République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2020/2021

Calcul Fractionnaire du type Hadamard

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Wassila Nouari [1]

Sous la direction de

Dr. F.Z. Mostefai

Soutenue le 13/07/2021 devant le jury composé de

N. BEKKOUCHE	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
F.Z. MOSTEFAI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
S. ABBAS	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
B. SAADLI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : wassilanouari20@gmail.com

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

- Ma chère Mère et mon père qui m'ont toujours soutenue,
- Mes chers frères, soeurs et leurs enfants,
- Toute ma famille,
- Tout mes amis.

Remerciements

Bismi *Allah*. Je remercie *Allah* qui m'a donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

– J'exprime ma reconnaissance à l'égard de mon encadreur *Fatima Zohra MOSTEFAI* pour ses multiples conseils.
– Je remercie tous les membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs remarques.
– J'adresse un grand **Merci** à mes parents qui ont toujours été présent à mes cotés.
– Je remercie mes frères et mes soeurs pour leurs encouragements.
– J'adresse aussi mes remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions du primaire aux études universitaires.

Table des matières

Index des notations

- $\mathbb{R}$ Le corps des nombres réels.
- $\mathbb{C}$ Ensemble des nombres complexes.
- $L^p[a,b]$ Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0,+\infty[$ intégrables.
- $C([a,b],X)$ Espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace de Banach.
- $AC[a,b]$ ou $AC^1[a,b]$ Espaces des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.
- $\Gamma(.)$ Fonctions Gamma d'Euler.
- $B(.,.)$ Fonctions Bêta D'Euler.
- $\|.\|$ La norme.
- ${}_HD_a^\alpha$ Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}_HI_a^\alpha$ Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard.
- I_a^α Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^{RL}D_a^\alpha$ Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^cD_a^\alpha$ Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la notion de dérivée d'ordre entier α d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x à des valeurs non entières de α. Si α est négatif, il s'agit d'une intégration non entière et si α est positif, on parle d'une dérivation non entière.
Le sujet du calcul fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour résoudre les équations différentielles et intégrales , et divers autres problèmes impliquant des fonctions spéciales de la physique mathématique, ainsi que leurs extensions et généralisations dans une et plusieurs variables.
L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ème siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hôspital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{x^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse , a voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit à L'Hôspital :"... cela conduirait à une paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaitre les premières "conséquences utiles ". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837 .
Indépendamment, Riemman a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis, qu'elle porte le nom "Approche de Riemman-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle Grunwal-Leitnikov, Weyl et Hadamard.
Le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grâce à son immense application dans différents domaines tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finances et d'autres sciences qui ont été développé dans la dernière décennie, en plus de l'intérêt que lui portent beaucoup de chercheurs en mathématiques.
L'objectif de ce mémoire est de donner quelques résultats concernant les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires de type Hadamard et au sens de Hadamard. On donne aussi des résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes aux limites avec une dérivée fractionnaire au sens de Hadamard. Notre mémoire est divisée en trois chapitre.

- Dans le premier chapitre, on donne quelques notions, préliminaires et définitions essentielles, utilisés dans le calcul fractionnaire.
- Dans les chapitres 2 et 3, on donne des conditions necessaires et suffisantes pour l'existence des solutions pour des problèmes aux limites dont la dérivée fractionnaire est au sens de Hadamard. On illustre ce travail par des exemples d'applications.

Les résultats de ces deux derniers chapitres se trouvent dans les travaux de B. Ahmad et S.K. Ntouyas [1] et [2].

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. *[5] On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace.*

Définition 1.1.2. *[5] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

Définition 1.1.3. *[5] Soient A et B deux espaces de Banach. Un opérateur $Q : A \to B$ est complètement continu s'il transforme tout borné de A en une partie relativement compact de B.*

Définition 1.1.4. *[5] On dit que l'opérateur Q est complètement continue s'il est continue et compact.*

Définition 1.1.5. *[5] Soit $D \subset I \times E$ où E est un espace et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une application f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur D s'il existe une constante $k > 0$ telle que :*
$\forall (t,x) \in D, \forall (t,y) \in D$

$$|f(t,x) - f(t,y)|_E < k|x - y|_E.$$

Si $k < 1$, alors f est contractante.

1.2 Espaces Fonctionnels

1.2.1 Espace $L^p(a,b)$

Soit (a,b) $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1. *[3] On appelle $L^p(a,b)$ $(1 < p \leq +\infty)$ l'espace des fonctions f mesurables intégrables au sens de Lebesgue à valeurs réelles telle que la norme $\|f\|_p < +\infty$, ou*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < +\infty).$$

Pour $p = +\infty$,*on a*
$$\|f\|_\infty = ess \sup_{a \le x \le b} |f(x)|,$$
et $L^\infty(a,b)$ *est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur* (a,b).

1.2.2 Espaces des Fonctions Absolument Continues

Définition 1.2.2. *[4] On note par* $AC([a,b])$ *l'espace des fonctions absolument continues sur* $[a,b]$ *constitué des fonctions* f *qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables i.e :*
$$f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \quad telle\ que \quad \exists(\varphi \in L^1(a,b)).$$

Définition 1.2.3. *[4] Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on note par* $AC^n[a,b]$ *l'espace des fonctions à valeurs complexes* $f(x)$ *ayant des dérivées jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *continues sur* $[a,b]$ *telles que* $f^{(n-1)}(x) \in AC([a,b])$, *c'est-à-dire*
$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , et \quad (D^{n-1}f)(x) \in AC([a,b]), (D = \frac{d}{dx})\}.$$

En particulier on a $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$.

Définition 1.2.4. *[4] L'espace noté* $AC^n_\delta([a,b])$ *défini par*
$$AC^n_\delta([a,b]) = \{g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : \delta^{n-1}[g(x)] \in AC([a,b]), \delta = x\frac{d}{dx}\}.$$
est appelé espace des fonctions absolument continues avec un point qui égale 1.

1.2.3 Espaces des fonctions continues

Définition 1.2.5. *Soit* $\Omega = [a,b](-\propto \le a < b \le +\propto)$ *et* $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$.
On note par $C^n(\Omega)$ *l'espace dse fonctions* f *qui leurs dérivées d'ordre* n *sont continues sur* Ω,*muni de la norme :*
$$\|f\|_{C^n} = \Sigma_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C = \Sigma_{k=0}^n \max_{x\in\Omega} |f^{(k)}(x)|, f^{(k)}$$
En particulier si $n = 0$,$C^0(\Omega) = C(\Omega)$ *l'ecpace des fonctions continues sur* Ω *,muni muni de la norme :*
$$\|f\|_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Théorème 1.2.1. *(Arzelà-Ascoli)[5] Soit* A *un sous ensemble de* $C([a,b],\mathbb{R})$, A *est relativement compact dans* $C([a,b],\mathbb{R})$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble* A *est borné i.e il existe une constante* $k > 0$ *tel que*
$$\|f(x)\| \le k, \quad pour\ tout \quad x \in [a,b] \quad et\, f \in A.$$

2. *L'ensemble A est équicontinue i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon, \quad \textit{pour tout} \quad t_1, t_2 \in [a,b] \, et \, f \in A.$$

1.3 Fonction Spéciales

Dans cette section, on expose deux fonctions principales pour le calcul différentiel non entier. On définit la fonction Gamma et Bêta d'Euler, puis on introduit quelques propriétés liées à ces deux fonctions.

1.3.1 Fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma, qui permet de prolonger la notion du factorielle aux valeurs non entières, la fonction Gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée.

Définition 1.3.1. *[6] Pour tout nombre réel α tel que $\alpha > 0$, on définit la fonction Gamma d'Euler Γ par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0.$$

Proposition 1.3.1. *Pour tout $\alpha > 0$, la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \geq 1$.
3. $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$.

Exemple 1.3.1. *On donne sur cet exemple quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$*

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1$.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. *(L'intégrale de Gauss)*
- $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$.

1.3.2 Fonction Bêta D'Euler

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.3.2. *[6] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$ par*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt.$$

Remarque 1.3.1. *La relation entre la fonctions Gamma et la fonction Bêta est donnée par l'expression suivante*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = B(\beta, \alpha).$$

1.4 Notions Préliminaires en Calcul fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

1.4.1 Intégration et dérivation Fractionnaire au Sens de Riemann Liouville

Définition 1.4.1. *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha(\alpha > 0)$ de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in C[a,b]$ est donnée par*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.1}$$

Définition 1.4.2. *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha(\alpha > 0)$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est donnée par*

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) &= (D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) && (1.2)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. && (1.3) \end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$, et $[\alpha]$ est la partie entière de α. En particulier si $\alpha = 0$, alors

$$({}^{RL}D_a^0 f)(t) = (I_a^0 f)(t) = f(t)$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$(D_a^n f)(t) = f^{(n)}(t)$$

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

Exemple 1.4.1. *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(t) = (t-a)^\beta$, alors*

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\beta+\alpha} \\ ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

En effet,

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds. \tag{1.4}$$

En effectuant le changement de variable

$$s = a + u(t-a),\ 0 \le u \le 1$$

alors (1.4) devient

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du.$$

En utilisant la définition de fonction Bêta et la relation entre la fonction Bêta et la fonction Gamma, on trouve

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(t) &= \frac{B(\beta+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}.\end{aligned}$$

En particulier si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann Liouville d'une constante est en général non nulles. On a

$$({}^{RL}D_a^\alpha c) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

où c est une constante.

Énonçons maintenant quelques propriétés des opérateurs I^α et D^α.

Proposition 1.4.1. *Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors*

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha I_a^\beta f)(t) &= (I_a^{\alpha+\beta} f)(t) \\ &= (I_a^\beta I_a^\alpha f)(t).\end{aligned}$$

Proposition 1.4.2. *Soit $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, alors*

$$({}^{RL}D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Proposition 1.4.3. *Soit $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, alors*

$$I_a^\beta({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) \neq f(t).$$

1.4.2 Dérivation Fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.4.3. *Pour une fonction $f \in C^n[a,b]$, et $\alpha > 0$. La dérivée fractionnaire au sens du Caputo de f est définie par :*

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha)(t) &= (I_a^{n-\alpha} D_a^n f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.\end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$, avec $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Proposition 1.4.4. *:*

1. $({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t)$.
2. $({}^C D_a^\alpha c) = 0, \ c \in \mathbb{R}$.
3. ${}^C D_a^\alpha({}^C D_a^\beta f(t)) = ({}^C D_a^{\alpha+\beta} f)(t) =^C D_a^\beta({}^C D_a^\alpha f(t))$. *où* $f \in C^1[a,b]$, $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \alpha+\beta < 1$.

Démonstration. En effet pour 1.

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) &= I_a^{n-\alpha} D_a^n I_a^\alpha f(t)\\ &= I_a^{n-\alpha} D_a^n I_a^\alpha I_a^{\alpha-n} f(t)\\ &= I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha-n} f(t)\\ &= f(t).\end{aligned}$$

en effet pour 2 ,

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha c) &= I_a^{n-\alpha} D_a^n c\\ &= I_a^{n-\alpha} 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

en effet pour 3 ,

$$\begin{aligned}{}^C D_a^\alpha({}^C D_a^\beta f(t)) &= I_a^{1-\alpha} D_a^1 I_a^{1-\alpha} D_a^1 f(t)\\ &= I_a^{1-\alpha+\beta-\beta} D_a^1 I_a^{1-\alpha} D_a^1 f(t)\end{aligned}$$

On sait que $I_a^\beta D_a^1 f(t) = ({}^C D_a^{1-\beta} f(t)$. Alors,

$$\begin{aligned}I_a^{1-\alpha-\beta} I_a^\beta D_a^1 I_a^{1-\alpha} D_a^1 f(t) &= I_a^{1-\alpha-\beta} D_a^{1-\beta} I_a^{1-\alpha} D_a^1 f(t)\\ &= I_a^{1-\alpha-\beta} D_a^1 f(t).\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}{}^C D_a^\alpha({}^C D_a^\beta f(t)) &= {}^C D_a^{\alpha+\beta} f(t))\\ &= {}^C D_a^\beta({}^C D_a^\alpha f(t)).\end{aligned}$$

□

Lemme 1.4.1. *Soient* $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}*$, *et* $f \in C^n[a,b]$. *Alors*

$${}^C D_a^\alpha f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \Sigma_{i=0}^{m-1} c_i (t-a)^i \ , \forall c_i \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

Démonstration. On a d'après la définition de Caputo :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^{m-\alpha}(D_a^m f(t)).$$

Alors,

$$I_a^{m-\alpha}(D_a^m f(t)) = 0. \tag{1.6}$$

On applique l'opérateur $D_a^{m-\alpha}$ dans l'équation (1.6), on trouve

$$(D_a^m f(t)) = 0$$

Donc,

$$f(t) = \Sigma_{i=0}^{m-1} c_i (t-a)^i \ , \forall c_i \in \mathbb{R}$$

□

Relation entre La Dérivation de Riemann Liouville et de Caputo

Proposition 1.4.5. *Soient $m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}*$, et $f\in C^n[a,b]$ alors*

$$^{C}D_a^{\alpha} = (^{RL}D_a^{\alpha})f(t) - \Sigma_{i=0}^{m-1}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)).$$

Démonstration. On sait que

$$I_a^m D_a^m f(t) = f(t) - \Sigma_{i=0}^{m-1}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)).$$

On applique l'opérateur $^{RL}D_a^{\alpha}$ de Riemann Liouville, on obtient

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^{\alpha}I_a^m f(t) &= D_a^m I_a^{m-\alpha} I_a^m D_a^m f(t) \\ &= D_a^m I_a^m I_a^{m-\alpha} D_a^m f(t) \\ &= I_a^{m-\alpha} D_a^m f(t) \\ &= {}^{C}D_a^{\alpha} f(t). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^{\alpha}(I_a^m f(t)) &= D_a^{\alpha}(f(t) - \Sigma_{i=0}^{m-1}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)) \\ &= {}^{C}D_a^{\alpha} f(t). \end{aligned}$$

$$I_a^{\alpha} f(x) = \int_a^x \frac{dt_1}{t_1}\int_a^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_a^{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\cdots\int_a^{t^{n-1}} f(t^n)\frac{dt_n}{t_n}.$$

□

1.4.3 Intégration et Dérivation Fractionnaire au Sens de Hadamard

L'intégrale fractionnaire de Hadamard était basée sur la généralisation de la nième intégrale suivant :

$$I_a^n f(x) = \int_a^x \frac{dt_1}{t_1}\int_a^{t_2}\frac{dt_2}{t_2}\int_a^{t_3}\frac{dt_3}{t_3}\cdots\int_{t_{n-1}}^{a} f(t_n)\frac{dt_n}{t_n}.$$

Définition 1.4.4. *[14] L'opérateur intégral fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha>0$; pour une fonction $f\in C([a,b])$ est défini par :*

$$_{H}I_a^{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}f(s)\frac{ds}{s}, & \alpha>0 \\ f(t), & \alpha=0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Remarque 1.4.1. *Dans la formule (1.7), en prennant* $a = 1$, ${}_HI_a^\alpha$ *sera noté* ${}_HI^\alpha$.

Proposition 1.4.6. *Soient* $f, g \in C([a, b])$, *pour* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *et* $A, B \in \mathbb{R}$, *on a*

1. *(Propriété de semi groupe)* ${}_HI_a^\alpha({}_HI_a^\beta f)(t) = {}_HI_a^\beta({}_HI_a^\alpha f)(t) = ({}_HI_a^{\alpha+\beta} f)(t)$.
2. *(La linéarité)* ${}_HI_a^\alpha[Af(t) + Bg(t)] = A{}_HI_a^\alpha f(t) + B{}_HI_a^\alpha g(t)$.

Démonstration. 1. la démonstration est obtenue par le calcul direct en utilisant la fonction Bêta. En effet,

$$\begin{aligned} {}_HI_a^\alpha({}_HI_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (I^\beta f)(s)\frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{s}{\mu}\right)^{\beta-1} f(\mu)\frac{d\mu}{\mu}\frac{ds}{s} \qquad (1.8) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\mu) \int_\mu^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{s}{\mu}\right)^{\beta-1} \frac{ds}{s}\frac{d\mu}{\mu} \end{aligned}$$

En posant

$$x = \frac{\log\frac{s}{\mu}}{\log\frac{t}{\mu}},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_\mu^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{s}{\mu}\right)^{\beta-1} \frac{ds}{s} &= \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx \\ &= \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) \\ &= \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

En remplaçant la dernière formule dans (1.8), on aura

$${}_HI_a^\alpha({}_HI_a^\beta f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1} f\left(\mu\frac{d\mu}{\mu}\right) = {}_HI_a^{\alpha+\beta} f(t),$$

d'ou le résultat.
En utilisant la propriété précédente, on a

$${}_HI_a^\alpha({}_HI_a^\beta f)(t) = {}_HI_a^{\alpha+\beta} f(t) = {}_HI_a^{\beta+\alpha} f(t) = {}_HI_a^\beta({}_HI_a^\alpha f)(t)$$

2. Ici, il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale classique pour montrer le résultat.

□

Exemple 1.4.2. *On considère la fonction f définie par $f : t \longrightarrow \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}$.*
L'intégrale fractionnaire de Hadamard s'écrira

$$
{}_H I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}, \tag{1.9}
$$

En effet

$$
{}_H I_a^\alpha \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\beta-1} \frac{ds}{s}, \tag{1.10}
$$

pour évaluer cette intégrale, on effectuant le changement de variables

$$
\mu = \frac{(\log \frac{s}{a})}{(\log \frac{t}{a})},
$$

Alors (1.10) devient

$$
{}_H I_a^\alpha (\log \frac{t}{a})^{\beta-1} \quad = \quad \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \mu^{\beta-1}(1-\mu)^{\alpha-1} d\mu
$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta et la remarque 1.3.1 on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_H I_a^\alpha f(t) &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}
$$

Définition 1.4.5. *[16][13] Soient $f \in AC^n_{\delta,\mu}(a,b) et \alpha > 0, \delta = x\frac{d}{dx}$. La dérivation fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction f est définie par*

$$
\begin{aligned}
D_a^\alpha f(t) &= \delta^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s},
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

où $n-1 < \alpha < n, n = [\alpha]+1$.

Dans la proposition suivante, on trouve une relation importantes entre la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard avec l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

Proposition 1.4.7. *Pour $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, on a*

$$D^{\alpha} I^{\alpha} f(t) = f(t). \tag{1.12}$$

Ainsi, d'après (1.12), l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Hadamard est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Hadamard du même ordre.

Proposition 1.4.8. *Pour $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, on a*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(t) \neq f(t). \tag{1.13}$$

Exemple 1.4.3. *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f(t) = \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}$ alors*

$$D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}$$

En effet,

$$D_a^{\alpha} f(t) = \delta^n \left(I_a^{n-\alpha} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \right) \tag{1.14}$$

D'après (1.9), on obtient

$$I_a^{n-\alpha} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} \tag{1.15}$$

Alors

$$D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} \delta^n \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} \tag{1.16}$$

Si $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} \delta^1 \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} &= t \frac{d}{dt} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} \\ &= (\beta+n-\alpha-1) \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-2} \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta^2 \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} &= \delta^1 (\beta+n-\alpha-1) \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-2} \\ &= (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2) \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+n-\alpha-3}. \end{aligned}$$

Pour n quelconque, on a

$$\delta^n \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} = (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\ldots(\beta-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}$$

Alors (1.16) devient :

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)(\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\dots(\beta-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

D'après la propriété $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$*, on trouve*

$$\Gamma(n-\alpha+\beta) = (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\dots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)$$

Donc,

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}$$

En particulier, si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, alors la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une constante est en général non nulle

$$D_a^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}$$

Proposition 1.4.9 (7)**.** *soit* $\alpha > 0, n = [\alpha]+1$ *et* $0 < a < b <\propto$ *. l'égalité* $(D_a^\alpha f)(x) = 0$*est vérifiée si et seulement si*

$$f(x) = \Sigma_{i=1}^{n} Ci\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-i}$$

où $C_i \in \mathbb{R}(i = 1, ..., n)$ *sont des constantes arbitraires. En particulier, si* $0 < \alpha \leq 1$*, la relation* $(D_a^\alpha f)(x) = 0$ *est satisfaite si et seulement si ,*$f(x) = C\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-i}$ *pour tout* $C \in \mathbb{R}$.

Pour montrer la proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4.2. *Soit* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\delta^n g(x) = 0$*,si et seulement si* $g(x) = \Sigma_{k=0}^{n-1} d_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k$ *, où les dk sont des constantes réelles pour tout* $k = 0, \cdots, n$.

Démonstration. supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.
on a,

$$(D_a^\alpha f)(x) = 0,$$

signifie que

$$\delta^n(I_a^{n-\alpha})(x) = 0.$$

Alors d'après le lemme précédent, on a

$$(I_a^{n-\alpha})(x) = \Sigma_{k=0}^{n-1} c_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k,$$

où $c_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k = 1, 2, \cdots, n$.
On applique l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre α aux deux membres de l'équation

précédente , on obtient

$$\begin{aligned}
(I_a^n f)(x) &= \Sigma_{k=0}^{n-1} c_k \left(I_a^\alpha \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \right)(x) \\
&= \Sigma_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k+1-1} \\
&= \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k!)}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k},
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \delta^n (I_a^n f)(x) \\
&= \delta^n \left(\Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k!)}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k} \right) \\
&= \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k!)}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \delta^n \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k} \\
&= \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k!)}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1-n)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k-n} \\
&= \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k!)}{\Gamma(\alpha+k+1-n)} c_k \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+k-n}.
\end{aligned}$$

Si on pose $i = n - k$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Sigma_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(n-i)!}{\Gamma(\alpha+k-i)} c_{n-i} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-i} \\
&= \Sigma_{i=1}^{n} C_i \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-i},
\end{aligned}$$

où

$$C_i = \frac{\Gamma(n-i)!}{\Gamma(\alpha+k-i)} c_{n-i}$$

Réciproquement, si

$$f(x) = \Sigma_{i=1}^{n} C_i \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-i},$$

on applique la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard aux deux membres de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
(D_a^\alpha f)(x) &= \left(D_a^\alpha \Sigma_{i=1}^{n} C_i \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-i} \right) \\
&= \Sigma_{i=1}^{n} C_i \left(D_a^\alpha \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-i} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Lien Entre la Dérivée Fractionnaire au Sens de Caputo et Celle au Sens de Hadamard

Soient $y \in AC_n^\eta[a,b], \alpha > 0etn = [\alpha]+1$. Alors :

$$^cD_a^\alpha f(x) = cD_a^\alpha\Big[f(x) - \Sigma_{i=0}^{n-1}\frac{\delta^i f(x)}{i!}\Big(\log\frac{x}{a}\Big)\Big], \tag{1.17}$$

Cas particulier, si $0 < \alpha < 1$, on a :

$$^cD_a^\alpha f(x) = cD_a^\alpha[f(x) - f(a)] \tag{1.18}$$

1.5 Quelques Théorèmes de point fixe

1.5.1 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe permettent d'assurer l'existence de solutions d'un problème donné en le transformant en un problème du point fixe, et en fournissant des conditions suffisantes pour les quelles, une application donnée admet des points fixes.

Théorème du Point Fixe de Krasnoselski-Zabreiko

Théorème 1.5.1. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. $F : X \to X$ un opérateur complètement continue et $A : X \to X$ est un opérateur linéaire borné tel que 1 ne soit pas une valeur propre de A. De plus, si*

$$\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty}\frac{\|Fx - Ax\|}{\|x\|} = 0. \tag{1.19}$$

Alors F admet un point fixe dans X.

Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.5.2. *[17] Soit (B, d) un espace métrique complet, et soit $f : B_r \longrightarrow B_r$ une application, qui pour tout $x, y \in B_r$, vérifie*

$$d(f(x) - f(y)) \leq kd(x-y) \quad avec \quad 0 < k < 1.$$

Alors, f admet un point fixe unique.

Théorème du Point Fixe de Krasnoselski

Théorème 1.5.3. *[21] Soit M un sous-ensemble fermé, borné, convexe et non vide d'un espace de Banach X. Et soient A, B deux opérateurs tels que :*

1. *$Ax + By \in M \quad \forall x, y \in M$,*
2. *A est compact et continu,*
3. *B est une application contractante.*

Alors il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

Alternative Non Linéaire de Leray Schauder

Théorème 1.5.4. *[8] Soit X un espace de Banach et K un sous ensemble convexe non vide, soit U un sous ensemble ouvert non vide de K, $0 \in U$ et $T : \overline{U} \longrightarrow K$ un opérateur complètement continu, alors une des assertions suivantes est vérifiées,*

1. *L'opérateur T admet un point fixe dans U, soit,*
2. *$\exists \lambda \in (0,1)$ et $x \in \partial U$ tels que $x = \lambda T(x)$.*

1.5.2 Lemmes auxiliaires

Lemme 1.5.1. *Soient $x \in C([1,e],\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. L'équation $D^\alpha x(t) = 0$ admet une solution générale donnée par :*

$$x(t) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i (\log t)^{\alpha - i}$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ et $n - 1 < \alpha < n, \quad n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.5.2. *[18] Soient $x \in C([1,e],\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha > 0$, on a*

$$I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + \Sigma_{i=1}^{n} c_i (\log t)^{\alpha - i}$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ et $n - 1 < \alpha < n, \quad n = [\alpha] + 1$.

Chapitre 2

Problème aux limites fractionnaire du type Hadamard à trois points

2.1 Introduction

Dans cette section, nous étudions le problème aux limites à trois points suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), 1 < t < e, 1 < \alpha \leq 2 \\ x(1) = 0, x(e) = \beta x(\eta), 1 < \eta < e, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- D^{α} est la dérivée fractionnaire d' ordre α au sens de Hadamard.
- $f : [1, e] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée et β est une constante réelle.

Notre objectif est d'établir un résultat d'existence pour le problème (2.1) via le théorème du point fixe de Krasnoselskii-Zabeiko.

2.2 Forme intégrale du problème aux limites

Lemme 2.2.1. *Pour $1 < \alpha \leq 2$ et $\zeta \in C([1, e], \mathbb{R})$, Le problème aux limites*

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = \zeta(t), 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad x(e) = \beta x(\eta), \end{cases} \tag{2.2}$$

est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\zeta(s)}{s} ds \\ &+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1 - \beta(\log \eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\eta} \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\zeta(s)}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\zeta(s)}{s} ds \Big] \end{aligned} \tag{2.3}$$

ou $\beta(\log \eta)^{\alpha-1} \neq 1$

Démonstration. D'après le Lemme 1.5.2, on peut écrire la solution de l'équation (2.2) comme suit :

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\zeta(s)}{s} ds + c_1 (\log t)^{\alpha-1} + c_2 (\log t)^{\alpha-2}. \tag{2.4}$$

avec $1 < \alpha \leq 2$. En utilisant la condition aux limites, $x(1) = 0$, on obtient :

$$x(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^1 \left(\log \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\zeta(s)}{s} ds + c_1 (\log 1)^{\alpha-1} + c_2 (\log 1)^{\alpha-2}.$$

ce qui entraine que $c_2 = 0$, car $\alpha - 2 < 0$. Par suite $x(e) = \beta x(\eta)$ ce qui entraine que

$$c_1 = \frac{1}{1 - \beta(\log \eta)^{\alpha-1}} \left[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\zeta(s)}{s} ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\zeta(s)}{s} ds \right].$$

Ainsi, en substituant les valeurs de c_1 et c_2 en (2.4) on obtient (2.3). Inversement par un calcul direct, on peut établir que l'équation (2.3) satisfait le problème (2.2). Ceci complète la preuve. □

D'après le Lemme 2.2.1, la solution du problème(2.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\ &+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1 - \beta(\log \eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \Big] \quad , t \in [1, e] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Notation : On note par $\mathcal{E} = C([1, e], \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions définies de $[1, e] \to \mathbb{R}$ continues muni de la topologie de convergence uniforme avec la norme définie par : $\|x\| = sup\{|x(t)| : t \in [1, e]\}$.

2.3 Resultat d'existence

Théorème 2.3.1. *Soit f une fonction continue, vérifiant $f(a, 0) \neq 0$ pour $a \in [1, e]$, et*

$$\lim_{|x| \to \propto} \frac{f(t, x)}{x} = \lambda(t), \quad \lambda_{\max} = \max_{t \in [1, e]} |\lambda(t)| < \frac{1}{\delta},$$

Avec

$$\delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \Big[1 + \frac{1 + \beta(\log \eta)^\alpha}{|1 - \beta(\log \eta)^{\alpha-1}|} \Big],$$

Alors le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution non triviale sur $[1, e]$.

Démonstration. On définit l'opérateur $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par

$$\begin{aligned} Fx(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \\ &+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log \eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \Big], \quad t \in [1,e] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Il est clair que l'opérateur F est bien définie. On cherche les points fixes de l'opérateur F sur l'espace de Banach $\mathcal{E}$ en utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselsk'ii-Zabreiko. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Etape 1 Montrons que F est continue.

Soit $(x_n)_n \subset \mathcal{E}$ une suite convergente vers x. Pour tout $t \in [1,e]$, On a

$$\begin{aligned} & |Fx_n(t) - Fx(t)| \\ \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|}{s} ds \\ + & \frac{1}{1-\beta(\log \eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|}{s} ds \\ + & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|}{s} ds \Big] \\ \leq & \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Big[1 + \frac{1+\beta(\log \eta)^\alpha}{|1-\beta(\log \eta)^{\alpha-1}|} \Big]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Fx_n(t) - Fx(t)\| \leq \delta \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\|.$$

Or, on sait que toute suite convergente est bornée, alors il existe un nombre réel positif $k > 0$ tels que $\|x_n\| < k$ et $\|x\| \leq k$. Et par conséquent, f est uniformément continue sur tout ensemble compact de la forme $\{(t,x) : t \in [1,e], \|x\| \leq k\}$. Par suite

$$\|Fx_n - Fx\| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Ceci montre que F est continue.

Etape 2 Pour tout $R > 0$, considérons l'ensemble fermé

$$C = \{x \in \mathcal{E} / \|x\| \leq R\}$$

Montrons que $F(C)$ est relativement compact dans l'espace de Banach $\mathcal{E}$. Posons $f_{\max} = \max\{|f(t,x)| : t \in [1,e], \|x\| \leq R\}$ alors, on a

$$
\begin{aligned}
|Fx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|f(s,x(s))|}{s}ds \\
&+ \frac{1}{|1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}|}\Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|f(s,x(s))|}{s}ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|f(s,x(s))|}{s}ds\Big] \\
&\leq f_{\max}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[1+\frac{1+\beta(\log\eta)^\alpha}{|1-\beta\log\eta)^\alpha|}\Big]
\end{aligned}
$$

ainsi $\|Fx\| \leq f_{\max}\delta$ et par conséquent $F(C)$ est uniformément borné.
Soient $\tau_1, \tau_2 \in [1,e]$, avec $\tau_1 < \tau_2$, on a

$$
\begin{aligned}
& |Fx(\tau_2)-Fx(\tau_1)| \\
\leq\; & \frac{f_{\max}}{\Gamma(\alpha)}|\int_1^{\tau_2}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds-\int_1^{\tau_1}\left(\log\frac{\tau_1}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds| \\
+\; & f_{\max}|\frac{(\log\tau_2)^{\alpha-1}-(\log\tau_1)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}}\Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds \\
-\; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\Big]| \\
\leq\; & \frac{f_{\max}}{\Gamma(\alpha)}|\int_1^{\tau_1}\Big[\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\log\frac{\tau_1}{s}\right)^{\alpha-1}\Big]\frac{1}{s}ds| \\
+\; & \frac{f_{\max}}{\Gamma(\alpha)}|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds| \\
+\; & f_{\max}|\frac{(\log\tau_2)^{\alpha-1}-(\log\tau_1)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}}\Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds \\
-\; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}\Big]| \\
\leq\; & \frac{f_{\max}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[2(\log(\tau_2/\tau_1)^\alpha+|(\log\tau_2)^\alpha-(\log\tau_1)^\alpha|\Big] \\
+\; & f_{\max}|\frac{(\log(\tau_2)^{\alpha-1}-(\log\tau_1)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}}\Big[\frac{\beta(\log\eta)^\alpha-1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big]|.
\end{aligned}
$$

le second terme de la dernière inégalité est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $\tau_1 \to \tau_2$ ce qui entraine que $F(C)$ est équicontinue. Et d'après le théorème d' Ascoli-d'Arzelà, on conclut que F est une application complètement continue sur $\mathcal{E}$. Ce qui achève la preuve de l'étape 2.

Etape 3 Dans la suite, on va considérer le problème aux limites suivant

$$
\begin{cases} D^\alpha x(t) = \lambda(t)x(t), 1 < t < e \\ \\ x(1) = 0, x(e) = \beta x(\eta) \end{cases} \tag{2.7}
$$

Définissons un opérateur $A : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)x(s)}{s} ds \\ &+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)x(s)}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)x(s)}{s} ds\Big], \quad t \in [1, e] \end{aligned} \tag{2.8}$$

L'opérateur A linéaire et borné. En effet,

1. On a, pour tout $t \in [1, e]$

$$\begin{aligned} A[x+y](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)[x+y](s)}{s} ds \\ &+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta (\log \frac{\eta}{s})^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)[x+y](s)}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)[x+y](s)}{s} ds\Big] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)x(s)}{s} ds \\ &+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)x(s)}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)x(s)}{s} ds\Big] \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)y(s)}{s} ds \\ &+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)y(s)}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{\lambda(s)y(s)}{s} ds\Big] \\ &= A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
A(kx(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}(k\frac{\lambda(s)x(s)}{s})ds \\
&+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}}\Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1}(k\frac{\lambda(s)x(s)}{s})ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}(k\frac{\lambda(s)x(s)}{s})ds\Big] \\
&= k\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}(\frac{\lambda(s)x(s)}{s})ds \\
&+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}}\Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\lambda(s)x(s)}{s}\right)ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}(\frac{\lambda(s)x(s)}{s})ds\Big]\Big] \\
&= kA(x(t)), \quad t\in[1,e]
\end{aligned}$$

Alors A est linéare. On a pour tout $t \in [1,e]$ En effet,

$$\begin{aligned}
\|A(x)(t)\| &\leq \lambda_{\max}\sup_{t\in[1,e]}\Big[\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|x(s)|}{s}ds \\
&+ \frac{1}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}}\Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|x(s)|}{s}ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|x(s)|}{s}ds\Big]\Big] \\
&\leq \lambda_{\max}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\{1+\frac{1+\beta(\log\eta)^{\alpha}}{|1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}|}\}\|x\| \\
&= \lambda_{\max}\delta\|x\| \\
&< \lambda_{\max}\delta R \\
&< R.
\end{aligned}$$

Ceci montré que A est linéaire borné.

Etape 4 Montrons que 1 n'est pas une valeur propre de A.

Supposons que le problème aux limites (2.7) admet une solution non triviale x. Alors,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|A(x)\| = \sup_{t\in[1,e]} |Ax(t)| \\
&\leq \lambda_{\max} \sup_{t\in[1,e]} \Big[\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|x(s)|}{s} ds \\
&+ \frac{1}{1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|x(s)|}{s} ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|x(s)|}{s} ds \Big]\Big] \\
&\leq \lambda_{\max} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ 1 + \frac{1+\beta(\log\eta)^{\alpha}}{|1-\beta(\log\eta)^{\alpha-1}|} \right\} \|x\| \\
&= \lambda_{\max}\delta\|x\| \\
&< \|x\|
\end{aligned}$$

cette contradiction montre que le problème aux limites (2.7) n'a pas de solution non triviale, 1 n'est pas un valeur propre de A

Etape 5 montrons que l'assertion (1.19) est vérifiée. Reste à établir que :

$$\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty} \frac{\|Fx - Ax\|}{\|x\|} = 0$$

Comme, $\lim_{|x|\longrightarrow\infty} \dfrac{f(t,x)}{x} = \lambda(t)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$, tel que

$$|f(t,x) - \lambda(t)x| < \varepsilon|x| \quad \text{pour} \quad |x| > M.$$

Posons $M^* = \max_{t\in[1,e]}\{\max_{|x|\leq M} |f(t,x)|\}$ et choisissons $R' > 0$ de telle sorte que $M^* + \lambda_{\max} M < \varepsilon R'$. Notons par :

$$I_1 = \{t \in [1,e] : |x(t)| \leq M\}$$

$$I_2 = \{t \in [1,e] : |x(t)| > M\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{E}$ avec $\|x\| > R,'$ $t \in I_1$, on a

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - \lambda(t)x| &\leq |f(t,x)| + \lambda_{\max}|x| \\
&\leq M^* + \lambda_{\max} M \\
&\leq \varepsilon R' < \varepsilon\|x\|.
\end{aligned}$$

Pour toute $x \in \mathcal{E}$ avec $\|x\| > R'$, $t \in I_2$, on a

$$|f(t,x) - \lambda(t)x| < \varepsilon\|x\|.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathcal{E}$ avec $\|x\| > R'$, on a

$$|f(t,x) - \lambda(t)x| < \varepsilon\|x\|$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\|Fx - Ax\| &= \sup_{t\in[1,e]} |(Fx - Ax)(t)| \\
&\leq \sup_{t\in[1,e]} \Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s)) - \lambda(s)x(s)|}{s} ds \\
&+ \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|1-\beta(\log \eta)^{\alpha-1}|} \Big[\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s)) - \lambda(s)x(s)}{s} ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s)) - \lambda(s)x(s)}{s} ds\Big]\Big] \\
&< \varepsilon\lambda_{\max} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Big\{1 + \frac{1+\beta(\log \eta)^\alpha}{|1-\beta(\log \eta)^{\alpha-1}|}\Big\} \|x\| \\
&= \varepsilon\lambda_{\max}\delta\|x\|.
\end{aligned}$$

et passant à la limite, on trouve

$$\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty} \frac{\|Fx - Ax\|}{\|x\|} = 0$$

par conséquent, le Théorème2.3.1 garantit l'existence d'au moins une solution non triviale au problème aux limites (2.1).

□

Exemple 2.3.1. *on considère le prombleme aux limte suivant :*

$$\begin{cases} D^{3/2}x(t) = f(t,x(t)), 1 < t < e, 1 < \\ \\ x(1) = 0, x(e) = \frac{3}{2}x(2) \end{cases} \tag{2.9}$$

Ici$\alpha = \frac{3}{2}$,$\beta = \frac{3}{2}$, $\eta = 2$ *et* $\delta \approx 6.3938692$.*Si* $f(t,x) = \frac{1}{20}(t^2+1)x(t), t \in [1,e]$ *ensuite* $\lambda_{\max}\delta \approx 0.4194527 < 1$ *, avec* $\delta = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[1 + \dfrac{1+\beta(\log \eta)^\alpha}{|1-\beta(\log \eta)^{\alpha-1}|}\Big]$, *et donc par le Théorème 2.3.1 le broblème aux limite (2.9) a au moins une solution.*

Chapitre 3

Problème aux Limites avec Conditions intégrales

3.1 Introdution

Les problèmes différentiels à conditions intégrales ont été abordés par plusieurs auteurs. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire avec des conditions initiales intégrales. Sont basés sur quelques idées classiques de la théorie du point fixe. se termine cet section par quelques exemples. Nous étudions le problème aux limite suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), 1 < t < e, 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ x(1) = 0, x(e) = I^{\beta}x(e) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta-1} \frac{x(s)}{s} ds, \beta > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Où

- D^{α} est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre α.
- I^{β} est l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre β.
- Et $f : [1, e] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

3.2 Forme intégrale du problème

Lemme 3.2.1. *Etant donné $y \in C([1, e], \mathbb{R})$, l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = y(t), 1 < t < e, 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ x(1) = 0, x(e) = I^{\beta}x(e) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta-1} \frac{x(s)}{s} ds, \end{cases} \tag{3.2}$$

est donnée par

$$x(t) = I^{\alpha}y(t) + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha)} \Big[I^{\beta+\alpha}y(e) - I^{\alpha}y(e) \Big]. \tag{3.3}$$

Démonstration. [20] En composant avec l'intégrale de Hadamard dans l'équation différentielle du problème (3.2), on obtient

$$x(t) = I^{\alpha} y(t) + c_1 (\log t)^{\alpha-1} + c_2 (\log t)^{\alpha-2}. \tag{3.4}$$

Et en utilisant les conditions aux limites donnée, on trouve $c_2 = 0$, et

$$\begin{aligned} I^{\alpha} y(e) + c_1 &= I^{\beta}\left(I^{\alpha} y(s) + c_1 (\log t)^{\alpha-1}\right)(e) \\ &= I^{\beta+\alpha} y(e) + \frac{c_1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta-1} \frac{(\log s)^{\alpha-1}}{s} ds \\ &= I^{\beta+\alpha} y(e) + c_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$c_1 = \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha)} \Big[I^{\beta+\alpha} y(e) - I^{\alpha} y(e) \Big]. \tag{3.5}$$

En substituant les valeurs de c_1 etc$_2$ trouvées, dans (3.4), nous obtenons (3.3). □

D'abrés le Lemme 3.2.1, la solution du problème peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \\ &+ \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha)} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \Big], t \in [1,e]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.3 Résultats d'existence

Nous définissons l'opérateur $A : C([1,e],\mathbb{R}) \to C([1,e],\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \\ &+ \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha)} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,x(s))}{s} ds \Big], \quad t \in [1,e] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Et dans la suite, on établira quelques résultats d'existence et d'unicité à partir des théorèmes de point fixe.

3.3.1 Résultat d'existence via le Théorème de point fixe de Banach

Dans cette sous-section, nous présentons notre premier résultat traitant l'existence et de l'unicité de la solution pour le problème (3.1) en utilisant le Théorème de point fixe de Banach. Posons,

$$\omega = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right). \tag{3.8}$$

Théorème 3.3.1. *Soit $f : [1,e] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que*

(H1) Il existe une constante $L_1 > 0$ telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L_1 |x-y|, \quad \textit{pour tout} \quad t \in [1,e] \quad \textit{et} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Si

$$L_1 \omega < 1. \tag{3.9}$$

alors le problème aux limites fractionnaire (3.1) admet une solution unique sur $[1,e]$.

Démonstration. Nous transformons le problème (3.1) en un problème de point fixe $x = Ax$ où l'opérateur A est défini par (3.7). En utilisant le principe de contraction de Banach , nous montrerons que A admet un point fixe.
Posons $max_{t\in[1,e]}|f(t,0)| = M < \infty$, et choisissons $r \geq \frac{M\omega}{1-L_1\omega}$. On montre que $AB_r \subset B_r$, où $B_r = \{x \in C([1,e],\mathbb{R}) : \|x\| \leq r\}$.

Etape 1 Pour $x \in B_r$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \|Ax\| \\
\leq\ & \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s))|}{s} ds \\
+\ & \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha)} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{|f(s,x(s))|}{s} ds \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s))|}{s} ds \Big] \Big\} \\
\leq\ & \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{(|f(s,x(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|)}{s} ds \\
+\ & \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{(|f(s,x(s)) - f(t,0)| + |f(t,0)|)}{s} ds \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{(|f(s,x(s)) - f(s,0)| f(s,0)|)}{s} ds \Big] \Big\} \\
\leq\ & (L_1 r + M) \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s} d \\
\leq\ & (L_1 r + M) \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{(\log t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \Big\} \\
=\ & (L_1 r + M)\omega \leq r.
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $AB_r \subset B_r$.

Etape 2 Soit $x, y \in C([a,b],\mathbb{R})$, alors, pour $t \in [1,e]$, nous avons

$$\begin{aligned}
& |(Ax)(t) - (Ay)(t)| \\
\leq\ & \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|}{s} ds \\
+\ & \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|}{s} ds \Big] \Big\} \\
\leq\ & L_1 \|x-y\| \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \\
+\ & \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \Big] \Big\} \\
=\ & L_1 \omega \|x-y\|.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|Av - Au\| \leq L_1 \omega \|u - v\|.$$

Et comme $L_1\omega < 1$ d'après (3.9), A est une contraction. En conséquence du Théorème du point fixe de Banach, l'opérateur A admet un point fixe qui correspond à la solution unique du problème (3.1).

□

3.3.2 Résultat de l'existence via le théorème de Krasnoselskii

Théorème 3.3.2. *Soit $f : [1,e] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant les hypothèses suivantes :*

(H1) Il existe une constante $L_1 > 0$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,y)| < L_1|x-y|, \quad \text{pour tout } t \in [1,e], x, y \in \mathbb{R}.$$

(H2) Il existe une fonction $\mu \in C([1,e],\mathbb{R}+)$, tel que

$$|f(t,x)| \leq \mu(t), \forall (t,u) \in [1,e] \times \mathbb{R}.$$

Alors le problème au limites (3.1) admet au moins une solution sur $[1,e]$, $(H1)$: $f : [1,e] \times \mathbb{R}$,une fonction continue
$(H2)$:$|f(t,x)| \leq \mu(t), \forall (t,u) \in [1,e] \times \mathbb{R}$, et $\mu \in C([1,e],\mathbb{R}+)$, alors le problème 3.1 a au moins une solution sur $[1,e]$ Si

$$\frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha)} \Big(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+1)} \Big) < 1 \tag{3.10}$$

Démonstration. On a $\sup_{t\in[1,e]}|\mu(t)| = \|\mu\|$, choisissons $\overline{r}$ une constante réelle telle que

$$\overline{r} \geq \|\mu\|\omega,$$

où ω est définie par la relation (3.8). Soit $B_{\overline{r}} = \{x \in C([1,e],\mathbb{R}) : \|x\| \leq \overline{r}\}$ un sous ensemble de $C([1,e],\mathbb{R})$. Définissons les opérateurs P et Q sur $B_{\overline{r}}$ par

$$\begin{aligned}
(Px)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,x(s)}{s}ds,\\
(Qx)(t) &= \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1}\frac{f(s,x(s))}{s}ds\\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,x(s))}{s}ds\Big].
\end{aligned}$$

Etape 1 Montrons que $Px + Qy \in B_{\overline{r}}$ pour tout $x, y \in B_{\overline{r}}$.
Soient $x, y \in B_{\overline{r}}$, on a

$$\begin{aligned}
\|Px + Qy\| &\leq \|\mu\|\Big\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\\
&+ \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1}\frac{1}{s}ds\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\Big]\Big\}\\
&\leq \|\mu\|\omega\\
&\leq \overline{r}.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $Px + Qy \in B_{\overline{r}}$.

Etape 2 Montrons que P est continue et compact.

1. La continuité de f implique que l'opérateur P est continu.
2. Reste à montrer que P est compact. On a

$$\|Px\| \leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(\alpha+1)},$$

ce qui implique que P uniformement bornée sur $B\overline{r}$. Prouvons dans la suite la compacité de l'opérateur P.
On $\sup_{\{(t,x)\in[1,e]\times B_{\overline{r}}\}}|f(t,x)| = \overline{f} < \infty$, $\tau_1, \tau_2 \in [1,e]$ avec $\tau_1 < \tau_2$. Ce qui entraine

que

$$
\begin{aligned}
& |(Px)(\tau_1)-(Px)(\tau_2)| \\
\leq\ & \frac{\overline{f}}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{\tau_1}\left(\log\frac{\tau_1}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds-\int_1^{\tau_2}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right| \\
\leq\ & \frac{\overline{f}}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{\tau_1}\left[\left(\log\frac{\tau_1}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{s}ds\right| \\
+\ & \frac{\overline{f}}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{\tau_1}^{\tau_1}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right| \\
=\ & \frac{\overline{f}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[|(\log\tau_1)^{\alpha}+(\log\tau_2-\log\tau_1)^{\alpha}-(\log\tau_2)^{\alpha}| \\
+\ & |(\log\tau_2-\log\tau_1)^{\alpha}|\Big],
\end{aligned}
$$

Lorsque $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$ alors $|(Px)(\tau_1)-(Px)(\tau_2)| \longrightarrow 0$ ce qui implique que P est équicontinu. Ainsi P est relativement compact sur $B_{\overline{r}}$, et par le Théorème Ascoli-Arezlà, on en conclut que P est compact sur $B_{\overline{r}}$.

Etape 3 Montrons que Q est une application contractante.
L'hypothèse $(H1)$ et (3.10) entraine que Q est une application contractante.

Ainsi, toutes les hypothèses Théorème de Kranoselski sont satisfaites, ce qui entraine que le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution sur $[1, e]$. □

3.3.3 Résolution via alternative non Linéaire de Leray Schauder

Théorème 3.3.3. *Soit $f : [1, e] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(H1) Il existe une fonction continue non décroissante $\Psi : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ et une fonction $p \in C([1, e], \mathbb{R}^+)$ tel que $|f(t, u)| \leq p(t)\Psi(|u|)$ pour tout $(t, u) \in [1, e] \times \mathbb{R}$.

(H2) Il existe constante $M > 0$ tel que

$$\frac{M}{\Psi(M)\|p\|K} > 1$$

avec

$$K = \left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right\}.$$

Alors le problème aux limites fractionnaire (3.1) a au moins une solution sur $[1, e]$.

Démonstration. la preuve de ce théorème sera donnée en plusieurs étapes

Etape 1 On montre que l'application A transforme les ensembles bornés en des ensembles bornés dans $C([1, e], \mathbb{R})$.

Soit r un réel positif et $B_r = \{u \in C([1,e],\mathbb{R}), \|u\| < r\}$ une boule bornée dans $C([1,e],\mathbb{R})$. Pour $t \in [1,e]$, on a

$$\begin{aligned}
& |Ax(t)| \\
\leq\ & \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s))|}{s} ds \\
+\ & \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)) - \Gamma(\alpha))} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{|f(s,x(s))|}{s} ds \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s))|}{s} ds \Big] \Big\} \\
\leq\ & \max_{t\in[1,e]} \Big\{ \frac{\Psi(\|x\|)\|p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \\
+\ & \frac{\Psi(\|x\|)\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)) - \Gamma(\alpha))} \Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s} ds \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \Big] \Big\} \\
\leq\ & \Psi(\|x\|)\|p\| \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \\
+\ & \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \Big\}.
\end{aligned}$$

par conséquent d'après l'hypothèse $(H2)$,

$$\|Ax\| \leq \Psi(r)\|p\| \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \Big\} \leq r$$

Etape 2 Montrons que A transforme tout une sous ensemble borné en ensemble équicontinu dans $C([1,e],\mathbb{R})$.

Soit $\tau_1, \tau_2 \in [1,e]$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et $x \in B_r$, Alors

$$\begin{aligned}
& |(Ax)(\tau_2) - (Ax)(\tau_1)| \\
\leq \ & \frac{\Psi(r)\|p\|}{\Gamma(\alpha)}\Big\{| \int_1^{\tau_1} \left(\log\frac{\tau_1}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds - \int_1^{\tau_2}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds| \\
+ \ & \frac{\Psi(r)\|p\|\Gamma(\beta+\alpha)|(\log\tau_2)^{\alpha-1} - \log\tau_2)^{\alpha-1})|}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1}\frac{1}{s}ds \\
+ \ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\Big]\Big\} \\
\leq \ & \frac{\Psi(r)\|p\|}{\Gamma(\alpha)}\Big\{| \int_1^{\tau_1}\Big[\left(\log\frac{tau_1}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\Big]\frac{1}{s}ds| \\
+ \ & \frac{\Psi(r)\|p\|}{\Gamma(\alpha)}|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds| \\
+ \ & \frac{\Psi(r)\|p\|\Gamma(\beta+\alpha)|(\log\tau_2)^{\alpha-1} - \log\tau_2)^{\alpha-1})|}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\Big[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1}\frac{1}{s}ds \\
+ \ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Il est clair que $|(Ax)(\tau_2) - (Ax)(\tau_1)| \longrightarrow 0$, lorsque $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$ indépendamment de $x \in B_r$. Ainsi d'après le théorème Ascoli-Arzela, l'opérateur $A : C([1,e],\mathbb{R}) \longrightarrow C([1,e],\mathbb{R})$ est complètement continu.

Etape 3 Soit x une solution. Alors, pour $t \in [1,e]$, et d'après l'Etape 1, on a

$$\|x\| \leq \Psi(\|x\|)\|p\|\{\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\}$$

ou

$$\frac{\|x\|}{\Psi(\|x\|)\|p\|\{\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\}} \leq 1.$$

D'aprés $(H2)$, il existe M tel que $\|u\| \neq M$. Posons

$$U = \{u \in C([1,e],\mathbb{R}) : \|u\| < M\}$$

Notons que l'opérateur $A : \overline{U} \to C([1,e],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu. Le choix de U, entraine qu'il n existe pas de $u \in \partial U$ tel que $u = \lambda A u$, avec $\lambda \in (0,1)$.

Par conséquent, grâce l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, On déduit que A admet un point fixe $u \in \overline{U}$ qui est solution du problèm(3.1). □

Exemple 3.3.1. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{3/2}x(t) = \frac{L}{2}\left(\sin x + \frac{|x|^3}{1+|x|^3}\right) + \frac{\sqrt{t}+1}{e}, 1 < t < e, \\ \\ x(1) = 0, x(e) = I^{1/2}x(e). \end{cases} \tag{3.11}$$

Avec $\alpha = 3/2, \quad \beta = 1/2$,*et* $f(t,x) = \frac{L}{2}\left(\sin x + \frac{|x|^3}{1+|x|^3}\right) + \frac{\sqrt{t}+1}{e}$. *A partir de ces données, nous trouvons que*

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &= \frac{16-\sqrt{\pi}}{3\sqrt{\pi}(2-\sqrt{\pi})},\end{aligned}$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \frac{L}{2}|\sin x + \frac{|x|^3}{1+|x|^3} - \sin y + \frac{|y|^3}{1+|y|^3}| \leq L|x-y|.$$

Avec $L < \frac{1}{\omega} = \frac{3\sqrt{\pi}(2-\sqrt{\pi})}{16-\sqrt{\pi}}$, *toutes les hypothèses du théorème3.7 sont satisfaites. Et, le problème (3.11) a une solution unique sur* $[1, e]$.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est de donner quelques applications concernant les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires de type Hadamard dans les équations différentielles. On donne aussi quelques résultats d'existence et d'unicité pour certains problèmes aux limites en utilisant la théorie de point fixe.
Ce travail nous a permis de savoir l'importance du calcul fractionnaire dans le domaine des mathématiques .
Mots clés : Intégrale fractionnaire, Dérivée fractionnaire, Problèmes aux limites.

Bibliographie

[1] Ahmad.B., and S.K.Ntouyas,On Hadamrd fractional integro-differential boundary value problems, *Journal of Applied Mathematics and Computing* 47, 119-131, 2015.

[2] Ahmad.B., and S.K.Ntouyas, On three-point Hadamard-type fractional boundary value problems.*International Electronic Journal of pure and Applied Mathematics*8, 31-42,2014

[3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] A.A. Kilbas, I.O Marichev, G.S Samko : Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Langhorne, (1993).

[5] J. K. Hale and S. V. Lunel, Introduction to functional dierential equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] R.Goreno and F. Mainardi : Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order, Springer Verlag, Wien, 1997, pp. 223-276.

[7] J.Hadamard : Essai sur l'étude des fonctions données par leur développment de Taylor ,Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892).

[8] Wheeden, R. L., Zygmund A., Measure and Integral, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[9] Yosida, K., Functional Analysis, Academic Press, New York,1965.

[10] Dunford,N., Schwartz, J.T., Linear operators **I**., Interscience Publishers, New York, London, 1958.

[11] Lang, S., Real and Functional Analysis, Springer-Verlag, New York,1993.

[12] Mikusiǹski, J., The Bochner Integral, Birkhäuser, Basel, 1978.

[13] A.A. Kilbas, I.O Marichev, G.S Samko : Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Langhorne, (1993).

[14] J.Hadamard : Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor ,Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892).

[15] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[16] I. Podlubny, Fractional Diferential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[17] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[18] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[19] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt.Math. , (2012).

[20] Kilbas,A.A.,Srivastava,H.M.,Trujillo,J.J. :Theory and Applications of Fractional Differential Equations,North-Holland Mathematics Studies,204.Elsevier Science B.V,Amsterdam(2006).

[21] Krasnoselskii,M.A. :Two remarks on the method of successive approximations.Uspekhi Mat.Nauk 10,123-127(1955)