République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2020/2021

Etude des équations différentielles stochastiques non linéaire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : ASSPA

par

Herbache **A**bdelkader [1]

Sous la direction de

Dr . N Ait ouali

Soutenue le 14/07/2021 devant le jury composé de

Pr. S.Rahmani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. N.Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. Mlle.F.Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr. S.Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : herbachekada1998@gmail.com

Table des matières

Remerciement

Je remercie vivement mon encadreur **Mme. N.Ait ouali**, docteur à l'université de Saida de m'avoir proposé le sujet de ce mémoire, pour sa patience et ses conseils qui m'ont été d'un grand apport, et encouragement pendant toute la durée de l'élaboration de ce travail. Je tiens également à remercier :

— Le président de jury, d'avoir eu l'aimabilité d'accepter la présidence du jury de soutenance.

— Les membres de jury pour leur participation et leur dévouement.

≺Merci à vous tous≻

Dédicace

J'ai toujours pensé faire où offrir quelque chose à mes parents en signe de reconnaissance pour tout ce qu'ils ont consenti comme efforts, rien que pour me voir réussir, et voilà l'occation est venue.
-A ceux qui m'ont donné la vie, symbole de beauté, de fierté et de sagesse et de patience :
Mes chers parents.
A mes frères et mes soeurs : **"Ahmed, Asma, Kadidja,Abd el majid"** .
-A mon encadreur.
-A tous mes enseignants chacun avec son nom.
-A mes amis.
A mes collègues de la promotion 2021.
- Aux lecteurs de ce mémoire.

Introduction générale

Les équations différentielles stochastiques jouent un rôle important dans les applications mathématiques, principalement,dans la modélisation des phénomènes réels physiques, biologiques,... dont laspect aléatoire est un élément essentiel dirigeant.

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème a posé problème aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la défnition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques relativement un mouvement brownien. A partir de la théorie de l'intégration, on construit la théorie des EDS.

On marque que, la plupart de ces équations qui suivent la forme d'équation stochastique sont non linéaire.

La méthode de linéarisation statistique nous amène à imposer une approche qui nous résout la complixité du aux limitations trouver dans l'étude des équations différentielle stochastique . La méthode si-dessous n'est qu'une transformation de l'équation non linéaire par une équation linéaire.

On commence le premier chapitre par un bref rappel sur les principales notions utilisées tout le long de ce travail, On donnera les propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales qui seront utiles pour cela. Aprés avoir présenter quelques résultats importants relatifs à l'intégrale stochastique, on verra comment il peut ètre mise en oeuvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques.

Dans le second chapitre consiste à une introduction à la théorie des équations différentielles stochastiques. On étudie comment résoudre non linéaires la méthode de linéarité statistique .

Et pour terminer, on recherche des coeffcient d'EDS linaire et on résoudre quelque exemple d'équations différentielle stochastique non linéaire et ces solutions.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Dans ce chapitre, on commence par des rappels fondamentales liées aux Calcul stochastique et nous commençons par les définir.

1.1 Processus stochastiques

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire létat d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps.
Processus stochastique, fonction aléatoire ou signal aléatoire en sont des synonymes.

Définition 1.1.0.1. *Soit* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités .*
On désigne par $\mathbb{T}$ *l'ensemble des temps. On appelle processus stochastiques toute application de* $T \times \Omega$ *dans* E *:*

$$(t, w) \in T \times \Omega \longrightarrow X_t(w) \in E.$$

On note X *ou* $(X_t, t \in T)$ *cette application.*

Définition 1.1.0.2. *Généralement* X_t *représente l'état du processus stochastique au temps* t *:*

1- Si T *est un intervalle* $[a, b]$ *on dit que l'étude se fait en temps* ***continu****.*

2- Si T *est formé d'une suite d'observations* $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ..$ *, on dit que l'étude se fait en temps* ***discret****.*

Remarque 1.1.0.1. *On peut voir un processus comme une fonction qui à $\omega \in \Omega$ associe une fonction de $[0, T]$ dans R,$t \longrightarrow X_t(w)$ appelée* ***trajectoire*** *du processus.*

1.1.1 Filtrations

- Une Filtration est une famille **croissante** de sous tribus de $\mathcal{F}$ c'est-*à*-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.
- Si $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, \mathbb{P})$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, \mathbb{P})$ est appelé **espace de probabilité filtré**.
- La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t. On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour chaque t,X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.
- La filtration est continue *à* droite au sens *où*$\mathcal{F}_t = \cap_{s<t}\mathcal{F}_s$.

1.1.2 Martingale

Définition 1.1.2.1. *[17] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtrée . Une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est un processus stochastique $(\mathcal{M}_t)_{t\in T}$ tels que :*

1. *(M_t) est F_t- mesurable pour tout t.*
2. *$E(|M_t|) < \infty$.*
3. *$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ pour tout $s \leq t$.*

1.2 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une particule immergée dans un fluide
Un Mouvement Brownien est généralement noté B pour **Brown** ou W pour **Wiener**.

1.2.1 Les accroissements du mouvement brownien

Définition 1.2.1.1. *[18] Une famille $B = (B_t, t \geq 0)$ de variables alétoires réelles est un mouvement brownien si :*

1. *la fonction $t \longmapsto B_t(w)$ est continue sur R_+ p.s.*
2. *$\forall\ 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.*
3. *$\forall\ 0 \leq s \leq t$,$B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$.*

Remarque 1.2.1.1. *Un mouvement brownien est dit* ***standard*** *si :*

$$B_0 = 0, \quad \sigma = 1 \quad p.s.$$

Définition 1.2.1.2. *Lorsque $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$ on dit que B est un mouvement brownien naturel.*

1.2.2 Quelques propriétés du mouvement brownien

Proposition 1.2.2.1. *[16] (Processus gaussien) Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle $E(x) = 0$ et sa covariance $Cov(B_t, B_s) = s \wedge t$.*

Proposition 1.2.2.2. *[5]*

Si B est un mouvement brownien .Les processus suivants sont aussi des mouvements browniens.

i) $X_t = -B_t$ *(symétrie).*

ii) *Soit $c > 0$ fixé , $X_t = \dfrac{B_{tc}}{\sqrt{c}}$ pour $t \geq 0$ (Scaling).*

iii) $X_t = tB_{1/t}$ $\forall t > 0$ *et* $X_0 = 0$ *(inversion du temps).*

iv) *Soit $r > 0$ fixé ,$X_t = B_r - B_{r-t}$, $t \in [0, r]$(retournement du temps).*

Théorème 1.2.1. *[4]* ***(Propriétés des trajectoires)****.*

- *Le M.B. n'est à variation finie sur aucun intervalle.*
- *Le M.B. n'est dérivable en aucun point.*
- $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ *et* $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$.

Proposition 1.2.2.3. ***(Propriétés de martingale)***

- *Tout mouvement brownien est une martingale relativement,*
  i.e : pour tout $s \leq t$,$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s$.
- *Tout mouvement brownien est un processus à accroisement indépendants,*
  i.e : Pour tout $s = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$,les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$,$(k = 1, ..., n)$ sont indépendantes et indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_s$.
- *Si B est un mouvement brownien , le processus $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

1.3 Intégrale Stochastique

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$ pour des processus stochastiques Φ.

1.3.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus Φ étagés (élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0 \leq t_0 \leq t_1 .. \leq t_n$ et une suite de variables aléatoire Φ_j telles que : Φ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurable, appartienne à $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et que $\Phi_t = \Phi_j$

pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$,soit :

$$\Phi_s(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j(w) \mathbb{1}_{]t_j, t_{j+1}]}(s)$$

$$\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j (\mathcal{B}(T_{J+1} \wedge t) - \mathcal{B}(T_j \wedge t))$$

On définit alors :

$$\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j (\mathcal{B}(t_{j+1}) - \mathcal{B}(t_j))$$

on a :

▷ $\mathbb{E}\big(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s \big) = 0$

▷ $var\big(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s \big) = \mathbb{E}[(\int_0^\infty \Phi_s^2 ds]$

On obtient : $\displaystyle\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j (\mathcal{B}(t_{j+1} \wedge t) - \mathcal{B}(t_j \wedge t))$ ce qui établit la continuité de l'application $t \longrightarrow \displaystyle\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$.

Si $T_j, 0 \leq T_0 \leq T_1 .. \leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, et si $\Phi_s = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j \mathbb{1}_{]T_J, T_{J+1}]}(s)$ ou Φ_j est une suite de variables aléatoires telles que Φ_j soit $\mathcal{F}_J$-mesurable, appartienne à $\mathcal{L}^2(\Omega)$, on définit alors :

1.3.2 Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagé.On définit les processus càglàd de carrée intégrable (appartenant à $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ comme l'ensemble Γ des processus Φ adaptés continus a gauche limites a droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que :

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \Phi_t^2 dt\Big] \leq \infty$$

Les processus étagés appartiennent à Γ.
On dit que Φ_n converge vers Φ dans $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si : $\| \Phi - \Phi_n \|^2 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

L'application $\Phi \longrightarrow \| \Phi \|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet. On peut définir $\displaystyle\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s$ pour tous les processus Φ de Γ :on approche Φ par des processus étagés, soit $\Phi = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \Phi_n$ ou $\Phi_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{k(n)} \widetilde{\Phi}_j^n \mathbb{1}_{]t_j, t_{j+1}]}$,avec $\Phi_j^n \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s$ est alors la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ des sommes

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \widetilde{\Phi}_j^n (\mathcal{B}_{(t_{j+1})} - \mathcal{B}_{(t_j)})$$

dont l'espérence est 0 et la variance :

$$\mathbb{E}[\sum_j \widetilde{\Phi}_j^2 (t_{j+1} - t_j)]$$

On a alors :

- ▷ $\mathbb{E}(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s) = 0$
  et
- ▷ $\mathbb{E}(\int_0^\infty \Phi_s d\mathcal{B}_s)^2 = \mathbb{E}(\int_0^\infty \Phi_s^2 d\mathcal{B}_s)$.

On note $\displaystyle\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \Phi_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s) d\mathcal{B}_s$. Si Φ est étagé on a :

$$\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s = \sum_i \Phi_i(\mathcal{B}_{t_{i+1}\wedge t} - \mathcal{B}_{t\wedge t})$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $\mathbb{1}_{]0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit :

$$\int_0^{\tau\wedge t} \Phi_s d\mathcal{B}_s = \int_0^t \Phi_s \mathbb{1}_{]0,\tau]}(s) d\mathcal{B}_s$$

1.3.3 Propriétés

On note Λ l'ensemble $\mathcal{L}^2_{Loc}(\Omega\times\mathcal{R}^+)$ des processus Φ adaptés càglàd vérifiant : $\mathbb{E}(\int_0^t \Phi^2_s(w)ds) < \infty, \forall t$

1.3.3.1 Linéarité

Soit a et b des constantes et$(\Phi^i, i = 1, 2)$ deux processus de Λ.
On a :

$$\int_0^t \left(a\Phi^1_s + b\Phi^2_s\right) d\mathcal{B}_s = a\int_0^t \Phi^1_s d\mathcal{B}_s + b\int_0^t \Phi^2_s d\mathcal{B}_s$$

1.3.3.2 Propriétés de martingale

Proposition 1.3.3.1. *soit :*

$$\mathbf{M}_t = \int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$$

où $\Phi \in \Lambda$

1. *Le processus* $\mathbf{M}$ *est une martingale à trajectoires continues.*
2. *Soit* $\mathbf{N}_t = \left(\lim_{n\to\infty}\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s\right)^2 - \int_0^2 \Phi^2_s ds$ *le processus* $\left(\mathbf{N}_t, t \geq 0\right)$ *est une martingale.*

Définition 1.3.3.1. *Toutes ces propriétés se démontrent pour des processus étagés, puis pour les processus de* Λ *par passage à la limite. La propriété de martingale s'écrit :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u / \mathcal{F}_s\right) = \int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u, \forall t \geq s$$

où

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u/\mathcal{F}_s\bigg) = 0$$

et implique en particulier que :

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^t \Phi_u d\mathcal{B}_u\bigg) = 0$$

La propriété 2) équivaut à

$$\mathbb{E}\bigg[(\int_s^t \Phi_u d\mathcal{B})^2/\mathcal{F}_s\bigg] = \mathbb{E}\bigg[\int_0^t \Phi_u^2 du/\mathcal{F}_s\bigg]$$

Si l'on veut définir $\mathbf{M}_t$ *pour* $t \leq T$*, il suffit de demander que* $\Phi \in \mathcal{L}^2(\Omega \times [0,T])$*, c'est à dire* $\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \Phi_t^2 dt\bigg) < \infty$ *et que* Φ *soit adapté. Sous cette condition* $\mathbf{M}_t, t \leq T$ *est encore une martingale.*

Corrollaire 1.3.1. *L'espérance de* $\mathbf{M}_t$ *est nulle et sa variance est égale à* $\int_0^t \mathbb{E}\{\Phi_s\}^2 ds$

Soit $\Psi \in \Lambda$. $\mathbb{E}(\int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s \int_0^t \Psi_s d\mathcal{B}_s) = \mathbb{E}(\int_0^s \Phi_s \Psi_s d\mathcal{B}_s)$ *Si*

$$\mathbf{M}_t(\Phi) = \int_0^t \Phi_s d\mathcal{B}_s$$

et

$$\mathbf{M}_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s d\mathcal{B}_s$$

Le processus $\mathbf{M}_t(\Phi)\mathbf{M}(\varphi) - \int_0^t \Phi_s \varphi_s ds$ *est une martingale.*

Proposition 1.3.3.2. *Pour tout* t *on a :* $\int_0^t \mathcal{B}_s d\mathcal{B}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{B}_t^2 - t)$

Définition 1.3.3.2.

$$\int_0^t \mathcal{B}_s d\mathcal{B}_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{t_i}(\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})$$

L'égalité :

$$2\sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{t_i}(\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i}) = \sum_{i=0}^n (\mathcal{B}_{t_{i+1}}^2 - \mathcal{B}_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^n (\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})^2$$

montre que :

$$\int_0^t \mathcal{B}_s d\mathcal{B}_s = \frac{1}{2}[\mathcal{B}_t^2 - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(\mathcal{B}_{t_{i+1}} - \mathcal{B}_{t_i})^2] = \frac{1}{2}[\mathcal{B}_t^2 - t]$$

1.4 Calcul d'Itô

La formule d'itô (ou formule de changement de variables) est un outil particuliérement important dans l'étude des processus stochastiques. On a un M.B. d-dimensionnel.

1.4.1 Processus d'Itô

Définition 1.4.1.1. *[3](Processus d'Itô ou semi-martingales).*

Un processus X, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est appelé ***semi-martingale*** *s'il se décompose de la maniére suivante :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

.

$\forall t \leq T$ p.s, avec X_0 et K à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,H à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$,$H \in \mathbb{H}^2$ et

$$\mathbb{E}(\int_0^t |K_s| ds) < \infty$$

.

Cette décomposition, si elle existe, est unique.

1.4.2 Propriétés d'Itô

Théorème 1.4.1. *[13] (Isométrie d'Itô).*
Pour tout $f \in \mathcal{V}(a,b)$ nous avons la relation suivante :

$$E[(\int_a^b X_t dB_t)^2] = E(\int_a^b X_t^2 dt)$$

.

1.4.3 Formule d'Itô

Théorème 1.4.2. *[11] Premiére formule.*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds$$

Théorème 1.4.3. *Deuxième formule.*
Soit $(t,x) \to f(t,x)$ une fonction réelle deux fois diférentiable en x et une fois diférentiable en t et X un processus d'Itô :

$$f(t,x) = f(0,X_0) + \int_0^t f'_x(s,X_s)dX_s + \int_0^t f'_x(s,X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)d\langle X,X\rangle_s.$$

Proposition 1.4.3.1. *(Formule d'intégration par parties).*
Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t$$

.

avec la convention que :

$$\langle X,Y\rangle_t = \int_0^t H_sH'_s ds$$

.

Démonstration :
On a, d'après la formule d'Itô :
$(X_t+Y_t)^2 = (X_0+Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s+Y_s)d(X_s+Y_s) + \int_0^t (H_s+H'_s)^2 ds.$
$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds.$
$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s'^2 ds$.
D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_sH'_s ds.$$

1.4.4 La formule d'Itô multidimensionnelle :

La formule d'Itô multidimensionnelle se généralise aux cas où la fonction f dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements browniens.

Définition 1.4.4.1. *On appelle $\mathcal{F}$-mouvement brownien d-dimensionnel un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ adapté à $\mathcal{F}_t$, avec $\mathcal{B}_t = (\mathcal{B}_t^1, \dots, \mathcal{B}_t^d)$,où les $(\mathcal{B}_t^i)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$-mouvements browniens standards indépendants.*
On généralise la notion de processus d'Itô.

Définition 1.4.4.2. *On dit que $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus d'Itô si :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^i d\mathcal{B}_s^i.$$

Où

- K_t *et les* (H_t^i) *sont adaptés à* $(\mathcal{F}_t)$.
- $\int_0^T |K_s| ds$ $\mathbb{P}$ *p.s.*
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ *p.s.*

Proposition 1.4.4.1. *[14] Soient $(X_t^1, \dots, X_t^n)$ n processus d'Itô :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,j} d\mathcal{B}_s^j.$$

Alors si f est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t, x) :

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \dots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \dots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) d\langle X^i, X^j\rangle_s. \end{aligned}$$

où

- $dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p} H_s^{i,j} d\mathcal{B}_s^j$,
- $d\langle X^i, X^j\rangle_s = \sum_{m=1}^{p} H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds$.

Chapitre 2

Équation différentielle stochastique non linéaire

2.1 Équation différentielle stochastique linéaire

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Considérons une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t)). \tag{2.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ *qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée* $\dot{x}$*et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en* (2.1) *(seule la dérivée 1ère est impliquée) avec* $b(t, x) = b + cx$ *indépendant de* t *et affine par rapport à* y*. Symboliquement, l'équation* (2.1) *se récrit :*

$$dx(t) = b(t, x(t))dt. \tag{2.2}$$

Une telle équation est utilisée pour d'écrire l'évolution d'un sysème physique. Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit, qui sera de la forme $\sigma d\mathcal{B}_t$*, où* $\mathcal{B}$ *désigne un mouvement brownien et* s *est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme :*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathcal{B}_t. \tag{2.3}$$

2.1.1 Définitions

En fait, l'écriture (2.3) est symbolique car $d\mathcal{B}_t$ n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable !). Il faudrait écrire (2.3) sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)d\mathcal{B}_s. \tag{2.4}$$

Définition 2.1.1.1. *(**EDS**) On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme :*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathcal{B}_t \qquad (E(b, \sigma))$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)d\mathcal{B}_s^j, \qquad 1 \leq i \leq d. \tag{2.5}$$

Où, pour m,d des entiers positifs,

- *$b(t, x) = (b_i(t, x))_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **dérive** ou **drift** de l'EDS,*
- *$\sigma(t, x) = (\sigma_{i,j}(t, x))_{1 \leq i \leq d}$ une matrice $d \times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **coefficient de diffusion** de l'EDS, et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, .., \mathcal{B}^m)$ est un mouvement brownien standard en dimension m. La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Plus précisément, on a :*

Définition 2.1.1.2. *(Solution d'une EDS) On appelle solution de l'EDS $E(\sigma, s)$ la donnée de :*

- *un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles.*
- *un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-mouvement brownien $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, .., \mathcal{B}^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité.*
- *un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-adapté continu $X = (X^1, .., X^d)$ a valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (2.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$: (2.5).*

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(b, \sigma)$.

On remarquera que lorsqu'on parle de solution de $E(b, \sigma)$, on ne fixe pas a priori l'espace de probabilité filtré ni le mouvement brownien $\mathcal{B}$. Il existe plusieurs notions d4existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques

2.1.2 Existence et Unicité

Définition 2.1.2.1. *[9] (Existence, unicité des EDS)* Pour l'équation $E_x(b,\sigma)$, on dit qu'il y a :

— ***Existence faible :*** *si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(b,\sigma)$.*

— ***Existence forte :*** *si X est adapté par rapport à la filtration canonique de $\mathcal{B}$.*

— ***Unicité faibles :*** *si de plus toutes les solutions de $E_x(b,\sigma)$ ont même loi.*

— ***Unicité trajectorielle :*** *si, l'espace de probabilité filtré,$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et le mouvement brownien $\mathcal{B}$ étant fixés, deux solutions X et $X\prime$ de $E_x(b,\sigma)$ telles que $X_0 = X_0'$ ps sont indistinguables .*

Il y a unicité forte pour $E_x(b,\sigma)$ si pour tout mouvement brownien $\mathcal{B}$, deux solutions fortes associées à $\mathcal{B}$ sont indistinguables.

Théorème 2.1.1. *[6](Yamada-Watanabe).*
Existence faible et unicité trajectorielle impliquent unicité faible. De plus, dans ce cas, pour tout espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et tout$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -mouvement brownien $\mathcal{B}$, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution forte de $E_x(b,\sigma)$.

Théorème 2.1.2. *[12] Si σ et b sont des fonctions continues, telles qu'il existe $K > 0$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$.*

1) ***Condition de Lipschitz :***

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|.$$

2) ***Condition de croissance :***

$$|\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \leq K(1+|x|).$$

3) ***La condition initiale x est de carré intégrable i.e :***

$$E(|X_0|^2) < \infty.$$

Alors $E_x(b,\sigma)$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0.T]$.De plus cette solution X_s vérifie :

$$E[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_s \mid^2] < +\infty.$$

2.2 Équation différentielle stochastique non linéaire

On considère $Y = (Y_t)_{t\in[0.T]}$ un processus a valeur dans $\mathbb{R}$ alors considéré un system d'équation non linéaire :

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dB_t. \tag{2.6}$$

où $b(t, Y_t)$ et $\sigma(t, Y_t)$ coefficients non linéaire.

2.2.1 Existence et Unicité

Théorème 2.2.1. *[1] Il existe $C > 0$,$\varepsilon > 0$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$.*

*1) **Condition de Lipschitz :***

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C\sqrt{|x - y|}.$$

*2) **Condition de décroissance linéaire :***

$$|\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + \sqrt{|x|}).$$

3) l'équation différentielle stochastique (2.6) admet une solution unique Y_t à valeur dans $\mathbb{R}$ continue presque surement et satisfait la condition initiale $Y_0 = y_0$ l'unicité est dans le sens que si X_t et Y_t sont deux solution continues presque surement telle que $Y_t = X_t$ alors :

$$P[\sup_{0\leq t\leq T} | X_t - Y_t |> 0] = 0.$$

Proposition 2.2.1.1. *[2](Stroock, Varadhan).Soit l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$dY_t^i = b^i(t, Y_t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma^{i,j}(t, Y_t)dB_t^j. \tag{2.7}$$

Tel que $Y_0 = y_0$ et $i = (0, 1, ..., n)$.le coefficient b est mesurable et borné,le coefficient σ est continu et borné et pour tout $t \geq 0$,$x \in R^n$ alors il existe une constante $\varepsilon(t, x) > 0$ tel que :

$$\|\sigma(t, x)\lambda\| \geq \varepsilon(t, x)\|\lambda\|. \tag{2.8}$$

$\lambda \in R^n$,et qu'il existe une solution de l'équation qui est unique en loi , c'est à dire solution faible.

Remarque 2.2.1.1. *[15]*

1- Pour la condition de Lipschitz soit satisfaite, il suffit que $b(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ admettent des dérivées partielles continues et bornées pour tout $t \in [0.T]$.

2- on peut remplace la condition de Lipschitz global par une condition local :
$\forall N > 0.\exists K_N > 0$ *tel que* $\forall t \in [0.T], \forall (x,y) \in R^d, |x| < N, |y| < N$:

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K_N|x-y|.$$

3- Dans le cas d'un équation différentielle stochastique autonome c'est a dire $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ *et* $b(t,x) = b(x)$ *la condition de restriction sur la croissance est conséquence de la condition Lipschitz.*

4- Dans de nombreux cas le processus solution d'une équation différentielle stochastique non linéaire est un processus de diffusion. Il est donc complétement défini par sa famille de probabilités de transition qui peut être construite explicitement en résolvant une équation linéaire dite de Fokker-Planck (EFP) associée à l'équation différentielle stochastique non linéaire.

2.3 La résolution des EDS non linéaires

2.3.1 la linéarisation statistique EDS non linéaires

Théorème 2.3.1. *[8] **(Théorème d'inverse local)**. Soit* Ω *est un ouverte de* E *et*

$$\begin{aligned} f \quad &: \Omega \longmapsto E. \\ &\omega \longmapsto x = f(\omega), \end{aligned}$$

une fonction de classe (C^1*continue et différentiable).*
Soit $\omega_0 \in \Omega, x_0 = f(\omega_0)$*.Supposons que* $df(x_0)$*(c-à-d* $df(\omega_0) \neq 0$*)alors, il existe un voisinage* $U(\omega_0)$ *de* x_0 *et un voisinage* $V(x_0)$ *de* x_0 *tel que la restriction de* f *à*$U(\omega_0)$ *soit une bijection de* $U(\omega_0)$ *sur* $V(x_0)$.
En autre,la réciproque :

$$f^{-1} : V(x_0) \longmapsto U(\omega_0)$$

f^{-1} *est de classe* C^1*(si* f *est de classe* $C^k, k \in N^*$*,alors* f^{-1} *est également de classe* C^k*).*

Proposition 2.3.1.1. *[7] Soit l'équation EDS non linéaire suivante :*

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dB_t. \tag{2.9}$$

On peut écrire l'équation (2.9) sous forme d'une EDS linéaire d'après la méthode de linéarisation et on trouve la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = (b_1(t)X_t + b_2(t))dt + (\sigma_1(t)X_t + \sigma_2(t))dB_t. \\ \\ X_t = u(t, Y_t). \end{cases} \tag{2.10}$$

où encore

$$\begin{cases} b(t,Y_t) = b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t). \\ \sigma(t,Y_t) = \sigma_1(t)u(t,Y_t) + \sigma_2(t). \end{cases}$$

Si $\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_t) \neq 0$ *d'après le théorème d'inverse* (2.3.1) *il existe un inverse locale* $y = v(t,x)$*et* $x = u(t,y)$ *et la solution* Y_t *est de la forme* $Y_t = v(t,u(t,X_t))$ *.*

On doit définir les condition de $u(t,Y_t)$:

L'application de la formule d'Itô de $u(t,Y_t)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} dX_t &= du(t,Y_t). \\ &= \tfrac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)dt + \tfrac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)dy + \tfrac{1}{2}[\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,Y_t)dtdt + 2\tfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t)dtdy + \tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)dydy]. \end{aligned}$$

Si Y_t est un processus d'Itô a valeur dans $\mathbb{R}$, on peut définir une règle de calcul formelle pour $d < Y, Y >_t$ par :

$$\begin{gathered} d < Y, Y >_t = dY_t dY_t. \\ dtdt = 0. \\ dB_t dB_t = dt. \end{gathered}$$

Alors :

$$\begin{aligned} d < Y, Y >_t &= dY_t dY_t. \\ &= (b(t,Y_t)dt + \sigma(t,Y_t)dB_t)(b(t,Y_t)dt + \sigma(t,Y_t)dB_t). \\ &= \sigma^2(t,Y_t)dt. \end{aligned}$$

En remplacent dY_t par son expression (2.9) on trouve :

$$dX_t = [\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)]dt + \sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)dB_t.$$

Alors $X_t = u(t,Y_t)$ est la solution approximative de l'équation (2.9) alors on identifie l'équation (2.10) à l'équation dX_t on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = b_1(t)X_t + b_2(t). \\ \\ \sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = \sigma_1(t)X_t + \sigma_2(t). \end{cases} \tag{2.11}$$

où

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t). \\ \\ \sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = \sigma_1(t)u(t,Y_t) + \sigma_2(t). \end{cases} \tag{2.12}$$

2.3.2 Les conditions de réductibilité l'EDS non linéaire a un EDS linéaire

Soient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t). \quad (*) \\ \\ \sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = \sigma_1(t)u(t,Y_t) + \sigma_2(t). \quad (**) \end{cases} \tag{2.13}$$

On dérive équation $(*)$ par rapport à y et on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}(t,Y_t) &= \frac{\partial}{\partial y}[b_1(t)u(t,Y_t) + b_2(t) - b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)]. \\ &= b_1\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - b(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t). \\ &- \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) - \sigma(t,Y_t)\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}(t,Y_t) &= (b_1(t) - \frac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t))\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - (b(t,Y_t) + \sigma(t,Y_t)\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) \\ &- \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

ou dérive aussi d'équation$(**)$ par rapport à t et on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_1(t)u(t,Y_t) + \sigma_2(t))$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \sigma(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t) = \sigma_1^{'}(t)u(t,Y_t) + \sigma_2^{'}(t) + \sigma_1(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t).$$

alors :

$$\sigma(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(t,Y_t) = \sigma_1^{'}(t)u(t,Y_t) + \sigma_2^{'}(t) + \sigma_1(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) - \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t). \tag{2.15}$$

On dérive aussi l'équation $(**)$ par rapport à y et on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)) = \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_1(t)u(t,Y_t) + \sigma_2(t)).$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \sigma(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = \sigma_1(t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t).$$

donc :

$$\sigma(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = \sigma_1(t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) - \frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t). \tag{2.16}$$

On a d'après l'équation $(**)$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)=\frac{1}{\sigma(t,Y_t)}(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t)). \tag{2.17}$$

On introduit l'équation $(**)$ dans l'équation (2.15) on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)=\frac{1}{\sigma(t,Y_t)}[(\sigma_1(t)-\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)].$$

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) &= \tfrac{1}{\sigma(t,Y_t)}[(\sigma_1(t)-\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))\tfrac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)]\\ &\tfrac{1}{\sigma(t,Y_t)}[(\sigma_1(t)-\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))\tfrac{1}{\sigma(t,Y_t)}(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t))].\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)=\frac{1}{\sigma^2(t,Y_t)}(\sigma_1(t)-\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t)). \tag{2.18}$$

d'après l'équation $(*)$on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)=-b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)b_1(t)u(t,Y_t)b_2(t). \tag{2.19}$$

on introduit les équations (2.16) et (2.17) dans l'équation précédente équation et on trouve :

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) &= -b(t,Y_t)[\tfrac{1}{\sigma(t,Y_t)}(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t))]-\tfrac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)[\tfrac{1}{\sigma^2(t,Y_t)}(\sigma_1(t)\\ &-\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t))]+b_1(t)u(t,Y_t)b_2(t).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)=(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t))[-\frac{b(t,Y_t)}{\sigma(t,Y_t)}-\frac{1}{2}(\sigma_1(t)-\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))]+b_1(t)u(t,Y_t)+b_2(t). \tag{2.21}$$

on introduit les équations (2.15),(2.17),(2.18)dans l'équation (2.14) :

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\tfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,Y_t) &= \tfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}(t,Y_t)+(\tfrac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)-b_1(t))\tfrac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)\\ &+(b(t,Y_t)+\sigma(t,Y_t)\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t).\\ &=\tfrac{1}{\sigma(t,Y_t)}[\sigma_1'(t)u(t,Y_t)+\sigma_2'(t)+\sigma_1(t)\tfrac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)\\ &-\tfrac{\partial \sigma}{\partial t}(t,Y_t)\tfrac{1}{\sigma(t,Y_t)}(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t))]\\ &+(\tfrac{\partial b}{\partial y}(t,Y_t)-b_1(t))\tfrac{1}{\sigma(t,Y_t)}(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t))+(b(t,Y_t)\\ &+\sigma(t,Y_t)\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))\tfrac{1}{\sigma^2(t,Y_t)}(\sigma_1(t)-\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}(t,Y_t))(\sigma_1(t)u(t,Y_t)+\sigma_2(t)).\end{aligned}$$

En partant de l'équation (2.21),on a donc trouvé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t, Y_t) &= -\frac{2}{\sigma^2(t,Y_t)}[\frac{1}{\sigma(t,Y_t)}(\sigma_1(t)u(t, Y_t) + \sigma_2(t)) + \frac{\sigma_1(t)}{\sigma(t,Y_t)}\frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) \\ &+(-\frac{1}{\sigma(t,Y_t)}\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, Y_t) - b_1(t) + \frac{\partial b}{\partial y}(t, Y_t))\frac{1}{\sigma(t,Y_t)}(\sigma_1(t)u(t, Y_t) + \sigma_2(t)) \\ &+(b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y}(t, Y_t))(\frac{1}{\sigma^2(t,Y_t)}(\sigma_1(t) - \frac{\partial \sigma}{\partial y}(t, Y_t))(\sigma_1(t)u(t, Y_t) + \sigma_2(t))] \end{aligned}$$

2.3.3 les caractéristiques de $X_t = u(t, Y_t)$

Les caractéristiques de $X_t = u(t, Y_t)$:

$$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

1- u est de classe $C^3(\mathbb{R})$.

2- u continue dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

3- u vérifie les condition de Cauchy Schwartz $u \in C^2(\mathbb{R})$.

2.3.3.1 La formule de $u(t, Y_t)$

On suppose $X_t = u(t, Y_t)$,l'équation (2.13) en ecrire sous forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) + b(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, Y_t) = b_1(t)u(t, Y_t) + b_2(t) \\ \\ \sigma(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) = \sigma_1(t)u(t, Y_t) + \sigma_2(t) \end{cases} \tag{2.22}$$

Dans ce cas on suppose que $\sigma(t, y) \neq 0$ et $\sigma_1 \neq 0$ D'âpres l'équation $(**)$ (un equation différentielle ordinaire) la solution de cette equation est :

$$u(t, Y_t) = -C\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}exp(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{\sigma(t.z)}dz) - \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)} \tag{2.23}$$

Chapitre 3

La recherche des coeffcient d'EDS linaire

3.1 les caractéristiques de l'EDS linéaire

3.1.1 Proposition

1- **l'EDS est homogène** si $b_2(t) = 0$ et $\sigma_2(t) = 0$.

2- **l'EDS est autonome** si $b_1(t)$, $b_2(t)$,$\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$ sont des constantes.

3- **l'EDS est un bruit additif** si $b_1(t) = 0$ et a un bruit multiplicatif si $b_2(t) = 0$.

3.1.2 l'EDS linéaire est autonome

- Si tout les coefficients $b_1(t)$, $b_2(t)$,$\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$ sont des constantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) + b(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, Y_t) = b_1 u(t, Y_t) + b_2. \quad (*) \\ \\ \sigma(t, Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) = \sigma_1 u(t, Y_t) + \sigma_2. \quad (**) \end{cases} \tag{3.1}$$

En résoudre la solution générale d'équation $(**)$ prise en compte des condition sur les coefficients, ensuite, nous allons compenser la valeur de $u(t, Y_t)$ dans l'équation $(*)$ pour trouve les coefficients $b_1(t)$, $b_2(t)$.

La solution générale d'équation $(**)$ est :

$$u(t, Y_t) = -C\frac{\sigma_2}{\sigma_1}exp(\sigma_1 \int_0^y \frac{1}{\sigma(t.z)}dz) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tag{3.2}$$

D'après le calcule des dérive partielle par rapport a **t** et par apport a **y** on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -C\sigma_2 \frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t.z)} dz] \exp(\sigma_1 \int_0^y \frac{1}{\sigma(t.z)} dz)$$

.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -C\frac{\sigma_2}{\sigma(t, Y_t)} \exp(\sigma_1 \int_0^y \frac{1}{\sigma(t.z)} dz)$$

.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C\frac{\sigma_2}{\sigma^2(t, Y_t)} \frac{\partial \sigma}{\partial y}(t, Y_t) exp(\sigma_1 \int_0^y \frac{1}{\sigma(t.z)} dz) - C\frac{\sigma_2}{\sigma^2(t, Y_t)}\sigma_1 \exp(\sigma_1 \int_0^y \frac{1}{\sigma(t.z)} dz)$$

Alors D'après l'équation $(*)$ trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) + b(t, Y_t) \frac{\partial u}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, Y_t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, Y_t) = b_1 u(t, Y_t) + b_2.$$

$$\Longrightarrow - C\sigma_2 \exp\left(\sigma_1 \int_0^y \frac{1}{\sigma(t, z)} dz\right) \left[\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t, z)} dz\right] + \frac{b(t, Y_t)}{\sigma(t, Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{b_1}{\sigma_1}\right].$$

$$= -\frac{b_1}{\sigma_1}\sigma_2 + b_2.$$

On dérive cette equation par rapport a y (pour réduire le nombre de variable) :

$$-C\sigma_2 \exp(\sigma_1 \textstyle\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)} dz)[\frac{\partial}{\partial y \partial t} \int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)} dz + \frac{\partial}{\partial y}[\frac{b(t,Y_t)}{\sigma(t,Y_t)}] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(t, Y_t)$$

$$+\tfrac{\sigma_1}{\sigma(t,Y_t)} \tfrac{\partial}{\partial t}[\textstyle\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)} dz + \sigma_1 \frac{b(t,Y_t)}{\sigma^2(t,Y_t)} - \frac{\sigma_1}{\sigma(t,Y_t)} \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma(t,Y_t)} - \frac{b_1}{\sigma(t,Y_t)}]] = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y \partial t}(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t, z)} dz) + \frac{\partial}{\partial y}[\frac{b(t, Y_t)}{\sigma(t, Y_t)}] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(t, Y_t)$$

$$+\frac{\sigma_1}{\sigma(t, Y_t)} \frac{\partial}{\partial t}[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t, z)} dz] + \sigma_1 \frac{b(t, Y_t)}{\sigma^2(t, Y_t)} - \frac{\sigma_1}{\sigma(t, Y_t)} \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma(t, Y_t)} - \frac{b_1}{\sigma(t, Y_t)} = 0$$

on écrire cette égalité sous forme :

$$\begin{cases} \left[\sigma_1 A(t, y) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + B(t, y) - b_1\right] = 0. \\ A(t, y) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)} dz\right] + \frac{b(t,Y_t)}{\sigma(t,Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t, Y_t). \\ B(t, y) = \sigma(t, Y_t) \frac{\partial}{\partial y \partial t}\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)} dz\right) + \sigma(t, Y_t) \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b(t,Y_t)}{\sigma(t,Y_t)}\right] - \sigma(t, Y_t) \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(t, Y_t). \end{cases} \tag{3.3}$$

On dérive cette équation par rapport à y on obtient alors :
Si $\frac{\partial A}{\partial y}(t,y) \neq 0$ on à :

$$\sigma_1 = -\frac{\frac{\partial B(t,y)}{\partial y}}{\frac{\partial A(t,y)}{\partial y}}$$

donc :

- Si $\sigma_1(t) \neq 0 \Rightarrow u\left(t, y_t\right) = -C\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}\exp\left(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{\sigma(z)}dz\right) - \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}.$
- Si $\sigma_1(t) = 0 \Rightarrow u\left(t, y_t\right) = \sigma_2(t)\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(z)}dz\right) + C.$

Alors la forme de constante b_1 d'âpres l'équation (3.3) est :

$$\mathbf{b}_1 = \sigma_1 A(t,y) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + B(t,y)$$

Nous allons obtenir la valeur de la seconde constante σ_2 à partir de la première valeur de la constante σ_1 pour compense la première dans l'équation (3.1) et la correspondance. De même pour obtenir la valeur de la constante b_2

Exemple : On a l'EDS de la forme :

$$dY_t = \frac{1}{2}\exp\left(-2Y_t\right)dt + \exp\left(-Y_t\right)dB_t$$

1- On faire un changement de variable de la forme $X_t = u\left(Y_t\right)$

2- on calcule $A(y)$:

$$A(y) = \frac{b\left(t, Y_t\right)}{\sigma\left(t, Y_t\right)} - \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dy}(y) = 0$$

3-la formule de u est :

$$u(y) = \sigma_2(t)\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(z)}dz\right) + C$$

4-

$\sigma_2(t) = C = 1$ et $b_1(t) = b_2(t) = 0,$

alors $dX_t = dB_t$, la solution de l'EDS non linéaire est :

$$Y_t = \ln\left[B_t + \exp\left(Y_0\right)\right]$$

3.1.3 l'EDS linéaire est homogène

Si $b_2(t) = 0$ et $\sigma_2(t) = 0$,
d'après les condition l'équation (3.1) écrire sous forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = b_1(t)u(t,Y_t) \quad (*) \\ \\ \sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = \sigma_1(t)u(t,Y_t) \quad (**) \end{cases} \tag{3.4}$$

On recherche la valeur de $\sigma_1(t)$ et de $b_1(t)$ de la même manière utilisé dans le cas précédent :
La solution générale d'équation $(**)$ est :

$$u\,(t,Y_t) = Cexp\left(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right).$$

En dérive le $u\,(t,Y_t)$ par rapport a t et y(pour réduire le nombre de variable) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) = C\exp\left(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)\left[\sigma_1'\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right] + \sigma_1(t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right]\right].$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) = C\exp\left(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)\left[\frac{\sigma_1(t)}{\sigma\,(t,Y_t)}\right].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = C\exp\left(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)\left[\left(\frac{\sigma_1(t)}{\sigma\,(t,Y_t)}\right)^2 - \sigma_1(t)\frac{\partial\sigma}{\partial y}(t,Y_t)\frac{1}{\sigma^2\,(t,Y_t)}\right].$$

Nous compenser ces valeur dans l'équation $(*)$ nous obtenir :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t) + b\,(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\,(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t) = b_1(t)u\,(t,Y_t)$$

$$\Longrightarrow C\exp(\sigma_1(t)\textstyle\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz)[\sigma_1'(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz) + \sigma_1(t)\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz) + \sigma_1(t)\frac{b(t,Y_t)}{\sigma(t,Y_t)} + \frac{1}{2}\sigma_1^2(t).$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_1(t)\frac{\partial\sigma}{\partial y}(t,Y_t)] = b_1(t)Cexp(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz)$$

(on a le terme : $C\exp\left(\sigma_1(t)\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}dz\right) > 0$) alors :

$$\sigma_1'(t)\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right]+\sigma_1(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)+\sigma_1(t)\frac{b\left(t,Y_t\right)}{\sigma\left(t,Y_t\right)}+\frac{1}{2}\sigma_1^2(t)$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_1(t)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)-b_1(t)=0.$$

en dérive par rapport a y (pour réduire le coefficient $b_1(t)$) on va trouve :

$$\sigma_1'(t)\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right]+\sigma_1(t)\frac{\partial}{\partial y\partial t}\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)+\sigma_1(t)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b\left(t,Y_t\right)}{\sigma\left(t,Y_t\right)}-\frac{1}{2}\sigma_1(t)\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right)\right]$$

$=0.$

$$\Longrightarrow\frac{\sigma_1'(t)}{\sigma_1(t)}=-\frac{1}{\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right]}\left[\frac{\partial}{\partial y\partial t}\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b\left(t,Y_t\right)}{\sigma\left(t,Y_t\right)}-\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\right]\right]$$

On pose :

$$K\left(t,Y_t\right)=-\frac{1}{\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right]}\left[\frac{\partial}{\partial y\partial t}\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b\left(t,Y_t\right)}{\sigma\left(t,Y_t\right)}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\right]$$

Alors :

$$\sigma_1(t)=C\exp\left(\int_0^t K\left(t,Y_t\right)\right),$$

est $b_1(t)$ est un valeur de forme :

$$b_1(t)=\sigma_1'\left[\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right]+\sigma_1(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^y \frac{1}{\sigma(t,z)}dz\right)\sigma_1(t)\frac{b\left(t,Y_t\right)}{\sigma\left(t,Y_t\right)}+\frac{1}{2}\sigma_1^2(t)-\frac{1}{2}\sigma_1(t)\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right).$$

3.1.4 l'EDS linéaire un bruit additif

Dans ce cas on pose que $\sigma_1=0$ et $b_1=0$ alors en écrire le système sous forme :

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}(t,Y_t)+b(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,Y_t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,Y_t)=b_2(t) \quad (*)\\ \\ \sigma(t,Y_t)\frac{\partial u}{\partial y}(t,Y_t)=\sigma_2(t) \quad (**)\end{cases} \tag{3.5}$$

En dérive l'équation $(**)$ par rapport à t et y :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma_2(t)\right] \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)+\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right)=0 \quad(\ominus) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma_2(t)\right] \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)+\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\left(t, Y_t\right)=\sigma_2^{\prime} \quad(\oplus)\end{cases}$$

en dérive aussi l'équation $(*)$ par rapport à y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}= & -\frac{\partial b}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)-b\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right)-\frac{1}{2} \sigma^2\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(t, Y_t\right) \\ & -\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right)\end{aligned}$$

d'après l'équation $(\oplus)$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{\prime}(t)= & \frac{\partial \sigma}{\partial t}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)+\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\left(t, Y_t\right) \\ & =\sigma\left(t, Y_t\right)\left[\frac{1}{\sigma\left(t, Y_t\right)} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\left(t, Y_t\right)\right] \\ & =\sigma\left(t, Y_t\right)\left[\frac{1}{\sigma\left(t, Y_t\right)} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)-\frac{\partial b}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)-b\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right)\right. \\ & -\frac{1}{2} \sigma^2\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(t, Y_t\right)-\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right)].\end{aligned}$$

d'après les deux équation $(**)$ et $(\ominus)$ on a :

$$\begin{aligned} \sigma_2^{\prime}(t)= & \sigma\left(t, Y_t\right)\left[\frac{1}{\sigma^2\left(t, Y_t\right)} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\left(t, Y_t\right) \sigma_2(t)-\frac{1}{\sigma\left(t, Y_t\right)} \frac{\partial b}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \sigma_2(t)+\frac{b\left(t, Y_t\right)}{\sigma\left(t, Y_t\right)} \frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)\right. \\ & \left.-\frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)-\frac{1}{2} \sigma^3\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)\right].\end{aligned}$$

$$=\sigma_2(t) \sigma\left(t, Y_t\right)\left[\frac{1}{\sigma^2\left(t, Y_t\right)} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\left(t, Y_t\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b\left(t, Y_t\right)}{\sigma\left(t, Y_t\right)}\right]+\frac{1}{\sigma\left(t, Y_t\right)}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right)\right)^2-\frac{1}{2} \frac{\sigma^2\left(t, Y_t\right)}{\sigma_1(t)} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(t, Y_t\right)\right].$$

On à d'âpres l'équation $(\ominus)$ on à :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)+\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right)\right]=0.$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)+2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right)+\sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(t, Y_t\right)=0.$$

$$\Longrightarrow \sigma\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(t, Y_t\right)=-\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial u}{\partial y}\left(t, Y_t\right)-2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}\left(t, Y_t\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t, Y_t\right).$$

Alors :

$$\frac{1}{\sigma\left(t,Y_t\right)}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2\left(t,Y_t\right)}{\sigma_2(t)}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\left(t,Y_t\right).$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sigma\left(t,Y_t\right)}{\sigma_2(t)}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right)\frac{\partial u}{\partial y}\left(t,Y_t\right)+\frac{\sigma\left(t,Y_t\right)}{\sigma_2(t)}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right)+\frac{1}{\sigma\left(t,Y_t\right)}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\right)^2.$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right)+\frac{1}{\sigma_2(t)}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\frac{\partial u}{\partial y}\left(t,Y_t\right)\right)+\frac{1}{\sigma_2(t)}\left(\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\left(t,Y_t\right)\right)^2.$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right).$$

En remplace cette valeur à l'équation :

$$\sigma_2'(t)=\sigma_2(t)\sigma\left(t,Y_t\right)\left[\frac{1}{\sigma^2\left(t,Y_t\right)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\left(t,Y_t\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b\left(t,Y_t\right)}{\sigma\left(t,Y_t\right)}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right)\right].$$

On suppose que :

$$\gamma\left(t,Y_t\right)=\left[\frac{1}{\sigma\left(t,Y_t\right)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\left(t,Y_t\right)-\sigma\left(t,Y_t\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b\left(t,Y_t\right)}{\sigma\left(t,Y_t\right)}\right]+\frac{\sigma\left(t,Y_t\right)}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\left(t,Y_t\right)\right].$$

Alors :

$$\frac{\sigma_2'(t)}{\sigma_2(t)}=\gamma\left(t,Y_t\right).$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{\sigma_2'(t)}{\sigma_2(t)}\right)=\int_0^t\gamma\left(s,Y_s\right)ds.$$

$$\Longrightarrow \sigma_2(t)=Cexp\left(\int_0^t\gamma\left(s,Y_s\right)ds\right),$$

donc :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sigma_2(t)\frac{1}{\sigma\left(t,Y_t\right)}\Longrightarrow u\left(t,Y_t\right)=\sigma_2(t)\left(\int_0^y\frac{1}{\sigma\left(t,z_t\right)}dz\right).$$

On remplace $u\left(t,Y_t\right)$ dans l'équation $(*)$ est on trouve la valeur de $b_2(t)$.

3.2 Exemple

On définie une équation différentielle stochastique non linéaire :

$$dY_t = (sin(2Y_t) - \frac{1}{2}sin(4Y_t))dt + 2cos^2(Y_t)dB_t.$$

On linéarisé cette équation au forme :

$$\begin{cases} dX_t = (b_1 X_t + b_2)dt + (\sigma_1 X_t + \sigma_2)dB_t. \\ \\ X_t = u(Y_t). \end{cases} \tag{3.6}$$

Telle que les coefficients b_1, b_2, σ_1 et σ_2 sont des constante.

D'âpres les conditions l'EDS est autonome on a :
1- On calcule la valeur $A(Y_t)$:

Indication : .

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x). \\ &= 2\cos^2(x) - 1. \end{aligned}$$

- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

$$\begin{aligned} A(Y_t) &= \frac{b(Y_t)}{\sigma(Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}(Y_t). \\ &= \frac{\left(\sin(2Y_t) - \frac{1}{2}\sin(4Y_t)\right)}{(2\cos^2(Y_t))} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[2\cos^2(Y_t)]. \\ &= \frac{\left(\sin(2Y_t) - \frac{1}{2}\sin(4Y_t)\right)}{(2\cos^2(Y_t))} - \frac{1}{2}\left(-4\cos(Y_t)\sin(Y_t)\right). \\ &= \frac{\sin(2Y_t)}{2\cos(Y_t)}\left[\frac{1}{\cos(Y_t)} - \frac{\cos(2Y_t)}{\cos(Y_t)} + 2\cos(Y_t)\right]. \\ &= \frac{\sin(2Y_t)}{2\cos(Y_t)}\left[\frac{1}{\cos(Y_t)} - \frac{(2\cos^2(Y_t) - 1)}{\cos(Y_t)} + 2\cos(Y_t)\right]. \\ &= \frac{\sin(2Y_t)}{2\cos(Y_t)}\left[\frac{1}{\cos(Y_t)} - 2\cos(Y_t) + \frac{1}{\cos(Y_t)} + 2\cos(Y_t)\right]. \\ &= \frac{2}{2}\frac{\cos(Y_t)\sin(Y_t)}{\cos(Y_t)}\left[\frac{2}{\cos(Y_t)}\right]. \\ &= 2\tan(Y_t). \end{aligned}$$

2- On calcule le valeur de σ_1 :

$$\frac{\partial A}{\partial y}\left(Y_t\right)=\frac{2}{\cos^2\left(Y_t\right)}.$$

alors :

$$\sigma_1=-\frac{\frac{\partial B(t,y)}{\partial y}}{\frac{\partial A(t,y)}{\partial y}}.$$

,

On a dans ce cas $\frac{\partial u}{\partial t}=0.$.

$$B(Y_t)=\sigma(Y_t)\frac{\partial A}{\partial y}\left(Y_t\right)=2\cos^2\left(Y_t\right)\frac{2}{\cos^2\left(Y_t\right)}=4.$$

.

$$\Longrightarrow \sigma_1=0.$$

- D'apres l'équation (3.1) :

$$\sigma_2=1.$$

3- Valeurs b_1 et b_2 d'apres l'équation (3.3) on a :

$$\sigma_1 A(Y_t)+\frac{1}{2}\sigma_1^2+B(Y_t)-b_1=0.$$

alors :

$$b_1=B(Y_t)=4.$$

. et

$$b_2=0.$$

Alors l'EDS linéaire à coefficients constantes est :

$$dX_t=4X_t dt+dB_t.$$

la solution de EDS est :

$$X_t=\exp(4t)\left[X_0+\int_0^t \exp(s)dB_s\right]. \tag{3.7}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
u\left(Y_t\right) = X_t &\Longleftrightarrow X_t = 2\tan\left(Y_t\right). \text{ (solution approché) }. \\
&\Longrightarrow Y_t = \arctan\left(\frac{1}{2}X_t\right). \text{ (solution exacte) }.
\end{aligned}
$$

Conclusion

En conclusion, nous avons pu voir clairement l'intérêt énorme de la technique d'application du calcul stochastique sur les équations différentielles stochastiques .Cet intérêt nous permet de créer des liens féconds entre processus stochastiques et EDP.

On a étudié une méthode de résolution d'une équation différentielle stochastique non linéaire par les techniques de linéarisation statistique. Cette méthode a été utilisée pour convertir l'équation non linéaire en une équation linéaire en utilisant la formule d'Itô
.

On termine ce travail avec la recherche des coeffcient d'EDS linaire et un exemple d'équation différentielle stochastique non linéaire. .

Bibliographie

[1] Alexander S. Cherny Hans-Jurgen Engelbert, Singular Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005. P 17

[2] Alexander. S, Cherny Hans-Jurgen Engelbert,Singular Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.P 19

[3] Bouleau. N, Processus stochastiques et applicaions, Hermann, éditeurs des sciences et des arts, numéro d'édition 6406, imprimeire Barnéoud, France, 9-2004.

[4] F. Russo. (Conference tipe 2012,le 24 septembre 2011). équations différentielles stochastiques (EDS), 3-7.

[5] Jean-Christophe Breton,proceessus stochastique M2 mathématique,partie 1 ,Université de Rennes 20 Octobre 2019 P 52

[6] Jean-Christophe Breton,proceessus stochastique M2 mathématique,partie 1 ,Université de Rennes 21-Decembre 2020 P 53

[7] Kloeden.E and Eckhard P, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer 1995. P 148

[8] Lesfari.A, calcule différentiel, cour Université Chouaïb Doukkali Maroc P24

[9] Lorenzo.Zambotti,calcul stochastique et processus de diffusion,université Pierre-et-Marie-Curie, M2 Probabilités et Modèles Aléatoires" P92

[10] Monique Jeanblanc,Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY ,Septembre 2006 P 39

[11] Ndongo. C, proceessus aléatoires et applications en finance, Mémoire de master, Université du Québec à Trois-Rivières, 3-2012.

[12] Nils Berglund,Martingales et calcul stochastique. Master 2 Recherche de Mathématiques,Université d'orléans,version de Janvier 2014.P77

[13] Pham huyen .Optimisation et controle stochastique appliqués à la finance.P28

[14] P.Protter. (2004). Stochastic intgration and differential equation.

[15] Rebiha Zeghdane, Dynamique de structures soumises à des sollicitations aléatoires :analyse mathématique et résolution numérique,des equations différentielles stochastiques,Thèse de doctorat ;université de Sétif, soutenu le 12/04/2014. P 15

[16] R.Rhodes. . Cours de probabilités à Saint-Louis.

[17] Romuald Elie et Idris kharroibi,Calcul stochastique appliqué à la finance P43

[18] Tahraoui Fatima Zohra,Problème de consommation optimale avec investissement,Thèse de doctorat ;université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès (S.B.A.), Algérie, soutenu le 15/05/2018 P14