+2E\left|\int_{t_0}^t [g(x_n(s),s)-g(x(s),s)]dB(s)\right|^2 \\
&\leq \bar{K}(T-t_0+1)\int_{t_0}^t E|x_n(s)-x(s)|^2 ds \\
&\leq \bar{K}(T-t_0+1)\int_{t_0}^T E\left(\sup_{t_0\leq t\leq T}|x_n(s)-x(s)|^2\right)ds \to 0 \quad quand \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

On peut donc faire tendre $n \to \infty$ dans l'équation (2.5) pour obtenir la formule suivante

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^t g(x(s),s)dB(s) \qquad pour\ t \in [t_0,T].$$

■

Le théorème suivant donne une estimation de la vitesse de la convergence.

Théorème 2.3. *On suppose que les hypothèses du théorème (2.1) soit vérifiée. Soient $x(t)$ la solution unique de l'équation (2.2) et $x_n(t)$ les itérations de Picard définies par (2.5).*

$$E\left(\sup_{t_0\leq t\leq T}|x_n(s)-x(s)|^2\right) \leq \frac{8C[M(t-t_0)]^n}{n!}e^{8M(T-t_0)},$$

pour tout $n \geq 1$, où C et M sont les mêmes que ceux définis dans la démonstration du théorème (2.1).

Théorème 2.4.

(i) (la condition de Liptchiz locale) $\forall n \geq 1$ $\exists \bar{K}_n > 0$ *tel que pour tout* $t \in [t_0, T]$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|x| \vee |y| \leq n$

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \bigvee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq \bar{K}_n |x-y|^2; \tag{2.11}$$

(ii) (la condition de monotonie) $\exists K > 0$ *tele que pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq K(1+|x|^2). \tag{2.12}$$

Alors,il existe une solution unique $x(t)$ *à l'équation (2.1) et la solution appartient à* $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$.

On considère l'équation différentielle stochastique suivante

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t) \quad t \in [t_0, \infty] \tag{2.13}$$

On discute maintenant plus généralement sur l'existence et l'unicité de la solution quand $t \in [t_0, \infty]$

Théorème 2.5. *Supposons que pour tout* $T > t_0$ *et* $n \geq 1$ *qu'il existe un un constant positif* $K_{T,n}$ *tel que pour tout* $t \in [t_0, T]$ *et tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|x| \vee |y| \leq n$,

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \bigvee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq K_{T,n} |x-y|^2. \tag{2.14}$$

Supposons aussi que pour tout $T > t_0$*, il existe un constant positif* K_T *tel que pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$,

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq K_T(1+|x|^2). \tag{2.15}$$

Donc il existe une solution globale unique $x(t)$ *de l'équation (2.13) et que cette solution appartient à* $\mathcal{M}^2([t_0, \infty]; \mathbb{R}^d)$

2.2.2 L'approximation en $\mathbf{L}^p$

Dans cette sous-section, nous supposons que pour tout $t_0 \leq t \leq T$ $x(t)$ est la solution unique de l'équation (2.1) avec $x(t_0) = x_0$, et nous étudierons le p-ème moment de la solution.

Théorème 2.6. *Soient* $p \geq 2$ *et* $x_0 \in \boldsymbol{L}^P(\Omega; \mathbb{R}^d)$*. Supposons qu'il existe une constante* $\alpha > 0$*, telle que pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$,

$$x^T f(x,t) + \frac{p-1}{2}|g(x,t)|^2 \leq \alpha(1+|x|^2). \tag{2.16}$$

Alors

$$E|x(t)|^P \leq 2^{\frac{p-2}{2}}(1+E|x_0|^p)e^{p\alpha(t-t_0)} \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, T]. \tag{2.17}$$

Preuve: :
Par la formule d'Itô, l'inégalité élémentaire $\left(|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)\right)$ et la condition (2.16), nous pouvons déduire que pour $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned}
[1+|x(t)|^2]^{\frac{p}{2}} &= [1+|x_0|^2]^{\frac{p}{2}} + p\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}}x^T(s)f(x(s),s)ds \\
&+\frac{p}{2}\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}}x^T(s)|g(x(s),s)|^2ds \\
&+\frac{p(p-2)}{2}\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-4}{2}}|x^T(s)g(x(s),s)|^2ds \\
&+p\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}}x^T(s)g(x(s),s)dB(s) \\
&\leq 2^{\frac{p-2}{2}}[1+|x_0|^p] + p\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} \qquad (2.18)\\
&\times\left(x^T(s)f(x(s),s)+\frac{p-1}{2}|g(x(s),s)|^2\right)ds \\
&+p\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}}x^T(s)g(x(s),s)dB(s) \\
&\leq 2^{\frac{p-2}{2}}[1+|x_0|^p] + p\alpha\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p}{2}}ds \\
&+p\int_{t_0}^{t}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}}x^T(s)g(x(s),s)dB(s).
\end{aligned}$$

Pour tout entier $n > 1$, on définit le temps d'arrêt par

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in [t_0, T] : |x(t)| \geq n\}.$$

Clairement, $\tau_n \uparrow T$ p.s. De plus, il résulte de (2.18) et de la propriété d'intégrale d'Itô que

$$\begin{aligned}
E[1+|x(t\wedge\tau_n)|^2]^{\frac{p}{2}} &\leq 2^{\frac{p-2}{2}}[1+E|x_0|^p] + p\alpha E\left[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p}{2}}ds\right] \\
&\leq 2^{\frac{p-2}{2}}[1+E|x_0|^p] + p\alpha E\left[\int_{t_0}^{t}[1+|x(s\wedge\tau_n)|^2]^{\frac{p}{2}}ds\right].
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall donne

$$E[1+|x(t\wedge\tau_n)|^2]^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p-2}{2}}[1+E|x_0|^p]e^{p\alpha(t-t_0)}.$$

En faisant tendre $n \to \infty$, on obtient

$$E[1+|x(t)|^2]^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p-2}{2}}[1+E|x_0|^p]e^{p\alpha(t-t_0)},$$

et l'inégalité demandée (2.17) obtenue.

■

Corollaire 2.7. *Soient $p \geq 2$ et $x_0 \in \boldsymbol{L}^P(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Supposons que la condition de croissance linéaire (2.4) soit vérifiée. Alors l'inégalité (2.17) est satisfaite pour $\alpha = \sqrt{K} + K(p-1)/2$.*

Théorème 2.8. *Soient $p \geq 2$ et $x_0 \in \boldsymbol{L}^P(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Supposons que la condition de croissance linéaire (2.4) soit vérifiée. Alors*

$$E\left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(t)|^p\right) \leq (1 + 3^{p-1} + E|x_0|^p)e^{\beta(t-t_0)} \tag{2.19}$$

pour tout $t \in [t_0, T]$, où

$$\beta = \frac{1}{6}(18K)^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^{\frac{p-2}{2}}\left[(T-t_0)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{P^3}{2p-1}\right)^{\frac{p}{2}}\right]. \tag{2.20}$$

Tournons-nous maintenant vers le cas $0 < p < 2$.On note que l'inégalité de Holder implique

$$E|x(t)|^P \leq [E|x(t)|^2]^{\frac{p}{2}}.$$

En d'autres termes, l'estimation pour $E|x(t)|^P$ peut se faire via l'estimation pour le moment d'ordre 2.Par exemple, nous avons les corollaires suivants.

Corollaire 2.9. *Soient $0 < p < 2$ et $x_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$,*

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq \alpha(1+|x|^2). \tag{2.21}$$

Alors

$$E|x(t)|^P \leq (1+E|x_0|^2)^{\frac{P}{2}} e^{p\alpha(t-t_0)} \qquad pour\ tout\ t \in [t_0, T]. \tag{2.22}$$

2.2.3 L'approximation asymptotique presque surement

On considére maintenant l'équation différentiel stochastique de dimension d

$$d(x(t)) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t) \qquad pour\ t \in [t_0, \infty) \tag{2.23}$$

avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbf{L}^P(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Supposons que l'équation (2.23) a une unique solution globale $x(t)$ sur $[t_0, \infty)$.

Dans cette sous-section, nous établirons l'estimation asymptotique de la solution presque sûrement. Plus précisément, nous allons estimer

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} log|x(t)|. \tag{2.24}$$

presque sûrement, qui est appelé l'exposant de Lyapunov.

Théorème 2.10. *Soit $0 < p < 2$. Supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que ,pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, \infty]$,*

$$x^T f(x,t) + \frac{p-1}{2}|g(x,t)|^2 \leq \alpha(1+|x|^2). \tag{2.25}$$

Alors

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|x(t)| \leq \alpha. \tag{2.26}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
\log[1+|x(t)|^2] \quad &\leq \log[1+|x_0|^2] \\
&+ \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+|x(s)|^2}\left(2x^T f(x(s),s) + |g(x(s),s)|^2\right) ds \\
&-2\int_{t_0}^{t} \frac{|x^T g(x(s),s)|^2}{[1+|x(s)|^2]^2} + M(t) \\
&\leq \log[1+|x_0|^2] + 2\alpha(t-t_0) - 2\int_{t_0}^{t} \frac{|x^T g(x(s),s)|^2}{[1+|x(s)|^2]^2} + M(t)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

où

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x^T(s) g(x(s),s)}{1+|x(s)|^2}.$$

D'un autre côté, pour toute entier $n \geq t_0$, en utilisant l'inégalité exponentielle de martingale (le théorème (1.7)), on voit que

$$P\left\{\sup_{t_0\leq t\leq n}\left[M(t) - 2\int_{t_0}^{t} \frac{|x^T g(x(s),s)|^2}{[1+|x(s)|^2]^2}\right] > 2\log n\right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Une application du lemme de Borel-Cantelli (1.1)donne alors que pour presque tout $\omega \in \Omega$ il y a un entier aléatoire $n_0 = n_0(\omega) \geq t_0$ tel que

$$\sup_{t_0\leq t\leq n}\left[M(t) - 2\int_{t_0}^{t} \frac{|x^T g(x(s),s)|^2}{[1+|x(s)|^2]^2}\right] \leq 2\log n \quad si\ n \geq n_0.$$

Alors,

$$M(t) - 2\int_{t_0}^{t} \frac{|x^T g(x(s),s)|^2}{[1+|x(s)|^2]^2} \leq 2\log n \tag{2.28}$$

pour tout $t_0 \leq t \leq n$, $n \geq n_0$ p.s. La substitution de (2.28) en (2.27) en déduit que

$$\log[1+|x(t)|^2] \leq \log[1+|x_0|^2] + 2\alpha(t-t_0) + 2\log n$$

pour tout $t_0 \leq t \leq n$, $n \geq n_0$ p.s. Par conséquent, pour presque tous les $\omega \in \Omega$, si $n \geq n_0$, $n-1 \leq t \leq n$

$$\frac{1}{t}\log[1+|x(t)|^2] \leq \frac{1}{n-1}\Big[\log[1+|x_0|^2] + 2\alpha(t-t_0) + 2\log n\Big].$$

Cela implique

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log|x(t)| &\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{2t}\log[1+|x(t)|^2] \\ &\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{2(n-1)}\Big[\log[1+|x_0|^2] + 2\alpha(t-t_0) + 2\log n\Big] = \alpha \quad p.s.\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.11. *Sous la condition de la croissance linéaire (2.4), la solution de l'équation (2.23) a la propriété suivante :*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log|x(t)| \leq \sqrt{K} + \frac{K}{2}$$

2.3 EDS linéaire

Dans cette section, nous souhaitons, si possible, obtenir la solution explicite de l'équation différentielle stochastique linéaire générale de d-dimension

$$dx(t) = (F(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^{m}(G_k(t)x(t) + g_k(t))dB_k(t) \tag{2.29}$$

sur $[t_0, T]$, où $F(.), G_k(.)$ sont des fonctions à valeur matricielle $(d \times d)$ et $f(.), g_k(.)$ sont des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^d$, comme avant, $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_m(t))^T$ est un mouvement Brownien de dimension m.

Tout au long de cette section, nous supposerons que F, f, G_k, g_k sont tous Borel mesurables et bornés sur $[t_0, T]$. Par conséquent, et par le théorème d'existence et d'unicité (2.3.1), l'équation linéaire (2.29) a une unique solution continue dans $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ pour tout $x(t_0) = x_0$, qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable et appartient à $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

2.3.1 La formule stochastique de LIOUVILLE

Considérons l'équation différentiel stochastique linéaire

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)x(t)dB_k(t) \tag{2.30}$$

sur $[t_0, T]$. Soient $\phi_j(t) = (\phi_{1j}(t), \ldots, \phi_{dj}(t))^T$ la solution de l'équation (2.30) avec $x(t_0) = e_j$ où e_j est le vecteur colonne unitaire dans la direction de x_j, i.e

$$e_j = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)^T \qquad pour\ j = 1, \ldots, d.$$

On définit la matrice fondamentale de l'équation (2.30) par

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_d(t)) = (\phi_{ij}(t))_{d\times d}.$$

Il est utile de noter que $\phi(t_0) = \mathbf{I}_{d\times d}$ et

$$d\phi(t) = F(t)\phi(t)dt + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)\phi(t)dB_k(t)$$

Théorème 2.12. *Étant donné la valeur initiale $x(t_0) = x_0$, la solution unique de l'équation (2.30) est*

$$x(t) = \phi(t)x_0.$$

Lemme 2.13. *Soient $a(.), b(.)$ des fonctions borélienne a valeur réel et bornées sur $[t_0, T]$. Alors*

$$y(t) = y_0 exp\left[\int_{t_0}^{t} (a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b^2 b_k(s))ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)dB_k(s)\right]$$

est la solution unique à l'équation différentielle stochastique linéaire scalaire

$$dy(t) = a(t)y(t)dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)y(t)dB_k(t)$$

sur $[t_0, T]$ avec $y_{t_0} = y_0$

2.3.2 La formule de la variation des constantes

Considérons l'équation différentielle stochastique linéaire d-dimensionnelle générale

$$dx(t) = (F(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^{m}(G_k(t)x(t) + g_k(t))dB_k(t) \tag{2.31}$$

sur $[t_0, T]$ avec $x(t_0) = x_0$. L'équation (2.30) est appelée l'équation homogène du système (2.31). Dans cette section, nous établirons une formule utile, appelée formule de variation des constantes, qui représente la solution unique de l'équation (2.31) en termes de la matrice fondamentale de l'équation homogène correspondante (2.30).

Théorème 2.14. *La solution unique de l'équation (2.31) peut être exprimée comme*

$$x(t) = \phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\left[f(s) - \sum_{k=1}^{m} G_k(s)g_k(s)\right]ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)g_k(s)dB_k(s)\right), \tag{2.32}$$

où $\phi(t)$ est la matrice fondamentale de l'équation homogène correspondante (2.30).

Le théorème (2.14) nous dit que nous pouvons avoir la solution explicite de l'équation linéaire (2.31) à condition de connaître la matrice fondamentale correspondante $\phi(t)$. Bien que nous ne puissions pas obtenir la matrice fondamentale explicite $\phi(t)$ pour chaque cas, nous pouvons le faire pour plusieurs cas importants et passons à ces études de cas.

2.3.3 Les cas d'études

(i) *Équations linéaires scalaires :* Nous considérons d'abord l'équation différentielle stochastique linéaire scalaire générale

$$dx(t) = (a(t)x(t) + \bar{a}(t))dt + \sum_{k=1}^{m}(b_k(t)x(t) + \bar{b}_k(t))dB_k(t) \tag{2.33}$$

sur $[t_0, T]$ avec $x(t_0) = x_0$. Ici $x_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R})$ est $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable, et $a(t)$, $\bar{a}(t), b(t), \bar{b}(t)$ sont des fonctions scalaire et Borélienne.L'équation linéaire homogène correspondante est

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)x(t)dB_k(t). \tag{2.34}$$

Par le lemme (2.13), la solution fondamentale de l'équation (2.34) est donnée par

$$\phi(t) = exp\left[\int_{t_0}^{t}(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(s))ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)dB_k(s)\right].$$

En appliquant le théorème (2.14), nous obtenons ensuite la solution explicite de l'équation (2.33)

$$x(t) = \phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)\left[\bar{a}(s) - \sum_{k=1}^{m} bk(s)\bar{b}_k(s)\right]ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)\bar{b}_k(s)dB_k(s)\right). \tag{2.35}$$

(ii) Équations linéaires au sens large : Nous considérons ensuite l'équation différentielle stochastique linéaire de dimension d au sens large

$$dx(t) = (F(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^{m} g_k(t))dB_k(t) \tag{2.36}$$

sur $[t_0, T]$ avec $x(t_0) = x_0$, où F, f, g_k sont les mêmes que définis dans la sous-section précédente. L'équation linéaire homogène correspondante est maintenant l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t). \tag{2.37}$$

Encore une fois, soit $\phi(t)$ la matrice fondamentale de l'équation (2.37). La solution de l'équation (2.36) a alors la forme

$$x(t) = \phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)g_k(s)dB_k(s)\right). \tag{2.38}$$

En particulier, lorsque $F(t) = F$ est une matrice constante $(d \times d)$, la matrice fondamentale $\phi(t)$ a la forme simple $\phi(t) = e^{F(t-t_0)}$ et sa matrice inverse $\phi^{-1}(t) = e^{-F(t-t_0)}$. Par conséquent, dans ce cas, l'équation (2.36) a la solution explicite

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{F(t-t_0)}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-F(t-t_0)}f(s)ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} e^{-F(t-t_0)}g_k(s)dB_k(s)\right) \\ &= x_0e^{F(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{F(t-s}f(s)ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} e^{F(t-s)}g_k(s)dB_k(s). \end{aligned} \tag{2.39}$$

(iii) Équations linéaires autonomes : Nous considérons maintenant l'équation différentielle stochastique linéaire autonome d-dimensionnelle

$$dx(t) = (Fx(t) + f)dt + \sum_{k=1}^{m}(G_k x(t) + g_k)dB_k(t) \tag{2.40}$$

sur $[t_0, T]$ avec $x(t_0) = x_0$, où $F, G_k \in \mathbb{R}^d \times d$ et $f, g_k \in \mathbb{R}^d$. L'équation homogène correspondante est

$$dx(t) = Fx(t)dt + \sum_{k=1}^{m} G_k x(t)dB_k(t). \tag{2.41}$$

En général, la matrice fondamentale $\phi(t)$ ne peut pas être donnée explicitement. Cependant, si les matrices $F, G_1, \ldots, G_m$ sont commutatives, c'est-à-dire si

$$FG_k = G_k F, \quad G_k G_j = G_j G_k \quad \textit{pour tout } 1 \leq k, j \leq m, \tag{2.42}$$

alors la matrice fondamentale de l'équation (2.41) a la forme explicite

$$\phi_t = exp\left[\left(F - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} G_k^2\right)(t - t_0) + \sum_{k=1}^{m} G_k(B_k(t) - B_k(t_0))\right].$$

Enfin, nous appliquons le théorème (2.14) pour conclure que sous la condition (2.42), l'équation linéaire autonome (2.40) a la solution explicite

$$x(t) = \phi(t)\left[x_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)ds\right)\left(f - \sum_{k=1}^{m} G_k g_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)dB_k(s)\right)g_k\right].$$

Chapitre 3

Stabilité des équations différentielles stochastiques

3.1 Introduction

La stabilité signifie une insensibilité de l'état du système aux petits changements de l'état initial ou des paramètres du système. Pour un système stable, les trajectoires qui sont "proches" les unes des autres à un instant donné doivent donc rester proches les unes des autres à tous les instants suivants.
En 1892, Lyapunov a développé une méthode pour déterminer la stabilité sans résoudre l'équation et cette méthode est maintenant connue sous le nom de méthode directe ou la deuxième méthode de Lyapunov.
Dans ce chapitre, nous étudierons les différents types de stabilité des EDS d-dimensionnelle de l'équation suivante :

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \quad ; \quad pour\ tout\ t \geq t_0. \tag{3.1}$$

3.2 Généralité

Définition 3.1. (Solution triviale)

Considérons l'équation (3.2) et on suppose que pour tout $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution globale qui est notée $x(t; t_0, x_0)$. Supposons en outre que

$$f(0,t) = 0 \qquad ; \quad pour\ tout\ t \geq t_0.$$

Donc l'équation (3.2) a la solution $x(t) \equiv 0$ correspondant à la valeur initiale $x(t_0) = 0$. Cette solution est appelée solution triviale ou position d'équilibre.

Définition 3.2.

— Une fonction continue $V(x,t)$ définie sur $S_h \times [t_0, \infty)$ est dite définie-positive (au sens de Lyapunov) si $V(0,t) \equiv 0$ et, pour certains $\mu \in \mathcal{K}$,

$$V(x,t) \geq \mu(|x|) \qquad ; \quad (x,t) \in S_h \times [t_0, \infty).$$

— Une fonction V est dite définie-négative si $(-V)$ est définie-positive.

— Une fonction continue non négative $V(x,t)$ est dite décrescente (i.e qu'elle a une limite supérieure arbitrairement petite) si pour certains $\mu \in \mathcal{K}$,

$$V(x,t) \leq \mu(|x|) \qquad ; \quad (x,t) \in S_h \times [t_0, \infty).$$

— Une fonction $V(x,t)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty)$ est dite radialement non-bornée si

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf_{t \geq t_0} V(x,t) = \infty.$$

Définition 3.3. On définit l'opérateur différentielle L associé à l'équation (3.1) par

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} f_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} [g(x,t) g^T(x,t)]_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si L agit dans la fonction $V \in C^{2,1}(S_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, alors

$$LV = V_t(x,t) + V_x(x,t) f(x,t) + \frac{1}{2} trace[g^T(x,t) V_{xx}(x,t) g(x,t)].$$

Par la formule d'Îto, si $x(t) \in S_h$, alors

$$dV(x(t),t) = LV(x(t),t)dt + V_x(x(t),t) g(x(t),t) dB(t).$$

3.3 Stabilité des équations différentielles ordinaires

3.3.1 Le concept de la stabilité

Définition 3.4.

— On dit que la solution triviale est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \; ; \qquad \textit{pour tout } t \geq t_0,$$

où $|x_0| < \delta$. Sinon, elle serait instable.

— On dit que la solution triviale est asymptotiquement stable si elle est stable et qu'il existe $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ tel que

$$\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, x_0) = 0;$$

où $|x_0| < \delta_0$.

3.3.2 La méthode de Lyapunov

Soit $x(t)$ est une solution de l'équation suivante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad ; \qquad \textit{pour tout } t \geq t_0, \tag{3.2}$$

et $V(x,t) \in C^{1,1}(S_h \times [t_0, \infty); \mathbb{R}_+)$. Alors $v(t) = V(x(t), t)$ représente une fonction de t avec la dérivée

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t) f(x(t), t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t), t) f_i(x(t), t). \end{aligned}$$

- Si $\dot{v}(t) \leq 0$, alors $v(t)$ ne croît pas, donc la distance entre $x(t)$ et le point d'équilibre qu'est mesuré par $V(x(t), t)$ n'augmentera pas .
- Si $\dot{v}(t) < 0$, alors $v(t)$ décroît à zéro de sorte que la distance diminuera à zéro (i.e $x(t) \to 0$).

Théorème 3.1.

1. *S'il existe une fonction $V(x,t)$ définie-positive avec $V(x,t) \in C^{1,1}(S_h \times [t_0, \infty);\ \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\dot{V}(x,t) = V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t) f(x(t), t) \leq 0 \; ; \qquad \forall (x,t) \in (S_h \times [t_0, \infty)$$

alors la solution triviale de l'équation (3.2) est stable.

2. *S'il existe une fonction $V(x,t) \in C^{1,1}(S_h \times [t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$ décrescente et définie positive telle que $\dot{V}(x,t)$ est définie-négative, alors la solution triviale de l'équation (3.2) est asymptotiquement stable.*

Une fonction $V(x,t)$ qui satisfait aux conditions de stabilité du théorème (3.1) est appelée fonction de Lyapunov correspondant à l'équation différentielle ordinaire.

3.4 Stabilité des équations différentielles stochastiques

La stabilité stochastique a été l'un des domaines les plus actifs de l'analyse stochastique et de nombreux mathématiciens y ont consacré leurs intérêts. Il s'avère qu'il existe au moins trois types différents de stabilité stochastique : stabilité en probabilité, stabilité du moment et stabilité presque sûre.

3.4.1 Les différents types de la stabilité des EDS

Soulignons que tout au long de ce chapitre, nous laisserons la valeur initiale x_0 être une constante (dans $\mathbb{R}^d$) mais pas une variable aléatoire.

3.4.1.1 Stabilité en probabilité

Dans cette partie, nous discuterons la stabilité en probabilité.

Définition 3.5.

1. On dit que la solution triviale de l'équation (3.1) est stochastiquement stable ou stable en probabilité si pour tout couple de $\varepsilon \in (0,1)$ et $r > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, r, t_0)$ tel que

$$\mathbb{P}\{| x(t;t_0,x_0) |< r;\ \forall\, t \geq t_0\} \geq 1-\varepsilon,$$

où $|x_0| < \delta$. Sinon, elle est stochastiquement instable.

2. On dit que la solution triviale est asymptotiquement stochastiquement stable, si elle est stochastiquement stable. De plus, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,x_0) = 0\} \geq 1-\varepsilon,$$

où $|x_0| < \delta_0$.

3. On dit que la solution triviale est stochastiquement asymptotiquement stable en large si elle est stochastiquement stable, de plus, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tel que
$$\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,x_0)=0\}=1.$$

Remarque 3.1. supposons que la valeur initiale x_0 soit une $v.a$ alors on remplace "$|x_0|<\delta$" par "$|x_0|<\delta\ p.s.$" . Cela semble plus général mais est en fait équivalent à ce qui précède. Par exemple, on suppose que la condition (1) est satisfaite donc pour tout x_0 v.a avec $|x_0|<\delta\ p.s$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\mid x(t;t_0,x_0)\mid< r,\ \forall t\geq t_0\} &= \int_{S_\delta} \mathbb{P}\{\mid x(t;t_0,y)\mid< r,\ \forall t\geq t_0\}\mathbb{P}\{x_0\in dy\};\\
&\geq \int_{S_\delta}(1-\varepsilon)\mathbb{P}\{x_0\in dy\};\\
&= 1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous étendons maintenant le théorème de Lyapunov (3.1) au cas stochastique.

Théorème 3.2. *S'il existe une fonction $V(x,t)\in C^{2,1}(S_h\times[t_0,\infty),\mathbb{R}_+)$ définie positive tel que*
$$LV(x,t)\leq 0,$$
pour tout $(x,t)\in S_h\times[t_0,\infty)$, donc la solution triviale de l'équation (3.1) est stochastiquement stable (i.e stable en probabilité).

Preuve: Par la définition d'une fonction V définie positive, nous savons que $V(0,t)\equiv 0$ et il existe une fonction $\mu\in\mathcal{K}$ telle que

$$V(x,t)\geq \mu(|x|)\ ; \qquad pour\ tout\ (x,t)\in S_h\times[t_0,\infty). \tag{3.3}$$

Soient $\varepsilon\in(0,1)$ et un arbitraire $r>0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $r<h$. Par la continuité de $V(x,t)$ et le fait que $V(0,t_0)=0$, on peut trouver $\delta=\delta(\varepsilon,r,t_0)>0$ tel que

$$\frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in S_\delta} V(x,t_0)\leq \mu(r) \tag{3.4}$$

c'est claire que $\delta<r$, fixons maintenant $x_0\in S_\delta$ arbitrairement et on écrit simplement $x(t)=x(t,t_0,x_0)$. Soit le temps d'arrêt τ tel que

$$\tau=\inf\{t\geq t_0 : x_t\notin S_r\}.$$

Par la formule d'Itô on obtient, pour tout $t \geq t_0$,

$$V(x(\tau \wedge t), \tau \wedge t) = V(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{\tau \wedge t} LV(x(s), s)ds + \int_{t_0}^{\tau \wedge t} V_x(x(s), s)g(x(s), s)dB_s$$

en appliquant l'espérance et on obtient

$$E[V(x(\tau \wedge t), \tau \wedge t)] \leq V(x_0, t_0). \tag{3.5}$$

Notons $|x(\tau \wedge t)| = |x(\tau)| = r \; si \; \tau \leq t$. Donc par (3.3),

$$\mathrm{E}[V(x(\tau \wedge t), \tau \wedge t)] \geq \mathrm{E}\Big[I_{\{\tau \leq t\}} V(x(\tau), \tau)\Big] \geq \mu(r)\mathbb{P}\{\tau \leq t\}.$$

Ceci, combiné avec (3.5) et (3.4), implique

$$\mathbb{P}\{\tau \leq t\} \leq \varepsilon.$$

Quand $t \to \infty$, on obtient $\mathbb{P}\{\tau \leq \infty\} \leq \varepsilon$, alors

$$\mathbb{P}\{|x(t)| < r \; ; \quad pour \; tout \; t \geq 0\} \leq 1 - \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Théorème 3.3. *S'il existe une fonction $V(x,t) \in C^{2,1}(S_h \times [t_0, \infty), \mathbb{R}_+)$ décresente et définie-positive telle que $LV(x,t)$ est définie-négative, alors la solution triviale de l'équation (3.1) est asymptotique stable en probabilité.*

Théorème 3.4. *S'il existe une fonction $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty), \mathbb{R}_+)$ décresente radialement non-bornée et définie positive telle que $LV(x,t)$ est définie-négative, alors la solution triviale de l'équation (3.1) est asymptotiquement stable en probabilité en large.*

Exemple 3.1. Considérons une équation différentielle stochastique de dimension 1

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \; ; \qquad t \geq t_0, \tag{3.6}$$

avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ avoir le développement uniforme suivant

$$f(x,t) = a(t)x + o(|x|) \; ; \qquad g(x,t) = (b_1(t)x, \ldots, b_m(t)x)^T + o(|x|) \; ; \quad t \geq t_0, \tag{3.7}$$

au voisinage de $x = 0$ où $a(t)$ et $b_i(t)$ sont toutes des fonctions Borel mesurables à valeur réelle. Posons une condition selon laquelle il existe un couple constant positif θ et K tels que

$$-K \leq \int_{t_0}^{t} \left(a(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2(s) + \theta \right) ds \leq K \qquad t \geq t_0. \tag{3.8}$$

Soit

$$0 < \varepsilon < \frac{\theta}{\sup\limits_{t \geq t_0} \sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2(t)}$$

et on définie la fonction stochastique de Lyapunov

$$V(x,t) = |x|^{\varepsilon} \exp\left[-\varepsilon \int_{t_0}^{t} (a(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2(s) + \theta) ds \right].$$

Par la condition (3.8),

$$|x|^{\varepsilon} e^{-\varepsilon k} \leq V(x,t) \leq |x|^{\varepsilon} e^{\varepsilon k}.$$

Par conséquent $V(x,t)$ est définie-positive et décresente. D'autre part, par (3.7)

$$\begin{aligned} LV(x,t) &= \varepsilon |x|^{\varepsilon} \exp[-\varepsilon \int_{t_0}^{t} (a(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2(s) + \theta) ds) \times \left(\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2(s) - \theta) + o(|x|^{\varepsilon}) \right) \\ &\leq \frac{-1}{2} \varepsilon \theta e^{-\varepsilon k} |x|^{\varepsilon} + o(|x|^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

On voit donc que $LV(x,t)$ est définie-négative dans un voisinage suffisamment petit de $x = 0$ pour $t \geq t_0$.

Par le Théorème(3.3), nous concluons donc que sous (3.7) et (3.9), la solution triviale de l'équation (3.6) est asymptotiquement stable en probabilité.

3.4.1.2 Stabilité exponentielle presque sûre

Nous discuterons de la stabilité exponentielle presque sûre pour une équation différentielle stochastique d-dimensionnelle dirigée par un intégrateur non linéaire. Nous donnons d'abord la définition formelle de la stabilité exponentielle presque sûre.

Définition 3.6. On dit que l'équation (3.1) est exponentiellement stable presque sûrement s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\lim_{t \to \infty} \sup \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| < -\alpha < 0 \qquad p.s. \tag{3.9}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, où $\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)|$ est l'exposant de Lyapunov de la solution $x(t;t_0,x_0)$.

Remarque 3.2. Nous expliquons encore une fois pourquoi il suffit de discuter du cas des valeurs initiales constantes. Pour une valeur initiale générale x_0 (i.e x_0 est F_{t_0}-mesurable et appartient à $L^2(\Omega;\mathbb{R})$, il résulte de (3.9) que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)|<0\} &= \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,y)|<0\}\mathbb{P}\{x_0\in dy\};\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{P}\{x_0\in dy\};\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)|<0 \quad p.s.$$

Pour établir les théorèmes sur la stabilité exponentielle presque sûre, nous devons préparer les deux lemmes suivants.

Lemme 3.5. *Supposons que pour tout $\theta>0$, il existe un $K_\theta>0$ tel que*

$$|f(x,t)|^2 + trace(g(x,t)g^T(x,t)) \leq K_\theta|x|^2 \quad si\ |x|\leq\theta\ et\ t\geq t_0.$$

Alors,

$$\mathbb{P}\{\,x(t;t_0,x_0)\neq 0;\quad \forall\, t\geq t_0\} = 1,$$

pour tout $x_0\neq 0\in\mathbb{R}^d$. Autrement dit, presque tout le trajectoire d'échantillonnage de toute solution à partir d'un état non nul n'atteindra jamais l'origine.

Lemme 3.6. *{L'inégalité exponentielle de la martingale} Soit $g=(g_1,\ldots,g_m)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{1\times m})$ et soit T,α,β des nombres positifs. Alors*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t_0\leq t\leq T}\left[\int_{t_0}^t g(s)dB(s) - \frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^t |g(s)ds|^2 ds\right]>\beta\right\}\leq e^{-\alpha\beta}. \qquad (3.10)$$

Théorème 3.7. *Supposons qu'il existe une fonction $V\in C^{2,1}(\mathbb{R}^d\times[t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$ et les constants $p>0$, $c_1>0$, $c_2\in\mathbb{R}$, $c_3\geq 0$, telle que pour tout $x\neq 0$ et $t\geq t_0$,*

i) $c_1|x|^p \leq V(x,t)$,

ii) $LV(x,t)\leq c_2V(x,t)$,

iii) $|V_x(x,t)g(x,t)|^2 \geq c_3V^2(x,t)$.

Alors,

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)| \leq -\frac{c_3-2c_2}{2p} \qquad p.s. \tag{3.11}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. En particulier, si $c_3 > 2c_2$ donc la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentiellement stable presque sûrement.

Preuve: De toute évidence, l'inégalité (3.11) est vérifiée pour $x_0 = 0$ puisque $x(t;t_0,0) \equiv 0$. Fixons $x_0 \neq 0$ et on écrit $x(t) = x(t;t_0,0)$. Par le lemme (3.5), $x(t) \neq 0$ pour tous $t \geq t_0$ presque sûrement. Ainsi, on peut appliquer la formule d'Itô et la condition (ii) pour montrer que,

$$\begin{aligned}\log V(x(t),t) &\leq \log V(x_0,t_0) + c_2(t-t_0) + M(t)\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{|V_x(x(s),s)g(x(s),s)|^2}{V^2(x(s),s)}ds,\end{aligned}$$

où

$$M(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{V_x(x(s),s)g(x(s),s)}{V(x(s),s)}dB(s)$$

est une martingale continue avec $M_0 = 0$. Assignez arbitrairement $\varepsilon \in (0,1)$ et soit $n = 1,2,\ldots$. Par l'inégalité exponentielle de la martingale (3.6),

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t_0\leq t\leq t_0+n}\left[\int_{t_0}^{t} M(t) - \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{|V_x(x(s),s)g(x(s),s)|^2}{V^2(x(s),s)}ds\right] > \frac{2}{\varepsilon}\log(n)\right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli(1.1), nous voyons que pour presque tous $\omega \in \Omega$, il y a un entier $n_0 = n_0(\omega)$ tel que si $n \geq n_0$,

$$M(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{|V_x(x(s),s)g(x(s),s)|^2}{V^2(x(s),s)}ds + \frac{2}{\varepsilon}\log(n)$$

soit vérifiée pour tous $t_0 \leq t \leq t_0 + n$. On remplace ceci en (3.4.1.2) puis utiliser la condition (iii) nous obtenons que

$$\log V(x(t),t) \leq \log V(x_0,t_0) - \frac{1}{2}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2](t-t_0) + \frac{2}{\varepsilon}\log(n)$$

pour tout $t_0 \leq t \leq t_0 + n$, $n \geq n_0$ presque sûrement . Par conséquent, pour presque tous $\omega \in \Omega$, si $t_0 + n - 1 \leq t \leq t_0 + n$ et $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{t}\log V(x(t),t) \leq -\frac{t-t_0}{2t}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2] + \frac{\log V(x_0,t_0) + \frac{2}{\varepsilon}log(n)}{t_0+n-1}.$$

Cela implique

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log V(x(t),t)\leq -\frac{1}{2}[(1-\varepsilon)c_3-2c_2] \qquad p.s.$$

Enfin, en utilisant la condition (i), nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log|x(t)|\leq -\frac{(1-\varepsilon)c_3-2c_2}{2p} \qquad p.s.$$

et l'inégalité demandée (3.11) obtenue, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

■

Corollaire 3.8. *Supposons qu'il existe une fonction $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$ et les constantes p,α,λ soient positives telle que pour tout $x_0 \neq 0, t \geq t_0$,*

$$\alpha|x|^p \leq V(x,t) \qquad et \qquad LV(x,t)\leq -\lambda V(x,t).$$

Alors

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)|\leq -\frac{\lambda}{p} \qquad p.s.$$

Ce corollaire découle immédiatement du théorème précédent en posant $c_1 = \alpha$, $c_2 = -\lambda$ et $c_3 = 0$.

Théorème 3.9. *Supposons qu'il existe une fonction $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$ et les constants $p > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c_3 \geq 0$, telle que pour tout $x \neq 0$ et $t \geq t_0$,*

i) $c_1|x|^p \geq V(x,t) > 0$,

ii) $LV(x,t) \geq c_2 V(x,t)$,

iii) $|V_x(c,t)g(x,t)|^2 \leq c_3 V^2(x,t)$.

Alors,

$$\lim_{t\to\infty}\inf\frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)|\geq \frac{2c_2-c_3}{2p} \qquad p.s. \tag{3.12}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. En particulier, si $2c_2 > c_3$ donc la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentiellement instable presque sûrement.

Preuve: Fixons $x_0 \neq 0$ et on écrit $x(t) = x(t;t_0,0)$. Par la formule d'Itô, les conditions (ii) et (iii), nous pouvons facilement montrer que pour $t \geq t_0$,

$$\log V(x(t),t) \geq V(x_0,t_0) + \frac{1}{2}(2c_2-c_3)(t-t_0) + M(t), \tag{3.13}$$

où

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{V_x(x(s),s)g(x(s),s)}{V(x(s),s)} dB(s)$$

est une martingale continue avec la variation quadratique

$$\langle M(t), M(t)\rangle = \int_{t_0}^{t} \frac{|V_x(x(s),s)g(x(s),s)|^2}{V^2(x(s),s)} ds \leq c_3(t-t_0).$$

Par la loi forte des grands nombres (c'est-à-dire le théorème (1.2)), $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = 0$ p.s. Il résulte donc de (3.13) que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} log V(x(t),t) \geq \frac{1}{2}(2c_2 - c_3) \qquad p.s.$$

Ce qui implique l'inégalité (3.12) demandé en utilisant la condition (i).

■

Exemple 3.2. On considéré l'équation différentielle stochastique de dimension 2 suivante

$$dx(t) = f(x(t))dt + Gx(t)dB(t) \quad pour t \geq t_0 \tag{3.14}$$

avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ où $B(t)$ est unidimensionnelle,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 cos x_1 \\ 2x_1 sin x_2 \end{pmatrix} \quad , \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & -0.3 \\ -0.3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $V(x,t) = |x|^2$. On a

$$4.29|x|^2 \leq LV = 2x_1x_2cosx_1 + 4x_1x_2sinx_2 + |Gx|^2 \leq 13.89|x|^2$$

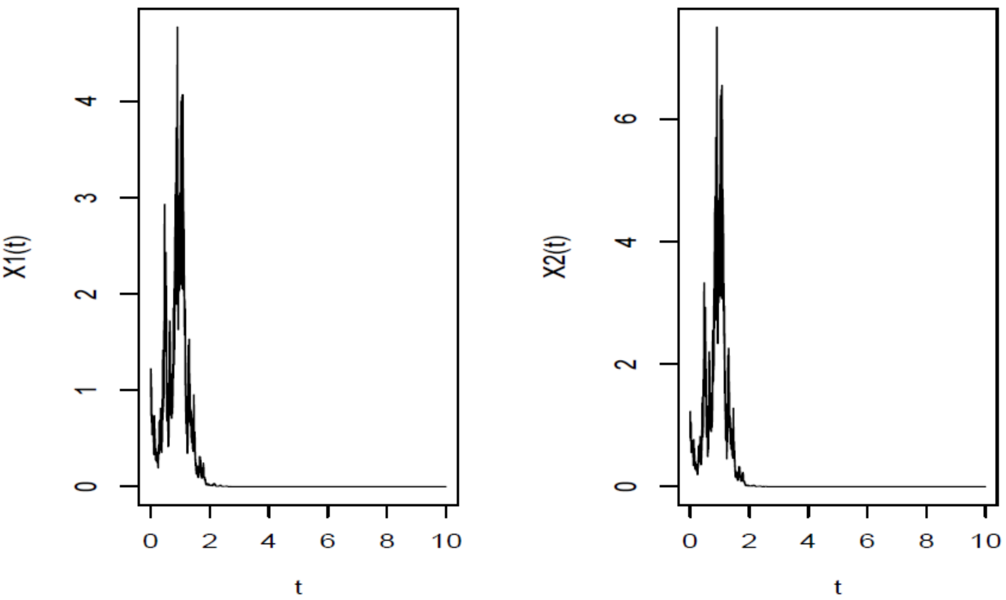
et

$$29.16|x|^2 \leq |V_x(x,t)Gx|^2 \leq 43.56|x|^4.$$

En appliquant le théorème (3.7) et le Théorème (3.9) et on obtient

$$-8.745 \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)| \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)| \leq -0.345.$$

Par conséquent, la solution triviale de l'équation (3.14) est exponentiellement stable presque sûrement.



$$x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

FIGURE 3.1 – Trajectoire de la solution de l'équation (3.14)

3.4.1.3 Stabilité exponentielle au moment d'ordre p

Nous discuterons de la stabilité exponentielle du moment d'ordre p pour l'équation (3.1) et nous laisserons toujours $p > 0$.

Définition 3.7. On dit que la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentiellement stable au moment d'ordre p s'il y a un couple de constantes positives λ et C et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ telles que

$$E|x(t;t_0,x_0)|^p \leq C|x_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)}\,; \qquad pour\ tout\ t \geq t_0, \tag{3.15}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Lorsque $p = 2$, il est généralement dit exponentiellement stable en moyenne quadratique. Il résulte également de (3.15) que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \log E|x(t;t_0,x_0)|^p < 0. \tag{3.16}$$

Remarque 3.3.

— Si l'on souhaite considérer la valeur initiale $x_0 \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ puis, par (3.15),

$$\begin{aligned} E|x(t;t_0,x_0)|^p &= \int_{\mathbb{R}^d} E|x(t;t_0,y)|^p \mathbb{P}\{x_0 \in dy\}; \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} C|y|^p e^{-\lambda(t-t_0)} \mathbb{P}\{x_0 \in dy\}; \\ &= CE|y|^p e^{-\lambda(t-t_0)}. \end{aligned}$$

— Soit $0 < \hat{p} < p$, alors

$$(E|x(t)|^{\hat{p}})^{\frac{1}{\hat{p}}} \leq (E|x(t)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Et par conséquent, la stabilité exponentielle au moment d'ordre p implique la stabilité exponentielle au moment d'ordre $\hat{p}$

Théorème 3.10. *Supposons qu'il existe une fonction $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$ et des constantes postives C_1, C_2, C_3, telle que*

$$c_1|x|^p \leq V(x,t) \leq c_2|x|^p \qquad et \qquad LV(x,t) \leq -c_3 V(x,t) \tag{3.17}$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0,\infty)$. Alors,

$$E|x(t;t_0,x_0)|^p \leq \frac{c_2}{c_1}|x_0|^p e^{-c_3(t-t_0)}\,; \qquad t \geq t_0, \tag{3.18}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Autrement dit, la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentiellement stable au moment d'ordre p.

Preuve: Fixons $x_0 \in \mathbb{R}_d$ et on note $x(t) = x(t;t_0,x_0)$. Pour tout $n \geq |x_0|$, on définit le temps d'arrêt

$$\tau_n = inf\{t \geq t_0 : |x_t| \geq n\}$$

Évidemment, $\tau_n \to \infty$ quand $t \to \infty$ presque sûrement. Par la formule d'Itô, nous pouvons déduire que pour $t \geq t_0$,

$$E\left[e^{c_3(t\wedge\tau_n - t_0)}V(x(t\wedge\tau_n), t\wedge\tau_n)\right] = V(x_0,t_0)+E\left[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} e^{s-t_0}[c_3, V(x(s),s)+LV(x(s),s)]ds\right].$$

En utilisant la condition (3.17), nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} c_1 e^{c_3(t\wedge\tau_n - t_0)}E|x(t\wedge\tau_n)|^p &\leq E\left[e^{c_3(t\wedge\tau_n-t_0)}V(x(t\wedge\tau_n), t\wedge\tau_n)\right] \\ &\leq V(x_0,t_0) \leq c_2|x_0|^p. \end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, on obtient

$$c_1 e^{c_3(t-t_0)}E|x(t)|^p \leq c_2|x_0|^p$$

ce qui implique l'assertion souhaitée (3.18).

■

De même, nous pouvons prouver le théorème suivant qui donne un critère suffisant pour l'instabilité exponentielle du moment d'ordre P.

Théorème 3.11. *Soit $q > 0$. Supposons qu'il existe une fonction $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0,\infty);\mathbb{R}^+)$ et des constantes positives C_1, C_2, C_3, telle que*

$$c_1|x|^q \leq V(x,t) \leq c_2|x|^q \qquad et \qquad LV(x,t) \geq c_3V(x,t) \tag{3.19}$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0,\infty)$. Alors,

$$E|x(t;t_0,x_0)|^q \leq \frac{c_1}{c_2}|x_0|^q e^{c_3(t-t_0)} \qquad t \geq t_0 \tag{3.20}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Autrement dit, la solution triviale de l'équation (3.1)est exponentiellement instable au moment d'ordre q.

Remarque 3.4. Soit $\hat{q} > q$. Alors

$$(E|x(t)|^{\hat{q}})^{\frac{1}{\hat{p}}} \geq (E|x(t)|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Et par conséquent, l'instabilité exponentielle au moment d'ordre q implique l'instabilité d'ordre $\hat{q}$.

Corollaire 3.12. *Supposons qu'il existe une matrice Q $d \times d$ symétrique et définie-positive, et les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, telles que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, \infty)$,*

$$x^T Q f(x,t) + \frac{1}{2} trace[g^T(x,t) Q g(x,t)] \leq \alpha_1 x^T Q x, \tag{3.21}$$

et

$$\alpha_2 x^T Q x \leq |x^T Q g(x,t)| \leq \alpha_3 x^T Q x. \tag{3.22}$$

— *Si $\alpha_1 < 0$, alors la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentiellement stable au moment d'ordre p, à condition que $p < 2 + \frac{2|\alpha_1|}{\alpha_3^2}$.*

— *$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2^2$, alors la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentiellement stable au moment d'ordre p, à condition que $p < 2 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_2^2}$.*

Corollaire 3.13. *Supposons qu'il existe une matrice Q $d \times d$ symétrique et définie-positive, et les constantes β_1, β_2, telles que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, \infty)$,*

$$x^T Q f(x,t) + \frac{1}{2} trace[g^T(x,t) Q g(x,t)] \geq \beta_1 x^T Q x, \tag{3.23}$$

et

$$|x^T Q g(x,t)| \leq \beta_2 x^T Q x. \tag{3.24}$$

Alors la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentiellement instable au moment d'ordre q, à condition que $q > 0 \vee (2 - \frac{2\beta_1}{\beta_2^2})$.

Exemple 3.3. Considérons l'EDS linéaire suivante

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} b_i(s)x(s)dB_i(s). \tag{3.25}$$

Pour tout $t \geq t_0$ avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, oú $a(t)$, $b_i(t)$ sont toutes des fonctions continues sur $[t_0, \infty)$. Alors la solution explicite de l'équation (3.25) est la suivante

$$x(t) = x_0 exp\left[\int_{t_0}^{t} (a(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2(s))ds + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_i(s)dB_i(s)\right].$$

Donc,

$$E|x(t)|^p = |x_0|^p E\left(exp\left[p\int_{t_0}^{t} (a(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2(s))ds + p\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_i(s)dB_i(s)\right]\right).$$

Mais on peut montrer que

$$E\left(exp\left[-\frac{p^2}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_i(s)^2 ds + p\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_i(s)dB_i(s)\right]\right) = 1.$$

Alors,

$$E|x(t)|^p = |x_0|^p exp\left[p\int_{t_0}^{t}(a(s) - \frac{1-p}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2(s))ds\right]. \tag{3.26}$$

On voit donc que la solution triviale de l'équation (3.25) est exponentiellement stable au moment d'ordre p si et seulement si

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}(a(s) - \frac{1-p}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2(s))ds < 0; \tag{3.27}$$

alors, qu'elle est exponentiellement instable au moment d'ordre q

$$\lim_{t\to\infty}\inf\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}(a(s) - \frac{1-q}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2(s))ds > 0. \tag{3.28}$$

Si $a(t) = a$, $b_i(t) = b_i$ sont toutes des constantes ,alors l'équation (3.27) est vérifiée si

$$a - \frac{1-p}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2 < 0, \qquad i.e \quad p < 1 - \frac{a}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2};$$

tandis que (3.28) est satisfaite si et seulement si

$$a - \frac{1-q}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2 > 0, \qquad i.e \quad q > 1 - \frac{a}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2}.$$

3.4.1.4 Stabilité asymptotique presque surement

Définition 3.8. Soit $\lambda : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty]$ une fonction continue non-croissante telle que $\lambda(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. On dit que la solution triviale de l'équation (3.1) est asymptotiquement stable presque surement avec la fonction de taux $\lambda(t)$ si

$$|x(t;t_0,x_0)| \le \xi\lambda(t) \quad pour\ tout\ t \ge t_0$$

presque surement, oú ξ est une variable aléatoire finie qui dépend de x_0 et t_0

Théorème 3.14. *Soient $\rho > 0$ et $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$. Soit $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non-croissante telle que $\gamma(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.*
Soit $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonction continue telle que $\int_0^\infty \eta(t)dt < \infty$. Si

$$\gamma(t)|x|^p \leq V(x,t) \quad et \quad LV(x,t) \leq \eta(t) \tag{3.29}$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0,\infty)$, donc la solution triviale de l'équation (3.1) est asymptotiquement stable presque surement avec la fonction de taux $\lambda(t) = (\gamma(t))^{-\frac{1}{p}}$.

Exemple 3.4. Considérons l'équation différentielle stochastique linear scalaire

$$dx(t) = -\frac{p}{1+t}x(t)dt + (1+t)^{-p}dB(t) \quad pour\ tout\ t \geq t_0, \tag{3.30}$$

avec $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$, où $p > \frac{1}{2}$ et $B(t)$ est un mouvement Brownien scalaire, soit $0 < \varepsilon < p - \frac{1}{2}$ arbitraire et

$$V(x,t) = (t+1)^{(2p-1-2\epsilon)}x^2.$$

Calculant

$$\begin{aligned} LV(x,t) &= (2p-2-2\epsilon)(t+1)^{(2p-1-2\epsilon)}x^2 - 2p(t+1)^{(2p-2-2\epsilon)}x^2 + (t+1)^{-(1+2\varepsilon)} \\ &\leq (t+1)^{-(1+2\varepsilon)} \end{aligned}$$

et on note

$$\int_0^\infty (t+1)^{-(1+2\varepsilon)}dt = \frac{1}{2\varepsilon} < \infty.$$

Par le théorème (3.14) et avec $p = 2$, $\gamma(t) = (t+1)^{(2p-1-2\epsilon)}$ et $\eta(t) = (t+1)^{-(1+2\varepsilon)}$, on voit que la solution triviale de l'équation (3.30) est asymptotiquement stable presque surement avec la fonction de taux $\lambda(t) = (t+1)^{-(p-\frac{1}{2}-\varepsilon)}$.

3.4.2 Le lien entre la stabilité exponentielle presque sur et la stabilité exponentielle au moment d'ordre p

D'une manière générale, la stabilité exponentielle du p-ème moment et la stabilité exponentielle presque sûre ne s'impliquent pas mutuellement et des conditions supplémentaires sont nécessaires pour déduire l'une de l'autre. Le théorème suivant donne les conditions dans lesquelles la stabilité exponentielle du moment p implique la stabilité exponentielle presque sûre.

Théorème 3.15. *Supposons qu'il existe un constant K positif tel que*

$$x^T f(x,t) \vee |g(x,t)|^2 \leq K|x|^2 \qquad pour\ tout\ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, \infty). \tag{3.31}$$

Alors la stabilité exponentielle au moment d'ordre p de la solution triviale de l'équation (3.1) implique la stabilité exponentielle presque sure.

Lemme 3.16. *Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times m})$. Définir, pour $t \geq 0$,*

$$x(t) = \int_0^t g(s)dB(s) \quad and \quad A(t) = \int_0^t |g(s)|^2 ds.$$

Alors pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives universelles c_p, C_p (dépendant uniquement de p), telles que

$$c_p E|A(t)|^{\frac{p}{2}} \leq E\left(\sup_{0\leq s\leq t} |x(s)|^p\right) \leq C_p E|A(t)|^{\frac{p}{2}}.$$

En particulier, on peut prendre

$$\begin{array}{llll} c_p = \left(\frac{P}{2}\right)^p & , \quad C_p = \left(\frac{32}{P}\right)^{\frac{p}{2}} & si & 0 < p < 2\,; \\ c_p = 1 & , \quad C_p = 4 & si & p=2\,; \\ c_p = (2p)^{-\frac{p}{2}} & , \quad C_p = \left[\frac{p^{(p+1)}}{2(p-1)^{(p-1)}}\right]^{\frac{p}{2}} & si & p > 2. \end{array}$$

Preuve: (preuve du théorème)
On fixe $x_0 \neq 0$ dans $\mathbb{R}^d$ et on note $x(t_0, t; x_0) = x(t)$. Par la définition de $p^{éme}$ stabilité exponentiel, il existe un couple de constantes positives λ et C telles que

$$E|x(t)|^p \leq C|x_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad pour\ t \geq t_0. \tag{3.32}$$

Prenons $n = 1, 2, \ldots.$ Par la formule d'Itô et la condition (3.31), on peut montrer que pour $t_0 + n - 1 \leq t \leq t_0 + n$,

$$\begin{aligned} |x(t)|^p &= |x(t_0+n-1)|^p + \int_{t_0+n-1}^t p|x(s)|^{(p-2)} x^T(s) f(x(s),s) ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t_0+n-1}^t \Big[p|x(s)|^{(p-2)}|g(x(s),s)|^2 + p(p-2)|x|^{(p-4)}|x^T(s)g(x(s),s)|^2\Big] ds \\ &+ \int_{t_0+n-1}^t p|x(s)|^{(p-2)} x^T(s) g(x(s),s) ds \\ &\leq |x(t_0+n-1)|^p + c_1 \int_{t_0+n-1}^t |x(s)|^p ds \\ &+ \int_{t_0+n-1}^t p|x(s)|^{(p-2)} x^T(s) g(x(s),s) dB(s) \end{aligned}$$

où $c_1 = pK + p(1+|p-2|)\dfrac{K}{2}$. Par conséquent

$$E\left(\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}|x(t)|^p\right) \leq E|x(t_0+n-1)|^p + c_1\int_{t_0+n-1}^{t_0+n}E|x(s)|^p ds$$
$$+ E\left(\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}\int_{t_0+n-1}^{t} p|x(s)|^{(p-2)}x^T(s)g(x(s),s)dB(s)\right). \tag{3.33}$$

De l'autre côté, par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (3.16), nous avons que

$$\begin{aligned}
&E\left(\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}\int_{t_0+n-1}^{t} p|x(s)|^{(p-2)}x^T(s)g(x(s),s)dB(s)\right)\\
&\leq 4\sqrt{2}E\left(\int_{t_0+n-1}^{t_0+n} p^2|x(s)|^{2(p-2)}|x^T(s)g(x(s),s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}};\\
&\leq 4\sqrt{2}E\left(\sup_{t_0+n-1\leq s\leq t_0+n}|x(s)|^p\int_{t_0+n-1}^{t_0+n} p^2K|x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{2}};\\
&\leq \frac{1}{2}E\left(\sup_{t_0+n-1\leq s\leq t_0+n}|x(s)|^p\right) + 16p^2K\int_{t_0+n-1}^{t_0+n}E|x(s)|^p ds,
\end{aligned}$$

où nous avons également utilisé l'inégalité élémentaire $\sqrt{ab} \leq \dfrac{1}{2}(a+b)$. On remplace ceci dans (3.33) et on obtient

$$E\left(\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}|x(s)|^p\right) \leq 2E|x(t_0+n-1)|^p + c_2\int_{t_0+n-1}^{t_0+n}E|x(s)|^p ds,$$

où $c_2 = 2c_1 + 32p^2K$. En appliquant la condition (3.32) et on obtient que

$$E\left(\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}|x(t)|^p\right) \leq c_3 e^{-\lambda(n-1)}, \tag{3.34}$$

où $c_3 = C|x_0|^p(2+c_2)$. Maintenant, soit $\varepsilon \in (0,\lambda)$ arbitraire. Il résulte de (3.34) que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}|x(t)|^p > e^{-(\lambda-\varepsilon)(n-1)}\right\}$$

$$\leq e^{-(\lambda-\varepsilon)(n-1)}E\left(\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}\right) \leq c_3 e^{-\varepsilon(n-1)}.$$

Compte tenu du lemme de Borel-Cantelli(1.1), nous voyons que pour presque tous les $\omega \in \Omega$,

$$\sup_{t_0+n-1\leq t\leq t_0+n}|x(t)|^p \leq e^{-(\lambda-\varepsilon)(n-1)} \tag{3.35}$$

est vérifiée pour tous, mais pour un nombre fini de n. Ainsi, il existe un $n_0 = n_0(\omega)$, pour tous $\omega \in \Omega$ à l'exclusion d'un ensemble P-nul, pour lequel (3.35) est vérifiée pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{t} log|x(t)| \leq \frac{1}{pt} log(|x(t)|^p) \leq -\frac{(\lambda-\varepsilon)(n-1)}{p(t_0+n-1)}$$

si $t_0 + n - 1 \leq t \leq t_0 + n$, $n \geq n_0$. Alors,

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} log|x(t)| \leq -\frac{(\lambda-\varepsilon)}{p} \qquad p.s.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous devons obtient

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} log|x(t)| \leq \frac{1}{pt} log(|x(t)|^p) \leq -\frac{\lambda}{p} \qquad p.s.$$

Par définition, la solution triviale de l'équation (3.1) est exponentielle stable presque sûrement.

■

Bien que la condition (3.31) ne soit pas garantie par les hypothèses d'existence et d'unicité Théorème (2.5) qui sont supposés tout au long de ce chapitre, il est satisfait dans de nombreux cas importants. Par exemple, si les coefficients $f(x,t)$ et $g(x,t)$ sont uniformément Lipschitz continus, alors (3.31) est valide en gardant toujours la supposition de $f(0,t) \equiv 0$ et $g(0,t) \equiv 0$.
De plus, pour l'équation différentielle stochastique linéaire d-dimensionnelle

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)x(t)dB_i(t) \tag{3.36}$$

la condition (4.3) est vérifiée si F et G_i sont toutes des fonctions à valeurs matricielles $d \times d$ bornées. Par conséquent, nous obtenons un corollaire utile.

Corollaire 3.17. *Soient F, G_i des fonctions à valeurs matricielles $d \times d$ bornées. Alors la stabilité exponentielle au moment d'ordre p de la solution triviale de l'équation linéaire (3.36) implique la stabilité presque sure.*

3.4.3 Stabilisation et déstabilisation stochastique avec le bruit

Il n'est pas surprenant que le bruit puisse déstabiliser un système stable.

3.4.3.1 Exemples motivants

Exemple 3.5. (déstabilisation)
Considérons une EDO bidimensionnelle

$$\dot{y} = -y(t) \quad pout\ t \geq t_0, y(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$$

est perturbé par le bruit et ce système perturbé stochastiquement est décrit par l'équation d'Itô

$$dx(t) = -x(t)dt + Gx(t)dB(t) \quad pout\ t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2. \tag{3.37}$$

Ici $B(t)$ est un mouvement Brownien unidimensionnel

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et il a été démontré que l'équation (3.37) a la solution explicite

$$\begin{aligned} x(t) = &\quad x_0 exp[(-I - \frac{1}{2}G^2)(t - t_0) + G(B(t) - B(t_0))] \\ x(t) = &\quad x_0 exp[I(t - t_0) + G(B(t) - B(t_0))], \end{aligned}$$

où I est la matrice carré d'identité. Par conséquent

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| = 1 \qquad p.s.$$

C'est-à-dire que le système perturbé stochastiquement (3.37) devient exponentiellement instable presque sûrement.

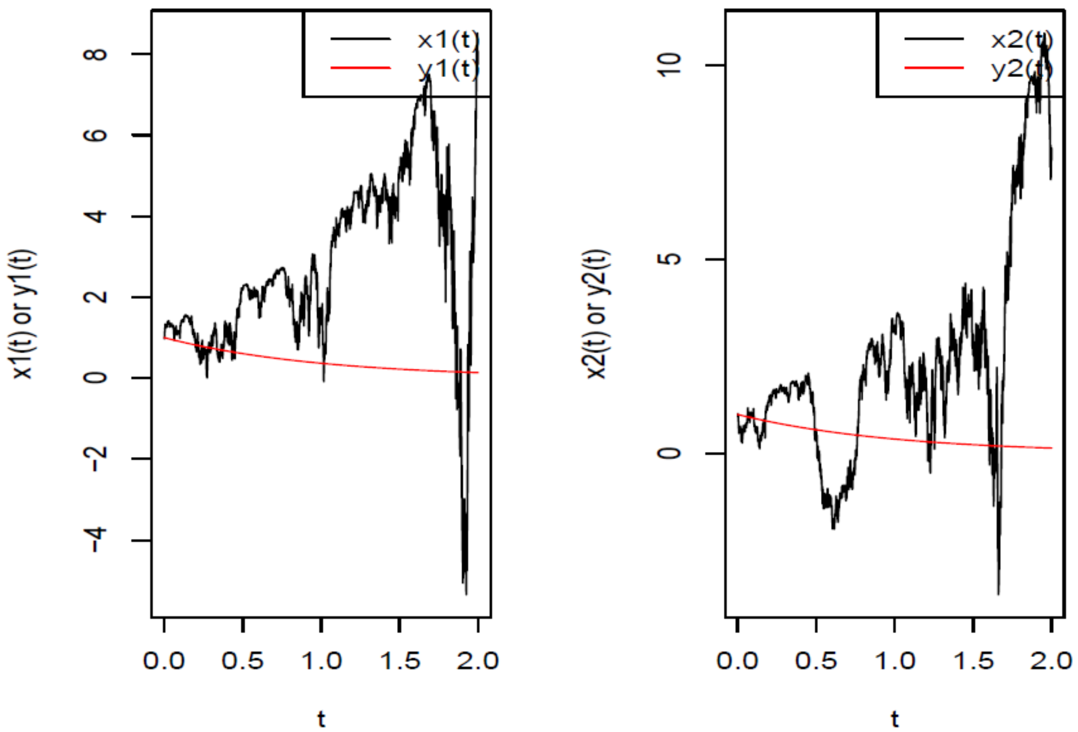


FIGURE 3.2 – La déstabilisation de l'équation (3.37)

D'autre part, il a également été observé que le bruit peut également avoir un effet stabilisateur.

Exemple 3.6. (stabilisation)
Par exemple, considérons un système scalaire instable

$$\dot{y} = y(t) \quad pout\ t \geq t_0, y(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

Perturbons ce système par le bruit et supposons que le système perturbé a la forme

$$dx(t) = x(t)dt + 2x(t)dB(t) \quad pout\ t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

où $B(t)$ est à nouveau un Brownien unidimensionnel. L'équation (3.39) a la solution explicite

$$x(t) = exp[-(t - t_0) + 2(B(t) - B(t_0))],$$

ce qui donne immédiatement

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(|x(t)|) = -1 \qquad p.s.$$

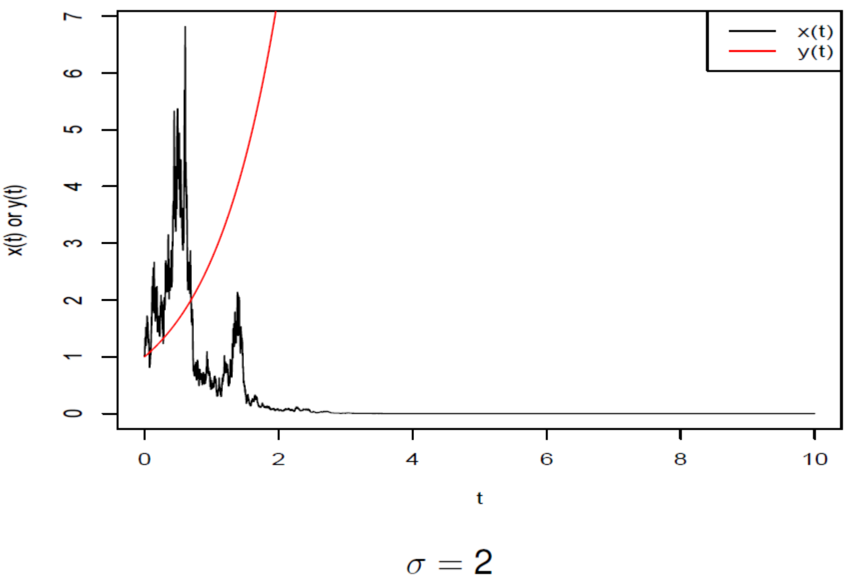


FIGURE 3.3 – la stabilisation de l'équation (3.38)

C'est-à-dire que le système perturbé (3.39) devient stable. En d'autres termes, le bruit a stabilisé le système instable (3.38).

3.4.3.2 Systèmes non-linéaire

Stabilisation des EDO :

Supposons que le système donné soit décrit par une équation différentielle ordinaire non linéaire

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t) \qquad pour\ t \geq t_0,\ y(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d. \tag{3.40}$$

Posons $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue et localement Lipschitz et particulièrement, pour certain $k > 0$

$$|f(x,t)| \leq k|x| \qquad pour\ tout\ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+. \tag{3.41}$$

Nous utilisons maintenant le mouvement Brownien $B(t) = (B_1(t), ..., B_m(t))^T$ m-dimensionnel comme source de bruit pour perturber le système donné. supposons que le système perturbé stochastiquement est décrit par l'équation d'Itô semi-linéaire

$$dx(t) = f(x,t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i x(t) dB_i(t) \qquad t \geq t_0, x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{3.42}$$

oú $G_i, 1 \leq i \leq m$, sont des matrices $d \times d$.

Théorème 3.18. *Soit l'EDS (3.42) vérifiant la condition de Lipschitz (3.41). S'il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\rho \geq 0$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{m} |G_i x|^2 \leq \lambda |x|^2 \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{m} |x^T G_i x|^2 \geq \rho |x|^4 \tag{3.43}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \log(|x(t; t_0, x_0)|) \leq -(\rho - k - \frac{\lambda}{2}) \quad p.s. \tag{3.44}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. En particulier si $\rho > k + \frac{1}{2}\lambda$, donc la solution triviale de l'équation (3.42) est exponentiellement stable presque surement.

Preuve: On fixe $x_0 \neq 0$ et notée $x(t) = x(t; t_0, x_0)$. Le lemme (3.5) nous dit que $x(t) \neq 0$ pour tout $t \geq 0$ presque sûrement. Par la formule d'Itô,

$$log(|x(t)|^2) = log(|x_0|^2) + M(t) + \int_0^t |x(s)|^{-2} 2x(s)^T f(x(s), s) ds$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_0^t |x(s)|^{-4} [|x(s)|^2 |G_i x(s)|^2 - 4|x^T(s) G_i x(s)|^2] ds, \tag{3.45}$$

où

$$M(t) = 2 \sum_{i=1}^{m} \int_0^t |x(s)|^{-2} x(s)^T G_i x(s) dB_i(s). \tag{3.46}$$

qui est une martingale continue disparaissant à $t = 0$. En utilisant (3.41) et (3.43) nous obtenons

$$log(|x(t)^2) \leq \log(|x_0|^2) + M(t) + (2K + \lambda - 2\rho)t. \tag{3.47}$$

Notez que

$$< M(t) >= 4 \sum_{i=1}^{m} \int_0^t |x(s)|^{-4} |x(s)^T G_i x(s)|^2 ds \leq 4t \sum_{i=1}^{m} ||G_i||^2.$$

On sait que $\frac{M(t)}{t} \to 0$ *p.s.* quand $t \to \infty$. Par conséquent, il résulte de (3.47) que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \log(|x(t)|^2) \leq 2K + \lambda - 2\rho \quad p.s.,$$

i.e

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \log(|x(t)|) \leq -(\rho - K - \frac{1}{2}\lambda) \quad p.s.$$

■

Théorème 3.19. *Tout système non linéaire (3.40) d-dimensionnel peut être stabilisé par un mouvement Brownien si la condition (3.41) est satisfaite. De plus, on ne peut même utiliser qu'un mouvement brownien scalaire pour stabiliser le système.*

Exemple 3.7. On considère une equation différentiel ordinaire instable

$$\dot{y} = f(y(t), t), \tag{3.48}$$

où

$$f = \begin{pmatrix} y_1 cos(t) + y_2 sin(y_1) \\ y_2 sin(t) + y_1 sin(y_2) \end{pmatrix}$$

On voit

$$f(y,t) \leq 2|y| \quad \forall (y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+.$$

perturber cette EDO par un mouvement Brownien scalaire nous donne l'EDS suivant

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + \sigma_1 x(t) dB(t).$$

le théorème ci-dessus montre que cette équation stochastique est presque sûrement stable exponentiellement à condition

$$\sigma_1 > 2.$$

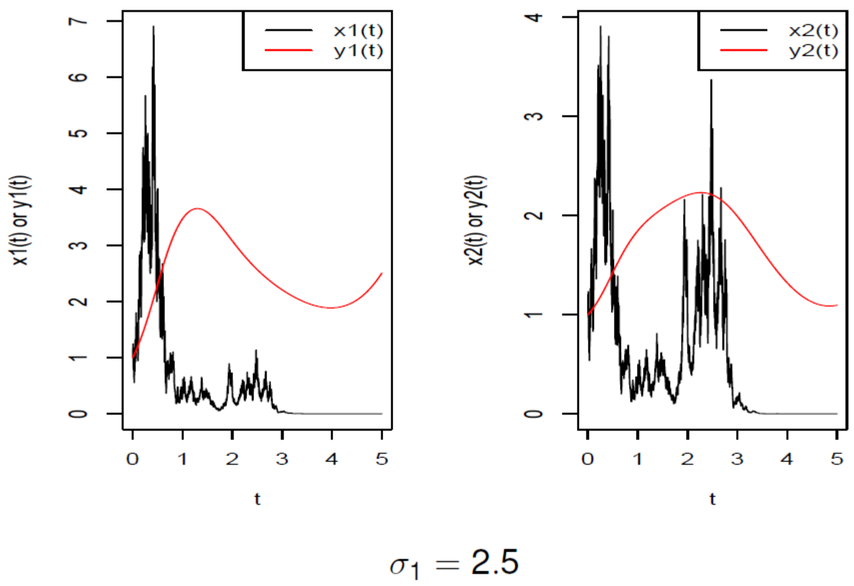


FIGURE 3.4 – La stabilisation de l'équation (3.48)

Stabilisation des EDS :

Nous pouvons maintenant nous demander si nous pouvons également utiliser la perturbation stochastique pour stabiliser un système stochastique. La réponse est positive. Afin de dériver ce nouveau résultat, regardons un autre cas de l'équation (3.42) en fixant uniquement $G_m = \sigma_m I$, c'est-à-dire en donnant l'équation

$$dx(t) = f(x,t)dt + \sum_{i=1}^{m-1} G_k x(t) dB_k + \sigma_m x(t) dB_m(t). \tag{3.49}$$

Cela peut être considéré comme le système perturbé stochastiquement d'un système stochastique donné

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + \sum_{i=1}^{m-1} G_k x(t) dB_k. \tag{3.50}$$

Nous estimons maintenant

$$\sum_{i=1}^{m} |G_k x|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{m-1} \|G_k\|^2 + \sigma_m^2 \right) |x|^2$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} |x^T G_k x|^2 \geq \sigma_m^2 |x|^4.$$

Par conséquent, selon le théorème (3.18), la solution de l'équation (3.49) satisfait

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log(|x(t;t_0,x_0)|) \leq -\left(\frac{1}{2}\sigma_m^2 - K - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\|G_k\|^2\right) \quad p.s.$$

Alors , l'équation (3.49) est stable exponentiellement presque surement à condition

$$\sigma_m^2 > 2K + \sum_{i=1}^{m-1}\|G_k\|^2.$$

Cela a prouvé le théorème suivant.

Théorème 3.20. *Si (3.41) est satisfaite, alors l'équation différentielle stochastique (3.50) peut être stabilisée par le mouvement Brownien, et on peut même utiliser uniquement un mouvement Brownien scalaire pour le faire.*

Considérons plus généralement une équation differentielle stochastique

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x,t)dw(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i x(t) dB_i(t) \quad pour\ tout\ t \geq t_0 \tag{3.51}$$

avec $x_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$ oú $w(t)$ est un mouvement Brownien q-dimensionnel indépendant de $B(t)$ et $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times q}$ Cette équation peut être considérée comme la perturbation stochastique système d'un système stochastique donné

$$dx(t) = f(x,t)dt + g(x,t)dw(t). \tag{3.52}$$

Théorème 3.21. *Soient $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times q}$ deux fonctions continues et localement Lipschitz satisfaisant*

$$|f(x,t)| \leq K_1|x| \quad et \quad trace(g(x,t)g^T(x,t)) \leq K_2|x|^2 \tag{3.53}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$, où $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$. Soit $\lambda > 0$,$\rho \geq 0$ et supposant que le critère (3.43) soit satisfait. Alors la solution de l'équation (3.51) satisfait

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log|x(t;t_0,x_0)| \leq -(\rho - K_1 - \frac{1}{2}(K_2+\lambda)) \quad p.s$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. En particulier si $\rho > K_1 + \frac{1}{2}(K_2+\lambda)$, donc l'équation (3.51) est exponentiellement stable presque surement.

Preuve: De la même manière que pour la preuve du théorème (3.18), nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned} log(|x(t;t_0,x_0)|^2) &\leq \log|x_0|^2 - (2\rho - 2K_1 - \lambda)t + M(t) + N(t) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t |x(s)|^{-4}(2|x(s)|^2 trace(g(x(s),s)g(x(s),s)^T) - 4|x(s)^T g(x(s),s)|^2)ds \\ &\leq \log(|x_0|^2) - (2\rho - 2K_1 - K_2 - \lambda)t + M(t) + N(t) \end{aligned} \tag{3.54}$$

pour tout $t \geq t_0$, où $M(t)$ est le même que celui défini dans la preuve du théorème (3.18), et

$$N(t) = 2\int_0^t 2|x(s)|^{-2}x(s)^T g(x(s),s)dw(s).$$

Notez que $N(t)/t \to 0$ presque surement quant $t \to \infty$ pour la même raison que précédemment. Donc (3.54) implique

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log(|x(t;t_0,x_0)|^2) \leq -(2\rho - 2K_1 - K_2 - \lambda) \quad p.s.$$

■

Théorème 3.22. *Toute équation différentielle stochastique de la forme (3.52) peut être stabilisée par le mouvement Brownien à condition que (3.53) soit satisfaite.*

Déstabilisation des EDO :

Théorème 3.23. *Soit l'EDS (3.42) vérifiant la condition de Lipschitz (3.41). S'il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\rho > 0$ telles que*

$$\sum_{i=1}^m |G_i x|^2 \geq \lambda|x|^2 \qquad et \qquad \sum_{i=1}^m |x^T G_i x|^2 \leq \rho|x|^4 \tag{3.55}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\lim_{t\to\infty}\inf\frac{1}{t}\log(|x(t;t_0,x_0)|) \geq (\frac{\lambda}{2} - k - \rho) \quad p.s.$$

pour tout $x_0 \neq 0$. En particulier si $\lambda > 2(k+\rho)$, donc la solution triviale de l'équation (3.42) est exponentiellement instable presque surement.

Nous utilisons maintenant ce théorème pour montrer comment on peut utiliser la perturbation stochastique pour déstabiliser le système donné.

cas 1 :$\{d \leq 3\}$

Choisissez la dimension du mouvement Brownien $m = d$ et soit σ une constante. Pour chaque $i = 1, 2, ..., d-1$,définir une matrice $G_i = (g^i_{uv})$ de dimension $d \times d$ avec

$$g^i_{uv} = \begin{cases} \sigma & si\ u{=}i\ et\ v{=}i{+}1\ ; \\ 0 & sinon \end{cases}$$

De plus, définissez $G_d = (g^d_{uv})$ avec

$$g^d_{uv} = \begin{cases} \sigma & si\ u{=}d\ et\ v{=}1\ ; \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Alors l'équation (3.42) devient

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + \sigma \begin{bmatrix} x_2(t)dB_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t)dB_{d-1}(t) \\ x_1(t)dB_d(t) \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

Calculez cela

$$\sum_{i=1}^{m} |G_i x|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\sigma x_{i+1})^2 = \sigma^2 |x|^2$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} |x^T G_i x|^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 x_{i+1}^2,$$

où nous utilisons $x_{d+1} = x_1$. Notant

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 x_{i+1}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (x_i^4 + x_{i+1}^4) = \sum_{i=1}^{m} x_i^4,$$

nous avons

$$3 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 x_{i+1}^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 x_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^{m} x_i^4 \leq |x|^4.$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{m} |x^T G_i x|^2 = \frac{\sigma^2}{3} |x|^4.$$

D'après le théorème (3.55), la solution de l'équation (3.58) a la propriété

$$\lim_{t \to \infty} \inf \frac{1}{t} \log(|x(t; t_0, x_0)|) \geq (\frac{\sigma^2}{2} - K - \frac{\sigma^2}{3}) = \frac{\sigma^2}{6} - K \quad p.s.$$

pour tout $x_0 \neq 0$. Si $\sigma^2 > 6K$, alors la solution triviale de l'équation (3.58) sera exponentiellement instable presque sûrement.

Exemple 3.8. Étant donné une ODE tridimensionnelle stable

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t), \tag{3.57}$$

où

$$f(y,t) = \begin{bmatrix} -2y_1 + sin(y_2) \\ -2y_2 + sin(y_3) \\ -2y_3 + sin(y_1) \end{bmatrix}.$$

On voit que

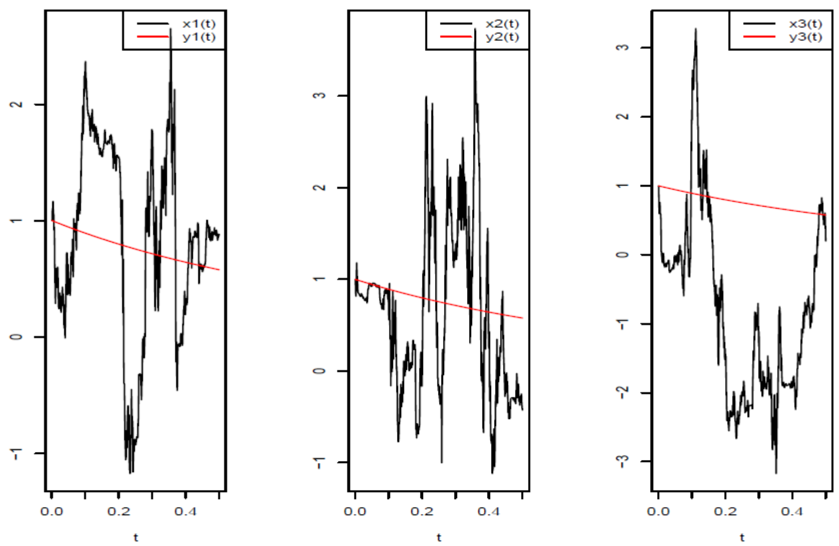
$$|f(y,t)| = 3|y| \quad \forall (y,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+.$$

La perturbation de cette EDO par un mouvement Brownien tridimensionnel entraîne une EDS

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + \sigma \begin{bmatrix} x_2(t)dB_1(t) \\ x_3(t)dB_2(t) \\ x_1(t)dB_3(t) \end{bmatrix}.$$

Cette EDS est presque sûrement instable de manière exponentielle à condition

$$\sigma > \sqrt{18}.$$



$\sigma = 5$

FIGURE 3.5 – La déstabilisation de l'équation (3.57)

cas 2 :$\{d = 2K(K \geq 1)\}$

soit σ une constante. Définir

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma & & & 0 \\ -\sigma & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \sigma \\ 0 & & & -\sigma & 0 \end{bmatrix}$$

mais on définit $G_i = 0$ pour $2 \leq i \leq m$. Alors l'équation (3.42) devient

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + \sigma \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1 \\ \vdots \\ x_{2K}(t) \\ -x_{2K-1}(t) \end{bmatrix} dB_1(t). \tag{3.58}$$

Dans ce cas, nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} |G_i x|^2 = \sigma^2 |x|^2 \quad \sum_{i=1}^{m} |x^T G_i x|^2 = 0.$$

Par conséquent, selon Le théorème (3.55), la solution de l'équation (3.58) a la propriété que

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{1}{t} \log(|x(t; t_0, x_0)|) \geq \frac{\sigma^2}{2} - K \quad p.s.$$

pour tout $x_0 \neq 0$. Si $\sigma^2 > 2K$, alors la solution triviale de l'équation (3.58) sera exponentiellement instable presque sûrement.

Exemple 3.9. Étant donné une ODE à 4 dimensions stable

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t), \tag{3.59}$$

où

$$f(y, t) = \begin{bmatrix} -2y_1 + sin(y_2) \\ -2y_2 + sin(y_3) \\ -2y_3 + sin(y_4) \\ -2y_4 + sin(y_1) \end{bmatrix}.$$

On voit que

$$|f(y, t)| \leq 4|y| \quad \forall (y, t) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}_+.$$

La perturbation de cette EDO par un mouvement Brownien scalaire entraîne l' EDS

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + \sigma \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1 \\ x_3(t) \\ -x_4(t) \end{bmatrix} dB_1(t).$$

Cette EDS est presque sûrement exponentiellement instable à condition que

$$\sigma > \sqrt{6}.$$

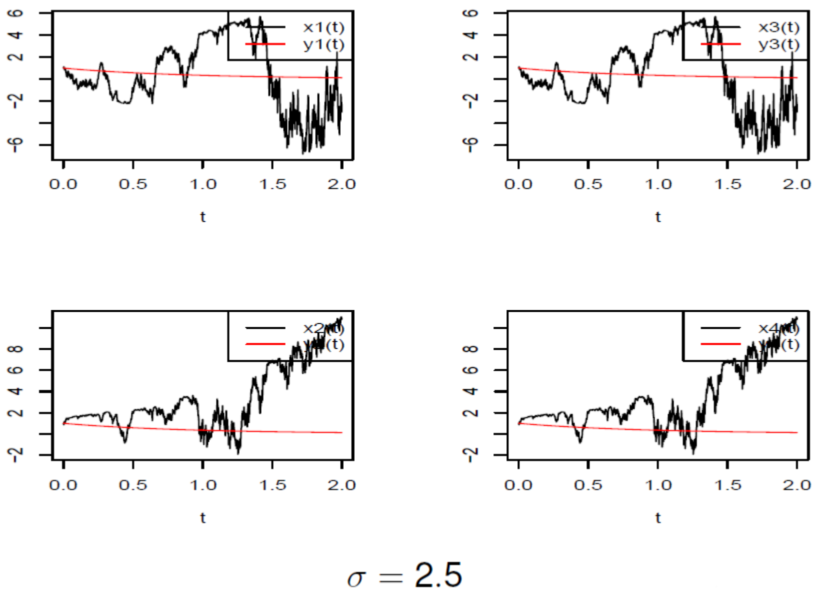


FIGURE 3.6 – La déstabilisation de l'équation (3.59)

cas 3 :$\{d = 1\}$

Considérons l'équation linéaire scalaire

$$dx(t) = -ax(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i x(t) dB_i(t) \quad pour t \geq t_0 \tag{3.60}$$

avec $x(t_0) = x_0$. Cette équation est considérée comme une perturbation stochastique d'un système exponentiellement stable

$$\dot{y}(t) = -ay(t) \quad (a > 0).$$

Alors l'exposant de Lyapunov est de las solution est

$$\lim \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| = -a - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2 < 0 \quad p.s.$$

Autrement dit, le système perturbé (3.60) reste stable. En résumant ces résultats, nous obtenons la conclusion suivante.

Théorème 3.24. *Tout système non linéaire (3.40) peut être déstabilisé par un mouvement Brownien si la condition (3.41) est satisfaite. De plus, on peut utiliser un mouvement Brownien scalaire pour le déstabiliser.*

Déstabilisation des EDS

Nous allons maintenant discuter de la déstabilisation stochastique des systèmes stochastiques.

Théorème 3.25. *Soient $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times q}$ deux fonctions continues et localement Lipschitz satisfaisant*

$$|f(x,t)| \leq K_1 |x| \quad et \quad trace(g(x,t)g^T(x,t)) \leq K_2 |x|^2 \tag{3.61}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq t_0$, oú $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$. S'il existe des constantes $\lambda > 0$,$\rho \geq 0$ et supposant que le critère (3.60) soit satisfaite.
Alors

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{1}{t} \log |x(t,, x_0)| \geq \frac{1}{2}(\lambda - 2\rho - 2K_1 - K_2) \quad p.s.$$

pour tout $x_0 \neq R^d$. En particulier si $\lambda > 2\rho + 2K_1 + K_2$, donc l'équation (3.51) est exponentiellement instable presque surement.

Théorème 3.26. *Toute équation différentielle stochastique peut être déstabilisée par le mouvement Brownien à condition que la dimension $d \geq 2$ et (3.61) soit satisfaite.*

3.4.3.3 Systèmes linéaire

Dans sous-section, nous utiliserons la théorie établie dans les sections précédentes pour étudier la stabilisation et la déstabilisation stochastiques pour un système stochastique linéaire donné

$$dy(t) = A_0 y(t)dt + \sum_{i=1}^{q} A_i(t)y(t)dW_i(t) \qquad pout\ t \geq 0 \tag{3.62}$$

avec $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$, oú $W(t) = (W_1(t), ..., W_q(t))$ est un mouvement Brownien de dimension q, $A_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$,$1 \leq i \leq q$ sont tous bornées et nous définissons

$$\|A_i\| = \sup\{\|A_i(t)\| : t \geq 0\}.$$

Nous perturbons maintenant ce système par un autre mouvement Brownien indépendant de dimension m $(w_1(t), ..., w_m(t))$ et dire que le système perturbé est décrit par

$$dx(t) = A_0(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^{q} A_i(t)x(t)dW_i(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)x(t)dw_k(t) \qquad pout\ t \geq 0 \tag{3.63}$$

avec $x(0) = x_0$. Évidemment, $E(x(t)) = E(y(t))\ pout\ tout\ t \geq 0$.En appliquant les théorèmes (3.21) et (3.25) à l'équation (3.63) nous obtenons les corollaires suivants.

Corollaire 3.27. *Supposons que la condition (3.43) soit satisfaite pour certains $\lambda > 0$ et $\rho \geq$. Alors*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|x(t, x_0)| \leq -(\rho - \|A_0\| - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} \|A_i\|^2) \quad p.s.$$

De plus, il est possible de choisir approprié B_k, $1 \leq k \leq m$, tel que

$$\rho > \|A_0\| + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} \|A_i\|^2$$

et donc l'équation (3.63) est presque sûrement stable de façon exponentielle. En d'autres termes, le système stochastique linéaire (3.62) peut être stabilisé par le mouvement Brownien sans changer la valeur moyenne de la solution.

Corollaire 3.28. *Supposons que la condition (3.43) soit satisfaite pour certains $\lambda > 0$ et $\rho \geq$. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{1}{t} \log(|x(t, x_0)|) \geq -\left(\frac{1}{2}\lambda - \rho - \|A_0\| - \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{q} \|A_i\|^2\right) \quad p.s.$$

De plus, si $d \geq 2$, il est possible de choisir approprié B_k, $1 \leq k \leq m$, tel que

$\lambda > 2\rho + \|A_0\| + \sum_{i=k}^{q} \|A_i\|^2$ *et donc l'équation (3.63) est presque sûrement instable de façon exponentielle. En d'autres termes, si $d \geq 2$, le système stochastique linéaire (3.62) peut être déstabilisé par le mouvement Brownien sans changer la valeur moyenne de la solution.*

Conclusion

Le but de ce travail est d'étudier une propriété parmi les propriétés essentielles dans l'étude du comportement d'un système dynamique (l'existence et l'unicité d'une solution, la stabilité, la contrôlabilité,...etc) dirigé par une équation différentielle stochastique où nous avons s'intéresser si une petite perturbation sur la valeur initiale nous conduit à un changement autour de son voisinage ou un changement radicale sur les trajectoires du solution.

Le mémoire a été basé sur deux partie fondamentale. La première sert à définir la stabilité des EDS et ses différents types (la stabilité en probabilité, la stabilité exponentielle presque sûre, la stabilité exponentielle des moments et la stabilité assymptotique p.s.). La deuxième partie est consacré pour la stabilisation et la déstabilisation des équations différentielles stochastiques où l'idée principale de cette partie est l'ajout d'une perturbation (bruit) sur le système dynamique pour stabiliser ou déstabilisé l'EDS.

Bibliographie

[1] A. Friedman. *Stochastc Differential Equations and Applications*. Academic Press, New York, (1975)

[2] I. I. Gikhman and A.V. Skorokhod. *Stochastc Differential Equations*. Springer Verlag, New York, (1972).

[3] R. Z. Has'minskii. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Springer, Berlin, 2nd edition, (2012).

[4] I. Kats and N. N. Krasovskii. On the stability of systems with random parameters.*J. Appl. Math.Mach*, (1961).

[5] F. Kozin. A survey of stability of stochastic systems. *Automatica*, (1969).

[6] H. J. Kushner. On the construction of stochastic Liapunov functions. IEEE *Trans.Aut. Control*, (1965).

[7] H. J. Kushner. On the existence of optimal controls. SIAM *J. Contr. Opt*, (1965).

[8] H. J. Kushner. *Stochastic Stability and Control*, volume 33 *of Mathematics in Scienceand Engineering*. Academic Press, New York,(1967).

[9] A. M. Lyapunov, A general task about the stability of motion. Kharkov Mathematical Society, University of Kharkov. Moscow, (1892).

[10] A. Loria et E. Panteley . 6 Stability, Told by Its Developers,*Control and Information Sciences*. Laboratoire des Signaux et Systémes, France, (2006).

[11] R. Leine. The historical development of classical stability concepts : Lagrange, Poisson and Lyapunov stability, *Nonlinear Dynamics*. Université de Stuttgart, (2010).

[12] W. M. Wonham. Liapunov criteria for weak stochastic stability. J. *of Differential Equations*, (1966).

[13] M.Xuerong. *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*. Department of Statistics and Modelling Science University of Strathclyde Glasgow, Scotland, (1994).

[14] M. Xuerong. Stochastic stabilization and destabilization, *To appear in Systems and Control Letters*.Department of Statisties and Modelling Science, University of Strathelyde, Glasgow,scotland, (1993).

[15] M. Xuerong, *Stochastic diffrential equations and application*. Department of Statistics and Modelling Science .University of Strathclyde, Glasgow, (2011).

[16] M. Zakai. On the ultimate boundedness of moments associated with solutions of stochastic differential equations. SIAM *J. Contr. Opt*, (1967).

[17] M. Zakai. A. Lyapunov criterion for the existence of stationary probability distributions for systems perturbed by noise. SIAM *J. Contr. Opt*, (1969).

[18] N. E. Zhukovskii, On the stability of motion . *Notes de Yuken* Département de physique et de mathématiques. Université de Moscou, (1882).