République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Sur La Théorie des Temps Locaux et leur Applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité: Analyse Stochastique Statistique des Processus et Applications

par

Melle. Dellaoui **A**bla[1]

Sous la direction de

Pr. A. Kandouci

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

Mme. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Pr. A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mlle. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mlle. N. Hachimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

[1] e-mail: dellaoui.abla1996@gmail.com.

Remerciements

A la fin de mon travail, je tiens à remercier tout d'abord mon Dieu le tout puissant, de m'avoir donné la santé, la raison, le courage et la patience d'arriver jusqu'à la réalisation de ce projet.

Je tiens à exprimer mes grands remerciements et ma sincère gratitude à mon directeur de recherche Pr. Abdeljebbar.Kandouci pour sa disponibilité et ses encouragements, ses consiels, ses orientations et ses remarques pertinentes, cela m'a fait le grand Honneur.

Je remercie aussi les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de lire et d'évaluer ce travail.

Je n'oublie pas de remercier mes chers parents et tous ceux qui m'ont soutenu tout au long de mes études.

À vous tous merci.

Table des matières

Introduction

Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste Robert Brown en 1828. Ce mouvement "aléatoire", dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion ou diffusion du pollen dans l'eau. Le champ d'application du mouvement brownien est beaucoup plus vaste que l'étude des particules microscopiques en suspension et inclut la modélisation du prix des actions, du bruit thermique dans les circuits électriques, du comportement limite des problèmes de files d'attente et des perturbations aléatoires dans un grand nombre de systèmes physiques, biologiques ou économiques.
Bachelier (1900) a eu les premiers résultats quantitatifs en s'intéressant aux fluctuations du prix des actions en économie. Einstein (1905) a obtenu la densité de probabilité de transition du mouvement brownien à partir de la théorie moléculaire de la chaleur. Le premier traitement mathématique rigoureux est dû à N. Wiener (1923, 1924), qui a prouvé l'existence du brownien.
Dans ce mémoire, nous appliquons le calcul stochastique à la théorie des temps locaux des semimartingales continues. Le temps local au niveau "a" d'une semimartingale X est un processus croissant qui mesure le «nombre de visites» de X au niveau "a". Nous utilisons les formules classiques de Tanaka pour construire des temps locaux puis étudier leurs propriétés de régularité par rapport à la variable d'espace. les temps locaux peuvent être utilisés pour obtenir une version généralisée de la formule d'Itô.
Les hypothèses de la formule d'Itô nous contraigne de l'employer pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Dans ce chapitre, nous essayons de relaxer cette hypothèse. Nous allons ici nous attacher à la définition et aux premières propriétés des temps locaux, qui permettent de mesurer le temps passé au voisinage d'un niveau donné par le processus. Il existe différentes théories des temps locaux, mais nous nous intéresserons ici uniquement aux temps locaux de semi-martingales continues. Rappelons qu'une semi-martingale continue est un processus stochastique qui peut se décomposer de manière unique en la somme d'un processus à variations finies et d'une martingale locale, toutes deux supposées continues. La formule d'Itô permet justement de donner cette décomposition pour les images de semi-martingales par des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. En tentant d'étendre cette formule à des fonctions qui ne sont pas né-

cessairement de classe $\mathcal{C}^2$, on définit toute une famille de processus à variations finies, famille associée à la semi-martingale initiale. Il se trouve que ces processus ont une interpretation immédiate dans le cas du mouvement brownien, ils sont les limites, en un certain sens, du temps passe au voisinage d'un point x avant l'instant t, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, ces processus ont été appelés **temps locaux** de semi-martingales, car ils représentent en quelque sorte l'échelle de temps ressentie au voisinage du point x.

Le mémoire présenté est partagé en trois chapitres. Le premier chapitre traiter des définitions du mouvement brownien, l'intégrale par rapport au mouvement brownien et la formule d'itô. Et le deuxième chapitre est contient une introduction aux temps locaux, des définition et des propriétés de temps lacal. De plus on voir la formule de Meyer-Itô, quelques théorèmes principaux sur les temps locaux. Concernant le dernier chapitre, il traiter quelques applications de temps local.

Chapitre 1

Quelques généralités sur les calculs stochastiques

1.1 Mouvement brownien

1.1.1 Processus stochastiques en temps continu

On supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.1.1. *Une **filtration** $\{\mathcal{F}_t; 0 = t < +\infty\}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: pour $0 \leq s \leq t \leq +\infty$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.1.2. *Un **processus stochastique** X est la donnée de $\{X_t; 0 \leq t < +\infty\}$, où à t fixé, X_t est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ désigne la tribu boréliènne de $\mathbb{R}^d$.*
A $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$; $t \geq 0$ est une trajectoire du processus X.
X_t peut représenter par exemple le nombre de clients qui attendent à un guichet ou le prix d'une action à l'instant t.

Définition 1.1.1.3. *Un processus X est dit mesurable si l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \Big([0, +\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0, +\infty[) \otimes \mathcal{F}\Big) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \\ (t, \omega) & \longmapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

est mesurable.
Un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e. les trajectoires sont continues).

Définition 1.1.1.4. *Un processus est dit **adapté** à la filtration $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t -$ mesurable.*

Dans la suite, on aura toujours affaire à des processus mesurables et adaptés à une filtration que l'on précisera.

Définition 1.1.1.5. *Un processus est dit* ***progressivement mesurable*** *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t; 0 = t < +\infty\}$*, si pour tout* $t \leq 0$ *l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \Big([0,t[\times\Omega, \mathcal{B}([0,t[) \otimes \mathcal{F}\Big) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s,\omega) & \longmapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

est mesurable.

1.1.2 Définition du mouvement brownien (M.B.)

Définition 1.1.2.1. *Un mouvement brownien de dimension* k*,* $\{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *est la donnée d'un processus mesurable* B *à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*, et d'une filtration, tels que* B *est adapté à* $(\mathcal{F}_t)t = 0$*, est continu et vérifie :*

1. $B_0 = 0$ *presque sûrement.*
2. *Pour* $0 \leq s < t$*, l'accroissement* $B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$*.*
3. *Pour* $0 \leq s < t$*, l'accroissement* $B_t - B_s$ *suit une loi normale centrée, de matrice de covariance* $\sqrt{t-s}Id_k$*, où* Id_k *désigne la matrice identité de dimension* k*.*

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ *fait partie de la définition. Cependant, si on se donne* $\{B_t; 0 \leq t < +\infty\}$*, processus continu et si on sait que :*

1. B *est à accroissements indépendants et stationnaires, i.e. : pour tout* $0 \leq r < s \leq t < u, B_u - B_t$ *et* $B_s - B_r$ *sont indépendants et la loi de* $B_u - B_t$ *ne dépend que de la diférence* $u - t$*,*
2. *et* $B_t = B_t - B_0$ *suit une loi normale centrée, de matrice de covariance* $\sqrt{t}Id_k$*, alors avec la tribu engendrée par* $B, \{B_t, \mathcal{F}_t^B; 0 \leq t < +\infty\}$ *est un mouvement brownien où :* $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s; 0 \leq s \leq t\}$*.*

Proposition 1.1.2.1. *(propriétés de martingale)*

i B *est une martingale par rapport à la tribu* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, de carré intégrable, i.e.*

$$\forall \ 0 \leq s < t; \mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s.$$

ii $B_t^2 - t; 0 \leq t < +\infty$ *est aussi une martingale par rapport à la même tribu.*

Preuve :

i

$$\mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0.$$

$$\mathbb{E}((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2|\mathcal{F}_s) = (t-s).$$

Utilisation de l'indépendance et du caractère loi normale.

ii La seconde propriété est très importante car elle démontre que le mouvement brownien est à variation quadratique finie presque sûrement. Si $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ est une subdivision de l'intervalle $[0, t]$, la variation quadratique sur l'intervalle $[0, t]$ par rapport à Π est

$$V_t^2(\Pi) = \sum_{k=1}^{m} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2.$$

Si $V_t^2(\Pi)$ converge quand le pas de la subdivision Π tend vers 0, on dit que le processus est à variation quadratique finie. □

Théorème 1.1.2.0.1. *[2]*

1. *Le M.B. est à variation infinie sur tout intervalle.*
2. *Le M.B. n'est dérivable en aucun point (Paley, Wiener, Zygmund 1933).*

1.2 Intégrale par rapport au MB

On suppose donné un mouvement brownien B avec sa filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0}$. On définit deux classes de processus :

$$\mathbb{H}_2 = \left\{ H = (H_t)_{0 \leq t},\ \textit{processus adapte},\ \textit{tel que}\ \forall t,\ \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds < +\infty \right\},$$

et $\mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du brownien), de carré intégrable, continues et nulles à l'instant 0.

Théorème 1.2.1. ***(Intégrale d'Itô)****[2] Il existe une unique application linéaire, notée I, de $\mathbb{H}_2$ dans $\mathcal{M}_c^2$ telle que pour tout $H \in \mathbb{H}_2$ et tout t,*

$$\mathbb{E}(I(\mathbb{H})_t^2) = \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{H}_s^2 ds$$

On note :

$$I(\mathbb{H})_t = \int \mathbb{H}_s dB_s$$

Tel que le théorème est énoncé, on peut se demander où intervient vraiment le M.B. dans l'intégrale. Pour comprendre son rôle, il faut se pencher un peu plus sur la construction. Si le processus H est de la forme :

$$H_t = \Phi_0 \mathbb{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}(t), \qquad (*)$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < +\infty$, $\mathcal{F}_0$ est $\mathcal{F}_0-$mesurable et bornée et pour $i = 1, ..., p$, les $\mathcal{F}_i$ sont $\mathcal{F}_{t_{i-1}}-$mesurables et bornées, on pose

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \Big(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t} \Big).$$

Il est aisé de démontrer que l'intégrale stochastique I vérifie toutes les propriétés énoncées précédemment sur les processus élémentaires. Ensuite on montre la densité des processus de la forme $(*)$ dans $\mathbb{H}_2$. Et on va prolonger I définie sur les processus élémentaires à la classe $\mathbb{H}_2$. L'unicité signifie que si I et I_0 sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes alors $I(H)$ et $I'(H)$ sont indistinguables.

Proposition 1.2.0.2. ***(Propriétés de l'intégrale d'Itô)***[2] *Pour $H \in \mathbb{H}_2$ et $T \in \mathbb{R}^+$,*

1. *$I(H)$ est à variation quadratique finie et cette variation sur $[0, T]$ est égale à $\int_0^T H_s^2 ds$;*
2. $\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} \mid \int_0^t H_s dB_s \mid^2 \right) \le 4\mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds$

Une dernière extension consiste à relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur H, en introduisant :

$$\widetilde{\mathbb{H}}^2 = \left\{ H = (H_t)_{0 \le t}, processusadapt, telque \forall t \ge 0, \int_0^t H_s^2 ds < +\infty, \mathbf{P} - p.s. \right\}.$$

On peut encore prolonger I sur cet ensemble, mais on n'a plus une martingale, mais seulement une martingale locale.

1.3 Formule d'Itô

Définition 1.3.0.2. ***(Processus d'Itô)*** *Un processu X, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est appelé semi-martingale s'il se décompose de la manière suivante : pour tout t,presque sûrement :*

$$X_t = X_0 + \int_t^0 K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

avec X_0 et K à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, H à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times d}$, $H \in \mathbb{H}^2$ et

$$\mathbb{E} \int_0^t |K_s| ds < \infty, \forall t.$$

Cette décomposition, si elle existe, est unique.

Théorème 1.3.0.1. ***(Formule d'Itô)***[2] *Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, une fois continument dérivable en temps et deux fois en espace (i.e. toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues). Soit X une semi-martingale :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s.$$

Alors $\{f(t, X_t); 0 \le t < +\infty\}$ est encore une semi-martingale et admet la décomposition suivante :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s) * K_s ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s) * H_s dB_s$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t Trace(H_s^* D^2 f(s,X_s)H_s)ds$$

où ∇f désigne le gradient de f par rapport aux variables d'espace et $D^2 f$ désigne la matrice hessienne de f.

Sans l'hypothèse de régularité sur f, ceci est faux. Sans celle-ci, on tombe dans une autre classe de processus, dit de Dirichlet.
exemple :

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t.$$

Si X et Y sont deux semi-martingales,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s,$$

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle M, N\rangle_t,$$

avec

$$\langle M, N\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

Chapitre 2

Quelques généralitités sur les temps locaux

2.1 Introduction

Le temps local du mouvement brownien a été introduit en 1948 par le Français le mathématicien Paul Lévy dans son livre fondamental Processus Stochastique-set Mouvement Brownien . Se posant naturellement dans de nombreux problèmes (comme par exemple, une extension de la formule d'Itô aux fonctions convexes, ou trouver la densité de la mesure d'occupation de BM par rapport à la mesure de Lebesgue bien sûr), ils décrivent aussi approximativement le temps passé par un réel standard mouvement brownien près d'un point donné, fournissant ainsi une description très fine des exemples de chemins de BM. Nous commencerons par donner plusieurs constructions de l'heure locale brownienne et leurs propriétés de base. Ensuite, nous illustrerons à la fois la puissance et l'élégance de la théorie en prouvant plusieurs théorèmes de grande importance dans l'étude du mouvement brownien et des processus stochastiques réels. Ceux-ci inclus : La loi d'arc sinus de P. Lévy, l'identité de Lévy et les beaux théorèmes de Rayet Knight sur le comportement spatial des temps locaux.

Les hypothèses de la formule d'Itô nous contraigne de l'employer pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Dans ce chapitre nous essayons de relaxer cette hypothèse.

2.2 Première généralisation

On commence par une extension simple de la formule d'Itô.

Théorème 2.2.1. *Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^2$ en dehors d'un ensemble de points finis $z_1, ..., z_n$ et de plus que $|g''(x)| = M$ pour*

$x \neq z_i, i = 1, ..., n$. Soit B_t un mouvement brownien de dim 1. Alors la formule d'Itô est reste valable :

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)ds$$

où l'on a prolongé $g''(z_i)$:

$$g''(z_i) = \lim_{x \to z_i} g''(x)$$

.

Preuve : Soit ρ_n une suite de fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $B(0, 1/n)$ telles que, $\rho_n(t) \geq 0$ et $\int \rho_n(t)dt = 1$. Alors $g_n = \rho_n * g$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. De plus comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ on a $g'_n = (\rho'_n) * g = \rho_n * (g')$ et par suite $g'_n \longrightarrow g'$ uniformément sur tout compact de R. Enfin on peut appliquer la formule d'Itô à g_n :

$$g_n(B_t) \quad = \quad g_n(B_0) + \textstyle\int_0^t g'_n(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''_n(B_s)ds. \tag{2.1}$$

De part la continuité de $s \longrightarrow B_s$ on a sur $[0, t]$

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(B_s) - g(B_s)\|_\infty = 0 et \lim_{n\to\infty} \|g'_n(B_s) - g'(B_s)\|_\infty = 0$$

donc $\lim_{n\to\infty} g_n(B_t) = g(B_t)$. D'autre part l'inégalité maximale de Doob implique

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\Big(\int_0^t g'_n(B_s)dB_s - \int_0^t g'(B_s)dB_s\Big)^2\Big]$$

$$\leq \sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t g'_n(B_s)dB_s - \int_0^t g'(B_s)dB_s\Big)^2\Big]$$

et par l'isométrie d'Itô on a

$$= 4\mathbb{E}\Big[\int_0^t (g'_n(B_s) - g'(B_s))^2 ds\Big] \to 0 \;\; quand \;\; n \to \infty$$

On en déduit qu'il existe une sous suite $n_k \to \infty$ telle que

$$\sup_{s\in[0,t]}\Big(\int_0^t g'_{n_k}(B_s)dB_s - \int_0^t g'(B_s)dB_s\Big)^2 \to 0$$

presque sûrement quand $k \to \infty$. Pour traiter le dernier terme $K_t^n = \frac{1}{2}\int_0^t g''_n(B_s)ds$ on remarque que l'équation (2.1) implique

$$K_t^{n_k} = g_{n_k}(B_t) - g_{n_k}(B_0) - \int_0^t g'_{n_k}(B_s)dB_s$$

et donc par ce qui précède

$$\lim_{k\to\infty} K_t^{n_k} = g(B_t) - g(B_0) - \int_0^t g'(B_s)dB_s$$

presque sûrement.
Or en dehors de $z_1, ..., z_n$ on a $g_n''(x) \to g(x)$. Sans perte de généralité on peut supposerz $1 < z_2 < ... < z_n$. Posons pour tout $\epsilon > 0$ $I_\epsilon = \bigcup_{i=1}^n]z_i - \epsilon, z_i + \epsilon[$. On a donc

$$\int_0^t (g_n''(B_s) - g''(B_s))\mathbb{1}_{\{\mathbb{R}\setminus I_\epsilon\}}(B_s)ds = 0$$

et de plus

$$\int_0^t (g_n''(B_s) - g''(B_s))\mathbb{1}_{\{I\epsilon\}}(B_s)ds \leq 2M\lambda(s \in [0,t] : B_s \in I_\epsilon)$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Or

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lambda(s \in [0,t] : B_s \in I_\epsilon) = 0$$

D'où l'égalité cherchée. □

Théorème 2.2.2. ***(Formule de Tanaka)****[3]*
Soit B_t un mouvement Brownien en dimension 1 alors presque sûrement on a

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t sign(B_s)dB_s + L_t$$

où $L_t = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon}\lambda(s \in [0,t] : B_s \in]-\epsilon, \epsilon])$ et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

2.3 Deuxième généralisation

Théorème 2.3.1. *[3] Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et X une semimartingale continue. Alors $f(X)$ est une semimartingale et*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)dX_s + K_t$$

où f' est la dérivée à gauche de f, c'est-à-dire $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
et $K_t = K_t(f, X)$ est un processus continu croissant adapté.

Remarque 2.3.1. *La formule est linéaire en f. En effet si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes de processus croissants associés $K_t^1 = K_t(f_1, X)$ et $K_t^2 = K_t(f_2, X)$ alors*

$$K_t(f_1 + f_2, X) = K_t^1 + K_t^2$$

.

2.4 Définition et premières propriétés

Définition 2.4.1. *Soient X une semimartingale et f une fonction convexe alors le processus $K_t = K_t(f, X)$ définit dans le théorème précédent est appelé processus croissant associé à f.*
Le processus croissant associé à la fonction $x \mapsto |x - a|$ est appelé temps local en a et est noté $L_t^a = L^a(X)_t$, quant $a = 0$ on écrit simplement L_t.
Grâce au Théorème2.3.1 on abouti aisément à la généralisation suivante de la formule de Tanaka.

Corollaire 2.4.1. *Formule de Meyer-Tanaka.*
Soit X une semimartingale continue. Alors pour tout $a \in R$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sign(X_s - a) dX_s + L_t^a \tag{2.2}$$

Le résultat qui suit donne une autre définition du temps local qui sera utile dans le théorème à suivre.

Lemme 2.4.1. *Le processus croissant associé à la fonction $x \mapsto (x-a)^+$ ou $x \mapsto (x-a)^-$ est $(1/2)L_t^a$.*

Preuve : Les fonctions $x \mapsto (x-a)^+$ et $x \mapsto (x-a)^-$ sont convexes. Soient donc K_t^1 et K_t^2 leur processus croissants associés respectifs. On a $|x - a| = (x-a)^+ + (x-a)^-$ donc $L_t^a = K_t^1 + K_t^2$. Par ailleurs $g(x) = x - a = (x-a)^+ - (x-a)^-$ est une fonction (convexe) de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc par Itô :

$$g(X_t) - g(X_t) = X_t - X_0 = \int_0^t 1 dX_s$$

donc le processus croissant associé à g est 0. D'où le résultat cherché. □

Le résultat qui suit précise le sens des vocables "temps local" pour L_t^a.

Théorème 2.4.1. *Soit X une semimartingale continue. Le processus $L_t^a = L^a(X)_t$ ne croît que lorsque $X_t = a$; plus précisément pour presque tout ω la mesure sur $\mathbb{R}^+$, $dL_t^a(\omega)$ à pour support $\{s \geq 0 : X_s(\omega) = a\}$.*

Preuve : Comme le processus croissant L_t^a est à trajectoire continue la mesure $dL^a(\omega)$ est une mesure diffuse (c'est à dire ne contient pas d'atome).
Supposons que l'on ait $0 \leq S < T$ des temps d'arrêts tels que :

$$\{(s, \omega) : S(\omega) \leq s < T(\omega)\} \subset \{(s, \omega) : X_s(\omega) < a\}.$$

Alors $X = a$ sur $[S, T]$. En appliquant deux fois le Théorème 2.3.1 et le Lemme précédent à $f(x) = (x-a)^+$ aux temps S et T on a

$$0 = (X_T - a)^+ - (X_S - a)^+ = \int_S^T \mathbb{1}_{\{]a,8[\}}(X_s) dX_s + \frac{1}{2}(L_T^a - L_S^a)$$

d'où $L_T^a - L_S^a = 0$ c'est à dire $L_T^a = L_S^a$. Pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$ on définit les temps d'arrêt S_q par

$$S_q(\omega) = \begin{cases} \text{q}, & \text{si } X_q(\omega) < a\,; \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis on définit

$$T_q(\omega) = inf\{t > S_q(\omega) : X_t = a\}.$$

On a donc $[S_q, T_q[\subset \{X < a\}$ et de plus

$$Int(\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+}]S_q(\omega), T_q(\omega)[$$

où $Int(B)$ représente l'intérieur de l'ensemble B. Par l'analyse qui précède ceci implique que $dL^a(\omega)$" ne charge pas $Int(\{s > 0 : X_s(\omega) < a\})$. Or $\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}$ est l'image inverse de l'ouvert $] - 8, a[$ par une application continue donc est lui même ouvert donc coincide avec son intérieur. Donc $dL_a(\omega)$ ne charge pas $\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}$. De façon analogue on montre que dL^a ne charge pas $\{s > 0 : X_s > a\}$. Donc son support est contenu dans l'ensemble $\{s = 0 : X_s = a\}$.
□

2.5 Formule de Meyer-Itô

2.5.1 Pour les semimartingales continues

Le résultat suivant est optimal : Cinclar, Jacod, Protter et Sharpe (1980) ont montré que si B_t est un mouvement Brownien et si $X_t = f(B_t)$ est une semi martingale alors f doit être la diférence de deux fonctions convexes...

Théorème 2.5.1.1. *(Formule de Meyer-Itô).*
Soit X une semimartingale continue. Soit f la diférence de deux fonctions convexes, f' la dérivée à gauche de f et $\mu = f''$ au sens des distributions. Alors

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int L_t^a \mu(da)$$

où $L_t^a = L^a(X)_t$ est le temps local passé en a par X jusqu'au temps t.

Remarque 2.5.1.1. (a) *Pour $f(x) = |x|$ on a $f'(x) = sign(x) = 2\mathbb{1}_{\{]0,+\infty[\}}(x) - 1$ et donc $\mu(da) = 2\delta_0(da)$ où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.*

(b) *Il est remarquable que le processus croissant associé (intégrale du temps local) ne dépend pas de f.*

Preuve du Théorème : Comme la formule est linéaire en f on peut supposer sans perte de généralité que f est convexe. En localisant on peut supposer $|X_t|$ et

$\langle X\rangle_t$ bornés par une constante $\mathcal{C}$ pour tout t. On pose alors

$$g(x) = \frac{1}{2}\int_{-C}^{C} |x-a|\mu(da).$$

Sur $[-C,C]$ on a $(f-g)'' = 0$ donc par suite $f(x) - g(x) = a + bx$ pour $|x| = N$. Comme le résultat est évident pour les fonctions linéaires (de processus croissant associé nul) il suffit donc de le montrer pour g.
On a

$$g'(x) = \frac{1}{2}\int_{-C}^{C} sign(x-a)\mu(da).$$

Par définition du temps local (Théorème 2.3.1) on a

$$|X_t - a| - |X_0 - a| = \int_0^t sign(X_s - a)dX_s + L_t^a$$

et en intégrant $\frac{1}{2}\int_{-C}^{C}\mu(da)$ on a

$$g(X_t) - g(X^0) = \frac{1}{2}\int_{-C}^{C}\left(\int_0^t sign(X_s - a)dX_s + L_t^a\right)\mu(da)$$

On peut montrer que l'on peut échanger l'ordre d'intégration d'où

$$g(X_t) - g(X_0) = \int_0^t g'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{-C}^{C} L_t^a\mu(da)$$

Comme $L_t^a = 0$ pour $|a| > C$ ceci conclut la preuve. □

2.5.2 Cas général

Théorème 2.5.2.1. *[3] Soit f une fonction convexe et X une semimartingale. Alors $f(X)$ est une semimartingale et on a*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + A_t$$

où f' est la dérivée à gauche de f et $A = A(f,X)$ est un processus adapté, croissant, continu à droite. De plus on a

$$\triangle\, A_t = f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-}) \triangle X_t.$$

Définition 2.5.2.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit le processus croissant $A_t^a = A^a(X)_t$ par*

$$|X_t - a| - |X_0 - a| = \int_{0^+}^t sign(X_{s-} - a)dX_s + A_t^a$$

. Le temps local passé par X en a jusqu'au temps t, noté $L_t^a = L^a(X)_t$ est définit par

$$L_t^a = A_t^a - \sum_{0<s\le t}\Big[|X_s - a| - |X_{s-} - a| - sign(X_{s-} - a) \triangle X_s\Big]$$

Théorème 2.5.2.2. *[3] Pour presque tout ω le support de la mesure $dL_t^a(\omega)$ est contenu dans l'ensemble $\{s : X_s - (\omega) = a\}$.*

Théorème 2.5.2.3. *(Formule de Meyer-Itô.)[3] Soit X une semimartingale continue. Soit f la diférence de deux fonctions convexes, f' la dérivée à gauche de f et $\mu = f''$ au sens des distributions (c'est une mesure signée). Alors*

$$f(X_t)-f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)dX_s + \sum_{0<s\leq t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-}) \vartriangle X_s] + \frac{1}{2}\int L_t^a \mu(da)$$

où $L_t^a = L^a(X)_t$ est le temps local passé en a par X jusqu'au temps t.

2.5.3 Propriétés du temps local

Une conséquence de la formule d'Itô-Meyer est le résultat significatif suivant.

Corollaire 2.5.3.1. *Soit X une semimartingale continue de temps local L_t^a. Si g est boréliènne bornée alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a)da = \int_0^t g(X_s)d\langle X\rangle_s$$

.

Preuve :

Supposons g continue et positive alors notons f la fonction telle que $f'' = g$. La fonction f est convexe de classe $\mathcal{C}^2$ donc on peut lui appliquer la formule d'Itô et la formule de Meyer-Itô. Ce qui donne l'identité cherchée.

Si g est continue de signe quelconque on pose $g = g^+ + g^-$ et on obtient le résultat par la linéarité et ce qui précède.

Enfin pour g boréliènne bornée : on utilise le fait que les fonctions continues constituent une classe monotone pour les fonctions boréliènnes bornées. □

Remarque 2.5.3.1. *Pour le mouvement brownien standard W cette formule donne*

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a)da = \int_0^t g(W_s)ds.$$

Ainsi on voit que $L_t^a = L_t^a(W)$ peut être interprété comme le temps passé en a par le Brownien jusqu'au temps t. Plus précisément L_t^a est la densité de la loi du temps d'occupation au temps t :

$$\upsilon_t(A) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{A\}}(W_s)ds = \int_A L_t^u du.$$

Corollaire 2.5.3.2. *Soit X une semimartingale càdlàg de temps local $(L^a)_{a\in\mathbb{R}}$. Soit g une fonction boréliènne bornée. Alors pour tous $t > 0$ on a presque sûrement*

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^a g(a)da = \int_0^t g(X_{s-})d[X,X]_s^c.$$

2.6 Quelques Théorèmes principaux sur les temps locaux

On considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. Soit X une semimartingale continue. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}$, la formula d'Itô affirme que $f(X)$ est aussi une semimartingale continue et on a

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X, X >_s$$

La proposition suivante montre que cette formule peut être étendue au cas où f est une fonction convexe.

Proposition 2.6.1. *[5] Soient X une semimartingale continue et f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est une semimartingale, et, plus précisemment, il existe un processus croissant A^f tel que, pour tout $t \geq 0$,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + A^f,$$

où $f'_-(x)$ représente la dérivée à gauche de f au point x.

Plus généralement, $f(X)$ est une semimartingale si f est une différence de fonctions convexes.

Définition 2.6.1. *Un processus continu X admet des temps locaux par rapport au processus croissant $(A_t)_{t\geq 0}$ et à la mesure de Radon μ, s'il existe une fonction mesurable $(\Lambda_t^x, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ telle que pour toute fonction f continue bornée et pour tout $t \geq 0$ on a :*

$$\int_0^t f(X_s)dA_s = \int_{\mathbb{R}} \Lambda_t^x f(x)\mu(dx)$$

Dans la plus grande partie de la suite, les temps locaux que nous étudierons seront les temps locaux de semi-martingales, dont le théorème suivant garantit l'existence.

Théorème 2.1. *[5] Une semi-martingale continue X admet des temps locaux $(\Lambda_t^x, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ par rapport au processus croissant $(< X >_t)_{t\geq 0}$ et à la mesure de Lebesgue, que l'on appelle simplement les temps locaux (de semi-martingales continues) de X. En d'autre termes, il existe une fonction mesurable $(\Lambda_t^x, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ telle que pour toute fonction f continue bornée et $t \geq 0$, on a*

$$\int_0^t f(X_s)d < X >_s = \int_{\mathbb{R}} \Lambda_t^x f(x)dx$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on notera

$$x^+ = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

les parties positive et négative de x.

Théorème 2.2. ***Formule de Tanaka Meyer[5]***
Pour toute semimartingale continue, il existe une modification (L_t^x) de Λ qui soit conjointement continue en t et càdlàg en x. On a de plus :

$$\frac{1}{2}L_t^x = (X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+ - \int_0^t 1_{\{X_s > x\}} dX_s.$$

Soit $X_t = X_0 + M_t + A_t$ une semimartingale continue avec M une martingale locale et A un processus à variation finie. Les sauts du temps local de X sont donnés par la formule :

$$L_t^x - L_t^{x-} = 2\int_0^t 1_{\{X_s = x\}} dA_s.$$

En particulier, si X est une martingale locale continue, la fonction de ses temps locaux admet une version conjointement continue en t et x.

Remarque 2.6.1. *Ce théorème est en quelque sorte une formule d'Itô appliquée à la fonction $x \mapsto x^+$, qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$. Notons de plus que, à x fixé, nous avons accès au temps local en x d'une manière qui permet, par exemple, l'expression d'intégrales contre le temps local, ce qui n'était pas donnée par la définition !*

Corollaire 2.1. *Soit X une semimartingale et (L_t^x) une version continue en t et càdlàg en x de la fonction de ses temps locaux , on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$:*

$$L_t^x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{x \leq X_s < x + \varepsilon\}} d < X >_s$$

Exemple 2.6.1. *Si B est un mouvement brownien, et (L_t^x) la version continue de la fonction de ses temps locaux, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} L_t^x dx = \int_0^t 1_{\{-\varepsilon < B_s < \varepsilon\}} ds.$$

Par conséquent,

$$L_t^0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{\{-\varepsilon < B_s < \varepsilon\}} ds,$$

et on retrouve ainsi la notion de temps passé au voisinage de 0 par le Brownien B, d'où le terme : temps local en 0.

Proposition 2.6.2. ***Propriété fondamentale des temps locaux .[5]***
Soit Y une semimartingale et L la fonction de ses temps locaux. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la mesure aléatoire $d_t L_t y$ est portée par $\{t \geq 0 : Y_t = y\}$.

2.7 Continuité des temps locaux et Formule d'Itô généralisé :

Nous considérons un X semimartingale continu et écrivons $X = M + V$ pour sa canonique décomposition. Notre premier objectif est d'étudier la continuité des temps locaux de X par rapport à la variable d'espace a.
Il est pratique d'écrire $L^a(X)$ pour la fonction continue aléatoire $(L^a_t(X))_{t\geq 0}$, que nous considérons comme une variable aléatoire avec des valeurs dans l'espace $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Comme d'habitude, ce dernier espace est menu de la topologie de convergence uniforme sur tous les ensemble compact.

Théorème 2.7.1. *le processus $(L^a(X), a \in \mathbb{R})$ à des valeurs dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ a un càdlàg modification, que nous considérons désormais et pour laquelle nous gardons la même notation $(L^a(X), a \in \mathbb{R})$. De plus, si $L^{a-}(X) = (L^{a-}_t(X))_{t\geq 0}$ désigne la limite gauche de $b \longrightarrow L^a(X)$ à a, nous avons pour tout $t \geq 0$,*

$$L^a_t(X) - L^{a-}_t(X) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} dV_s \tag{2.3}$$

En particulier, si X est une martingale locale continue, le processus $(L^a_t(X))_{a\in\mathbb{R}, t\geq 0}$ a trajection continus.

La preuve du théorème repose sur la formule de Tanaka et les techniques de lemme suivante.

Lemme 2.7.1. *Soit $p \geq 1$. Il existe une constant C_p qui ne dépend que de p tel que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{a<X_s<b\}} d\langle M, M\rangle_s\right)^p\right] \leq C_p(b-a)^p\left(\mathbb{E}[(\langle M, M\rangle_t)^{p/2}] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |dV_s|\right)^p\right]\right).$$

Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, écrivons $Y^a = (Y^a_t)_{t\geq 0}$ pour la variable aléatoire avec des valeurs dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ défini par

$$Y^a_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} dM_s.$$

Le processus $(Y^a, a \in \mathbb{R})$ a une modification continue.

Preuve : Commençons par la première affirmation. Il suffit de prouver que la borne indiquée tient quand $a = -u$ et $b = u$ pour certains $u > 0$ (puis prendre $u = (b-a)/2$ et remplacer X par $X - (b+a)/2$). Soit f la fonction unique différentiable deux fois en continu tel que

$$f''(x) = (2 - \frac{|x|}{u})^+,$$

et $f(0) = f'(0) = 0$.Notons que nous avons alors $|f'(x)| \leq 2u$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$. Depuis $f'' \geq 0$ et $f''(x) \geq 1$ si $-u \leq x \leq u$, on a

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{-u<X_s\leq u\}} d\langle M, M\rangle_s \leq \int_0^t f''(X_s) d\langle M, M\rangle_s \tag{2.4}$$

Cependant, selon la formule d'Itô

$$\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle M, M\rangle_s = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t f'(X_s) dX_s. \tag{2.5}$$

Rappelant que $|f'| \leq 2u$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|f(X_t) - f(X_0)|^p] &\leq (2u)^p \mathbb{E}[|X_t - X_0|^p] \\
&\leq (2u)^p \mathbb{E}\left[\left(|M_t - M_0| + \textstyle\int_0^t |dV_s|\right)^p\right] \\
&\leq C_p (2u)^p \left(\mathbb{E}[(\langle M, M\rangle_t)^{p/2}] + \mathbb{E}\left[\left(\textstyle\int_0^t |dV_s|\right)^p\right],\right.
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de *Burkholder* $-$ *Davis* $-$ *Gundy*. Ici et ci-dessous, C_p représente une constante qui ne dépend que de p, qui peut varier d'une ligne à l'autre. Alors,

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dV_s.$$

on a

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f'(X_s) dV_s\right|^p\right] \leq (2u)^p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |dV_s|\right)^p\right],$$

et en utilisant à nouveau les inégalités de *Burkholder* $-$ *Davis* $-$ *Gundy*,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\textstyle\int_0^t f'(X_s) dM_s\right|^p\right] &\leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\textstyle\int_0^t f'(X_s)^2 \langle M, M\rangle_t\right)^{p/2}\right] \\
&\leq C_p (2u)^p \mathbb{E}[(\langle M, M\rangle_t)^{p/2}].
\end{aligned}$$

La première affirmation du lemme suit en combinant les bornes précédentes, en utilisant (2.4) et (2.5).

Passons à la deuxième affirmation. On fixe $p > 2$. Par l'inégalité de *Burkholder* $-$ *Davis* $-$ *Gundy*, on a pour tout $a < b$ et tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\geq 0} |Y_s^b - Y_s^a|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{a<X_s\leq b\}} d\langle M, M\rangle_s\right)^{p/2}\right], \tag{2.6}$$

et le côté droit peut être estimé à partir de la première affirmation du lemme. Plus précisément, pour chaque entier $n \geq 1$, introduisons le temps d'arrêt

$$T_n := \inf\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t + \int_0^t |dV_s| \geq n\}.$$

Dés la première affirmation du lemme avec X remplacé par le processus arrêté X^{T_n}, nous avons pour chaque $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\Bigg[\bigg(\int_0^{t\wedge T_n} \mathbb{1}_{\{a<X_s\leq b\}} d\langle M,M\rangle_s\bigg)^{p/2}\Bigg] \leq C_p(n^{p/4}+n^{p/2})(b-a)^{p/2}.$$

En utilisant (2.6), encore une fois avec X remplacé par X^{T_n} et en laissant $t\to\infty$, on obtient

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\geq 0}|Y^b_{s\wedge T_n}-Y^a_{s\wedge T_n}|^p\Big] \leq C_p(n^{p/4}+n^{p/2})(b-a)^{p/2}.$$

Puisque $p>2$, nous voyons que nous pouvons appliquer le lemme de Kolmogorov à obtenir l'existence d'une modification continue du processus $a\to(Y^a_{s\wedge T_n})_{s\geq 0}$, avec valeurs en $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Écrivons $(Y_s^{(n),a})_{s\geq 0}$ pour cette modification continue.
Alors, si $1\leq n<m$, pour tout a fixe, nous avons $Y_s^{(n),a}=Y_{s\wedge T_n}^{(m),a}$ pour tout $s\geq 0$, p.s. Par un argument de continuité, cette dernière égalité vaut simultanément pour $a\in R$ et tous $s\geq 0$, en dehors d'un seul ensemble de probabilités zéro. Il s'ensuit que nous pouvons définir un processus $\widetilde{Y}^a, a\in\mathbb{R})$ avec des valeurs en $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, avec échantillon continu chemins tels que pour tout $n\geq 1, Y_s^{(n),a}=\widetilde{Y}^a_{s\wedge T_n}$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ et tout $s\geq 0$, p.s. Le processus $\widetilde{Y}^a, a\in\mathbb{R})$ est la modification continue souhaitée.

□

Proposition 2.7.1. *Soit M une martingale locale continue telle que $M_0=0$. Alors nous avons $\langle M,M\rangle=0$ si et seulement si $M=0$*

Remarque 2.7.1. *En appliquant la borne du lemme 2.7.1 à X^{T_n} (avec T_n comme dans le précédent preuve) et en laissant a tendance à b, on obtient que pour chaque $b\in\mathbb{R}$,*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=b\}} d\langle M,M\rangle_s = 0$$

pour tout $t\geq 0$ p.s. Par conséquent en utilisant la proposition 2.7.1 nous avons également

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=b\}} dM_s = 0,$$

pour tout $t\geq 0$ p.s.

Preuve de la proposition 3.6.1 : Avec un léger abus de notation, nous écrivons toujours $(Y^a, a\in\mathbb{R})$ pour la modification continue obtenue dans la deuxième affirmation du lemme 2.7.1. nous laissez également $(Z^a, a\in\mathbb{R})$ être le processus avec des valeurs en $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ défini par

$$Z^a_t=\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} dV_s.$$

Selon la formule de Tanaka, nous avons pour tout $a\in\mathbb{R}$ fixe,

$$L^a_t = 2\Big((X_t-a)^+-(X_0-a)^+-Y^a_t-Z^a_t\Big),\ \ \textit{pour tout } t\geq 0 \textit{ p.s.}$$

Le côté droit du dernier affichage fournit la modification de càdlag souhaité. En effet, le processus

$$a \mapsto \Big((X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - Y_t^a \Big)_{t \geq 0}$$

a des chemins d'échantillonnage continus, et d'autre part le processus $a \mapsto Z^a$ a des chemins d'échantillonnage continus càdlàg : pour tout $a \in \mathbb{R}$, le théorème de convergence dominé montre que

$$\begin{array}{ccc} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} dV_s & \longrightarrow_{a \downarrow a_0} & \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a_0\}} dV_s, \\ \\ \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} dV_s & \longrightarrow_{a \uparrow a_0, a < a_0} & \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a_0\}} dV_s, \end{array}$$

uniformément sur chaque intervalle de temps compact. l'écriture précédent montre également que le saut $Z^{a_0} - Z^{a_0-}$ est donné par

$$Z_t^{a_0} - Z_t^{a_0-} = - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = a_0\}} dV_s$$

et ceci complète la preuve du théorème. □

Désormais, nous ne nous tratons que la modification càdlàg des temps locaux obtenue dans le théorème 2.7.1.

Remarque 2.7.2. *Pour illustrer le théorème 2.7.1 définissons $W_t = |X_t|$, qui est également une demi $-$ partition selon la formule de Tanaka (2.2), on a*

$$\begin{aligned} W_t = (W_t)^+ &= |X_0| + \int_0^t \mathbb{1}_{\{|X_s > 0|\}} (sign(X_s dX_s + dL_s^0 + \tfrac{1}{2} L_s^0(W) \\ &= |X_0| + \int_0^t sign(X_s dX_s + \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = 0\}} dX_s + \tfrac{1}{2} L_s^0(W), \end{aligned}$$

notant que $\int_0^t \mathbb{1}_{\{|X_s > 0|\}} dL_s^0 = 0$ par la propriété de support de temps locale (corollaire 2.4.1). En comparant la formule résultante avec (2.2) écrite avec $a = 0$, nous obtenons

$$L_t^0(W) = 2L_t^0(X) - 2\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = 0\}} dX_s = L_t^0(X) + L_t^{0-}(X),$$

en utilisant (2.4). La formule $L_t^0(W) = L_t^0(X) + L_t^{0-}(X)$ est un cas particulier de la formule plus générale $L_t^a(W) = L_t^a(X) + L_t^{(-a)-}(X)$, pour tout $a \geq 0$, qui se déduit facilement du corollaire 2.7.1 ci-dessous. Nous notons que la propriété support de temps locale implique $L_t^a(W) = 0$ pour tout $a < 0$, et en particulier $L_t^{0-}(W) = 0$. Nous laissons comme exercice au lecteur de vérifier que la formule (2.4) appliquée à $L_t^0(W) + L_W^{0-}(X)$ donne un résultat ce qui est cohérent avec l'expression précédente pour $L_t^0(W)$.

Nous allons maintenant donner une extension de la formule d'Itô (dans le cas où elle est appliquée à une fonction d'une seule semimartingale). Si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, la dérivée gauche f'_- est une fonction non décroissante monotone continue gauche, et il existe une mesure de Radon unique $f''(dy)$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f''([a,b)) = f'_-(b) - f'_-(a)$, pour tout $a < b$. On peut également interpréter f'' comme la dérivée seconde de f au sens de distributions. Notez que $f''(da) = f''(a)da$ si f est deux fois différenciable en continu. Si f est maintenant une différence de fonctions convexes, c'est-à-dire $f = f_1 - f_2$ où f_1 et f_2 sont convexes, nous pouvons toujours donner un sens à $\int f''(dy)\varphi(y) = \int f_1''(dy)\varphi(y) - \int f_2''(dy)\varphi(y)$ pour toute fonction mesurable bornée φ prise en charge sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.7.2. ***(Formule Itô généralisée)****[5]*
Soit f une différence des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout $t \geq 0$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X)f''(da).$$

Remarque 2.7.3. *Par le corollaire 2.4.1 et un argument continuité, nous avons*

$$L_t^a(X) = 0 \quad pour \quad tout \quad a \notin \left[\min_{0\leq s\leq t} X_s, \max_{0\leq s\leq t} X_s\right], \qquad p.s,$$

et en plus la fonction $a \mapsto L_t^a(X)$ est bornée, avec les observations précédant l'énoncé du théorème cela montre que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X)f''(da)$ a du sens.

Preuve du Théorème :
Par linéarité, il suffit de traiter le cas où f est convexe. De plus, par de simples arguments de "localisation", nous pouvons supposer que f'' est une mesure finie supportée sur l'intervalle $[-K, K]$ pour certains $K > 0$. En ajoutant une fonction affine à f, nous pouvons également supposer que $f = 0$ sur $(-\infty, -K]$. Ensuite, il est élémentaire de vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = L_t^a(X)(x-a)^+ f''(da),$$

et

$$f'_-(x)\int \mathbb{1}_{\{a<x\}}f''(da). \tag{2.7}$$

La formule de Tanaka donne pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + Y_t^a + Z_t^a + \frac{1}{2}L_t^a(X).$$

où nous utilisons la notation de la preuve du théorème (2.7.1) (et nous rappelons que $(Y^a, a \in \mathbb{R})$ représente la modification continue obtenue dans le lemme 2.7.1). On peut intégrer cette dernière égalité par rapport à la mesure finie $f''(da)$ et on obtient

$$f(X_t) = f(X_0) + \int Y_t^a f''(da) + \int Z_t^a f''(da) + \frac{1}{2}\int L_t^a(X)f''(da).$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int Z_t^a f''(da) &= \int \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} dV_s \right) f''(da) \\ &= \int_0^t \left(\int \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} dV_s \right) f''(da) \\ &= \int_0^t f'_-(X_s) dV_s.\end{aligned}$$

La preuve sera donc complète si nous pouvons également vérifier que

$$\int Y_t^a f''(da) = \int_0^t f'_-(X_s) dM_s. \tag{2.8}$$

Cette identité doit être considérée comme une sorte de théorème de Fubini impliquant une intégrale stochastique. Pour fournir une justification rigoureuse, il convient d'introduire les temps d'arrêts $T_n := inf s \geq 0 : \langle M, M \rangle_s \geq n$, pour tout $n \geq 1$. En rappelant (2.7), nous voyons que notre affirmation (2.8) suivra si on peut vérifier que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int \left(\int_0^{t\wedge T_n} \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} dM_s \right) f''(da) = \int_0^{t\wedge T_n} \left(\int \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} dM_s \right) f''(da), \qquad p.s \tag{2.9}$$

où dans le côté gauche, nous convenons que nous considérons la modification continue de $a \mapsto \int_0^{t\wedge T_n} \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} dM_s$ fournie par le lemme 2.7.1. Il est simple de vérifier que le côté gauche de (2.9) définit une martingale M_t^f dans $\mathbb{H}^2$, et de plus pour toute autre martingale N dans $\mathbb{H}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle M^f, N \rangle_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty^f N_\infty] &= \mathbb{E}\left[\int \left(\int_0^{T_n} \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} d\langle M, N \rangle_s \right) f''(da) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} \left(\int \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} f''(da) \right) d\langle M, N \rangle_s \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{T_n} \left(\int \mathbb{1}_{\{X_s>a\}} f''(da) \right) dM_s \right) N_\infty \right].\end{aligned}$$

Par un argument de dualité dans $\mathbb{H}^2$, cela suffit pour vérifier que M_t^f coïncide avec la martingale de $\mathbb{H}^2$ dans la partie droite de (2.9). Ceci complète la preuve. □

Corollaire 2.7.1. ***(Formule de la densité du temps d'occupation)***
On a presque sûrement, pour tout $t \geq 0$ et toute fonction mesurable non négative φ sur $\mathbb{R}$,

$$\int_0^t \varphi(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(X) da.$$

Plus généralement, nous avons p.s pour toute fonction mesurable non négative F sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty F(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} da \int_0^\infty F(s, a) d_s L_s^a(X).$$

preuve : Fixons $t \geq 0$ et considérons une fonction continue non négative φ sur $\mathbb{R}$ avec un support compact. Soit f une fonction deux fois continuellement différenciable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' = \varphi$. Notez que f est convexe depuis $\varphi \geq 0$. En comparant la formule d'Itô appliquée à $f(X_t)$ et la formule du théorème 2.7.2, nous obtenons immédiatement que p.s,

$$\int_0^t \varphi(X_s)d\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)L_t^a(X)da.$$

Cette formule est valable simultanément (en dehors d'un ensemble de probabilités zéro) pour tout $t \geq 0$ (par un argument de continuité) et pour chaque fonction φ appartenant à un sous-ensemble dense dénombrable de l'ensemble de toutes les fonctions continues non négatives sur $\mathbb{R}$ avec support compact. Cela suffit pour conclure que p.s, pour tout $t \geq 0$, la mesure aléatoire

$$A \mapsto \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

a la densité $(L_t^a(X))_{a\in\mathbb{R}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Ceci donne la première affirmation du corollaire. Il s'ensuit que la formule de la deuxième assertion est vraie lorsque F est du type

$$F(s, a) = \mathbb{1}_{[u,v]}(s)\mathbb{1}_A(a)$$

où $0 \leq u \leq v$ et A est un $sous-ensemble$ borel de $\mathbb{R}$. Par conséquent, les mesures $\sigma - finies$

$$B \longrightarrow \int_0^\infty \mathbb{1}_B(s, X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

et

$$B \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} da \int_0^\infty \mathbb{1}_B(s, a)d_sL_s^a(X)$$

prendre la même valeur pour B de la forme $B = [u, v] \times A$, ce qui implique que les deux mesures coïncident. $\square$

Si $X = M + V$ est une semimartingale continue, alors une application immédiate de la formule de densité de temps d'occupation donne pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=b\}}d\langle M, M\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{b\}}(a)L_t^a(X)da = 0.$$

Cette propriété a déjà été dérivée après la preuve du lemme 2.7.1. De l'autre il peut exister des valeurs de b telles que

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=b\}}dV_s \neq 0,$$

et ces valeurs de b correspondent à des discontinuités de temps locale par rapport à la variable d'espace, comme le montre le théorème 2.7.1.

Corollaire 2.7.2. *Si X est de la forme $X_t = X_0 + V_t$, où V est un processus de variation finie, alors $L_t^a(X) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.*

Preuve :D'aprés la formule de densité de temps d'occupation et le fait que $\langle X, X\rangle = 0$, nous obtenons $\int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(X) da = 0$ pour toute fonction mesurable non négative φ, et le résultat souhaité suit. $\square$

Remarque 2.7.4. *Nous aurions pu tirer le dernier corolaire directement de la formule de Tanaka.*

2.8 Approximations des temps locaux

Notre premier résultat d'approximation est une conséquence facile de la densité d'occupation formule de temps.

Proposition 2.8.1. *Soit X une semimartingale continue. Puis p.s pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$,*

$$L_t^a = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\{a \leq X_s \leq a+\epsilon\}} d\langle X, X\rangle_s.$$

Preuve : Par la densité de la formule du temps d'occupation,

$$\frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\{a \leq X_s \leq a+\varepsilon\}} d\langle X, X\rangle_s = \frac{1}{\epsilon} \int_a^{a+\epsilon} L_t^a(X) db,$$

et le résultat découle de la continuité droite de $b \mapsto L_t^a(X)$ en a (théorème 2.7.1).$\square$

Remarque 2.8.1. *Le même argument donne*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\{a-\epsilon \leq X_s \leq a+\epsilon\}} d\langle X, X\rangle_s = \frac{1}{2}(L_t^a(X) + L_t^{a-}(X)).$$

La quantité $\widetilde{L}_t^a(X) := \frac{1}{2}(L_t^a(X) + L_t^{a-}(X))$ est parfois appelée symétrique temps locale de la semimartingale X. Notons que la formule de densité de temps d'occupation reste vraie si $L_t^a(X)$ est remplacée par $\widetilde{L}_t^a(X)$ (en effet, $\widetilde{L}_t^a(X)$ et $L_t^a(X)$ peuvent différer dans au plus grand nombre de valeurs de a). La formule généralisée d'Itô (théorème 2.7.2) reste également vraie si $L_t^a(X)$ est remplacée par $\widetilde{L}_t^a(X)$, à condition que la dérivée gauche f'_- soit remplacée par $\frac{1}{2}(f'_+ + f'_-)$. Des observations similaires s'appliquent aux formules de Tanaka.

En conséquence de la proposition précédente et du lemme 2.7.1, nous dérivons une borne utile sur les moments des temps locaux.

Corollaire 2.8.1. *Soit $p \geq 0$. Il existe une constant C_p tel que, pour tout semimartingale X avec décomposition canonique $X = M + V$, nous avons pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[(L_t^a(X)^p)] \leq C_p \bigg(\mathbb{E}[(\langle M, M\rangle_t)^{p/2}] + \mathbb{E}\bigg[\bigg(\int_0^t |dV_s| \bigg)\bigg].$$

Preuve : Cela découle facilement de la limite de lemme 2.7.1, en utilisant l'approximation de $L_t^a(X)$ dans la proposition 2.8.1 et le lemme de Fatou. $\square$

Nous passons ensuite à l'approximation croisée de temps locale. Nous devons d'abord introduire une notation. Soit X une semimartingale continue et $\epsilon > 0$. Nous introduisons ensuite deux séquences $(\sigma_n^\epsilon)_{n\geq 1}$ et $(\tau_n^\epsilon)_{n\geq 1}$ des temps d'arrêt, qui sont définis de manière inductive par

$$\sigma_1^\epsilon := \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}, \qquad \tau_1^\epsilon := \inf\{t \geq \sigma_1^\epsilon : X_t = \epsilon\},$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\sigma_{n+1}^\epsilon := \inf\{t \geq \tau_1^\epsilon : X_t = 0\}, \qquad \tau_{n+1}^\epsilon := \inf\{t \geq \sigma_n^\epsilon : X_t = \epsilon\}.$$

Nous définissons ensuite le nombre de croisement ascendant de X le long de $[0, \epsilon]$ avant l'instant t par

$$N_\epsilon^X(t) = Card\{n \geq 1 : \tau_n^\epsilon \leq t\}.$$

Proposition 2.8.2. *Nous avons pour tout $t \geq 0$,*

$$\epsilon N_\epsilon^X(t) \longrightarrow_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2} L_t^0(X)$$

en probabilité.

Preuve : Pour simplifier la notion, nous écrivons L_s^0 au lieu de $L_s^0(X)$ dans cette preuve. Nous utilisons d'abord formule de Tanaka pour obtenir, pour tout $n \geq 0$

$$(X_{\tau_n^\epsilon\wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\epsilon\wedge t})^+ = \int_{\sigma_n^\epsilon\wedge t}^{\tau_n^\epsilon\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} dX_s + \frac{1}{2}(L^0_{\tau_n^\epsilon\wedge t} - L^0_{\sigma_n^\epsilon\wedge t}).$$

On additionne la dernière identité sur tout $n \geq 1$ pour obtenir

$$\sum_{n=1}^\infty ((X_{\tau_n^\epsilon\wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\epsilon\wedge t})^+) = \int_0^t \left(\sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{(\epsilon_n^\epsilon - \tau_n^\epsilon]}(s)\right) \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} dX_s + \frac{1}{2}\sum_n^\infty (L^0_{\tau_n^\epsilon\wedge t} - L^0_{\sigma_n^\epsilon\wedge t}). \tag{2.10}$$

Notez qu'il existe seulement un nombre fini de valeurs de n telles que $\tau_\epsilon^n \leq t$, et que l'interversion de la série et de l'intégrale stochastique est justifiée en approximant la série avec des sommes finies.

Considérez les différents termes dans(2.10). Puisque le temps locale L^0 n'augmente pas sur des intervalles de type $[\tau_n^\epsilon, \sigma_{n+1}^\epsilon)$ (ni sur $[0, \sigma_1^\epsilon)$), nous avons

$$\sum_n^\infty (L^0_{\tau_n^\epsilon\wedge t} - L^0_{\sigma_n^\epsilon\wedge t} = \sum_n^\infty (L^0_{\sigma_{n+1}^\epsilon\wedge t} - L^0_{\sigma_n^\epsilon\wedge t}) = L_t^0.$$

Ensuite, notant que $(X_{\tau_n^\epsilon\wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\epsilon\wedge t})^+ = \epsilon$ si $\tau_n^\varepsilon \leq t$, on a

$$\sum_{n=1}^\infty ((X_{\tau_n^\epsilon\wedge t})^+ - (X_{\sigma_n^\epsilon\wedge t})^+) = \epsilon N_\epsilon^X(t) + u(\epsilon),$$

où $0 \leq u(\epsilon) \leq \epsilon$.
À partir de (2.10) et des deux derniers affichages, le résultat de la proposition suivra si nous pouvons vérifier que

$$\int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\sigma_n^\epsilon, \tau_n^\epsilon]}(s) \right) \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} dX_s \longrightarrow_{\epsilon \to 0} 0$$

en probabilité,puisque

$$0 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\sigma_n^\epsilon, \tau_n^\epsilon]}(s) \right) \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} \leq \mathbb{1}_{0 < X_s \leq \epsilon}$$

et $\mathbb{1}_{0 < X_s \leq \epsilon} \longrightarrow 0$ quand $\epsilon \to 0$. □

Chapitre 3

Quelques applications sur les EDSs

3.1 Le temps local du mouvement brownien linéaire

Tout au long de cette section, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un véritable mouvement brownien partant de 0 et $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration canonique (terminée) de B.
Le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Trotter, est essentiellement un retraitement des résultats des sections précédentes dans le cas particulier d'un Mouvement brownien. Pourtant, l'importance du résultat justifie cette répétition. Nous écrivons $\sup(\mu)$ pour le support topologique d'une mesure finie μ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 3.1.1. ***(Trotter)*** *Il existe un processus (unique) $(L_t^a(B))_{a\in\mathbb{R},t\geq 0}$, dont les chemins d'échantillonnage sont des fonctions continues de la paire (a,t), de sorte que, pour chaque fixe $a \in \mathbb{R}, L_t^a(B))_{t\geq 0}$ est un processus croissant, et comme pour tout $t \geq 0$, pour tout φ mesurable non négatif sur $\mathbb{R}$,*

$$\int_0^t \varphi(B_s)ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)L_t^a(B)da.$$

De plus, a.s. pour chaque $a \in \mathbb{R}$,

$$supp(d_s L_s^a(B)) \subset \{s \geq 0 : B_s = a\}, \tag{3.1}$$

et cette inclusion est une égalité avec probabilité un si a est fixé.

Preuve :
La première assertion suit en appliquant le théorème 2.7.1 et le corollaire 2.7.1 à $X = B$, notant que $\langle B, B\rangle_t = t$. Nous avons déjà vu que l'inclusion (3.1) est de probabilité 1 si a est fixe, donc simultanément pour tous les rationnels, p.s. Un argument de continuité nous permet d'obtenir que (3.1) est valable simultanément pour tout $a \in \mathbb{R}$ en dehors d'un seul ensemble de probabilités zéro. En effet, supposons que pour certains $a \in \mathbb{R}$ et $0 \leq s < t$ nous avons $L_t^a(B) > L_s^a(B)$ et $B_r \neq a$ pour chaque $r \in [s,t]$. On peut alors trouver un b rationnel dans $\mathbb{R}$ suffisamment proche de a tel que les mêmes propriétés se maintiennent lorsque a est remplacé par b, ce qui donne

une contradiction.
Enfin, vérifions que (3.1) est un p.s. égalité si $a \in \mathbb{R}$ est fixe. Fixons donc $a \in \mathbb{R}$, et pour tout $q \geq 0$ (rationnel), définissons

$$H_q := \inf\{t \geq q : B_t = a\}.$$

Notre réclamation suivra si nous pouvons vérifier que p.s. pour tout $\epsilon > 0$, $L^a_{H_q+\epsilon}(B) > L^a_{H_q}(B)$. En utilisant la forte propriété de Markov au temps H_q, il suffit de prouver que si B' est un vrai mouvement brownien partant de a, on a $L^a_\epsilon(B') > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, p.s. Clairement, nous pouvons prendre $a = 0$. Nous observons ensuite que on a

$$L^0_\epsilon(B) =^{(d)} \sqrt{\epsilon} L^0_1(B),$$

par un argument de mise à l'échelle facile (utilisez par exemple les approximations de la section précédente). Aussi $P(L^0_1 > 0) > 0$ puisque $\mathbb{E}[L^0_1(B)] = \mathbb{E}[|B_1|]$ selon la formule de Tanaka. Une application de la loi zéro-un de Blumenthal à l'événement

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \{L^0_{2^{-n}}(B) > 0\} = \lim_{n\to\infty} \uparrow \{L^0_{2^{-n}}(B) > 0\}$$

complète la preuve. □

Proposition 3.1.1.

i Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$.Alors $L^0_{T_a}(B)$ a une distribution exponentielle de moyenne $2|a|$.

ii Soit $a > 0$ et $U_a := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$. Alors $L^0_{U_a}(B)$ a une exponentielle distribution avec moyenne a.

Preuve :

i Par de simples arguments d'échelle et de symétrie, il suffit de prendre $a = 1$. On observe alors que $L^0_\infty(B) = \infty$ p.s. En effet, l'argument de mise à l'échelle de la preuve précédente montre que $L^0_\infty(B)$ a la même distribution que $\lambda L^0_\infty(B)$, pour tout $\lambda > 0$, et nous avons également vu que $L^0_\infty(B) > 0$ p.s. Fixons $s > 0$ et définissons

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : L^0_t(B) > s\},$$

de sorte que τ soit un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_t)$. De plus, $B_\tau = 0$ par la propriété support de temps locale. Par la forte propriété Markov,

$$B'_t := B_{\tau+t}$$

est un mouvement brownien partant de 0, qui est également indépendant de $\mathcal{F}_\tau$. La proposition 2.8.1 donne, pour tout $t \geq 0$,

$$L^0_t(B') = B^0_{\tau+t}(B) - s.$$

Sur l'événement $\{L^0_{T_1}(B) \geq s\} = \{\tau \leq T_1\}$, on a donc

$$L^0_{T_1}(B) - s = L^0_{T_1-\tau}(B') = L^0_{T'_1}(B'),$$

où $T'_1 := \inf\{t \geq 0 : B'_1\}$. Puisque l'événement $\{\tau \leq T$ est $\mathcal{F}_\tau-$mesurable et B' est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$, nous obtenons que la distribution conditionnelle de $L^0_{T_1}(B) - s$ sachant que $L^0_{T_1}(B) \geq s$ est la même que la distribution inconditionnelle de $L^0_{T_1}(B)$. Cette implique que la distribution de $L^0_{T_1}(B)$ est exponentielle.

Enfin, la formule de Tanaka montre que $\frac{1}{2}\mathbb{E}[L^0_{t\wedge T_1}] = \mathbb{E}[(B_{t\wedge T_1})^+]$. Lorsque $t \to \infty, \mathbb{E}[L^0_{t\wedge T_1}]$ converge vers $\mathbb{E}[L^0_{T_1}]$ par convergence monotone et $\mathbb{E}[(B_{t\wedge T1})^+]$ converge vers $\mathbb{E}[(B_{T1})^+]$ par convergence dominée, puisque $0 \leq (B_{t\wedge T_1})^+ \leq 1$. Ceci montre que $\mathbb{E}[L_{t\wedge T_1}] = 2$, comme souhaité.

ii L'argument est exactement similaire. Nous utilisons maintenant la formule de Tanaka (2.2) pour vérifier que $\mathbb{E}[L^0_{U_a}(B)] = a$. □

Remarque 3.1.1. *On peut donner une preuve alternative de la proposition en utilisant le calcul stochastique. Pour obtenir (ii), par exemple utilisez la formule d'Itô pour vérifier que, pour tout $\lambda > 0$,*

$$(1 + \lambda|B_t|)\exp(-\lambda L^0_t(B))$$

est une martingale locale continue, délimitée par $[0, Ua]$. Une application du théorème d'arrêt facultatif montre alors que $\mathbb{E}[\exp(-\lambda L^0_{U_a}(B))] = (1 + \lambda a)^{-1}$.

La preuve précédente a l'avantage d'expliquer l'apparence de la distribution exponentielle.

Pour tout $t \geq 0$, nous fixons

$$S_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s, \qquad I_t := \inf_{0\leq s\leq t} B_s.$$

Théorème 3.1.2. ***(Lévy)*** *Les deux processus $(S_t, S_t - B_t)_{t\geq 0}$ et $L^0_t(B), |B_t|)_{t\geq 0}$ ont la même distribution.*

Remarque 3.1.2. *Par un argument de symétrie évident, la paire $(-I_t, B_t - I_t)_{t\geq 0}$ a également la même distribution que $(S_t, S_t - B_t)_{t\geq 0}$.*

Preuve du théorème : Par la formule de Tanaka, pour tout $t \geq 0$,

$$|B_t| = -\beta_t + L^0_t(B), \tag{3.2}$$

où

$$\beta_t = -\int_0^t sgn(B_s)dB_s.$$

Depuis $\langle\beta,\beta\rangle_t = t$, donc β est un mouvement brownien commencé à partir de 0. Nous affirmons alors que pour tout $t \geq 0$,

$$L_t^0(B) = \sup\{\beta_s : s \leq t\}.$$

Le fait que $L_t^0(B) \geq \sup\{\beta_s : s \leq t\}$ soit immédiat puisque (3.2) montre que $L_t^0(B) \geq L_t^0(B)$ pour tout $s \in [0,t]$. Pour obtenir l'inégalité inverse, écrivons γ_t pour le dernier zéro de B avant l'instant t. Par la propriété de support de temps locale, $L_t^0(B) = L_{\gamma_t}^0(B)$, et en utilisant (3.2), $L_{\gamma_t}^0(B) = \beta_{\gamma_t} \leq \sup\{\beta_s : s \leq t\}$.
Nous avons ainsi prouvé p.s.

$$(L_t^0(B), |B_t|)_{t\geq 0} = (\sup\{\beta_s : s \leq t\}, \sup\{\beta_s : s \leq t\} - \beta_t)_{t\geq 0},$$

et puisque $(\beta_s)_{s\geq 0}$ et $(B_s)_{s\geq 0}$ ont la même distribution, la paire dans la côté droite a la même disribution que $(S_t, S_t - B_t)_{t\geq 0}$. □

Proposition 3.1.2. *Nous avons p.s.*

$$\{t \geq 0 : B_t = 0\} = \{\tau_s : s \geq 0\} \cup \{\tau_{s-} : s \in D\}$$

où D est l'ensemble dénombrable des temps de saut de $(\tau_s)_{s\geq 0}$.

Preuve : Nous savons par (3.1) que p.s.

$$supp(d_t L_t^0(B)) \subset \{t \geq 0 : B_t = 0\}.$$

Il s'ensuit que tout instant t de la forme $t = \tau_s$ ou $t = \tau_{s-}$ doit appartenir à l'ensemble zéro de B. Inversement, rappelant que (3.1.2) est un l'égalité p.s. pour $a = 0$, nous obtenons également cela, pour tout t tel que $B_t = 0$, nous avons soit $L_{t+\epsilon}^0(B) > L_t^0(B)$ pour tout $\epsilon > 0$, soit si $t > 0$, $L_t^0(B) > L_{t-\epsilon}^0(B)$ pour chaque $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < t$ (ou les deux simultanément), ce qui implique que nous avons $t = \tau_{L_t^0(B)}$ ou $t = \tau_{L_t^0(B)-}$. □

3.2 La loi Kallianpur-Robbins

Dans cette section, nous utilisons les temps locaux pour donner une courte preuve de la loi de Kallianpur-Robbins pour le mouvement brownien plan. Nous laissons B représenter un mouvement brownien complexe et pour simplifier nous supposons que $B_0 = 1$ (le cas général suivra ensuite, par exemple en appliquant la propriété de Markov forte au premier moment de frappe du cercle unitaire).D'après le théorème ci-dessous 7.19, nous pouvons écrire $|B_t| = \exp(\beta_{H_t})$ où β est un véritable mouvement brownien partant de 0, et

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2} = \inf\{s \geq 0 : \int_0^s \exp(2\beta_u)du > t\}.$$

Pour tout $\lambda > 0$, nous considérons également le mouvement Brownien à l'échelle $\beta_t^{(\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\beta_{\lambda^2 t}$, et pour $t > 1$ nous utilisons la notation $\lambda_t = (\log t)/2$.
Nous visons à prouver que pour tout $R > 0$,

$$\frac{2}{\log t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s|<R\}}ds$$

converge en distribution exponentielle de moyenne R^2. À cette fin, nous écrivons pour tout $t > 1$ fixe,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\log t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s|<R\}}ds &= \frac{1}{\lambda_t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{\beta_{H_s}<\log R\}}ds \\
&= \frac{1}{\lambda_t}\int_0^{H_t} \mathbb{1}_{\{\beta_u<\log R\}}\exp(2\beta_u)du \\
&= \lambda_t\int_0^{(\lambda_t)^{-2}H_t} \mathbb{1}_{\{\beta_u^{(\lambda_t)}<(\lambda_t)^{-1}\log R\}}\exp(2\lambda_t\beta_u^{(\lambda_t)})du \\
&= \lambda_t\int_{-\infty}^{(\lambda_t)^{-1}\log R}\exp(2\lambda_t a)L^a_{(\lambda_t)^{-2}H_t}(\beta^{(\lambda_t)})da \\
&= \int_0^R L^{(\lambda_t)^{-1}\log r}_{(\lambda_t)^{-2}H_t}(\beta^{(\lambda_t)})rdr.
\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière égalité, nous avons appliqué la formule de densité de temps d'occupation (Corollaire 2.7.1) au mouvement brownien $\beta^{(\lambda_t)}$, et dans la dernière nous avons utilisé le changement des variables $r = e^{\lambda_t a}$. Comme $t \to \infty$, $(\lambda_t)^{-1}\log r \to 0$, pour tout $r > 0$, et le lemme 7.21 nous indique également que $(\lambda_t)^{-2}H_t - T_1^{(\lambda_t)})$ converge en probabilité vers 0, avec la notation $T_1^{(\lambda_t)} = \inf\{s \geq 0 : \beta_s^{\lambda_t} = 1\}$. De la continuité conjointe des temps locaux browniens (Théorème 3.1.1), nous obtenons alors que pour tout $\epsilon \in (0, R)$,

$$\sup_{\epsilon\leq r\leq R}\left|L^{(\lambda_t)^{-1}\log r}_{(\lambda_t)^{-2}H_t}(\beta^{(\lambda_t)}) - L^0_{T_1^{(\lambda_t)}}(\beta^{(\lambda_t)})\right| \longrightarrow_{t\to\infty} 0,$$

en probabilité. En combinant cela avec le résultat précédent, nous obtenons que

$$\left|\frac{2}{\log t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s|<R\}}ds - \frac{R^2}{2}L^0_{T_1^{(\lambda_t)}}(\beta^{(\lambda_t)})\right| \longrightarrow_{t\to\infty} 0,$$

en probabilité. Pour compléter la preuve, notons simplement que la loi de $L^0_{T_1^{(\lambda)}}(\beta^{(\lambda)})$ ne dépend pas de $\lambda > 0$, et est exponentielle avec la moyenne 2, par la proposition 3.1.

Exemple 3.2.1. *Soit B un mouvement brownien standard issu de 0 et $a, b > 0, a \neq b$. On pose*

$$Y_t = |B_t| \quad et \quad Z_t = aB_t^+ - bB_t^-.$$

Le but de cet exemple est de calculer $L_t^0(Y)$ et $L_t^0(Z)$ en fonction de $L_t^0(B)$.

Par définition des temps locaux, on a pour toute fonction f continue à support compact :

$$\int_0^t f(Y_s) d < Y >_s = \int_{\mathbb{R}} f(x) L_t^x(Y) dx.$$

On obtient en remplaçant Y_t par $|B_t|$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) L_t^x(Y) dx = \int_0^t f(|B_s|) ds = \int_{\mathbb{R}} f(|x|) L_t^x(B) dx.$$

On obtient alors pour tout $x > 0$,

$$L_t^x(Y) = L_t^x(B) + L_t^{-x}(B),$$

et pour tout $x < 0, L_t^x(Y) = 0$. Par continuité à droite de $x \mapsto L_t^x(Y)$, on obtient $L_t^0(Y) = 2L_t^0(B)$, et $L_t^{0-}(Y) = 0$.

Pour ce qui est de Z, on le réécrit de la manière suivante, en utilisant la formule de Tanaka-Meyer, et en écrivant B^- en fonction de B^+ et B :

$$Z_t = aB_t^+ - bB_t^- = a(\frac{1}{2} L_t^0 + \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s) - b(\frac{1}{2} L_t^0 - \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s \leq 0\}} dB_s).$$

On a donc décomposé Z_t en une martingale locale et le processus $(\frac{a-b}{2} L_t^0, t \geq 0)$, à variation finie (car continu et monotone). On peut donc appliquer la formule donnant les sauts du temps local pour obtenir :

$$L_t^0(Z) - L_t^{0-}(Z) = (a-b) \int_0^t L_s^0 \mathbb{1}_{\{Z_s = 0\}} ds = (a-b) \int_0^t L_s^0(B) \mathbb{1}_{\{B_s = 0\}} ds = (a-b) L_t^0,$$

car L_t^0 ne croit que sur l'ensemble des instants t tels que $B_t = 0$ et cela d'après la propriété fondamentale des temps locaux. On en déduit que $L_t^x(Z)$ est discontinu en 0, et le saut réalisé par le temps local en ce point vaut $(a-b)L_t^0$.

Conclusion

Dans ce mémoire, j'ai étudié les différentes propriétés du temps locaux relatifs aux semimartingales , mais aussi pour le mouvement Brownien en particulier ;

– J'ai d'abord présenté les ingrédients correspondants à cette théorie (processus stochastiques, et calcul stochastique sous-jacent).
– J'ai présenté avec détails les notions importantes relatives à cette théorie de temps local ainsi que quelques ses propriétés concernant la généralisation de la formule d'Itô pour les différentes versions.
– J'ai terminé mon mémoire avec quelques exemples montrant comment exprimer le temps local dans un cadre Brownien.

Bibliographie

[1] Mouvement Brownien-Intégrale Stochastique, Séminaire des doctorants Bordeaux, mercredi 12 mars 2003

[2] Philippe Bougerol, Calcul Stochastique des martingales continues, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6,2015.

[3] Hervé Guiol, Calcul Stochastique Avancé, TIMB/TIMC - IMAG, 2006.

[4] Nathanael Berestycki, Introduction to the theory of Brownian Local Times, Probability Graduate Students Seminar, Thursday 02/06/03.

[5] Jean-François Le Gall. Brownian motion, Martingales and stochastic calculus. 5th edition, 2016.