République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2020/2021

Harmoniques Sphériques : Théorie et Applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques

par

Miloudi Meryem [1]

Sous la direction de

Dr/Mr Zahaf Mohammed Brahim

Soutenue le 00/07/2021 devant le jury composé de

G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M.B. Zahaf	Université Abou Bekr Belkaïd - Tlemcen	Encadreur
A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : miloudimeryem17@gmail.com

Dédicaces

A mon père

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

A ma Mère,

« Tu m'as donné la vie, la tendresse et le courage pour réussir.

Tout ce que je peux t'offrir ne pourra exprimer l'amour et la reconnaissance que je te porte.

En témoignage, je t'offre ce modeste travail pour te remercier pour tes sacrifices et pour l'affection dont tu m'as toujours entourée »

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur **ZAHAF MOHAMMED BRAHIM** pour sa disponibilité et son enthousiasme dans la direction de ce travail.

Je tiens également à remercier vivement Monsieur **DJELLOULI GHAOUTI** qui m'a fait honneur de présider le jury.

Mes remerciements les plus respectueux vont aussi à Monsieur **AZZOUZ ABDELHALIM** et Monsieur **HATHOUT FOUZI** qui m'ont fait l'honneur de prendre connaissance de ce travail et d'en être examinateurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie encore tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Un grand merci à tous mes amis.

Table des matières

Introduction

Les harmoniques sphériques sont la partie angulaire de la solution de l'équation différentielle de Laplace $\Delta u = 0$, ou, de manière équivalente, les solutions de l'équation différentielle de Laplace sur la sphère unité.

Soient r, θ, ϕ les coordonnées sphériques : r est le rayon, θ la colatitude, ϕ la longitude.

Les harmoniques sphériques, notées $Y_l^m(\theta, \phi)$, sont des fonctions des deux coordonnées angulaires données par

$$Y_l^m(\theta, \Phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\Phi} P_l^m(\cos\theta),$$

avec P_l^m désignant les fonctions Legendre associées :

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l.$$

L'indice l et l'exposant m sont deux entiers appelés le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique. Ils prennent les valeurs $l = 0, 1, 2, ..., \infty$, et $m = -l, ..., 0, ..., l$.

La propriété la plus importante des harmoniques sphériques est que toute fonction définie sur la sphère peut se décomposer de façon unique sous la forme d'une somme d'harmoniques sphériques. Les Y_l^m forment ainsi une base orthonormée complète pour les fonctions définies sur une sphère. Elles sont l'équivalent, sur la sphère, des séries de Fourier sur le cercle.

Les harmoniques sphériques sont largement utilisées en physique atomique et moléculaire. En mécanique quantique, elles apparaissent comme des fonctions propres du moment angulaire orbital (carré). En outre, elles sont importantes dans la représentation des champs gravitationnels et magnétiques des corps planétaires, la caractérisation du rayonnement de fond des micro-ondes cosmiques, la description invariante de rotation des formes 3D en infographie, la description des potentiels électriques dus aux distributions de charge, et dans certains types de mouvement fluide.

Ce mémoire a pour but d'étudier les propriétés des harmoniques sphériques et de donner quelques applications de quelques problèmes aux limites de la physique mathématique qui peuvent être résolus par l'utilisation des harmoniques sphériques. Le plan de ce mémoire est le suivant :

Dans le chapitre 1, nous présentons dans une première section quelques outils de l'analyse mathématiques qui nous seront utiles tout au long de ce chapitre tels que la convergence des séries entières et l'existence des solutions d'équations différentielles développables en séries entières (solutions analytiques). Dans la seconde section nous utilisons la méthode des séries entières pour résoudre l'équation différentielle de Legendre et discuter suivant les valeurs du paramètre de l'équation les solutions polynômiales (polynômes de Legendre). Dans la section suivante nous donnons la définition des polynômes de Legendre par la-dite formule de Rodrigues. Une autre définition des polynômes de Legendre est donnée dans la quatrième section en utilisant la fonction génératrice. Dans la cinquième section nous donnons la relation de symétrie, aussi nous présentons quelques valeurs particulières des polynômes de Legendre ainsi de leurs dérivées. Nous étudions l'orthogonalité des polynômes de Legendre dans la sixième section. Les représentations intégrales et le développement en séries de polynômes de Legendre font l'objet des sections 7 et 8. Dans la neuvième section nous démontrons quelques relations de récurrence. La dixième section est consacrée à l'étude des zéros des polynômes de Legendre $\{P_n(x)\}$, nous montrerons que tous les zéros de $P_n(x)$ se trouvent à l'intérieur de l'intervalle $[-1,1]$ et que les zéros de $P_n(x)$ et ceux de $P_{n-1}(x)$ sont entrelacés. . L'étude des fonctions de Legendre associées et leurs propriétés fait l'objet des sections 11 et 12. Finalement, les fonctions de Legendre du deuxième type sont étudiées en détails dans la dernière section.

Le deuxième chapitre traite les harmoniques sphériques et leurs propriétés notamment l'orthogonalité, le théorème d'addition,...

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de certains problèmes aux limites de la physique mathématique qui peuvent être résolus par l'utilisation des harmoniques sphériques, notamment l'étude de l'équation du potentiel.

Chapitre 1

Fonctions de Legendre

Adrien-Marie Legendre a introduit, en 1784, les polynômes de Legendre, tout en étudiant l'attraction des sphéroïdes et des ellipsoïdes. Ces polynômes sont les solutions d'une équation différentielle ordinaire appelée équation différentielle de Legendre. Cette équation est fréquemment rencontrée en physique et en ingénierie. En particulier, cela se produit lors de la résolution de l'équation de Laplace, de Helmholtz en coordonnées sphériques.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à étudier la solution de l'équation différentielle de Legendre et obtiendrons les polynômes de Legendre de deux manières différentes, en résolvant l'équation différentielle et à partir de la fonction génératrice. Ensuite, nous mentionnons les propriétés des polynômes de Legendre ; la plus remarquable d'entre elles est la propriété d'orthogonalité.

Il est important d'étudier l'équation différentielle associée de Legendre et les différentes propriétés des polynômes de Legendre associés. Nous terminons ce chapitre par étudier les polynômes de Legendre (associés) du deuxième type.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Série entière

Definition 1.1.1. *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

est le plus grand nombre positif R tel que la série converge pour tout x dans le disque $|x - x_0| < R$.

Théorème 1.1.1. *Le rayon de convergence R de la série entière centrée en x_0,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

est tel que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}$$

On a aussi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

lorsque cette limite existe.

Definition 1.1.2. *On dit que la fonction y est analytique dans le disque $D(x_0, R)$, de centre x_0 et de rayon $R > 0$, si elle admet un développement en série entière de centre x_0,*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

uniformément convergent dans tout disque fermé strictement contenu dans $D(x_0, R)$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition précédente.

Théorème 1.1.2. *Une fonction y analytique dans $D(x_0, R)$ admet la représentation*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \left(x - x_0\right)^n .$$

De plus $y(x)$ est indéfiniment dérivable dans $D(x_0, R)$

$$y^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{(n-k)!} \left(x - x_0\right)^{n-k}$$

$k = 0, 1, 2, ...$

1.1.2 Existence de solutions d'équations différentielles développables en séries entières

Théorème 1.1.3. *Soit l'équation différentielle*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{1.1}$$

où p, q et r sont des fonctions analytiques au voisinage de x_0. Si R est le minimum des rayons de convergence des développements en série entière, de centre x_0, de p, q et r, alors l'équation différentielle admet une solution analytique de centre x_0 et de rayon de convergence R.

1.1.3 Formule de Leibniz

La formule de Leibniz est une formule permettant de calculer la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions. Elle est analogue à la formule du binôme de Newton pour calculer une puissance d'ordre n d'une somme de deux termes.

Proposition 1.1.1. ***(Formule de Leibniz)*** *: Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors fg est n fois dérivable sur I et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.2 Equation de Legendre. Fonctions et polynômes de Legendre

En mathématiques et en physique théorique, les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux. Ce sont des solutions polynomiales $P_l(x)$ de l'équation différentielle de Legendre :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \tag{1.2}$$

dans le cas particulier où le paramètre l est un entier.

1.2.1 Solution par série entière

On cherche la solution générale de l'équation de Legendre :

$$\left(1-x^2\right) y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{1.3}$$

sous forme de série entière centrée en $x_0 = 0$. On récrit l'équation sous forme standard :

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)} y' + \frac{l(l+1)}{(1-x^2)} y = 0$$

Puisque

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{2x}{(1-x^2)} = \frac{-2x}{(1-x)(1+x)} = -2x[1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots], \\
q(x) &= \frac{l(l+1)}{(1-x^2)} = \frac{l(l+1)}{(1-x)(1+x)} = l(l+1)[1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots], \\
r(x) &= 0,
\end{aligned}$$

on voit que p et q sont analytiques sur $-1 < x < 1$ et r est analytique partout. Par le théorème (1.1.3), on sait que (1.3) admet deux solutions indépendantes et analytiques sur $-1 < x < 1$.

Posons

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On peut dériver y terme à terme et en insère y, sa dérivée y' et la dérivée seconde y'' dans l'équation (1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + l(l+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + l(l+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + l(l+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0
\end{aligned}$$

On peut affirmer que y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \{(n+1)(n+2)a_{n+2} - [n(n+1) - l(l+1)]\, a_n\}\, x^n = 0$$

Puisque nous avons une identité en x, chacun des coefficients de x^n, $n = 0, 1, 2, \dots$, est nul, et puisque l'équation (1.3) est du second ordre, deux des a_n seront indéterminés. On a donc,

$$\begin{aligned}
2!a_2 + l(l+1)a_0 &= 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{l(l+1)}{2!}a_0, \quad a_0 \quad \textit{indéterminé}, \\
(3\times\ 2)a_3 + (-2 + l(l+1))a_1 &= 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{2 - l(l+1)}{3!}a_1, \quad a_1 \ \ \textit{indéterminé}
\end{aligned}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n+1) - l(l+1)]\, a_n = 0,\ \forall n \geq 0$$

donc

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \\
&= -\frac{(l-n)\,(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n,\ \forall\, n \geq 0 \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

d'où

$$a_2 = -\tfrac{l(l+1)}{2!}a_0, \qquad a_3 = -\tfrac{(l-1)(l+2)}{3!}a_1,$$
$$a_4 = \tfrac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!}a_0, \qquad a_5 = \tfrac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!}a_1.$$

A partir des équations précédentes on peut déduire le terme général qui est donné par

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)\dots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\dots(l+2n-1)}{(2n)!} a_0$$

et

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n (l-1)(k-3)\dots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\dots(l+2n)}{(2n+1)!} a_1$$

On peut donc écrire la solution de la forme :

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad \mathbf{(1.5)}$$

où

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!}x^4 - + \cdots, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)\dots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\dots(l+2n-1)}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!}x^5 - + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(l-1)(l-3)\dots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\dots(l+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1. *1. On peut montrer en utilisant la règle de d'Alembert que les séries définissant* y_1 *et* y_2 *convergent pour* $|x| < R = 1$.

2. Puisque y_1 *est paire et* y_2 *est impaire, il suit que*

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq constante$$

Donc y_1 *et* y_2 *sont deux solutions indépendantes car le Wronskian au point ordinaire* $x = 0$

$$W(y_1(x),\ y_2(x)) = \left| \begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{array} \right|_{x=0} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right|_{x=0} = 1 \neq 0$$

est non nul donc (1.5) *est la solution générale.*

3. On peut montrer que les séries donnant y_1*, (resp.* y_2*), divergent en* $x = \pm 1$ *si* $l \neq 0, 2, 4, \dots$*, (resp.* $l \neq 1, 3, 5, \dots$*).*

4. Le seul cas dans lequel l'équation de Legendre possède une solution bornée sur $[-1, 1]$ *est lorsque le paramètre* l *est un entier. Dans ce cas ou bien* y_1 *ou bien* y_2 *est un polynôme (la série se termine).*

Lorsque nous considérons les valeurs entière de l*, nous devons considérer uniquement les valeurs positives de* l*, en effet si* l *était un entier négatif, nous pourrions écrire* $m = -(l+1)$ *et utiliser le fait que* $m(m+1) = l(l+1)$.

Corollaire 1.2.1. *Pour l pair, $y_1(x)$ est un polynôme pair, et de même, pour l impair, $y_2(x)$ est un polynôme impair donc la solution résultante de l'équation différentielle de Legendre est appelée polynôme de Legendre désigné par*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{M} a_{n-2k} x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k (2k-2n)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \end{aligned} \tag{1.6}$$

où $M = \left[\frac{n}{2}\right]$ est la fonction de plafond ("ceiling function") et elle définie par

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et $P_n(x)$ est le polynôme de Legendre de degré n, tel que $P_n(1) = 1$.

Démonstration. Comme cela a été souligné dans la remarque ci-dessus, si $l \in \mathbb{N}$ alors l'équation différentielle de Legendre possède des solutions bornées. On revient à la construction des solutions par les séries entières et regarder à nouveau les relations de récurrence donnant les coefficients

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

On a alors

$$a_{l+2} = \frac{l(l+1) - l(l+1)}{(l+2)(l+1)} a_l = 0,$$

$$a_{l+4} = \frac{(l+2)(l+3) - l(l+1)}{(l+4)(l+3)} a_{l+2} = 0,$$

et de proche en proche on trouve que $a_{l+2k} = 0$, $k = 1, 2, 3, ...$
Cela signifie que :

- Si $l = 2p$ (pair), la série pour y_1 se termine en a_{2p} et y_1 est un polynôme de degré $2p$.
- Si $l = 2p+1$ (impair), alors la série pour y_2 se termine à a_{2p+1} et y_2 est un polynôme de degré $2p+1$.

On peut réécrire la relation de récurrence pour une solution polynomiale en terme de a_n. Nous avons

$$a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{n(n+1) - l(l+1)} a_{n+2} = -\frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)} a_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, ...l-2.$$

ou encore de manière équivalente

$$a_{l-2k} = -\frac{(l-2k+2)(l-2k+1)}{(2k)(2l-2k+1)} a_{l-2k+2}, \quad k = 0, 1, 2, ...[l/2].$$

Ainsi par récurrence on peut montrer que

$$a_{l-2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{l(l-1)...(l-2k+1)}{(2l-1)(2l-3)...(2l-2k+1)} a_l.$$

où a_l est une constante arbitraire. Le l-ième polynôme de Legendre $P_l(x)$ est le ci-dessus polynôme de degré l pour la valeur particulière de a_l

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}.$$

Cette valeur particulière de a_l est choisie de telle sorte que $P_l(1) = 1$. On a alors (après simplification)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}.$$

avec

$$[l] = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } l \text{ est pair} \\ \frac{l-1}{2} & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Notons que si l est pair (resp. impair), alors les seules puissances de x dans $P_l(x)$ sont paires (resp. impaires) et donc P_l est pair (resp. impair).

$\square$

Les six premiers polynômes de Legendre sont

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(3x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \end{aligned}$$

et ils sont représentés dans la Figure 1.1.

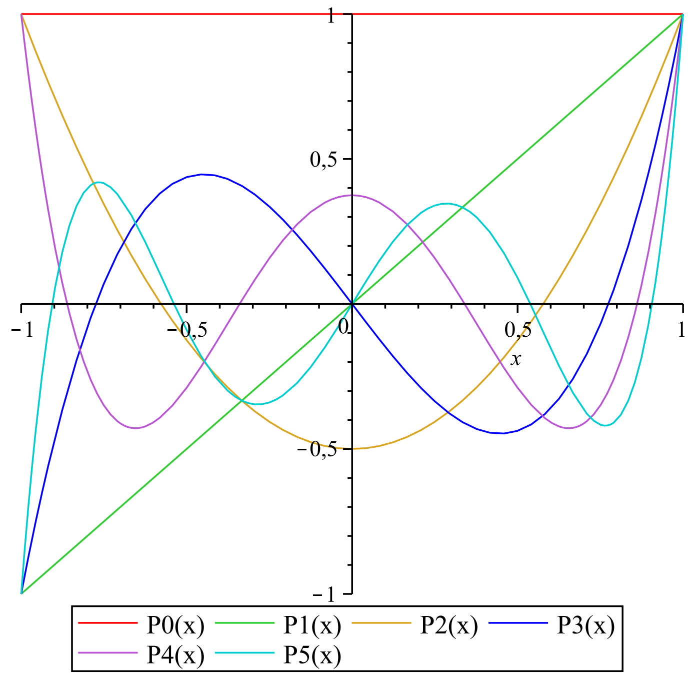

FIGURE 1.1 – Polynômes de Legendre pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

1.3 Formule de Rodrigues

Les polynômes de Legendre peuvent être calculés itérativement l'un après l'autre à l'aide d'une formule qui utilise des dérivés successives. Cette formule est connue sous le nom de formule de Rodrigues. Cette formule peut être utilisée pour prouver de nombreuses propriétés des polynômes de Legendre (orthogonalité, par exemple). Il peut être aussi utilisé pour identifier les fonctions propres du moment angulaire orbital.

Théorème 1.3.1. *La formule de Rodrigues des polynômes de Legendre est exprimée par :*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right].$$

Démonstration. Considérons la fonction suivante

$$y = (x^2 - 1)^n.$$

Donc la dérivée par rapport à x donne

$$\frac{dy}{dx} = 2nx(x^2 - 1)^{n-1} \tag{1.7}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1.7) par $(x^2 - 1)$ on trouve

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 2nx(x^2 - 1)^n = 2nxy$$

Par le théorème de Leibnitz (pour $f = (x^2 - 1)$ et $g = \dfrac{dy}{dx}$)

$$
\begin{aligned}
(x^2-1)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + C^1_{n+1}(2x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + C^2_{n+1}(2)\frac{d^ny}{dx^n} &= 2n\left[x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + C^2_{n+1}(1)\frac{d^ny}{dx^n}\right] \\
(x^2-1)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + 2(n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \frac{2(n+1)n}{2}\frac{d^ny}{dx^n} &= 2n\left[x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{d^ny}{dx^n}\right]
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
(x^2-1)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + [(2nx+2x)-2nx]\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + n(n+1) - 2n(n+1)\frac{d^ny}{dx^n} &= 0 \\
(x^2-1)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + 2x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - n(n+1)\frac{d^ny}{dx^n} &= 0
\end{aligned}
$$

ce qui équivalent à dire

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} - 2x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

Posant $R_n = \frac{d^ny}{dx^n}$ alors l'équation ci-dessus devient

$$(1-x^2)\frac{d^2R_n}{dx^2} + 2x\frac{dR_n}{dx} + +n(n+1)R_n = 0$$

Ce n'est rien d'autre que l'équation de Legendre. Ainsi R_n satisfait l'équation de Legendre.

Notons que

$$R_n = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

est un polynôme de degré n.

Nous savons que l'équation de Legendre n'a qu'une solution polynomiale distincte, qui est $P_n(x)$.

Ainsi, $P_n(x)$ doit être écrit comme un multiple à une constante près de R_n. C'est-à-dire,

$$P_n(x) = KR_n(x) = K\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \tag{1.8}$$

Nous n'avons qu'à déterminer cette constante K. Notant que $P_n(1) = 1$, nous pouvons déterminer K en évaluant $\frac{d^n}{dx^n}R_n\big|_{x=1}$.

En appliquant la règle de Leibniz, nous avons

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}R_n &= \frac{d^n}{dx^n}\left[(x+1)^n(x-1)^n\right] \\
&= \sum_{m=0}^{n} C^n_m \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x+1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x-1)^n \\
&= (x-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x+1)^n + nC^1_n(x-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x+1)^n + ... \\
&\quad +C^n_{n-1}(x+1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-1)^n + C^n_n(x+1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n.
\end{aligned}
$$

En mettant $x = 1$ des deux côtés de l'équation ci-dessus

$$\frac{d^n}{dx^n} R_n \bigg|_{x=1} = C_n^n (x+1)^n n!|_{x=1} = 2^n n!$$

En substituant $x = 1$ dans l'équation (1.8), nous voyons que

$$P_n(1) = K R_n(x)|_{x=1} = K \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n\right] \bigg|_{x=1} = K\ 2^n n!$$

Puisque nous savons que pour tout n, lorsque $x = 1$, le polynôme de Legendre $P_n(1) = 1$, donc la valeur de la constante K est

$$K = \frac{P_n(1)}{2^n n!} = \frac{1}{2^n n!}$$

En remplaçant K dans l'équation (1.8), nous obtenons

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n\right].$$

□

1.4 Fonction génératrice des polynômes de Legendre

De nombreux calculs sur les fonctions de Legendre peuvent être prouvés en utilisant sa fonction génératrice. Ici, nous voulons déterminer la fonction génératrice des polynômes de Legendre.

Definition 1.4.1. *La fonction*

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

est appelée fonction génératrice des polynômes de Legendre $P_n(x)$. Si nous étendons $G(t,x)$ comme série de Taylor en t alors le coefficient de t^n est le polynôme $P_n(x)$.

Proposition 1.4.1. *Si $|t| < 1$ et $|x| \leq 1$ on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x) \tag{1.9}$$

Démonstration. On sait qu'on a pour certaines valeurs $|v| < 1$ la formule binomial est donnée par

$$(1+v)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} v^k,$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} &= [1-t(2x-t)]^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1+\frac{1}{2}t(2x-t)+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{2!}t^2(2x-t)^2+...+\frac{(\frac{1}{2}).(\frac{1}{3})\dots(n-\frac{1}{2})}{n!}t^n(2x-t)^n+... \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2k-1)}{2^k k!}t^k(2x-t)^k, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}t^k(2x-t)^k.
\end{aligned}$$

D'aprés la formule du binôme de Newton, on a

$$(2x-t)^k = \sum_{s=0}^{k}\frac{k!}{s!(k-s)!}(2x)^{k-s}(-t)^s$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{k!}{s!(k-s)!}(2x)^{k-s}t^{k+s}.$$

Si on pose $n = k+s$, on a n qui varie entre 0 et ∞, et puisque s varie entre 0 et k, donc k varie entre $[n/2]$ et n, alors

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=[n/2]}^{n}t^n(-1)^{n-k}\frac{(2k)!}{2^n k!(n-k)!(2k-n)!}x^{2k-n}.$$

En faisant le changement de variable $r = n-k$, on obtient finalement

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}t^n\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r},$$

ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(x).$$

□

1.5 Propriétés des polynômes de Legendre

Proposition 1.5.1. *Les polynômes de Legendre vérifient la relation de symétrie suivante :*

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Démonstration. On a montré que

$$\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, \tag{1.10}$$

alors en remplaçant x par $-x$ dans (1.10) on obtient

$$\left(1+2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)t^n,$$

puis t par $-t$ dans (1.10) on trouve

$$\left(1+2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\left(-t\right)^n,$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^nP_n(x)t^n,$$

ce qui implique

$$P_n(-x)=\left(-1\right)^nP_n(x).$$

□

Proposition 1.5.2. *On a*

i) $P_n(1)=1$.

ii) $P_n(-1)=(-1)^n$.

iii) $P_n'(1)=\frac{1}{2}n(n+1)$.

iv) $P_n'(-1)=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$.

v) $P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

vi) $P_{2n+1}(0)=0$.

Démonstration. i) Posons $x=1$ dans la fonction génératrice des polynômes de Legendre nous obtenons

$$\left(1-2t+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n,$$

qui est

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n,$$

mais

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n.$$

Ainsi, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n.$$

Pour que cela soit vrai pour toutes les valeurs de t dans un certain intervalle (dans ce cas $-1 < t < 1$), nous devons avoir l'égalité des coefficients correspondants aux puissances de t, c'est-à-dire $P_n(1) = 1$.

ii) Exactement similaire à i) mais en posant $x = -1$ dans la fonction génératrice.

iii) $P_n(x)$ satisfait l'équation de Legendre, donc on a

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \tag{1.11}$$

En posant $x = 1$ dans cette équation nous obtenons

$$-2P_n'(1) + n(n+1)P_n(1) = 0,$$

ce qui réduit, en utilisant de la partie i) ci-dessus, à

$$P_n'(1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

iv) Exactement similaire à iii) en posant $x = -1$ dans l'équation (1.11) et l'utilisation de la partie ii) ci-dessus.

v) et vi) Posons $x = 0$ dans la fonction génératrice des polynômes de Legendre, on a

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n.$$

En développant le premier membre de cette équation nous obtenons

$$\begin{aligned}
(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)t^4 + \ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}t^{2n} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}t^{2n}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1.2.3.4.5\ldots(2n-2)(2n-1)2n}{2^n n! 2.4.6\ldots(2n-2)2n}t^{2n}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n.$$

En identifiant les coefficients correspondants aux puissances de t des deux cotés on trouve

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \text{ et } P_{2n+1}(0) = 0.$$

□

1.6 Orthogonalité des polynômes de Legendre

Théorème 1.6.1. *Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante :*

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & si\ k \neq m \\ \frac{2}{2k+1} & si\ k = m \end{cases}$$

Démonstration. La première partie (c'est-à-dire pour $m \neq k$) découle de l'équation de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + k\,(k+1)\,y = 0,$$

récrite sous la forme :

$$L_n y := \left[(1-x^2)y'\right]' + k\,(k+1)\,y = 0.$$

Puisque P_m et P_k sont respectivement solutions de $L_m y = 0$ et $L_k y = 0$, on a

$$P_k(x)L_m\,(P_m) = 0\ \ et\ \ P_m(x)L_k\,(P_k) = 0.$$

On intègre ces deux expressions de -1 à 1 :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left[P_k\,(x)\,(1-x^2)P_m'\,(x)\right]'dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} P_k\,(x)\,P_m\,(x)\,dx &= 0, \\ \int_{-1}^{1} [P_m\,(x)\left[(1-x^2)P_k'\,(x)\right]'dx + k(k+1)\int_{-1}^{1} P_m\,(x)\,P_k\,(x)\,dx &= 0, \end{aligned}$$

et l'on intègre le 1^{er} terme de chacune de ces expressions par parties :

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_k\,(x)\,P_m'\,(x)\big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_k'\,(x)\,P_m'\,(x)\,dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} P_k\,(x)\,P_m\,(x)\,dx &= 0, \\ (1-x^2)P_m\,(x)\,P_k'\,(x)\big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'\,(x)\,P_k'\,(x)\,dx + k(k+1)\int_{-1}^{1} P_m\,(x)\,P_k\,(x)\,dx &= 0. \end{aligned}$$

Les deux termes intégrés sont nuls et le terme suivant de chacune des équations est identique. Donc, par soustraction on obtient l'orthogonalité des P_n

$$[m(m+1) - k(k+1)]\int_{-1}^{1} P_m\,(x)\,P_k\,(x)\,dx = 0,$$

ce qui montre que si $k \neq m$, on devrait avoir

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)dx = 0.$$

La 2^{eme} partie, $m = n$: Pour montrer que $\|P_k\|^2 = \int_{-1}^{1}(P_k)^2 dx = \frac{2}{(2k+1)}$, on utilise la fonction génératrice de $P_k(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x).$$

Elevons au carré chacun des deux membres :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^2(x)t^{2k} + \sum_{m\neq k}^{\infty} P_k(x)P_m(x)t^{k+m} = \frac{1}{1-2xt+t^2},$$

et intégrons par rapport à x de -1 à 1 :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx\right)t^{2k} + \sum_{m\neq k}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)dx\right)t^{k+m} = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1-2xt+t^2}dx$$

Comme P_m et P_k sont orthogonaux pour $m \neq k$, le 2^{eme} terme du 1^{er} membre est nul et nous obtenons après intégration du 2^{eme} membre

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx\right)t^{2k} &= \left[-\frac{1}{2t}\ln(1+t^2-2xt)\right]_{-1}^{1}, \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2-2xt}dx, \\
&= \left[-\frac{1}{2t}\ln(1+t^2-2xt)\right]_{-1}^{1}, \\
&= -\frac{1}{2t}\left[\ln(1+t^2-2t)-\ln(1+t^2+2t)\right], \\
&= -\frac{1}{2t}\left[\ln((1-t)^2)-\ln((1+t)^2)\right], \\
&= -\frac{1}{t}\left[\ln(1-t)-\ln(1+t)\right].
\end{aligned}$$

On multiplie par t :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|P_k\|^2 t^{2k+1} = \ln(1+t)-\ln(1-t)$$

et l'on dérive par rapport à t

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\|P_k\|^2 t^{2k} &= \frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}, \\
&= \frac{2}{1-t^2} = 2\left(1+t^2+t^4+t^6+...\right) \quad \textit{pour tout } t, |t|<1. \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}.
\end{aligned}$$

Puisque nous avons une identité en t, on peut donc identifier les coefficients de t^{2k} :

$$(2k+1)\|P_k\|^2 = 2 \Rightarrow \|P_k\|^2 = \frac{2}{(2k+1)}.$$

Par conséquent

$$\int_{-1}^{1}[P_k(x)]^2dx = \frac{2}{2k+1}.$$

□

1.7 Représentation intégrale de Laplace

Théorème 1.7.1.

$$P_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^k d\theta. \tag{1.12}$$

Démonstration. On peut montrer par des méthodes élémentaires (par exemple au moyen du changement de variable universel $t = \tan(\theta/2)$) que

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\lambda\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \tag{1.13}$$

Posons $\lambda = \dfrac{-u\sqrt{x^2-1}}{(1-ux)}$, En développant les deux côtés de 1'équation (1.13) par rapport à u, nous obtenons d'une part

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\lambda\cos\theta} &= \frac{1}{1+\dfrac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}\cos\theta}\\ &= (1-ux)[1-u(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)]^{-1}.\end{aligned}$$

Supposons que $|u(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)| < 1$, donc

$$\frac{1}{1+\lambda\cos\theta} = (1-ux)\sum_{l=0}^{\infty}u^k(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^k,$$

où on a utilisé le fait que $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}a^n$, avec $a = u(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)$.
Et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2(x^2-1)}{(1-ux)^2}}},\\ &= \frac{1-ux}{\sqrt{(1-ux)^2-u^2(x^2-1)}},\\ &= \frac{1-ux}{\sqrt{1-2ux+u^2}}.\end{aligned}$$

La substitution dans 1'équation (1.13) donne

$$\int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}u^k(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^k d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ux+u^2}}.$$

Remplaçons la formule de la fonction génératrice (1.9) dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u^k \int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^k d\theta = \pi \sum_{k=0}^{+\infty} u^k P_k(x).$$

Par identification des coefficients de u^k on obtient

$$\pi P_k(x) = \int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^k d\theta.$$

Dans le cas où $|u(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)| > 1$, on refait le même calcul mais en développant suivant les puissances de $\frac{1}{u}$ ce qui donne

$$P_k(x) = \pm\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{k+1}} d\theta,$$

les signes $+$ et $-$ correspondant aux cas où $Re(x)$ est positive où négative. □

Remarque 1.7.1. *A partir de* (1.12)*, nous pouvons déduire une inégalité importante satisfaite par les polynômes de Legendre. Soit x un nombre réel tel que $-1 \leq x \leq 1$. Alors*

$$|(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)| = \sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\theta} \leq 1,$$

et donc

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{1.14}$$

Une autre représentation intégrale importante des polynômes de Legendre peut être déduit de (1.12) *en supposant que x est un nombre réel tel que $-1 < x < 1$. Dans ce cas, en posant*

$$x = \cos\theta, \quad 0 < \phi < \pi,$$

on peut écrire (1.12) *sous la forme*

$$P_k(\cos\phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos\phi + i\sin\phi\cos\theta)^k d\theta. \tag{1.15}$$

Puis en posant $t = \cos\phi + i\sin\phi\cos\theta$, on obtient

$$P_k(\cos\phi) = \frac{1}{\pi i} \int_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} \frac{t^k}{\sqrt{1-2t\cos\phi+t^2}} dt.$$

Soient A et B les point d'affixes $e^{i\phi}$ et $e^{-i\phi}$, l'intégration se fait le long du segment $[AB]$ ou de la corde (AB) dans le sens positif; la racine choisie est telle que sa valeur en $t = \cos\phi$ soit $\sin\phi$. Posons maintenant $t = e^{i\psi}$, on obtient alors

$$P_k(\cos\phi) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\phi}^{\phi} \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})\psi}}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\phi}} d\psi,$$

dont la partie réelle donne

$$P_k(\cos\phi) = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\phi} \frac{\cos(k+\frac{1}{2})\psi}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\phi}} d\psi, \; 0 < \phi < \pi, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

(Intégrale de Mehler-Dirichlet).

1.8 Séries de Legendre

Théorème 1.8.1. *Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, alors il peut être écrit sous la forme*

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x) \tag{1.16}$$

avec les coefficients c_r donnés par

$$c_r = \left(r + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_r(x) dx.$$

Démonstration. Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, on peut écrire

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

D'après (1.6), le polynôme de Legendre s'écrit sous la forme

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots$$

Si on multiplie la dernière expression par $\frac{b_n}{a_n}$ et en le soustrayant de $f(x)$, on trouve que la différence est un polynôme de degré $(n-1)$

$$f(x) - c_n P_n(x) = g_{n-1}(x),$$

où $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ et $g_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $n-1$. En faisant la même chose pour $g_{n-1}(x)$, on peut démontrer facilement que $g_{n-1}(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$g_{n-1}(x) = c_{n-1} P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x),$$

donc

$$f(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x).$$

On fait la même chose pour $g_{n-2}(x)$ et ainsi de suite, on obtient le résultat désiré

$$\begin{aligned} f(x) &= c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + c_{n-2} P_{n-2}(x) + \ldots + c_0 P_0(x) \\ &= \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x). \end{aligned}$$

Les coefficients c_n peuvent être calculer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx &= \sum_{r=0}^{n} \int_{-1}^{1} c_r P_r(x) P_k(x) dx, \\ &= \frac{2c_k}{2k+1}. \end{aligned}$$

donc

$$c_k = (k + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx. \tag{1.17}$$

□

Remarque 1.8.1. *Dans le cas ou $f(x)$ est un polynôme, il n'est pas nécessaire de calculer les intégrales* (1.17)*, car le les coefficients c_k peuvent être facilement trouvés en résolvant le système d'équations linéaires obtenu lorsque les expressions explicites des polynômes de Legendre sont substituées dans l'équation* (1.16) *et les coefficients de puissances identiques de x des deux côtés de l'équation sont mis en égalité. Ainsi, par exemple*

$$x^2 = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) = c_0 + c_1 x + \frac{1}{2} c_2 (3x^2 - 1),$$

donc

$$c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = \frac{1}{3}.$$

Ainsi

$$x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x),$$

une expansion qui est valable pour tout x.

Corollaire 1.8.1. *Si $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur à k, alors*

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx = 0.$$

Démonstration. Si $f(x)$ est de degré n tel que $n < k$, d'aprés la relation d'orthogonalité on a

$$\begin{aligned} c_k &= (k + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx, \\ &= (k + \frac{1}{2}) \sum_{r=0}^{n} c_r \int_{-1}^{1} P_r(x) P_k(x) dx, \\ &= 0, \end{aligned}$$

par le Théorème 1.6.1, puisque $r \leq n < k$, de sorte que r n'est jamais égal à l. □

Les résultats du théorème ci-dessus peuvent être étendus à des fonctions qui ne sont pas des polynômes. nous ne prouverons pas cette extension, mais citerons simplement le résultat suivant (la preuve n'est pas difficile, mais est assez longue).

Théorème 1.8.2. *Soit f une fonction vérifiant sur l'intervalle $[-1, 1]$ les conditions suivantes :*

(i) f et continue sauf en un nombre fini de points finis (continue par morceaux).

(ii) f possède un nombre fini d'extrémums.

Alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{1.18}$$

où

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx, \tag{1.19}$$

converge vers $f(x)$ si x est un point de continuité de f, et vers

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

si x est un point de discontinuité.

De plus, aux points $x = \pm 1$, la série converge vers $f(1-)$ et $f(-1+)$ respectivement. Cette série s'appelle la série de Legendre de f.

Exemple 1.8.1. *Considérons la fonction*

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

Cette fonction satisfait aux conditions du Théorème 1.8.2, et peut donc être développée en une série de la forme (1.18)*. Les coefficients c_n peuvent être calculés par la méthode suivante, qui est souvent utile : On multiplie la fonction génératrice* (1.27) *par $f(x)$ et intégrer sur l'intervalle $[-1, 1]$. Après quelques calculs élémentaires, on obtient*

$$\frac{1}{2t}\left[1 + t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx, \ |t| < 1, \tag{1.20}$$

où l'intégration terme par terme est justifiée par la convergence uniforme de la série (1.9) *dans l'intervalle $[-1, 1]$, qui découle de l'estimation* (1.14)*. En développant le côté gauche de* (1.20) *en puissances de t, nous trouvons que*

$$\frac{4}{3} - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx, \ |t| < 1, \tag{1.21}$$

ce qui implique

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x) dx = \frac{4}{3},$$
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx = -\frac{4}{(4n^2-1)(2n+3)}.$$

Nous utilisons maintenant (1.19) *pour écrire la série de Legendre requise sous la forme*

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}, \quad -1 < x < 1. \tag{1.22}$$

1.9 Relations (formules) de récurrence pour les polynômes de Legendre

Proposition 1.9.1. *Les polynômes de Legendre satisfont les relations suivantes*

$$i)\ P_n'(x) = \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(n-1)]} (2n-4r-1)P_{n-2r-1}(x).$$
$$ii)\ xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x).$$

Démonstration. i) On sait que $P_n(x)$ est un polynôme de degré n, qui contient seulement les puissance paires de x si n est paire, et seulement les puissances impaires de x si n et impair. Donc $P_n'(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ contenant des puissances impaires ou paires de x selon que n est pair ou impair. Donc en utilisant le Théorème 1.8.1 on a

$$P_n'(x) = c_{n-1}P_{n-1}(x) + c_{n-3}P_{n-3}(x) + \ldots + c_{n-2r-1}P_{n-2r-1}(x) + \ldots \begin{cases} c_1P_1(x) & (n\ pair) \\ c_0P_0(x) & (n\ impair) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} c_s &= \left(s+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} P_n'(x)P_s(x)dx \\ &= \left(s+\frac{1}{2}\right)\left\{[P_n(x)P_s(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n(x)P_s'(x)dx\right\} \\ &= \left(s+\frac{1}{2}\right)\{P_n(1)P_s(1) - P_n(-1)P_s(-1) - 0\} \end{aligned}$$

où l'intégrale s'annule par le corollaire du Théorème 1.8.1, puisque $P_s'(x)$ est un polynôme de degré $s-1$, et $s-1$ est toujours inférieur à n. Ainsi par la Proposition 1.5.2 (i) et (ii), on a

$$c_s = \left(s+\frac{1}{2}\right)\left\{1-(-1)^{s+n}\right\}.$$

Mais s prend les valeurs $n-1$, $n-3$,..., donc $s+l$ prend les valeurs $2n-1$, $2n-3$,..., qui est toujours impair, pour tout l et m. Ainsi $(-1)^{s+n} = -1$ et on a

$$c_s = \left(s+\frac{1}{2}\right)(1-(-1)) = 2s+1$$

Alors

$$c_{n-2r-1} = 2(n-2r-1)+1 = 2n-4r-1$$

et par suite on a

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + \ldots + (2r-1)P_{n-2r-1}(x) + \ldots + \begin{cases} 3P_1(x) & (n \textit{ pair}) \\ P_0(x) & (n \textit{ impair}) \end{cases} \\ &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(n-1)]} (2n-4r-1)P_{n-2r-1}(x). \end{aligned}$$

ii) $xP_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$, impair si n est pair et pair si n est impair. Alors par le Théorème 1.8.1 on a

$$xP_n(x) = c_{n+1}P_{n+1}(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + \ldots + \begin{cases} c_1P_1(x) & (n \textit{ impair}) \\ c_0P_0(x) & (n \textit{ pair}) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} c_r &= \left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_r(x)dx \\ &= \left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} P_n(x)\{xP_r(x)\}dx. \end{aligned}$$

Or par la corollaire du Théorème 1.8.1 cette intégrale est nulle si $r+1 < n$ (puisque $xP_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur à n), i.e., si $r < l-1$.
Donc on a

$$xP_n(x) = c_{n+1}P_{n+1}(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x). \tag{1.23}$$

Pour déterminer c_{n+1} et c_{n-1} on pose $x=1$ dans l'équation (1.23) et dans sa dérivée par rapport à x, notamment

$$P_n(x) + xP_n'(x) = c_{n+1}P_{n+1}'(x) + c_{n-1}P_{n-1}'(x). \tag{1.24}$$

En posant (1.23) et (1.24) et utilisant la Proposition 1.5.2 nous obtenons

$$1 = c_{n+1} + c_{n-1} \tag{1.25}$$

et

$$1 + \frac{1}{2}n(n+1) = c_{n+1}\left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right\} + c_{n-1}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\} \tag{1.26}$$

La résolution du système d'équations (1.25) et (1.26) en c_{n+1} et c_{n-1} donne

$$c_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}, \quad c_{n-1} = \frac{n}{2n+1}.$$

finalement, on insère ces valeurs dans l'équation (1.23) on obtient

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x).$$

□

Proposition 1.9.2. *Les polynômes de Legendre satisfont les relations suivantes*

$$\begin{aligned}
&i)\quad (n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \textit{pour } n \geq 1,\\
&ii)\quad nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x),\\
&iii)\quad (2n+1)\,P_n(x) \; = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x),\\
&iv)\quad P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)\,P_n(x),\\
&v)\quad \left(1-x^2\right)P_n'(x) = n\left(P_{n-1}(x) - xP_n(x)\right),\\
&vi)\quad \left(1-x^2\right)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = -n\,(n+1)\,P_n(x).
\end{aligned}$$

Démonstration. **i)** $\mathbf{(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \;\; pour\ n \geq 1}$

A partir de la fonction génératrice, nous avons

$$\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{1.27}$$

Dérivons les deux côtés de (1.27) par rapport à t nous obtenons

$$-\frac{1}{2}\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}. \tag{1.28}$$

Multiplions les deux côtés de (1.28) par $\left(1-2tx+t^2\right)$ nous obtenons

$$(x-t)\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-2tx+t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

ou bien

$$\begin{aligned}
(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= \left(1-2tx+t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},\\
x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2tx\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + t^2\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},\\
x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1},\\
x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,P_{n+1}(x)t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\,P_{n-1}(x)t^n.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t^n des deux côtés, on obtient

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)\,P_{n-1}(x),$$

ainsi

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{1.29}$$

ii) $\mathbf{nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)}$

De même à partir de la fonction génératrice, nous avons

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \tag{1.30}$$

dérivons les deux côtés de (1.30) par rapport à t on obtient

$$-\frac{1}{2}\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}, \tag{1.31}$$

donc

$$(x-t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}. \tag{1.32}$$

Dérivons la fonction génératrice par rapport à x nous obtenons

$$-\frac{1}{2}\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n,$$

donc

$$t\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n, \tag{1.33}$$

divisons (1.32) par (1.33) on obtient

$$\frac{x-t}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n},$$

ce qui implique

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

Identifiant les coefficients de t^n nous obtenons

$$nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x).$$

iii) $\mathbf{(2n+1)\,P_n(x) \ = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)}$.

Dérivons (1.29) par rapport à x

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[(n+1)\,P_{n+1}(x)\ \right] &= \frac{d}{dx}\left[(2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right], \\
(n+1)\,P_{n+1}'(x) &= (2n+1)\,P_n(x) + (2n+1)\,xP_n'(x) - nP_{n-1}'(x),
\end{aligned}$$

puisque $xP_n'(x) = nP_n(x) + P_{n-1}'(x)$ alors,

$$\begin{aligned}
(n+1)\,P_{n+1}'(x) &= (2n+1)\,P_n(x) + (2n+1)\left[nP_n(x) + P_{n-1}'(x)\right] - nP_{n-1}'(x), \\
&= (2n+1)\,(n+1)\,P_n(x) + (n+1)\,P_{n-1}'(x),
\end{aligned}$$

donc

$$P_{n+1}'(x) = (2n+1)\,P_n(x) + P_{n-1}'(x).$$

Par conséquent

$$(2n+1)\,P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x).$$

iv) $\mathbf{P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)\,P_n(x)}$

On a

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,xP_n(x) + nP_{n-1}(x),$$

dérivons par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned}(n+1)\,P'_{n+1}(x) &= (2n+1)\,xP'_n(x) + (2n+1)\,P_n(x) - nP'_{n-1}(x),\\ &= (2n+1)\,P_n(x) + (2n+1)\,xP'_n(x) - nP'_{n-1}(x),\\ &= (2n+1)\,P_n(x) + (n+n+1)\,xP'_n(x) - nP'_{n-1}(x),\\ &= (2n+1)\,P_n(x) + (n+1)\,xP'_n(x) + nxP'_n(x) - nP'_{n-1}(x),\end{aligned}$$

or

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x),$$

alors

$$\begin{aligned}(n+1)\,P'_{n+1}(x) &= (2n+1)\,P_n(x) + (n+1)\,xP'_n(x) + n\left[nP_n(x)\right],\\ &= \left(2n+1+n^2\right)P_n(x) + (n+1)\,xP'_n(x),\\ &= (n+1)^2\,P_n(x) + (n+1)\,xP'_n(x),\end{aligned}$$

donc

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)\,P_n(x) + xP'_n(x),$$

par conséquent

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)\,P_n(x).$$

v) $\mathbf{\left(1-x^2\right)P'_n(x) = n\,(P_{n-1}(x) - xP_n(x)}$

Considérons la relation (ii)

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x). \tag{1.34}$$

En effectuant le changement d'indice $n \to n-1$ la relation (iv) devient,

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nP_{n-1}(x). \tag{1.35}$$

Multiplions la relation (1.34) par x, puis soustrayons-la de la relation (1.35). Nous obtenons

$$\left(1-x^2\right)P'_n(x) = n\left[P_{n-1}(x) - xP_n(x)\right].$$

vi) $\mathbf{\left(1-x^2\right)P''_n(x)-2xP'_n(x)=-n\,(n+1)\,P_n(x)}$

En dérivant les deux côtés de (v) par rapport à x on obtient

$$\left(1-x^2\right)P''_n(x)-2xP'_n(x)=n\left[P'_{n-1}(x)-xP'_n(x)-P_n(x)\right],$$

or d'après (ii)

$$P'_{n-1}(x)-xP'_n(x)=-nP_n(x),$$

donc

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)P''_n(x)-2xP'_n(x) &= n\left[-nP_n(x)-P_n(x)\right],\\ &= -n\,(n+1)\,P_n(x),\end{aligned}$$

ainsi

$$\left(1-x^2\right)P''_n(x)-2xP'_n(x)=-n\,(n+1)\,P_n(x).$$

□

1.10 Zéros des polynômes de Legendre

Tous les n zéros de $P_n(x)$ sont simples (c'est-à-dire d'ordre 1) et se trouvent entièrement à l'intérieur de l'intervalle $[-1,1]$, et donc, tous étant réels. Aussi, les zéros de $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ sont entrelacés, c'est-à-dire qu'entre deux zéros consécutifs de $P_n(x)$, il doit y avoir un et un seul zéro de $P_{n-1}(x)$ et vice versa. Ces propriétés des zéros sont communes à tous les polynômes orthogonaux en général [cf. par exemple, Szego, Orthogonal Polynomials, Sec. 33, p. 43]. Pour $P_n(x)$, cependant, nous pouvons le montrer en employant la formule de Rodrigues et les relations récurrentes de la Sec. 1.9.

Premièrement, $P_n(x)$ ne peut pas avoir des zéros multiples (zéros d'ordre supérieur à 1), car il s'agit d'une solution d'une équation différentielle ordinaire du second ordre ; si α en est un zéro d'ordre m, $m>2$, alors $P_n(\alpha)=P'_n(\alpha)=0$, et $P_n(x)\equiv 0$.

Ensuite, nous montrerons que tous les zéros de $P_n(x)$ se trouvent à l'intérieur de l'intervalle $[-1,1]$. Selon la formule de Rodrigues

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

-1 et $+1$ sont deux zéros d'ordre n de $(x^2-1)^n$, puis, selon le théorème de Rolle, la première dérivée $\frac{d}{dx}[(x^2-1)^n]$ a au moins un zéro compris entre -1 et $+1$. Si $n=1$, ce n'est que le zéro de $P_1(x)$. Si $n>1$, alors, en plus de ce zéro, ±1 sont aussi des zéros de

$\frac{d}{dx}[(x^2-1)^n]$, et donc, entre -1 et $+1$, il y a au moins deux zéros de $\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^n]$, qui ne coïncident pas.

Suite à de tels arguments, nous sommes amenés à la conclusion que $\frac{d}{dx}[(x^2-1)^n]$, et donc $P_n(x)$, a n et seulement n zéros non coïncidents compris entre -1 et 1 ; ± 1 ne sont plus des zéros ($P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$).

Enfin, nous montrerons que les zéros de $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ sont entrelacés. De la relation de récurrence

$$\left(1-x^2\right)P_n'(x)=n\left(P_{n-1}(x)-xP_n(x)\right),\quad n>1, \tag{1.36}$$

on voit que si $P_n(\alpha)=0$, alors $P_{n-1}(\alpha)\neq 0$; sinon, comme $\alpha\neq\pm 1$ (voir ci-dessus), nous aurions $P_n'(\alpha)=0$, et donc α est un zéro multiple, ce qui est contradictoire avec le résultat précédent. De plus, puisque $-1<\alpha<+1$ on voit d'après (1.36) que $P_{n-1}(\alpha)$ et $P_n'(\alpha)$ sont du même signe.

Soient α et β deux zéros consécutifs de $P_n(x)$, alors $P_n'(\alpha)$ et $P_n'(\beta)$ ne peuvent pas s'annuler et sont de signes différents ; sinon, α et β ne seraient pas contigus. Ainsi, $P_{n-1}(\alpha)$ et $P_{n-1}(\beta)$ sont de signes différents selon le précédent conclusion. Cependant, cela signifie qu'entre α et β, Il y a au moins un zéro de $P_{n-1}(x)$. Mais $P_{n-1}(x)$ ne peut avoir que $n-1$ zéros. Par conséquent, entre deux zéros consécutifs des n zéros de $P_n(x)$, il doit y avoir un et un seul zéro de $P_{n-1}(x)$. Ceci, bien sûr, montre que les zéros de $P_n(x)$ et ceux de $P_{n-1}(x)$ sont entrelacés.

1.11 Fonctions de Legendre associées

Théorème 1.11.1. *Si z est une solution de l'équation de Legendre*

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^{2y}}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l\,(l+1)\,y=0$$

alors $\left(1-x^2\right)^{m/2}(d^m z/dx^m)$ est une solution de l'équation

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^{2y}}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0$$

(connue sous le nom d'équation de Legendre associée).

Démonstration. Puisque z est une solution de l'équation de Legendre, nous devons avoir

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+l\,(l+1)\,z=0\cdot \tag{1.37}$$

Maintenant, dérivons l'équation (1.37) m fois par rapport à x :

$$\frac{d^m}{dx^m}\{\left(1+x^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}\}-2\frac{d^m}{dx^m}\{x\frac{dz}{dx}\}+l(l+1)\frac{d^mz}{dx^m}=0$$

qui, lorsque l'on utilise le théorème de Leibniz pour la dérivé $m^{ième}$ d'un produit, devient

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}}+m\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}+\frac{m(m-1)}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(1-x^2\right)\frac{d^mz}{dx^m}$$
$$-2\left\{x\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}+m\frac{d}{dx}x\frac{d^mz}{dx^m}\right\}+l(l+1)\frac{d^mz}{dx^m}=0$$

(puisque les dérivés supérieures de $1-x^2$ et x disparaissent). En rassemblant les termes en $\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}}$, $\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}$ et $\frac{d^mz}{dx^m}$, on obtient

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}}-2x\left(m+1\right)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}z}+\left\{l\left(l+1\right)-m\left(m-1\right)-2m\right\}\frac{d^mz}{dx^m}=0,$$

Si on note par $z_1=\frac{d^mz}{dx^m}$, alors l'équation (1.11) devient

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2z_1}{dx^2}-2\left(m+1\right)x\frac{dz_1}{dx^2}+\left\{l\left(l+1\right)-m\left(m+1\right)\right\}z_1=0\cdot \tag{1.38}$$

Si de plus on pose

$$z_2=(1-x^2)^{m/2}z_1=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^mz}{dx^m}$$

l'équation (1.38) devient

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\{z_2\left(1-x^2\right)^{-m/2}\}-2(m+1)x\frac{d}{dx}\{z_2(1-x^2)^{-m/2}\}+\{l\left(l+1\right)-m\left(m+1\right)\}z_2(1-x^2)^{-m/2}=0 \tag{1.39}$$

Mais

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{z_2(1-x^2)^{-m/2}\} &= \frac{dz_2}{dx}\left(1-x^2\right)^{-m/2}-\frac{m}{2}z_2\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}(-2x)\\ &= \frac{dz_2}{dx}\left(1-x^2\right)^{-m/2}+mz_2x\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\left\{z_2\left(1-x^2\right)^{-m/2}\right\}\\ &=\frac{d^2z_2}{dx^2}\left(1-x^2\right)^{-m/2}+\frac{dz_2}{dx}\cdot-\frac{m}{2}\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}\cdot(-2x)+m\{\frac{dz_2}{dx}x\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}\\ &+z_2\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}+z_2x\left(-\frac{m}{2}-1\right)\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-2}\cdot(-2x)\}\\ &=\frac{d^2z_2}{dx^2}\left(1-x^2\right)^{-m/2}+\frac{dz_2}{dx}mx\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}+m\frac{dz_2}{dx}x\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}+mz_2\left(1-x^2\right)^{-(m/2)+1}\\ &+mz_2x^2\left(m+2\right)\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-2}.\end{aligned}$$

donc l'équation (1.39) devient

$$\frac{d^2z_2}{dx^2}\left(1-x^2\right)^{-(m/2)+1}+2mx\left(1-x^2\right)^{-m/2}\frac{dz_2}{dx}+mz_2\left(1-x^2\right)^{-m/2}+m\left(m+2\right)\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}x^2z_2$$
$$-2\left(m+1\right)x\{\left(1-x^2\right)^{-m/2}\frac{dz_2}{dx}+mx\left(1-x^2\right)^{-(m/2)-1}z_2\}+\{l(l+1)-m(m+1)\}z_2\left(1-x^2\right)^{-m/2}=0$$

en annulant le facteur commun de $\left(1-x^2\right)^{-m/2}$ et en rassemblent les termes similaires, on obtient

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\frac{d^2z_2}{dx^2}+\{2mx-2\left(m+1\right)x\}\frac{dz_2}{dx}\\&+\left\{m+\frac{m\left(m+2\right)}{1-x^2}x^2-\frac{2\left(m+1\right)mx^2}{1-x^2}+l\left(l+1\right)-m\left(m+1\right)\right\}z_2=0\cdot\end{aligned}\qquad\textbf{(1.40)}$$

Le coefficient de $\frac{dz_2}{dx}$ est $-2x$, tandis que le coefficient de z_2 est

$$\begin{aligned}&l\left(l+1\right)+\frac{\left(m^2+2m-2m^2-2m\right)x^2}{1-x^2}+m-m^2-m\\=\;&l\left(l+1\right)-\frac{m^2x^2}{1-x^2}-m^2\\=\;&l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\end{aligned}$$

Ainsi l'équation (1.40) se réduit à

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2z_2}{dx^2}-2x\frac{dz_2}{dx}+\left\{l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}z_2=0.$$

De sorte que z_2 satisfait l'équation de Legendre associée ce qui prouve le théorème. □

Corollary 1.11.1. *Les fonctions de Legendre associées $P_l^m\left(x\right)$ définies par*

$$P_l^m\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l\left(x\right)\qquad\textbf{(1.41)}$$

satisfont l'équation de Legendre associée.

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement du théorème, puisque $P_l\left(x\right)$ satisfait l'équation de Legendre.

En utilisant la formule de Rodrigues (théorème 1.3.1), il est possible de réécrire la définition (1.41) sous la forme

$$P_l^m\left(x\right)=\frac{1}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l\cdot$$

La partie droite de cette expression est bien définie pour les valeurs négatives de m telles que $l+m\geq 0$, c'est-à-dire $m\geq -l$, alors que la définition originale (1.41) de $P_l^m\left(x\right)$ n'était valable que pour $m\geq 0$. Ainsi, nous pouvons utiliser cette nouvelle forme pour définir $P_l^m\left(x\right)$ pour des valeurs de m telles que $m\geq -l$.

Il est facile de vérifier que si l'on considère m positif, la fonction $P_l^{-m}(x)$ ainsi définie est une solution de l'équation associée de Legendre ainsi que $P_l^m(x)$. En effet, ce n'est pas une solution indépendante ; il peut être montré que

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) . \tag{1.42}$$

□

1.12 Propriétés des fonctions de Legendre associées.

Théorème 1.12.1.

(i) $P_l^0(x) = P_l(x)$,

(ii) $P_l^m(x) = 0$ ***si*** $m > l$.

Démonstration. (i) Ce résultat est immédiatement évident d'après la définition (1.41).

(ii) Puisque $P_l(x)$ est un polynôme de degré l, il se réduira à zéro lorsqu'il sera dérivé plus de l fois. Ainsi $\frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = 0$ pour $m \geq l$, et le résultat recherché découle alors de la définition (1.41). □

Théorème 1.12.2. *(Relation d'orthogonalité)*

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x)\, dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{ll'}$$

Démonstration. On montre d'abord que si $l \neq l'$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x)\, dx = 0.$$

Cette démonstration est analogue à celle de la première partie du théorème 1.6.1, nous ne la répéterons donc pas ici.

Il ne reste plus qu'à prouver que

$$\int_{-1}^{1} \{P_l^m(x)\}^2 dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}$$

Supposons d'abord que $m > 0$; alors de la définition (1.41) nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \{P_l^m(x)\}^2 dx &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \left\{\frac{d^m}{dx^m} P_l(x)\right\} \left\{\frac{d^m}{dx^m} P_l(x)\right\} dx \\
&= \left[\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x)\right\} (1-x^2)^m \left\{\frac{d^m}{dx^m} P_l(x)\right\}\right]_{-1}^{-1} \\
&\quad - \int_{-1}^{1} \left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x)\right\} \frac{d}{dx} \left\{(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)\right\} dx \\
&= - \int_{-1}^{1} \left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x)\right\} \frac{d}{dx} \left\{(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)\right\} dx
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Maintenant, à partir de l'équation (1.38) avec m remplacé par $m-1$, nous avons que

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l\left(x\right)-2m\frac{d^m}{dx^m}P_l\left(x\right)+\left\{l\left(l+1\right)-m\left(m-1\right)\right\}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l\left(x\right)=0$$

multipliant par $(1-x^2)^{m-1}$, on obtient

$$(1-x^2)^m\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l\left(x\right)-2mx(1-x^2)^{m-1}\frac{d^m}{dx^m}P_l\left(x\right)+\left(l+m\right)\left(l-m+1\right)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l\left(x\right)=0$$

et cette équation peut être réécrite sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_l\left(x\right)\right\}=-\left(l+m\right)\left(l-m+1\right)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l\left(x\right)$$

La substitution de ce résultat dans l'équation (1.43) donne

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\{P_l^m\left(x\right)\}^2dx &= \int_{-1}^{1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l\left(x\right)\right\}\left(l+m\right)\left(l-m+1\right)\left(1-x^2\right)^{m-1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l\left(x\right)\right\}dx\\ &= \left(l+m\right)\left(l-m+1\right)\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{m-1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l\left(x\right)\right\}^2dx\cdot\\ &= \left(l+m\right)\left(l-m+1\right)\int_{-1}^{1}\{P_l^{m-1}\left(x\right)\}^2dx\cdot\end{aligned}$$

L'application de ce résultat donne à nouveau

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_l\left(x\right)\right\}=\left(l+m\right)\left(l-m+1\right)\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l\left(x\right)\cdot$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\{P_l^m\left(x\right)\}^2dx &= \left(l+m\right)\left(l-m+1\right)\left(l+m-1\right)\left(l-m+2\right)\int_{-1}^{1}\{P_l^{m-2}\left(x\right)\}^2dx\\ &= \left(l+m\right)\left(l+m-1\right)\left(l-m+1\right)\left(l-m+2\right)\int_{-1}^{1}\left\{P_l^{m-2}\left(x\right)\right\}^2dx\ ,\end{aligned}$$

répétons le processus m fois dans tout ce que nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\{P_l^m\left(x\right)\}^2dx &= \left(l+m\right)\left(l+m-1\right)\cdots\left(l+1\right)\left(l-m+1\right)\left(l-m+2\right)\cdots l\cdot\{P_l^0\left(x\right)\}^2dx\\ &= \left(l+m\right)\left(l+m-1\right)\cdots\left(l+1\right)l\left(l-1\right)\cdots\left(l-m+2\right)\left(l-m+1\right)\frac{2}{2l+1}\\ &\qquad\text{(en utilisant le théorème 1.6.1)}\\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\end{aligned}$$

d'où le résultat recherché. □

Supposons maintenant que $m<0$, c'est-à-dire $m=-n$ avec $n>0\cdot$ Alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left\{P_l^m(x)\right\}^2 dx &= \int_{-1}^{1}\{P_l^{-n}(x)\}^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left\{(-1)^n\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right\}^2\left\{P_l^n(x)\right\}^2 dx \\
&\qquad \text{(par équation (1.42))} \\
&= \left\{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\right\}^2\int_{-1}^{1}\{P_l^n(x)\}^2 dx = \left\{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\right\}^2\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\frac{2}{2l+1} \\
&\qquad \text{(par le résultat qui vient d'être prouvé, puisque } n>0) \\
&= \frac{(l-n)!}{(l+n)!}\frac{2}{2l+1} \\
&= \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}
\end{aligned}$$

qui est le résultat recherché.

Théorème 1.12.3. *(Relations de récurrence)*

(i) $P_l^{m+1}(x)-\frac{2mx}{\sqrt{(1-x^2)}}p_l^m(x)+\{l(l+1)-m(m-1)\}P_l^{m-1}(x)=0$

(ii) $(2l+1)\,xP_l^m(x)=(l+m)\,P_{l-1}^m(x)+(l-m+1)\,P_{l+1}^m(x)\cdot$

(iii) $\sqrt{(1-x^2)}P_l^m(x)=\dfrac{1}{2l+1}\{P_{l+1}^{m+1}(x)-P_{l-1}^{m+1}(x)\}\cdot$

(iv) $\sqrt{(1-x^2)}P_l^m(x)=\dfrac{1}{2l+1}\left\{(l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x)-(l-m+1)(l-m+2)\,P_{l+1}^{m-1}x\right\}$

Démonstration. (i) Il s'agit de la relation fondamentale reliant trois fonctions de Legendre associées avec la même valeur de l et valeurs consécutives de m.

Notons $\frac{d^m}{dx^m}P_l^m(x)$ par $P_l^{(m)}(x)$ pour que la définition (1.41) puisse s'écrire sous la forme

$$P_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}P_l^{(m)}(x)\cdot \tag{1.44}$$

Maintenant, dans l'équation (1.38) nous savons que nous pouvons prendre $z=P_l(x)$ et donc $z_1=P_l^m(x)$ afin que nous obtenions

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}P_l^m(x)-2(m+1)\,x\frac{d}{dx}P_l^m(x)+\{l(l+1)-m(m+1)\}P_l^m(x)=0\cdot$$

en utilisant la définition de $P_l^m(x)$, cette équation devient

$$\left(1-x^2\right)P_l^{(m+2)}(x)-2(m+1)\,xP_l^{(m+1)}(x)+\{l(l+1)-m(m+1)\}P_l^m(x)=0$$

ce qui, en multipliant par $\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$, donne

$$\begin{gathered}
\left(1-x^2\right)^{(m/2)+1}P_l^{(m+2)}(x)-2(m+1)\,x\left(1-x^2\right)^{(m/2)}P_l^{(m+1)}(x) \\
+\{l(l+1)-m(m+1)\}\left(1-x^2\right)^{(m/2)}P_l^{(m)}(x)=0
\end{gathered}$$

Par conséquent, en utilisant l'équation (1.44), on a

$$P_l^{(m+2)}(x) - 2(m+1)\,x\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}P_l^{(m+1)}(x) + \{l(l+1) - m(m+1)\}\,P_l^{(m)}(x) = 0$$

qui, quand m est remplacé par $m-1$, devient

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{(1-x^2)}}P_l^{m}(x) + \{l(l+1) - (m-1)\,m\}\,P_l^{m-1}(x) = 0;$$

c'est le résultat recherché.

(ii) Il s'agit de la relation fondamentale entre les fonctions de Legendre associées à avec la même valeur de m et valeurs consécutives de l.

Par la proposition 1.9.2 (iii) nous avons

$$(l+1)\,P_{l+1}(x) - (2l+1)\,xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$

ce qui donne en dérivant m fois (en utilisant le théorème de Leibniz pour le second terme)

$$(l+1)\,P_{l+1}^{(m)}(x) - (2l+1)\left\{xP_l^{(m)}(x) + mP_l^{m-1}(x)\right\} + lP_{l-1}^{(m)}(x) = 0\cdot \tag{1.45}$$

De même par la proposition 1.9.2 (iii) on a

$$P_{l+1}^{(l)}(x) - P_{l-1}^{(l)}(x) = (2l+1)\,P_l(x)$$

qui, lorsqu'il est différencié $m-1$ fois, donne

$$P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{(m)}(x) = (2l+1)\,P_l^{(m-1)}(x)\,. \tag{1.46}$$

L'utilisation de l'équation (1.46) et la substitution de $P_l^{(m-1)}(x)$ dans l'équation (1.45) donne

$$(l+1)\,P_{l+1}^{(m)}(x) - (2l+1)\,xP_l^{(m)}(x) - m\left\{P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{m-1}(x)\right\} + lP_{l-1}^{(m)}(x) = 0\cdot$$

Multipliant cette équation par $\left(1-x^2\right)^{(m/2)}$et en utilisant l'équation (1.44) nous obtenons

$$(l+1)\,P_{l+1}^{m}(x) - (2l+1)\,xP_l^{m}(x) - mP_{l+1}^{m}(x) + mP_{l-1}^{m}(x) + lP_{l-1}^{m}(x) = 0\cdot$$

collecter comme des termes donne

$$(l+m-1)P_{l+1}^{m}(x) - (2l+1)\,xP_l^{m}(x) + (l+m)\,P_{l-1}^{m}(x) = 0$$

qui, une fois réarrangé, est le résultat requis .

(iii) Multipliant l'équation (1.46) par $\left(1-x^2\right)^{m/2}$, nous obtenons

$$\left(1-x^2\right)^{m/2} P_{l+1}^{(m)}(x) \quad \left(1-x^2\right)^{m/2} P_{l-1}^{(m)}(x)\,(2l+1)\left(1-x^2\right)^{m/2} P_l^{(m-1)}(x)$$

qui devient en utilisant l'équation (1.44)

$$P_{l+1}^{m}(x) - P_{l-1}^{m}(x) = (2l+1)\sqrt{(1-x^2)}P_l^{m-1}(x)\cdot \tag{1.47}$$

Remplaçons m par $m+1$ nous trouvons

$$P_{l+1}^{m+1}(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) = (2l+1)\sqrt{(1-x^2)}P_l^{m}(x)$$

qui, une fois divisé par $2l+1$, est le résultat recherché .

(iv) Nous utilisons (ii), remplaçons $xP_l^m(x)$ dans (i) par

$$\frac{1}{2l+1}\left\{(l+m)\,P_{l-1}^{m}(x) + (l-m+1)P_{l+1}^{m}(x)\right\}$$

afin que nous obtenions

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{2m}{\sqrt{(1-x^2)}}\frac{1}{(2l+1)}\left\{(l+m)\,P_{l-1}^{m}(x) + (l+m-1)P_{l+1}^{m}(x)\right\}$$
$$+\left\{l\,(l+1) - m\,(m-1)\right\}P_l^{m-1}(x) = 0\cdot$$

Si nous utilisons maintenant l'équation (1.47) pour $P_l^{m-1}(x)$, on obtient

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\frac{2m}{(2l+1)}\left\{(l+m)\,P_{l-1}^{m}(x) + (l+m-1)P_{l+1}^{m}(x)\right\}$$
$$+\left\{l\,(l+1) - m\,(m-1)\right\}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\frac{1}{(2l+1)}\left\{P_{l+1}^{m}(x) - P_{l-1}^{m}(x)\right\} = 0$$

par manipulation algébrique directe, cela se réduit à

$$\sqrt{(1-x^2)}P_l^{m+1}(x) = \frac{1}{2l+1}(l+m)\left\{(l+m+1)P_{l-1}^{m}(x) - (l-m)\,(l-m+1)P_{l+1}^{m}(x)\right\}$$

qui, lorsque m est remplacé par $m-1$, est juste le résultat recherché. □

Les premiers polynômes associés de Legendre sont :

$$P_0^0(x) = 1$$
$$P_1^0(x) = x$$
$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$$
$$P_2^0(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2}$$
$$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$
$$P_3^0(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)$$
$$P_3^1(x) = -\tfrac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$$
$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$$
$$P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2}$$
$$P_4^0(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$
$$P_4^1(x) = -\tfrac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2}$$
$$P_4^2(x) = \tfrac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)$$
$$P_4^3(x) = -105x(1-x^2)^{3/2}$$
$$P_4^4(x) = 105(1-x^2)^2$$

Les polynômes associés de Legendre $P_l^m(x)$ pour $l = 5$ et $-l \leq m \leq l$ sont représentés dans la figure 1.2.

Une relation utile dans les applications est le théorème d'addition pour les polynômes associés Legendre :

Théorème 1.12.4 (Théorème d'addition)**.**

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi'), \quad (1.48)$$

où l'angle γ, illustré à la figure 1.3, est défini par

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}'|} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi'-\phi). \quad (1.49)$$

1.13 Fonctions de Legendre du second type

Dans la première section de ce chapitre, nous avons obtenu deux solutions séries indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation de Legendre. Nous avons obtenu des solutions

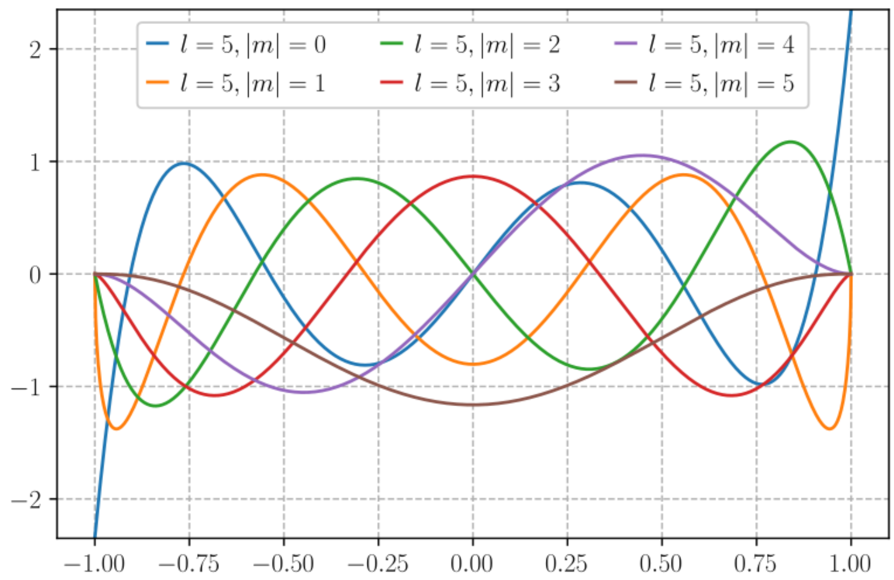

FIGURE 1.2 – Polynômes associés de Legendre $P_l^m(x)$ pour $l = 5$ et $|m| = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

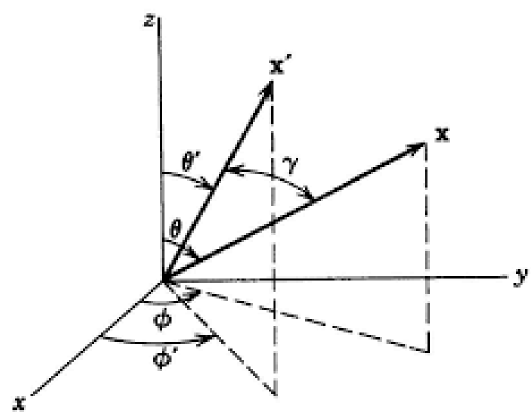

FIGURE 1.3 – L'angle γ entre les vecteurs de position **x** et **x**'.

finies pour $-1 \leq x \leq 1$ (en effet, fini pour toutes les valeurs finies de x) pour des valeurs entières de l, alors pour l pair $y_1(x)$ réduit à un polynôme, tandis que pour l impair $y_2(x)$ réduit à un polynôme. Dans ces deux cas, l'autre série reste infinie ; on peut montrer qu'elle est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. Dans certaines situations physiques, nous souhaitons deux solutions indépendantes valides pour la région $|x| > 1$; l'une d'elles est bien sûr donnée par $P_l(x)$, tandis qu'une seconde solution est donnée par le théorème suivant (notons qu'elle est toujours infiniee pour $x \neq \pm 1$).

Théorème 1.13.1. *La seconde solution indépendante de l'équation de Legendre est don-*

née par

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} P_l(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{r=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} \frac{(2l-4r-1)}{(2r+1)(l-r)} P_{l-2r-1}(x) \qquad (l \geq 1)$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

avec

$$\left[\frac{l-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{l-1}{2} & \textit{si } l \textit{ est impair} \\ \frac{l-2}{2} & \textit{si } l \textit{ est pair} \end{cases}$$

$Q_l(x)$ *s'appelle la fonction Legendre du second type.*

Démonstration. Dans l'équation de Legendre, définissons $y = zP_l(x)$ de sorte que z soit une nouvelle variable dépendante. On a

$$\frac{dy}{dx} = P_l(x) \frac{dz}{dx} + z \frac{dP_l}{dx};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_l(x) \frac{d^2z}{dx^2} + 2 \frac{dz}{dx} \frac{dP_l}{dx} + z \frac{d^2P_l}{dx^2}$$

et donc l'équation devient

$$\left(1-x^2\right) P_l(x) \tfrac{d^2z}{dx^2} + 2\left(1-x^2\right) \tfrac{dz}{dx} \tfrac{dP_l}{dx} + \left(1-x^2\right) z \tfrac{d^2P_l}{dx^2} - 2xP_l(x) \tfrac{dz}{dx} \\ - 2xz \tfrac{dP_l}{dx} + l(l+1) zP_l(x) = 0 \cdot$$

En collectant les termes en z, dz/dx et d^2z/dx^2, nous obtenons

$$z \left\{ \left(1-x^2\right) \tfrac{d^2P_l}{dx^2} - 2x \tfrac{dP_l}{dx} + l(l+1) P_l(x) \right\} + \tfrac{dz}{dx} \left\{ 2\left(1-x^2\right) \tfrac{dP_l}{dx} - 2xP_l(x) \right\} \\ + \left(1-x^2\right) P_l(x) \tfrac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

qui, en utilisant le fait que P_l satisfait l'équation de Legendre, devient

$$\left(1-x^2\right) P_l(x) \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} \left\{ 2\left(1-x^2\right) \frac{dP_l}{dx} - 2xP_l(x) \right\} = 0$$

Donc

$$\frac{d^2z/dx^2}{dz/dx} + 2 \frac{dP_l/dx}{P_l(x)} - \frac{2x}{1-x^2} = 0,$$

et c'est équivalente à

$$\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{dz}{dx} \right) + 2 \frac{d}{dx} \ln P_l(x) + \frac{d}{dx} \ln \left(1-x^2\right) = 0,$$

qui, une fois intégrée, donne

$$\ln \frac{dz}{dx} + \ln \{P_l(x)\}^2 + \ln \left(1-x^2\right) = \text{constante} \cdot$$

donc

$$\frac{dz}{dx}\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2\left(1-x^2\right)=\text{constante}=A,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx}=\frac{A}{\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2\left(1-x^2\right)}$$

et donc

$$z=A\int\frac{dx}{\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2\left(1-x^2\right)}$$

cela signifie que nous avons une solution de l'équation de Legendre donnée par

$$Q_l\left(x\right)=P_l\left(x\right)\int\frac{dx}{\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2\left(1-x^2\right)} \tag{1.50}$$

il faut maintenant montrer qu'elle est de la forme énoncée dans le théorème. On considère d'abord le cas $l=0$:

$$\begin{aligned}
Q_0\left(x\right) &= P_0\left(x\right)\int\frac{dx}{\left\{P_0\left(x\right)\right\}^2\left(1-x^2\right)}\\
&= \int\frac{dx}{1-x^2}\\
&= \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Si maintenant $l\neq 0$, on sait que $P_l\left(x\right)$ est un polynôme de degré l, donc on peut lécrire sous la forme

$$P_l\left(x\right)=k_l\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)\cdots\left(x-\alpha_l\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(1-x^2\right)\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2} &= \frac{1}{\left(1-x\right)\left(1+x\right)k_l^2\left(x-\alpha_1\right)^2\left(x-\alpha_2\right)^2\cdots\left(x-\alpha_l\right)^2}\\
&= \frac{a_0}{1-x}+\frac{b_0}{1+x}+\sum_{r=1}^{l}\left\{\frac{c_r}{\left(x-\alpha_r\right)}+\frac{d_r}{\left(x-\alpha_r\right)^2}\right\}
\end{aligned} \tag{1.51}$$

(décomposition en éléments simples). Nous pouvons facilement déterminer a_0 , b_0 et c_r. La multiplication des deux côtés de l'équation (1.51) par $\left(1-x^2\right)\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2$ donne

$$\begin{aligned}
1 &= a_0\left(1+x\right)\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2+b_0\left(1-x\right)\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2+\left(1+x\right)^2\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2\\
&\quad\left\{\sum_{r=1}^{l}\frac{c_r}{\left(x-\alpha_r\right)}+\frac{d_r}{\left(x-\alpha_r\right)^2}\right\}.
\end{aligned}$$

La substitution de $x=1$ dans cette équation et sachant que $P_l\left(x\right)=1$ donne $a_0=\frac{1}{2}$, et la substitution de $x=-1$ et sachant que $P_l\left(-1\right)=\left(-1\right)^l$ donne $b_0=\frac{1}{2}$.

Nous montrons maintenant que

$$c_i = \left[\frac{d}{dx}\left\{(x-\alpha_i)^2 \frac{1}{(1-x^2)\{P_l(x)\}^2}\right\}\right]_{x=\alpha_i}$$

Pour le prouver, nous notons que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{(x-\alpha_i)^2 f(x)\right\} &= 2(x-\alpha_i) f(x) + (x-\alpha_i)^2 \frac{df}{dx} \\ &= 0 \text{ qand } x=\alpha_i, \text{ à condition que } f(x) \text{ soit finie en } x=\alpha_i.\end{aligned}$$

Les seuls termes du côté droit de l'équation (1.51) qui ne sont pas finis à $x=\alpha_i$ sont $\frac{c_i}{(x-\alpha_i)}$ et $\frac{d_i}{\left\{(x-\alpha_i)^2\right\}}$.
Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d}{dx}(x-\alpha_i)^2 \frac{1}{(1-x^2)\{P_l(x)\}^2}\right]_{x=\alpha_i} \\ =& \left[\frac{d}{dx}(x-\alpha_i)^2\left\{\frac{c_i}{(x-\alpha_i)} + \frac{d_{i/}}{(x-\alpha_i)^2}\right\}\right]_{x=\alpha_i} \\ =& \left[\frac{d}{dx}\{c_i(x-\alpha_i)+d_i\}\right]_{x=\alpha_i} \\ =& [c_i]_{x=\alpha_i} \\ =& c_i.\end{aligned}$$

Ainsi, si nous écrivons $P_l(x) = (x-\alpha_i) L(x)$ alors on a

$$c_i = \left[\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x^2)\{L(x)\}^2}\right]_{x=\alpha_i}$$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{2x}{(1-x^2)\{L(x)\}^2} - \frac{2L'(x)}{(1-x^2)\{L(x)\}^3}\right]_{x=\alpha_i} \qquad (1.52) \\ &= \left[\frac{2xL(x) - 2\left(1-x^2\right)L'(x)}{(1-x^2)\{L(x)\}^3}\right]_{x=\alpha_i} \\ &= \frac{2\{\alpha_i L(\alpha_i) - 2\left(1-\alpha_i^2\right)L'(\alpha_i)\}}{\left(1-\alpha_i^2\right)\{L(\alpha_i)\}^3}.\end{aligned}$$

En substituant $P_l(x) = (x-\alpha_i) L(x_i)$ dans l'équation de Legendre nous obtenons l'équation

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\{(x-\alpha_i)L(x_i)\} - 2x\frac{d}{dx}\{(x-\alpha_i)L(x_i)\} + l(l+1)(x-\alpha_i)L(x_i) = 0$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\left(1-x^2\right)\left\{(x-\alpha_i)L^{''}(x_i) + L^{'}(x_i)\right\} - 2x\left\{(x-\alpha_i)L^{'}(x) + L(x)\right\} + l(l+1)(x-\alpha_i)L(x) = 0,$$

mettons $x = \alpha_i$ dans cette équation on trouve

$$\left(1-\alpha_i^2\right) 2L^{'}\left(\alpha_i\right) - 2\alpha_i L\left(x_i\right) = 0$$

de sorte qu'en remplaçant dans l'équation (1.52) nous obtenons $c_i = 0$.

Ainsi, à partir de l'équation (1.51), nous avons

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2} = \frac{1}{2\left(1-x\right)} + \frac{1}{2\left(1+x\right)} + \sum_{r=1}^{l} \frac{d_r}{\left(x-\alpha_r\right)^2}$$

où les d_r sont des constantes dont les valeurs ne nous intéresseront pas.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(1-x^2\right)\left\{P_l\left(x\right)\right\}^2} dx &= -\frac{1}{2}\ln\left(1-x\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x\right) - \sum_{r=1}^{l}\frac{d_r}{\left(x-\alpha_r\right)} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{r=1}^{l}\frac{d_r}{\left(x-\alpha_r\right)},\end{aligned}$$

donc à partir de l'équation (1.50) on a

$$Q_l\left(x\right) = \frac{1}{2}P_l\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{r=1}^{l} d_r \frac{P_l\left(x\right)}{x-\alpha_r}.$$

mais pour tous les α_r, $\left(x-\alpha_r\right)$ est un facteur de $P_l\left(x\right)$, de sorte que $\frac{P_l(x)}{(x-\alpha_r)}$ est un polynôme en x de degré $l-1$.

Donc $\sum\limits_{r=1}^{l} d_r \frac{P_l(x)}{(x-\alpha_r)}$ est un polynôme de degré $l-1$; désignons-le par $W_{l-1}(x)$. Ensuite nous avons

$$Q_l\left(x\right) = \frac{1}{2}P_l\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - W_{l-1}\left(x\right) \tag{1.53}$$

Pour déterminer $W_{l-1}(x)$ on sait que $Q_l\left(x\right)$ est une solution de l'équation de Legendre de sorte que

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{dQ_l}{dx}\right\} + l\left(l+1\right)Q_l = 0$$

qui, en utilisant l'équation (1.53), donne

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_l\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x}\right\} + l\left(l+1\right).\frac{1}{2}P_l\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} \\ &-\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{dW_{l-1}}{dx}\right\} - l\left(l+1\right)W_{l-1} = 0\end{aligned} \tag{1.54}$$

mais

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_l\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} &= P_l'\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} + P_l\left(x\right)\left\{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right\} \\ &= P_l'\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} + P_l\left(x\right)\frac{2}{1-x^2}\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_l\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x}\right\}\\
=\ &\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)P_l'\left(x\right)\ln\frac{1+x}{1-x}+2P_l\left(x\right)\right\}\\
=\ &\ln\frac{1+x}{1-x}\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)P_l'\left(x\right)\right\}+\left(1-x^2\right)P_l'\left(x\right)\frac{2}{1-x^2}+2P_l'\left(x\right)\cdot
\end{aligned}$$

D'où l'équation (1.54) devient

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\left[\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)P_l'\left(x\right)\right\}+l\left(l+1\right)P_l(x)\right]+2P_l'\left(x\right)-\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{dW_{l-1}}{dx}\right\}-l\left(l+1\right)W_{l-1}=0$$

qui se réduit à

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{dW_{l-1}}{dx}\right\}+l\left(l+1\right)W_{l-1}=2\frac{dP_l}{dx} \qquad (1.55)$$

Maintenant, par la proposition 1.9.1 (i) on a

$$\begin{aligned}
\frac{dP_l}{dx} &= \left(2l-1\right)P_{l-1}\left(x\right)+\left(2l-5\right)P_{l-3}\left(x\right)+\cdots \qquad (1.56)\\
&\quad+\left(2l-4r-1\right)P_{l-2r-1}\left(x\right)+\cdots \qquad (1.57)\\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]}\left(2l-4r-1\right)P_{l-2r-1}\left(x\right)
\end{aligned}$$

Puisque $W_{l-1}\left(x\right)$ est un polynôme de degré $l-1$, donc nous pouvons supposer qu'il possède une expression de la forme

$$\begin{aligned}
W_{l-1}\left(x\right) &= a_0P_{l-1}\left(x\right)+a_1P_{l-3}\left(x\right)+\cdots \qquad (1.58)\\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]}a_rP_{l-2r}\left(x\right),
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]}a_r\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)P_{l-2r-1}'(x)\right\}+l\left(l+1\right)\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]}a_rP_{l-2r-1}(x) \qquad (1.59)\\
=\ &2\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]}\left(2l-4r-1\right)P_{l-2r-1}\left(x\right)\cdot
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation de Legendre nous avons

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)P_{l-2r-1}'(x)\right\}+\left(l-2r-1\right)\left(l-2r\right)P_{l-2r-1}(x)=0,$$

ainsi l'équation (1.59) devient

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]} a_r \left\{-(l-2r-1)(l-2r)+l(l+1)\right\} P_{l-2r-1}(x)$$
$$= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]} 2(2l-4r-1) P_{l-2r-1}(x)$$

le coefficient de chaque polynôme doit être le même des deux côtés, ainsi on obtient

$$\left\{-(l-2r-1)(l-2r)+l(l+1)\right\} a_r = 2(2l-4r-1)\cdot \tag{1.60}$$

Mais

$$\begin{aligned} -(l-2r-1)(l-2r)+l(l+1) &= -(l-2r)^2+(l-2r)+l(l+1) \\ &= -l^2+4rl-4r^2+l-2r+l^2+l \\ &= 4r(l-r)2(r+1) \\ &= 2(l-r)(2r+1)\cdot \end{aligned}$$

L'équation (1.60) se réduit donc à

$$2(l-r)(2r+1)a_r = 2(2l-4r-1)$$

qui donne

$$a_r = \frac{2l-4r-1}{(l-r)(2r+1)} \tag{1.61}$$

et maintenant, en combinant les équations (1.61), (1.58) et (1.53), nous obtenons immédiatement le résultat du théorème.

La solution de l'équation de Legendre $Q_l(x)$ que nous avons obtenue est indépendante de $P_l(x)$ à cause du facteur $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $Q_l(x)$ est infini aux deux $x = \pm 1$, alors que nous savons que $P_l(x)$ est fini pour ces valeurs de x.

Nous pouvons utiliser ce théorème pour écrire explicitement les premières fonctions de Legendre du second type :

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1$$
$$Q_2(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2-1\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x$$
$$Q_3(x) = \frac{1}{4}\left(5x^3-3x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}$$

Nous énonçons maintenant sans preuve plusieurs théorèmes concernant les fonctions de Legendre du second type. □

Théorème 1.13.2.

$$\frac{1}{x-y}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,P_l\,(x)\,Q_l\,(y)$$

si $x>1$ *et* $|y|\leq 1$.

Théorème 1.13.3. *(Formule de Neumann)*

$$Q_l\,(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_l\,(x)}{x-y}dy\cdot$$

Théorème 1.13.4. *Les résultats contenus dans la proposition 1.9.1(ii) et la Proposition 1.9.2 restent vrais lorsque* $P_l(x)$ *est remplacé par* $Q_l(x)$.

Théorème 1.13.5. *Les fonctions de Legendre associées du second type définies par*

$$Q_l^m\,(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_l\,(x)$$

satisfont l'équation associée de Legendre.

Chapitre 2

Harmoniques sphériques

2.1 Harmoniques sphériques

Dans de nombreuses branches de la physique et de l'ingénierie, l'équation suivante

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+l\left(l+1\right)\Psi=0 \tag{2.1}$$

a un grand intérêt, ces solutions sont appelées harmoniques sphériques. Cette équation apparaît généralement dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles telle que celle de Laplace ou de Schrödinger en termes de coordonnées sphériques r, θ, ϕ, de sorte que $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, nous avons souvent besoin d'une solution finie et continue pour ces valeurs de sorte que la valeur de Ψ en $\phi = 2\pi$ soit la même qu'en $\phi = 0$.

Une méthode pour trouver une solution de l'équation (2.1) est la méthode de séparation des variables, nous recherchons une solution de la forme $\Psi\left(\theta,\phi\right) = \Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\phi\right)$. L'insertion de cette expression dans l'équation (2.1) donne

$$\frac{\Phi\left(\phi\right)}{\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta}\right)\right\}+\frac{\Phi\left(\theta\right)}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+l\left(l+1\right)\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\phi\right)$$

où, en divisant partout par $\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\phi\right)$ et en multipliant par $\sin^2\theta$,

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+l\left(l+1\right)\sin^2\theta=0$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l\left(l+1\right)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

Maintenant, le côté gauche de cette équation est une fonction uniquement de la variable θ, tandis que le côté droit est une fonction uniquement de la variable ϕ. Puisque ces deux variables sont indépendantes, il suit que le côté gauche et le côté droit doivent être séparément une constante que nous désignerons par m^2.

Ainsi, nous avons

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l\,(l+1)\sin^2\theta=m^2 \tag{2.2}$$

et

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=m^2. \tag{2.3}$$

L'équation (2.3) s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2\Phi, \tag{2.4}$$

tandis que l'équation (2.2) se simplifie en

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0. \tag{2.5}$$

L'équation (2.4) a la solution générale

$$\Phi=Ae^{im\phi}+Be^{-im\phi}$$

où, si la solution doit être continue, nous avons besoin de $\Phi(2\pi)=\Phi(0)$, de sorte que m doit être un entier (que nous pouvons prendre conventionnellement positif).

Dans l'équation (2.5), nous utilisons le changement de variable $\cos\theta=x$. Alors nous avons $-\sin\theta d\theta=dx$ et donc

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=-\frac{d}{dx}$$

et

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}=\sin^2\theta(-\frac{d}{dx})=-\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}.$$

En conséquence, l'équation (2.5) devient

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{d\Theta}{dx}\right\}+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}\Theta=0$$

ce que nous reconnaissons comme l'équation associée de Legendre ; il n'aura une solution finie à $\theta=0$ et π ($x=+1$ et -1) que si l est un entier. Dans ce cas, la solution finie est donnée par $\Theta=P_l^m(x):P_l^m(\cos\theta)$.

Ainsi la solution générale qui est finie à la fois à $\theta=0$ et π et est continue doit être

$$\Psi\,(\theta,\phi)=\left(Ae^{im\phi}+Be^{-im\phi}\right)P_l^m\,(\cos\theta)$$

que, à cause de l'équation (1.42), nous pouvons écrire sous la forme

$$\Psi=A_1e^{im\phi}P_l^m\,(\cos\theta)+A_2e^{-im\phi}P_l^{-m}\,(\cos\theta)$$

où

$$A_1 = A$$

et

$$A_2 = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} B\cdot$$

Si maintenant nous dénotons

$$y_l^m (\theta, \phi) = e^{im\phi} P_l^m (\cos\theta) \tag{2.6}$$

on peut écrire la solution générale sous la forme

$$\Psi = A_1 y_l^m (\theta, \phi) + A_2 y_l^{-m} (\theta, \phi) \cdot$$

Bien sûr, il s'agit d'une solution de l'équation d'origine (2.1) pour toute valeur de m, et puisque (2.1) est homogène, nous avons la solution

$$\Psi = \sum_{m=0}^{l} \left\{ A_1^{(m)} y_l^m (\theta, \phi) + A_2^{(m)} y_l^{-m} (\theta, \phi) \right\} \cdot$$

Pour de nombreuses raisons, il est plus utile de considérer un multiple de y_l^m (que nous désignerons par Y_l^m) comme la solution de base ; un multiple choisi pour que les solutions soient orthogonales et normalisées au sens où

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \{Y_l^m (\theta, \phi)\}^* Y_{l'}^{m'} (\theta, \phi) \sin\theta d\theta = \delta_{u'} \delta_{mm'} \tag{2.7}$$

(où le * désigne la conjugaison complexe).

Nous pouvons facilement prouver que cela est accompli en prenant

$$\begin{aligned} Y_l^m (\theta, \phi) &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sqrt{\left\{ \frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \right\}} y_l^m (\theta, \phi) \\ &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sqrt{\left\{ \frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \right\}} e^{im\phi} P_l^m (\cos\theta) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Definition 2.1.1. *Les fonctions $Y_l^m (\theta, \phi)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $-l \leq m \leq l$ sont appelées harmoniques sphériques de degré l et d'ordre m.*

2.2 Orthogonalité des harmoniques sphériques

Théorème 2.2.1. *Les harmoniques sphériques vérifient la relations d'orthonormalité suivante*

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \{Y_l^m (\theta, \phi)\}^* Y_{l'}^{m'} (\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta\delta_{mm'}.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \left\{Y_l^m(\theta,\phi)\right\}^* Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) \\
&= \quad (-1)^{m+m\prime} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left\{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m')!}{4(l+m)!(l'+m')}\right\}}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\phi} d\phi \int_0^{\pi} P_l^m(\cos\theta) P_l^{m'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

(en utilisant le fait que $P_l^m(x)$ est réel),

$$= (-1)^{m+m\prime} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left\{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l''-m')!}{4(l+m)!(l''+m')}\right\}} 2\pi\delta_{m'm}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) dx$$

(puisque la première intégrale s'annule à moins que $m' = m$, auquel cas elle est égale à 2π ; et dans la seconde intégrale nous avons fait la substitution $x = \cos\theta$)

$$\begin{aligned}
&= \quad (-1)^{2m} \sqrt{\left\{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l''-m')!}{4(l+m)!(l''+m')}\right\}} \delta_{m'm} \int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) dx \\
&= \quad \sqrt{\left\{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l''-m')!}{4(l+m)!(l''+m')}\right\}} \delta_{m'm} \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{ll'} \\
&= \quad \delta_{ll'}\delta\delta_{mm'}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.1. *Le facteur* $(-1)^m$ *dans la définition* (2.8) *de* $Y_l^m(\theta,\phi)$*, que nous prenons comme l'harmonique sphérique de base n'était pas nécessaire pour la propriété d'orthonormalité ; cependant, son introduction est conventionnelle (bien que le lecteur soit averti que dans le domaine des harmoniques sphériques, différents auteurs peuvent employer des conventions différentes).*

Théorème 2.2.2.

$$\left\{Y_l^m(\theta,\phi)\right\}^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\phi) \cdot$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left\{Y_l^m(\theta,\phi)\right\}^* &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sqrt{\left\{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l-m)!}\right\}} e^{-im\phi} P_l^m(\cos\theta) \\
&= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sqrt{\left\{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l-m)!}\right\}} e^{-im\phi} (-1)^{-m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(\cos\theta) \\
&= (-1)^m (-1)^{-m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sqrt{\left\{\frac{(2l+1)(l+m)!}{2(l-m)!}\right\}} e^{-im\phi} P_l^{-m}(\cos\theta) \\
&= (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

□

On peut utiliser les définitions de $Y_l^m(\theta,\phi)$ et $P_l^m(\cos\theta)$ pour obtenir les expressions explicites suivantes pour les premières harmoniques sphériques :

$$Y_0^0 = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi}\right)},$$

$$Y_1^{\pm 1} = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{8\pi}\right)}\sin\theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\left(\frac{15}{32\pi}\right)}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi},$$

$$Y_2^{\pm 1} = -\sqrt{\left(\frac{15}{8\pi}\right)}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$$

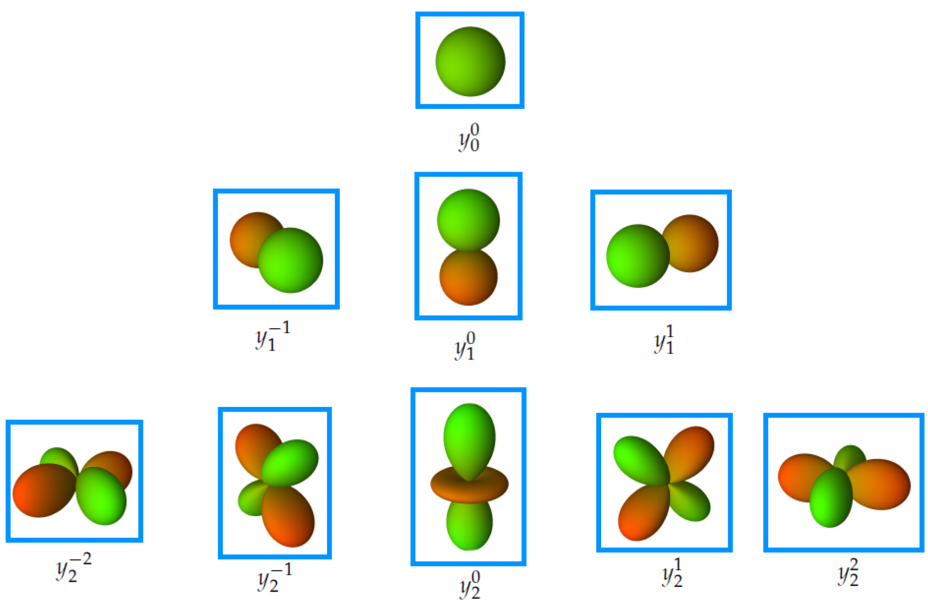

FIGURE 2.1 – Harmoniques sphériques $l = 0, 1, 2$ et $-l \leq m \leq l$.

2.3 Théorème d'addition

Nous avons vu dans le chapitre précédent le théorème d'addition des fonctions de Legendre associées du premier type, Théorème 1.12.4. Cette relation peut être écrite de manière compacte en termes d'harmoniques sphériques comme suit

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \left\{Y_l^m\left(\theta', \phi'\right)\right\}^* Y_l^m\left(\theta, \phi\right), \tag{2.9}$$

où l'angle γ, illustré à la figure 1.3, est défini par

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}||\mathbf{x}'|} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi' - \phi). \tag{2.10}$$

En particulier, si $\theta = \theta'$ et $\phi = \phi'$, $\gamma = 0$ et puisque $P_l(1) = 1$, on a la "règle de sommation"

$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_l^m\left(\theta, \phi\right)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \tag{2.11}$$

valable quelles que soient les valeurs de θ et ϕ.

Le théorème d'addition peut être utiliser pour calculer un important développement du potentiel en **x** due à une charge ponctuelle unitaire en **x'** :

$$\frac{1}{\mathbf{x} - \mathbf{x'}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r^l <}{r^{l+1} >} \{Y_l^m\left(\theta', \phi'\right)\}^* Y_l^m\left(\theta, \phi\right) \tag{2.12}$$

L'équation (2.3) donne le potentiel dans une forme complètement factorisée en coordonnées **x** et **x'**.

2.4 séries d'harmoniques sphérique

Grâce à l'orthogonalité des harmoniques sphériques, on peut formellement associer à une fonction $f(\theta, \phi)$, définie pour $0 \leq \theta \leq \pi$ et 2π-périodique en ϕ, la série

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_l^m Y_l^m\left(\theta, \phi\right)$$

où

$$A_l^m \quad = \quad \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \left\{Y_l^m\left(\theta, \phi\right)\right\}^* f(\theta, \phi) d\phi.$$

L'étude de la convergence de la série de Laplace (2.4) peut être réduite à celle de la série de Legendre considérée à la section 1.8 en faisant un changement de variables dans lequel le point (θ, ϕ) sur la sphère unité est pris comme un nouvel origine. Ce point et celui qui lui est diamétralement opposé jouent un rôle analogue à celui des points $x = \pm 1$ dans la théorie de la série de Legendre, avec des restrictions correspondantes sur le comportement de f. Sans entrer dans les détails, on peut dire que, dans des conditions convenables sur f similaires à celles évoquées à propos de la série de Legendre (et généralement rencontrées en pratique), la série converge vers $f(\theta, \phi)$ aux points de continuité, ou à $\frac{1}{2}[f_1(\theta, \phi) + f_2(\theta, \phi)]$ si le point (θ, ϕ) est tel que, à travers lui, passe une ligne de discontinuité avec une tangente continuellement tournante telle que f_1 et f_2 sont les limites de f en (θ, ϕ) pris des deux côtés de la ligne. Les conditions d'applicabilité de ce résultat sont satisfaites, en particulier, si $f(\theta, \phi)$, exprimée en fonction de l'angle γ défini par (2.10) et illustré à la figure 1.3 et de $\overline{\phi} = \phi - \phi'$, est de variation bornée dans l'intervalle $0 \leq \gamma \leq \pi$ pour chaque valeur de ϕ, et telle que la variation totale dans cet intervalle soit bornée pour toutes les valeurs de $\overline{\phi}$. Dans des conditions qui prolongent celles mentionnées à la section 1.8 pour la série de Legendre (en particulier, continuité et variation bornée), la convergence de la série de Laplace est uniforme.

Chapitre 3

Application : L'équation du potentiel

3.1 L'équation du potentiel

Dans ce chapitre, nous allons étudier un exemple classique : l'équation de Laplace à l'intérieur d'une sphère. L'expression générale de la solution se fera au moyen des harmoniques sphériques (en particulier les polynômes de Legendre). Souvent en physique un champ de force

$$\vec{F}(x,\ y,\ z) = (F_1(x,\ y,\ z),\ F_2(x,\ y,\ z),\ F_3(x,\ y,\ z))$$

est décrit comme le gradient ∇u d'une fonction $u = u(x,\ y,\ z)$, i.e.,

$$\begin{aligned} \vec{F}(x,\ y,\ z) &= (F_1(x,\ y,\ z),\ F_2(x,\ y,\ z),\ F_3(x,\ y,\ z)) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \nabla u, \end{aligned}$$

appelée le potentiel. Dans certains cas, ces champs de force sont tels que u satisfait une équation aux dérivées partielles. Un tel exemple apparait en électrostatique. Si un conducteur électrique de forme sphérique est chargé électriquement, qu'un équilibre est atteint de façon à ce qu'il n'y ait pas de courant électrique sur la sphère et que la distribution du potentiel électrique sur le conducteur est connue, pour déterminer la force électrique sur une particule chargée située à l'intérieur de la sphère, il suffit alors de déterminer le potentiel u.

Soient $S = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, la sphère de rayon $R > 0$ centrée à l'origine et $B = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, la boule fermée de rayon R

centrée à l'origine. Alors pour déterminer u, il nous faut mathématiquement déterminer la fonction $u = u(x,\ y,\ z)$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \ \ pour \ \ (x,\ y,\ z) \in B$$

avec la condition $u(x,\ y,\ z) = \psi(x,\ y,\ z)$ pour $(x,\ y,\ z) \in S$ où $\chi(x,\ y,\ z)$ est une fonction donnée définie sur la sphère S. Cette EDP est l'équation de Laplace.

Nous allons pas considérer ce problème si général. Mais plutôt un cas plus particulier en imposant des conditions à la fonction χ. Nous supposerons que cette fonction est indépendante de la longitude du point sur la sphère et ne dépend que de sa latitude.

Pour étudier ce problème, il est préférable d'utiliser les coordonnées sphériques.

Rappelons ce que sont les coordonnées sphériques. A un point $P = (x,\ y,\ z)$ dans $\mathbb{R}^3$, nous pouvons associer ses coordonnées sphériques $(r,\ ,\theta,\ \phi)$. La coordonnée r est la distance du point P à l'origine $O = (0, 0, 0)$, la coordonnée ϕ est la mesure de l'angle fait par la demi-droite issue de l'origine et passant par la projection orthogonale du point P sur le plan des $x,\ y$ et la demi-droite des x positifs et finalement la coordonnée θ est la mesure de l'angle fait par la demi-droite issue de l'origine et passant par le point P et la demi-droite des z positifs. Ces valeurs satisfont les inégalités : $0 \leq r,\ 0 \leq \phi < 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \pi$.

Les coordonnées sphériques sont données par les équations

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\phi)\sin(\theta) \\ y &= r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. *Dans ces nouvelles coordonnées, l'équation de Laplace devient alors*

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \tag{3.1}$$

Démonstration. En effet, par la règle de chaines et de la définition des coordonnées sphériques ci-dessus, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(\phi)\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(\phi)\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\sin(\phi)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}; \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos^2(\phi)\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cos^2(\phi)\cos^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&\quad -2\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} + 2\frac{\cos^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\
&\quad -2\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \theta} + (\frac{\sin^2(\phi)}{r} + \frac{\cos^2(\phi)\cos^2(\theta)}{r})\frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad +(\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2} + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2\sin^2(\theta)} + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)\cos^2(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)})\frac{\partial u}{\partial \phi} \\
&\quad +(-2\frac{\cos^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} + \frac{\sin^2(\phi)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)})\frac{\partial u}{\partial \theta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin^2(\phi)\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\sin^2(\phi)\cos^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&\quad +2\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} + 2\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\
&\quad +2\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \theta} + (\frac{\cos^2(\phi)}{r} + \frac{\sin^2(\phi)\cos^2(\theta)}{r})\frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad -(\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2} + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2\sin^2(\theta)} + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)\cos^2(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)})\frac{\partial u}{\partial \phi} \\
&\quad +(-2\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} + \frac{\cos^2(\phi)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)})\frac{\partial u}{\partial \theta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin^2(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad +2\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation de Laplace, nous obtenons bien l'équation (3.1). Ainsi le problème que nous aimerions étudier est de déterminer une fonction $u = u(r,\ \phi,\ \theta)$ avec $0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \phi < \pi$ et $0 \leq \theta \leq \pi$ qui satisfait l'équation (3.1) et telle que $u(R,\ \phi,\ \theta) = \psi(\phi,\ \theta)$ est une fonction donnée. □

3.2 Solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques

Si nous utilisons la méthode de séparation de variables, nous commençons par déterminer des solutions de (3.1) de la forme

$$u(r, \theta, \phi) = F(r)\Psi(\theta, \phi). \tag{3.2}$$

En substituant dans (3.1), nous obtenons

$$\frac{\Psi}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+\frac{F}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}=0 \tag{3.3}$$

qui, après avoir divisé par $\frac{F\Psi}{r^2}$, réduit à

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=-\left[\frac{1}{\Psi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Psi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right] \tag{3.4}$$

Le terme de gauche de l'équation (3.4) est une fonction de r uniquement, alors que le terme de droite est une fonction de θ et ϕ uniquement. Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut que chacun des termes soit égal à une constante λ :

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=\lambda$$

et

$$\frac{1}{\Psi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Psi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}=-\lambda.$$

De ce fait, nous obtenons le système des deux équations

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2}+2r\frac{dF}{dr}-\lambda F = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+\lambda\Psi = 0. \tag{3.6}$$

Ainsi, la détermination des facteurs dans le produit (3.2) se réduit à un problème relativement simple : de la résolution de l'équation différentielle ordinaire (3.5), et l'équation aux dérivées partielles (3.6) qui n'est autre que l'équation des harmoniques sphériques deja étudiée dans la section 2.1 du chapitre précédent.

3.3 Le problème de Dirichlet sur la sphère

Il est important d'étudier un cas particulier où nous allons supposer que la fonction χ donnée est indépendante de ϕ et que nous cherchons à déterminer les solutions u qui sont aussi indépendantes de ϕ. Avec ces hypothèses, nous avons $u = u(r,\theta)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$ dans l'équation (3.1).

Nous allons étudier le problème plus restreint qui est de déterminer une solution $u = u(r,\theta)$ avec $0 \le r \le R$ et $0 \le \theta \le \pi$ qui satisfait l'EDP

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 \\ u(r,\theta) \text{ est une fonction bornée,} \\ u(r,\theta)=f(\theta) \end{cases} \tag{3.7}$$

où f est une fonction donnée définie sur l'intervalle $[0,\ \pi]$.

La symétrie azimutale du problème correspond à poser $\Psi(\theta,\phi) = G(\theta)$ dans (3.2) et $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = 0$ dans (3.6). ainsi le système des deux équations (3.5) et (3.6) s'écrit

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2} + 2r\frac{dF}{dr} - \lambda F = 0 \qquad (3.8)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right) + \lambda G = 0. \qquad (3.9)$$

L'équation (3.8) est une équation bien connue, l'équation de Cauchy. Elle est aussi connue sous le nom d'équation d'Euler. Il est possible en faisant un changement de variables de transformer l'équation (3.8) en une équation à coefficient constant. En effet, posons $z = \ln(r)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dr} &= \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dF}{dz},\\ \frac{d^2F}{dr^2} &= \frac{d}{dr}(\frac{1}{r}\frac{dF}{dz}) = -\frac{1}{r^2}\frac{dF}{dz} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\frac{dF}{dz}) = -\frac{1}{r^2}\frac{dF}{dz} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{dz^2}\end{aligned}$$

et, en substituant dans l'équation (3.8), nous obtenons

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{dF}{dz} + 2\frac{dF}{dz} - \lambda F = 0 \ \Rightarrow\ \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{dF}{dz} - \lambda F = 0.$$

Il est alors possible d'analyser les solutions F par rapport au paramètre λ en exprimant celles-ci en fonction de z dans un premier temps et ensuite en fonction de r.

Si nous voulons décrire la solution générale de

$$\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{dF}{dz} - \lambda F = 0 \qquad (3.10)$$

nous devons considérer les racines du polynôme en D suivant : $D^2 + D - \lambda I$. Ces racines sont

$$\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\ et\ \frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}$$

Il y a donc trois cas à considérer : soit les deux racines sont complexes et non réelles, soit la racine est réelle et double, soit les deux racines sont réelles et distinctes.

Dans le premier cas, si ces deux racines sont complexes et non réelles, i.e., $(1+4\lambda) = -p^2 < 0$ avec $p > 0$, alors ces racines sont égales à $\left(\frac{-1\pm p\sqrt{-1}}{2}\right)$ et la solution générale de l'équation (3.10) est de la forme

$$Ae^{-\frac{z}{2}}\cos(\frac{p}{2}z) + Be^{-\frac{z}{2}}\sin(\frac{p}{2}z).$$

Conséquemment la solution générale de l'équation (3.8) est

$$Ar^{-1/2}\cos(\frac{p}{2}\ln(r)) + Br^{-1/2}\sin(\frac{p}{2}\ln(r)),$$

parce que $z = \ln(r)$. Parce que la solution $u(r,\theta)$ doit être bornée, nous obtenons de cette condition que la fonction $F(r)$ doit aussi être bornée. Mais ici la fonction

$$Ar^{-1/2}\cos(\frac{p}{2}\ln(r)) + Br^{-1/2}\sin(\frac{p}{2}\ln(r))$$

n'est pas bornée lorsque $(A,\ B) \neq (0,0)$. Il suffit de considérer le comportement de cette fonction lorsque $r \to 0$. Nous devons donc rejeter ce premier cas.

Dans le second cas, si la racine est réelle et double, i.e., $(1+4\lambda) = 0$, alors la racine est égale à $-1/2$ et la solution générale de l'équation (3.10) est de la forme

$$Ae^{-z/2} + Bze^{-z/2}.$$

Conséquemment la solution générale de l'équation (3.8) est

$$Ar^{-1/2} + Br^{-1/2}\ln(r),$$

parce que $z = \ln(r)$. Comme ci-dessus, nous devons rejeter ce second cas parce que la fonction

$$Ar^{-\frac{1}{2}} + Br^{-\frac{1}{2}}\ln(r)$$

n'est pas bornée lorsque $(A,\ B) \neq (0,0)$. Il suffit de considérer le comportement de cette fonction lorsque $r \to 0$.

Dans le troisième cas, si les deux racines sont des nombres réels distincts, i.e., $(1+4\lambda) = p^2 > 0$ avec $p > 0$, alors ces racines sont égales à $(-1 \pm p)/2$ et la solution générale de l'équation (3.10) est de la forme

$$A\ \exp(\frac{-1+p}{2}z) + B\exp(\frac{-1-p}{2}z).$$

Conséquemment la solution générale de l'équation (3.8) est

$$Ar^{(-1+p)/2} + Br^{(-1-p)/2},$$

parce que $z = \ln(r)$. Comme ci-dessus, nous voulons que la fonction $F(r)$ soit bornée, alors nous devons rejeter les cas où $p < 1$. Parce que si $p < 1$, alors les deux exposants $(-1+p)/2$ et $(-1-p)/2$ sont négatifs et, en considérant le comportement de la solution générale pour $(A,\ B) \neq (0,0)$ lorsque $r \to 0$, nous voyons alors que la fonction $F(r)$ n'est pas bornée. Donc $(1+4\lambda) = p^2 \geq 1$ et $\lambda \geq 0$. Posons

$$l\ = \frac{-1+p}{2}.$$

Alors l est une des racines, l'autre racine est

$$\frac{-1-p}{2} = -(l+1) \text{ parce que } l = \frac{-1+p}{2} \Rightarrow p = 2l+1.$$

Comme $p \geq 1$, nous avons $l \geq 0$ et $-(l+1) \leq -1$. Nous pouvons aussi exprimer λ en fonction de l. En effet, nous obtenons

$$l = \frac{-1+p}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2} \Rightarrow 2l+1 = \sqrt{1+4\lambda} \Rightarrow (2l+1)^2 = 1+4\lambda \Rightarrow \lambda = l(l+1).$$

Si nous revenons à la solution $F(r)$ de l'équation (3.8), nous avons

$$F(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$$

Comme $l \geq 0$ et que nous voulons que $F(r)$ soit bornée, alors $B = 0$. Finalement si nous résumons ce que nous avons obtenu ci-dessus,

$$\lambda = l(l+1) \text{ avec } l \geq 0 \text{ et } F(r) = Ar^l \text{ pour } 0 \leq r \leq R.$$

Il nous faut donc maintenant considérer l'équation différentielle ordinaire (3.9), qui s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2G}{d\theta^2} + \cot(\theta)\frac{dG}{d\theta} + \lambda G = 0. \tag{3.11}$$

Si nous considérons dans (3.11) le changement de variable $w = \cos(\theta)$ avec $-1 \leq w \leq 1$, alors nous pouvons obtenir une équation différentielle équivalente. En effet,

$$\frac{dG}{d\theta} = \frac{dG}{dw}\frac{dw}{d\theta} = -\sin(\theta)\frac{dG}{dw}$$

et

$$\frac{d^2G}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}(-\sin(\theta)\frac{dG}{dw}) = -\cos(\theta)\frac{dG}{dw} - \sin(\theta)\frac{d}{d\theta}(\frac{dG}{dw}) = -\cos(\theta)\frac{dG}{dw} + \sin^2(\theta)\frac{d^2G}{dw^2}.$$

Ainsi après substitution, nous obtenons

$$\sin^2(\theta)\frac{d^2G}{dw^2} - \cos(\theta)\frac{dG}{dw} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(\theta)\frac{dG}{dw} + \lambda G = 0$$

alors

$$(1-\cos^2(\theta))\frac{d^2G}{dw^2} - 2\cos(\theta)\frac{dG}{dw} + \lambda G = 0.$$

Finalement comme $w = \cos(\theta)$ et $\lambda = l(l+1)$, nous obtenons l'équation différentielle de Legendre

$$(1-w^2)\frac{d^2G}{dw^2} - 2w\frac{dG}{dw} + l(l+1)G = 0 \tag{3.12}$$

On a vu dans la section 1.2 que si $l \notin \mathbb{N}$ alors toute solution non-triviale de l'équation (3.12) n'est pas bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Nous allons maintenant considérer l'équation (3.12) avec $l \in \mathbb{N}$. Ainsi, la solution générale de cette équation est

$$G(w) = AP_l(w) + BQ_l(w).$$

où $P_l(z)$ et $Q_l(z)$ sont respectivement le polynôme de Legendre et la fonction de Legendre du deuxième type de degré $l \in \mathbb{N}$. ($P_l(z)$ et $Q_l(z)$ sont deux solutions linéairement indépendantes.)

Mais comme nous voulons que la fonction $u(r, \theta)$ soit bornée, ceci a comme conséquence que la fonction $G(w)$ doit aussi être bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$. Comme $Q_l(w)$ n'est pas bornée sur $[-1, 1]$ et que $P_l(w)$ est bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$, alors $B = 0$. Donc $G = AP_l(w)$ comme fonction de w ou encore $G = AP_l(\cos(\theta))$ comme fonction de θ. Donc pour chaque $l \in \mathbb{N}$, nous obtenons une solution appropriée de l'équation de Laplace à l'intérieur de la sphère donnée par

$$u(r, \theta) = a_l r^l P_l(\cos(\theta))$$

Comme ce problème est linéaire et homogène, nous pouvons utiliser le principe de superposition.

Ainsi

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos(\theta))$$

est une solution du problème

$$(*) \begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0 \\ u(r, \theta) \text{ est une fonction bornée,} \end{cases}$$

Pour qu'une telle solution satisfasse le problème de départ (3.7), à savoir le problème $(*)$ avec en plus la condition à la frontière $u(r, \theta) = f(\theta)$, il faut alors que

$$u(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l P_l(\cos(\theta)) = f(\theta).$$

C'est à dire, il faut pouvoir écrire f en fonction des polynômes de Legendre.

De plus, on sait que les polynômes de Legendre forment un système orthogonal (voir la section 1.6) alors nous avons maintenant ce qu'il faut pour exprimer le potentiel à l'intérieur de la sphère.

Proposition 3.3.1. *La solution formelle du problème*

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=0 \textit{ oú } 0\le r\le R,\ \ 0\le\theta\le\pi \\ u(R,\theta)=f(\theta) \\ u(r,\theta) \textit{ est bornée} \end{cases}$$

est

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos(\theta))$$

où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta \\ &= \frac{(2n+1)}{2R^n}\int_{-1}^{1}\widetilde{f}(w)P_n(w)dw. \end{aligned}$$

Ici $\widetilde{f}(w)$ *désigne la fonction* f *comme fonction de* $w=\cos(\theta)$*, i.e.,* $\widetilde{f}(w)=f(\arccos(w))$.

Démonstration. Nous avons vu que la solution formelle est de la forme

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos(\theta))$$

et qu'en plus

$$u(R,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l P_l(\cos(\theta))=f(\theta).$$

Si nous exprimons cette dernière égalité dans la variable $w=\cos(\theta)$, nous obtenons

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l P_l(w)=\widetilde{f}(w).$$

D'après le Théorème 1.8.1 nous avons

$$\frac{2a_kR^k}{2k+1}=\int_{-1}^{1}\widetilde{f}(w)P_k(w)dw$$

Nous obtenons donc

$$a_k=\frac{2k+1}{2R^k}\int_{-1}^{1} f(w)P_k(w)dw=\frac{2k+1}{2R^k}\int_0^{\pi} f(\theta)P_k(\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta. \tag{3.13}$$

Cette dernière égalité est obtenue en substituant

$$w=\cos(\theta) \text{ et } dw=-\sin(\theta)d\theta.$$

□

Il est aussi possible de considérer le problème du potentiel à l'extérieur de la sphère. En d'autres termes, de déterminer la solution $u = u(r,\theta)$ du problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0 \quad où \quad R \le r,\ 0 \le \theta \le \pi \\ u(R,\theta) = f(\theta) \qquad \text{(condition à la frontière)} \\ u(r,\theta) \to 0 \text{ si } r \to \infty \end{array}\right. \tag{3.14}$$

La méthode de séparation de variables peut aussi être utilisée.

Après une analyse du même type que ce que nous avons fait précédemment, nous obtenons

Proposition 3.3.2. *La solution formelle du problème* (3.14) *est*

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos(\theta))$$

où

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_{-1}^{1} \widetilde{f}(w) P_n(w) dw. \end{aligned}$$

Ici $\widetilde{f}(w)$ désigne la fonction f comme fonction de $w = \cos(\theta)$, i.e., $\widetilde{f}(w) = f(\arccos(w))$.

Remarque 3.3.1. *Si on considère le problème plus général où $f = f(\theta,\phi)$ est une fonction des deux coordonnées angulaires, c'est à dire le problème*

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \ \textit{oú}\ \ 0 \le r \le R,\ \ 0 \le \theta \le \pi \\ u(R,\theta,\phi) = f(\theta,\phi) \\ u(r,\theta) \textit{ est bornée}, \end{array}\right. \tag{3.15}$$

Alors une solution particulière du problème (3.15) *dans le domaine $r < R$ (potentiel à l'intérieur de la sphère) a la forme*

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_l^m r^l Y_l^m(\theta,\phi)$$

où $Y_l^m(\theta,\phi)$, est l'harmonique sphérique de degré l et d'ordre m et

$$A_l^m = \frac{1}{R^n} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \{Y_l^m(\theta,\phi)\}^* f(\theta,\phi) d\phi.$$

Il en est de même si on considère le problème du potentiel à l'extérieur de la sphère $(r > R)$ on obtient une solution de la forme

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} B_l^m \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\theta,\phi)$$

où

$$B_l^m \quad = \quad R^{n+1} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* f(\theta, \phi) d\phi.$$

3.4 Exemples

Exemple 3.4.1. *Déterminer la solution formelle* $u(r, \theta)$ *du problème de Dirichlet* (3.7) *si* $f(\theta)$ *est*

a) $f(\theta) = \cos(3\theta)$ *;*

b) $f(\theta) = \sin(\theta)\sin(3\theta)$ *;*

c) $f(\theta) = \cos(4\theta)$ *;*

d) $f(\theta) = \sin(\theta)\sin(4\theta)$ *;*

e) $f(\theta) = \begin{cases} c, & si\ 0 \le \theta < \pi/2; \\ 0, & si\ \theta = \pi/2 \\ -c, & si\ \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}$ *; où* c *est une constante.*

Nous avons vu que la solution formelle dans ce cas est

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\theta))$$

où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_{-1}^{1} \widetilde{f}(w) P_n(w) dw. \end{aligned}$$

Nous allons déterminer $\widetilde{f}$ en exprimant f comme une fonction de $\cos(\theta)$ et ensuite remplacer $\cos(\theta)$ par w.

a) Si $f(\theta) = \cos(3\theta)$, alors

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta)[2\cos^2(\theta) - 1] - \sin(\theta)[2\sin(\theta)\cos(\theta)] \\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) = 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2[1 - \cos^2(\theta)]\cos(\theta) \\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \end{aligned}$$

et ainsi $\widetilde{f}(w) = 4w^3 - 3w$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\theta)$. Nous pouvons

maintenant calculer les coefficients a_n.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(4w^3-3w)(1)dw = \frac{1}{2}(\frac{4w^4}{4}-\frac{3w^2}{2}]_{-1}^{1} = 0 \\
a_1 &= \frac{3}{2R}\int_{-1}^{1}(4w^3-3w)(w)dw = \frac{3}{2R}(\frac{4w^5}{5}-\frac{3w^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{-3}{5R} \\
a_2 &= \frac{5}{2R^2}\int_{-1}^{1}(4w^3-3w)(\frac{3w^2-1}{2})dw = 0 \\
a_3 &= \frac{7}{2R^3}\int_{-1}^{1}(4w^3-3w)(\frac{5w^3-3w}{2})dw = \frac{7}{2R^3}(\frac{20w^7}{14}-\frac{27w^5}{10}+\frac{9w^3}{6}]_{-1}^{1} = \frac{8}{5R^3} \\
a_n &= 0 \; si \; n \geq 4.
\end{aligned}$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$\begin{aligned}
u(R,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w) \\
&= \widetilde{f}(w) = 4w^3 - 3w \quad si \quad \cos(\theta) = w
\end{aligned}$$

alors, par développement on obtient

$$\begin{aligned}
u(R,\theta) &= \underbrace{-\frac{3}{5R}(Rw) + \frac{8}{5R^3}(R^3)\left(\frac{5w^3-3w}{2}\right)}_{(4w^3-3w)} + \sum_{n=4}^{\infty} a_n R^n P_n(w) \\
&= \widetilde{f}(w) = 4w^3 - 3w
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=4}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 4$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1,1]$. Conséquemment la solution est

$$u(r,\theta) = -\frac{3r}{5R}\cos(\theta) + \frac{8r^3}{5R^3}\frac{(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))}{2}.$$

$b)$ Si $f(\theta) = \sin(\theta)\sin(3\theta)$ alors

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sin(\theta)\sin(3\theta) = \sin(\theta)[\sin(\theta)\cos(2\theta) + \cos(\theta)\sin(2\theta)] \\
&= \sin^2(\theta)[2\cos^2(\theta)-1] + 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = [1-\cos^2(\theta)][2\cos^2(\theta)-1] \\
&\quad +2\cos^2(\theta)[1-\cos^2(\theta)] \\
&= -4\cos^4(\theta) + 5\cos^2(\theta) - 1
\end{aligned}$$

et ainsi $\widetilde{f}(w) = -4w^4+5w^2-1$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\theta)$. Nous pouvons

maintenant calculer les coefficients a_n.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-4w^4+5w^2-1)(1)dw = \frac{1}{2}(-\frac{4w^5}{5}+\frac{5w^3}{3}-w]_{-1}^{1} = -\frac{2}{15}\\
a_1 &= \frac{3}{2R}\int_{-1}^{1}(-4w^4+5w^2-1)(w)dw = 0\\
a_2 &= \frac{5}{2R^2}\int_{-1}^{1}(-4w^4+5w^2-1)(\frac{3w^2-1}{2}) = \frac{5}{4R^2}(-\frac{12w^7}{7}+\frac{19w^5}{5}-\frac{8w^3}{3}+w]_{-1}^{1}\\
&= \frac{22}{21R^2}\\
a_3 &= \frac{7}{2R^3}\int_{-1}^{1}(-4w^4+5w^2-1)(\frac{5w^3-3w}{2})dw = 0\\
a_4 &= \frac{9}{2R^4}\int_{-1}^{1}(-4w^4+5w^2-1)(\frac{35w^4-30w^2+3}{8})dw\\
&= \frac{9}{16R^4}(-\frac{140w^9}{9}+\frac{295w^7}{7}-\frac{197w^5}{5}+\frac{45w^3}{3}-3w]_{-1}^{1} = -\frac{32}{35R^4}\\
a_n &= 0 \quad si \quad n \geq 5.
\end{aligned}$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$\begin{aligned}
u(R,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w)\\
&= \widetilde{f}(w) = -4w^4+5w^2-1 \quad si \quad \cos(\theta) = w\\
&= \underbrace{\frac{-2}{15}+\frac{22}{21R^2}\left(R^2\right)\left(\frac{3w^2-1}{2}\right)-\frac{32}{35R^4}R^4\left(\frac{35w^4-30w^2+3}{8}\right)}_{(-4w^4+5w^2-1)}+\sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w)
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 5$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1,1]$. Conséquemment la solution est

$$u(r,\theta) = -\frac{2}{15}+\frac{22r^2}{21R^2}\frac{(3\cos^2(\theta)-1)}{2}-\frac{32r^4}{35R^4}\frac{(35\cos^4(\theta)-30\cos^2(\theta)+3)}{8}.$$

c) Si $f(\theta) = \cos(4\theta)$, alors

$$f(\theta) = \cos(4\theta) = 2\cos^2(2\theta)-1 = 2[2\cos^2(\theta)-1]^2-1 = 8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1$$

et ainsi $\widetilde{f}(w) = 8w^4-8w^2+1$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\theta)$. Nous pouvons

maintenant calculer les coefficients a_n.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(8w^4-8w^2+1)(1)dw = \frac{1}{2}(\frac{8w^5}{5}-\frac{8w^3}{3}+w]_{-1}^{1} = -\frac{1}{15}\\
a_1 &= \frac{3}{2R}\int_{-1}^{1}(8w^4-8w^2+1)(w)dw = 0\\
a_2 &= \frac{5}{2R^2}\int_{-1}^{1}(8w^4-8w^2+1)(\frac{3w^2-1}{2})dw = -\frac{16}{21R^2}\\
a_3 &= \frac{7}{2R^3}\int_{-1}^{1}(8w^4-8w^2+1)(\frac{5w^3-3w}{2})dw = 0\\
a_4 &= \frac{9}{2R^4}\int_{-1}^{1}(8w^4-8w^2+1)(\frac{35w^4-30w^2+3}{8})dw = \frac{64}{35R^4}\\
a_n &= 0 \;\; si \;\; n \geq 5.
\end{aligned}$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$\begin{aligned}
u(R,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w)\\
&= \widetilde{f}(w) = 8w^4-8w^2+1 \;\; si \;\; \cos(\theta) = w\\
&= \underbrace{-\frac{1}{15}-\frac{16}{21R^2}(R^2)\left(\frac{3w^2-1}{2}\right)+\frac{64}{35R^4}R^4\left(\frac{35w^4-30w^2+3}{8}\right)}_{(8w^4-8w^2+1)}+\sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w)
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 5$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1,1]$. Conséquemment la solution est

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{15}-\frac{16r^2}{21R^2}\frac{(3\cos^2(\theta)-1)}{2}+\frac{64r^4}{35R^4}\frac{(35\cos^4(\theta)-30\cos^2(\theta)+3)}{8}.$$

d) Si $f(\theta) = \sin(\theta)\sin(4\theta)$, alors

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sin(\theta)\sin(4\theta) = 2\sin(\theta)\sin(2\theta)\cos(2\theta) = 2\sin(\theta)[2\sin(\theta)\cos(\theta)][2\cos^2(\theta)-1]\\
&= 4[1-\cos^2(\theta)]\cos(\theta)[2\cos^2(\theta)-1] = -8\cos^5(\theta)+12\cos^3(\theta)-4\cos(\theta)
\end{aligned}$$

et ainsi $\widetilde{f}(w) = -8w^5+12w^3-4w$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\theta)$. Nous pouvons maintenant calculer les coefficients a_n.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-8w^5+12w^3-4w)(1)dw = 0\\
a_1 &= \frac{3}{2R}\int_{-1}^{1}(-8w^5+12w^3-4w)(w)dw = -\frac{8}{35R}\\
a_2 &= \frac{5}{2R^2}\int_{-1}^{1}(-8w^5+12w^3-4w)(\frac{3w^2-1}{2})dw = 0\\
a_3 &= \frac{7}{2R^3}\int_{-1}^{1}(-8w^5+12w^3-4w)(\frac{5w^3-3w}{2})dw = \frac{56}{45R^3}\\
a_4 &= \frac{9}{2R^4}\int_{-1}^{1}(-8w^5+12w^3-4w)(\frac{35w^4-30w^2+3}{8})dw = 0\\
a_5 &= \frac{11}{2R^5}\int_{-1}^{1}(-8w^5+12w^3-4w)(\frac{63w^5-70w^3+15w}{8})dw = -\frac{64}{63R^5}\\
a_n &= 0 \;\; si \;\; n \geq 6.
\end{aligned}
$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$
\begin{aligned}
u(R,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w)\\
&= \tilde{f}(w) = -8w^5+12w^3-4w \;\; si \;\; \cos(\theta) = w\\
&= \underbrace{-\frac{8}{35R}Rw + \frac{56}{45R^3}(R^3)\left(\frac{5w^3-3w}{2}\right) - \frac{64}{63R^5}R^5\left(\frac{63w5-70w3+15w}{8}\right)}_{(-8w^5+12w^3-4w)} + \sum_{n=6}^{\infty} a_n R^n P_n(w)
\end{aligned}
$$

Donc $\sum_{n=6}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 6$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1,1]$. Conséquemment la solution est

$$
u(r,\theta) = -\frac{8r}{35R}\cos(\theta) + \frac{56r^3}{45R^3}\frac{(5\cos^3(\theta)-3\cos(\theta))}{2} - \frac{64r^5}{63R^5}\frac{(63\cos^5(\theta)-70\cos^3(\theta)+15\cos(\theta))}{8}.
$$

e) Si

$$
f(\theta) = \begin{cases} c, & si\ 0 \leq \theta < \pi/2;\\ 0, & si\ \theta = \pi/2\\ -c, & si\ \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad alors \quad \widetilde{f}(w) = \begin{cases} c, & si\ 0 < w \leq 1;\\ 0, & si\ w = 0;\\ -c, & si\ -1 \leq w < 0. \end{cases}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2n+1)}{2R^n}\int_{-1}^{1}\widetilde{f}(w)P_n(w)dw\\
&= \frac{(2n+1)}{2R^n}\left[\int_{-1}^{0}(-c)P_n(w)dw + \int_{0}^{1}(c)P_n(w)dw\right].
\end{aligned}
$$

Notons que si n est pair, alors $P_n(w)$ est une fonction paire et

$$
\int_{-1}^{0} P_n(w)dw = \int_{0}^{1} P_n(w)dw;
$$

alors que si n est impair, alors $P_n(w)$ est une fonction impaire et

$$\int_{-1}^{0} P_n(w)dw = -\int_{0}^{1} P_n(w)dw.$$

De cette remarque, nous avons

$$a_n = \begin{cases} 0, & si\ n\ est\ pair; \\ \dfrac{(2n+1)c}{R^n} \int_0^1 P_n(w)dw, & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$$

Nous allons utiliser la formule de Rodrigues pour évaluer cette dernière intégrale :

$$P_n(w) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dw^n}[(w^2-1)^n].$$

De plus ici $n \geq 1$, parce que n est impair. Nous avons donc

$$\int_0^1 P_n(w)dw = \frac{1}{2^n n!}\int_0^1 \frac{d^n}{dw^n}[(w^2-1)^n]dw = \frac{1}{2^n n!}(\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}[(w^2-1)^n]\Big]_{w=0}^{w=1}$$

Mais nous avons

$$\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}[(w^2-1)^n]\Big|_{w=\pm 1} = 0.$$

Il suffit alors d'évaluer

$$\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}[(w^2-1)^n]\Big|_{w=0} \quad lorsque\ n\ est\ impair.$$

Notons $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Nous pouvons développer $(w^2-1)^n$ en utilisant la formule du binôme. Ainsi

$$(w^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}w^{2(n-k)}.$$

Nous avons $2n-2k < (n\ -1) \Leftrightarrow n < 2k-1 \Leftrightarrow 2p+1 < 2k-1 \Leftrightarrow p+1 < k$. Donc

$$\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}[(w^2-1)^n] = \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k+1)!}w^{n-2k+1}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}[(w^2-1)^n]\Big|_{w=0} &= (-1)^{p+1}\frac{n!(2n-2p-2)!}{(p+1)!p!(n-2p-2+1)!} \\ &= (-1)^{p+1}\frac{n!(2p)!}{(p+1)!(p)!} \end{aligned}$$

où $n = 2p+1$. Conséquemment

$$\int_0^1 P_n(w)dw = \frac{1}{2^n n!}(0-(-1)^{p+1}\frac{n!(2p)!}{(p+1)!(p)!}) = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p+1)!p!}.$$

La solution est

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{(2(2p+1)+1)c(2p)!r^{2p+1}}{2^{2p+1}(p+1)!p!R^{2p+1}}P_{2p+1}(\cos(\theta)) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{(4p+3)c(2p)!r^{2p+1}}{2^{2p+1}(p+1)!p!R^{2p+1}}P_{2p+1}(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Exemple 3.4.2. *Montrer que la valeur de la solution formelle u du problème du potentiel à l'intérieur de la sphère (apparaissant à la proposition (3.3.2)) au centre de la sphère est la valeur moyenne des valeurs de u sur la sphère.*

Nous avons vu que la solution est

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos(\theta))$$

avec

$$a_n = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La valeur de u au centre de la sphère est

$$u(0,0) = a_0 P_0(\cos(0)) = a_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin(\theta) d\theta.$$

Pour calculer la moyenne des valeurs de $u(R, \theta)$, il nous faut une paramétrisation de la sphère, ensuite calculer l'élément de surface et finalement l'intégrale de surface. Une paramétrisation est obtenue par

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\phi, \theta) = R\cos(\phi)\sin(\theta) \\ y(\phi, \theta) = R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z(\phi, \theta) = R\cos(\theta) \end{array} \right\}$$

où $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \pi$.

Pour calculer l'élément de surface, nous devons calculer la norme du produit vectoriel

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right).$$

Ce produit vectoriel est égal à

$$(-R\sin(\phi)\sin(\theta),\ R\cos(\phi)\sin(\theta),\ 0)) \times (R\cos(\phi)\cos(\theta),\ R\sin(\phi)\cos(\theta),\ -R\sin(\theta)) = (-R^2\cos(\phi)\sin^2(\theta),$$

Donc l'élément de surface est

$$\sqrt{(-R^2\cos(\phi)\sin^2(\theta))^2 + (-R^2\sin(\phi)\sin^2(\theta))^2 + (-R^2\sin(\theta)\cos(\theta))^2} d\phi d\theta = R^2 \sin(\theta) d\phi d\theta.$$

La moyenne des valeurs de $u(R, \theta)$ est égale à

$$\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) R^2 \sin(\theta) d\phi d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2 \sin(\theta) d\phi d\theta} = \frac{2\pi R^2 \int_0^{\pi} f(\theta)\sin(\theta) d\theta}{2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta} = \frac{\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(\theta) d\theta}{-(\cos(\theta)]_0^{\pi}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(\theta) d\theta.$$

Mais ceci est exactement $u(0,0)$. Donc nous avons démontré le résultat.

3.5 Le champ d'une charge ponctuelle à l'intérieur d'une sphère conductrice creuse

En application des résultats de ce qui précède, considérons le problème de la détermination du champ électrostatique dû à une charge ponctuelle q à l'intérieur d'une sphère conductrice creuse de rayon R, maintenue à un potentiel nul. Choisissez l'origine 0 au centre de la sphère et laissons l'axe z passer par la position A de la charge, qui est à la distance b de 0 (voir la figure 3.1). Pour éliminer la z-singularité en A, on écrit le potentiel ψ du champ électrostatique comme une somme du potentiel de la source et du potentiel u du champ secondaire dû aux charges induites sur la surface interne de la sphère, c'est à dire,

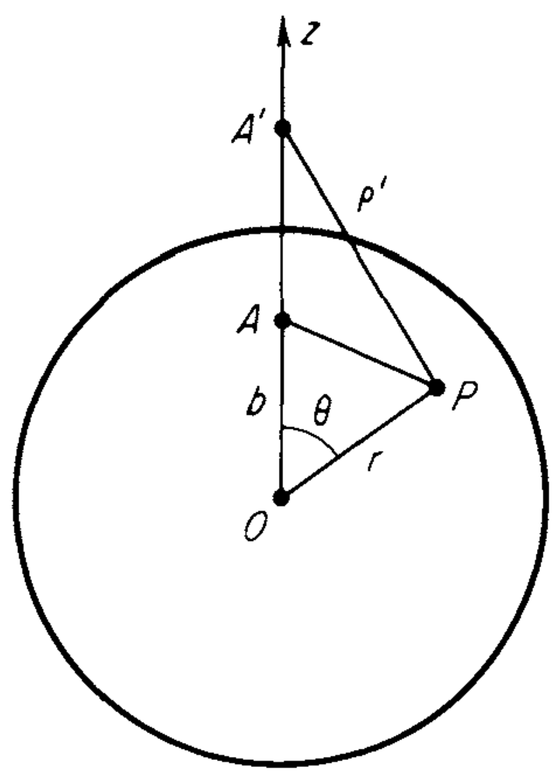

FIGURE 3.1 –

$$\psi = \frac{q}{\rho} + u \tag{3.16}$$

où

$$\rho = AP = \sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\theta}$$

est la distance de A à un point variable P, avec les coordonnées r, θ. Puisque ψ doit disparaître à la surface de la sphère, la détermination de la fonction $u = u(r, \theta)$ se réduit à résoudre le problème de Dirichlet (3.7) avec la condition aux limites

$$u|_{r=R} = -\frac{q}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos\theta}} = f(\theta). \tag{3.17}$$

Le terme de droite de (3.17) peut facilement être développé en une série de polynômes de Legendre, et en fait il n'est pas nécessaire d'évaluer l'intégrale (3.13). Au lieu de cela, nous utilisons la formule de la fonction génératrice (1.9) qui implique immédiatement

$$u|_{r=R} = -\frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{R}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{3.18}$$

De plus, puisque $b < R$ il résulte de l'estimation (1.14) que la série (3.18) est uniformément convergente dans l'intervalle $[0, \pi]$. Par conséquent, selon Sec. 3.3, la fonction u est donnée par la formule

$$u = -\frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{br}{R^2}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{3.19}$$

En utilisant à nouveau (1.9), nous trouvons que la somme de la série (3.19) est

$$u = -\frac{q}{R}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{br}{R^2}\right)\cos\theta + \left(\frac{br}{R^2}\right)^2}} = \frac{q'}{\rho'}. \tag{3.20}$$

où

$$q' = -q\frac{R}{b}, \;\; b' = \frac{R^2}{b}, \;\; \rho' = \sqrt{r^2 + b'^2 - 2b'r\cos\theta}.$$

Ainsi, le potentiel ψ peut être écrit comme une somme

$$\psi = \frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}, \tag{3.21}$$

où le premier terme est le potentiel de la charge q en l'absence de la sphère conductrice, et le second terme est le potentiel de la charge image q' au point image A', qui tient compte de l'influence de la sphère.

Bibliographie

[1] Bell, W W. Special Functions for Scientists and Engineers. Great Britain, Butler and Tanner Ltd, Frome and London, 1968.

[2] Lebedev, N N, and Silverman, R A. Special Functions and Their Applications [by] N.n. Lebedev : Rev. English Ed., Translated and Edited by Richard A. Silverman. New York : Dover Publications, 1972.

[3] Jackson, J D. Classical Electrodynamics. 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, 150, 1963.

[4] Wang, Z X. and Guo D R. Special functions. World Scientific, Teaneck, NJ, 1989. Translated from the Chinese by Guo and X. J. Xia.