



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ.: 2019/2020



Approche probabiliste des équations aux dérivées partielles

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida- Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastique, statistique des processus et applications.

par

Sakina Benkaddour¹

Sous la direction de

Dr. L. Bousmaha

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

Pr. A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. L. Bousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. L. Yahiaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. S. Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : sakinabenk2018@gmail.com

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier le bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage afin d'accomplir ce travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce à l'aide de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Dr. L. Bousmaha, pour sa patience, sa disponibilité et pour le temps précieux qu'elle a consacré pour réaliser ce travail. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements aux membres du jury Pr. A. Kandouci, Dr. L. Yahiaoui et Dr. S. Idrissi pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi.

Je les remercie infiniment pour m'encourager et m'aider à arriver à ce stade d'études.

Je remercie mes soeurs et mes frères pour leurs encouragements.

Je désire aussi remercier les professeurs de l'université de Saida, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Je tiens à remercier spécialement Pr. A. Kandouci pour avoir eu la patience de répondre à mes innombrables questions.

Je le remercie pour tout le temps précieux qu'il m'a consacré, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie en particulier Dr. I. Mekkaoui, de m'avoir donné l'occasion extraordinaire de réaliser la simulation et partagé ses connaissances et ses expériences dans son domaine.

Je tiens à remercier très sincèrement l'ensemble des membres du laboratoire LMSSA très spécialement : Dr. F. Mokhtari, Dr. F. Benziadi, Dr. R. Rouane, Dr. S. Rahmani, Dr. S. Idrissi et Dr. K. Djerfi pour leurs aides, orientations, et conseils.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes collègues et mes amis (Hayat, Bakhtia, Rihab, Mokhtaria, Khawla, Mana, Kanza, Meryem,) qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Table des matières

Introduction	6
1 Rappels et Compléments	8
1.1 Vecteurs gaussiens	8
1.2 Processus stoquastiques	8
1.3 Temps d'arrêt	11
1.4 Le mouvement Brownien	11
1.5 Martingales à temps continu	13
1.6 Intégrale stochastique (Intégrale d'Itô)	15
2 Equations Différentielles Stoquastiques	18
2.1 Introduction, définitions	18
2.2 Existence et unicité	20
2.3 Exemples d'EDS	25
2.3.1 Equations linéaires	26
2.3.2 Equations affines	27
2.4 Générateur des diffusions	27
2.4.1 Diffusion	28
2.4.2 Propriété de Markov	28
2.4.3 Semi-groupe	29
2.4.4 Générateur de diffusion	30
3 Généralité sur les EDPs et la méthode des différences finis	32
3.1 Généralité sur les équations aux dérivées partielles	33
3.1.1 Définitions - Exemples	33
3.1.2 Les conditions aux limites	34
3.1.3 Classification des équations aux dérivées partielles	35
3.1.4 Consistance, Convergence et stabilité	40
3.2 La résolution numérique des EDPs	41
3.2.1 Cas elliptique :	41
3.2.2 Cas parabolique :	50
4 Approche probabiliste des EDPs	58
4.1 Diffusion et EDP	58
4.1.1 La formule de Dynkin	58
4.1.2 Liens avec des EDPs linéaires	59
4.1.3 EDP de type Dirichlet	63
4.2 Mouvement Brownien et EDP	64
4.2.1 Fonctions harmoniques	64

4.2.2	Problème de Dirichlet	65
4.2.3	Equation de la chaleur	68
4.2.4	Formule de Feynman-Kac	69
4.3	Discrétisation de problème	71
4.3.1	Le schéma d'Euler	71
4.3.2	La méthode de Monte-carlo	71
4.4	Application	72
4.4.1	Discrétisation du mouvement Brownien	73
4.4.2	Illustration numérique du problème par la méthode probabiliste	74
Conclusion		78
Bibliographie		79

Introduction

Dans l'analyse stochastique, les équations différentielles stochastiques (EDS) jouent un rôle très important ; car on utilise les EDS pour modéliser et étudier des phénomènes naturelles.

Les équations différentielles stochastiques sont les équations qui régissent l'évolution de la plupart des prix des actifs financiers, elles peuvent être vues comme des équations différentielles, ou comme des équations intégrales dans lesquelles interviennent des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement Brownien. Elles ont été d'abord étudiées par Itô, dans le but de construire les diffusions (c'est-à-dire, processus continus et fortement markoviens dont les générateurs sont des opérateurs différentiels du second ordre). C'est d'ailleurs dans ce but qu'il a introduit le calcul stochastique.

Un point de vue plus moderne consiste à voir les EDS comme des équations différentielles ordinaires, perturbées par un bruit aléatoire. Pour une étude plus approfondie, nous suggérons par exemple, la lecture de ([27], [36], [9]).

Dans l'analyse, la compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

Quand sont apparues les EDP ? Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17^{ème} siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr d'Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité.

Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20^{ème} siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est dû à L. Hörmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21^{ème} siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géométrie et en analyse.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément cer-

taines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateurs extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées par les méthodes numériques. C'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météorologiques, ou bien lorsque vous voyez les images animés d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion. Le rôle des mathématiciens est alors de construire des schémas d'approximation, et de démontrer la pertinence des simulations en établissant des estimations a priori sur les erreurs commises (voir [23]). Il est vrai que les méthodes numériques ont aidé à résoudre les EDP, mais elles ont des inconvénients. Pour éviter les complications de ces méthodes on a fait **L'approche probabiliste** qui permet aussi d'avoir accès rapidement à une expression de la solution de certaines EDP.

Le but de ce travail est de montrer **le lien** mathématique profond entre certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et les processus de diffusion (solutions des EDS).

Ce travail est présenté en **quatre chapitres** :

Le premier chapitre est consacré aux rappels des résultats importants en calcul stochastique. On donnera les principales propriétés des processus stochastiques, mouvement Brownien et les martingales. On abordera enfin la notion d'intégrale stochastique sans laquelle il n'y aurait pas lieu à parler d'EDS ([16],[18],[8],[26],[29],[20]).

Dans **le deuxième chapitre**, on présente les équations différentielles stochastiques browniennes. On citera ensuite l'un des théorèmes les plus importants, à savoir le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS, ensuite on donne des exemples des EDS, ensuite on traitera les diffusions d'Itô. On terminera ce chapitre par la définition d'un opérateur pour une diffusion d'Itô qu'on appellera générateur ([8], [9]).

Dans **le troisième chapitre**, on donnera des généralités sur les équations aux dérivées partielles, ensuite nous présenterons des méthodes numériques pour la résolution des EDPs du second ordre : (la méthode des différences finies, la méthode d'Euler) ; elles sont utilisées dans le cas où la résolution par les méthodes analytique est impossible. Dans ce cas la solution trouvée est une solution approchée. A la fin de ce chapitre nous présentons quelques exemples d'EDPs et leurs solutions numériques en utilisant MATLAB comme logiciel de calcul. ([35],[14],[22],[1],[19],[30]).

Dans **le dernier chapitre**, nous exhiberons le lien profond existant entre les équations aux dérivées partielles (EDP) et les équations différentielles stochastiques (EDS) à travers des théorèmes. Ces théorèmes représentent des formules (Formule de Dynkin, Formule de Feynman-Kac,.....) qui nous permettent de donner une interprétation probabiliste des EDPs, et par conséquent une solution approchée sous forme d'une espérance d'une fonctionnelle. En terminant ce chapitre par une application de calcul de la solution d'EDP par l'approche probabiliste présentée dans ce dernier. ([8],[9],[36]).

Chapitre 1

Rappels et Compléments

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de calcul stochastique utilisés le long de ce mémoire.

1.1 Vecteurs gaussiens

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

Définition 1.1.1. On dit qu'une variable aléatoire réelle (v.a.r) X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une **variable aléatoire gaussienne** où **normale** de paramètres (m, σ^2) , ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$) si sa fonction de densité f_X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Dans ce cas, sa loi P_X est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad P_X(A) = \int_A f_X(x) dx,$$

et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Définition 1.1.2. $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un **vecteur aléatoire gaussien** si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes i.e.

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

est une v.a.r gaussienne.

1.2 Processus stochastiques

Définition 1.2.1. Un **processus** est une famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.2.2. Dans ce qui suit on prend $T = [0, c]$ avec $c > 0$ ou bien $T = [0, +\infty[$.

Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ est une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} :

$$\forall s, t \in T, \quad s < t \implies \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.

Définition 1.2.3. Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration alors on définit la filtration suivante

$$\mathcal{F}_{t+} = \left(\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \right).$$

On dit qu'une filtration est continue à droite si :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}.$$

Soit \mathcal{N} la classe des ensembles de \mathcal{F} qui sont \mathbb{P} -négligeables. Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$, on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est complète.

On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfait **les conditions habituelles** si elle est à la fois **continue à droite** et **complète**.

Définition 1.2.4. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On dit que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si $\forall t \geq 0, X_t$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

On dit que le processus est à **trajectoires continues** (ou est continu) si les applications $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω .

Un processus est dit **càdlàg** (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour **càglàd**.

Définition 1.2.5. Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est un **processus gaussien** si

$\forall n \geq 1, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T, (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

On dit que X est centré si pour tout $t \in T, \mathbb{E}(X_t) = 0$.

Définition 1.2.6. On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est à **accroissements indépendants** si :

$\forall n \geq 1, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T, X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Définition 1.2.7. (Convergence d'une suite de variables aléatoires).

On considère, sur un espace de probabilités fixé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, une variable aléatoire réelle X et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ et l'on s'intéresse à la convergence de cette suite. Le caractère aléatoire de la suite met en évidence plusieurs types de convergence :

- On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

- Si $p > 0$, on dénote par $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires X telles que $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$. Si $X_n, X \in L^p$, on dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

- On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0, \text{ pour tout } \epsilon \geq 0.$$

Les principaux liens entre ces trois notions de convergence sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition 1.2.1. • *La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.*

- *La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.*
- *La convergence dans L^p implique la convergence dans L^q pour tout $q < p$.*
- *Si $X_n \rightarrow X$ presque sûrement et $X_n \leq Y$ avec $Y \in L^p$ alors $X_n \rightarrow X$ dans L^p .*

Preuve. voir (8).

Rappelons deux théorèmes fondamentaux :

Théorème 1.2.1. (Théorème de convergence monotone)

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite croissante (ou décroissante) de variables aléatoires et soit $X = \lim X_n$ p.s. Supposons que X soit intégrable. Alors $\mathbb{E}[X] = \lim \mathbb{E}[X_n]$.

Preuve. voir (10).

Théorème 1.2.2. (Théorème de convergence dominée)

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires convergeant p.s. vers X . Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| \leq Y$, alors X est intégrable et $\mathbb{E}[|X_n - X|] \rightarrow 0$ quand $n \uparrow +\infty$.

Preuve. voir (10).

Maintenant, nous donnons deux critères pour comparer deux processus stochastiques.

Définition 1.2.8. Soient $X = (X_t)_{t \in T}, Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques.

1. On dit que Y est une **modification** de X ssi

$$\forall t \in T, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

2. On dit que les processus X et Y sont **indistinguishables** ssi

$$\mathbb{P}(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1.$$

on note $X \equiv Y$.

Proposition 1.2.2. Soient T un intervalle de \mathbb{R} , $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastique continus alors :
 X et Y sont indistinguables $\iff X$ est une modification de Y .

1.3 Temps d'arrêt

Dans un jeu de hasard, un **temps d'arrêt** est un temps lors duquel le joueur décide d'arrêter de jouer, selon un critère ne dépendant que du passé et du présent. Il peut par exemple décider d'arrêter de jouer dès qu'il a dépensé tout son capital, dès qu'il a gagné une certaine somme, dès qu'il a gagné un certain nombre de fois successives, ou selon toute combinaison de ces critères. Les temps d'arrêt ont donc deux propriétés importantes : ils sont aléatoires, puisqu'ils dépendent du déroulement antérieur du jeu, et ils ne peuvent pas dépendre du futur, puisque le joueur doit à tout moment pouvoir décider s'il arrête ou non.

Définition 1.3.1. Un (\mathcal{F}_t) -**temps d'arrêt** est une variable aléatoire $\Omega \rightarrow [0, +\infty]$ (resp. $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) si $T = \mathbb{N}$ telle que

$$\forall t \in T, \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Une conséquence importante de la continuité à droite de la filtration est que

Proposition 1.3.1. Pour $T = \mathbb{R}^+$ ou $T = [0, c]$, on a
 τ est un temps d'arrêt si et seulement si $\forall t \in T, \quad \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Preuve. voir (20).

1.4 Le mouvement Brownien

Nous pouvons à présent définir le processus le plus important en calcul stochastique, c'est le **mouvement Brownien** appelé aussi processus de Wiener.

Un peu d'histoire :

Avant d'être un objet mathématique rigoureux, le mouvement Brownien a été étudié en Botanique, en Finance, et en Physique. Le botaniste R. Brown observe d'abord vers 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est alors appelé mouvement au hasard. En 1900, L. Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse de Paris dans sa thèse, met en évidence le caractère markovien du mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t , et ne dépend pas de sa position avant t . Peu après, vers 1905, A. Einstein détermine la densité de transition du Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur. La même année, Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires. La première étude mathématique rigoureuse du Brownien est faite par N. Wiener (1923), qui construit une mesure de probabilités sur l'espace des

fonctions continues sous laquelle le processus canonique est un mouvement Brownien. Des recherches d'une influence considérable ont ensuite été menées par P. Lévy (1948), lequel s'est intéressé aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Ces objets ont été développés par les potentialistes américains à la suite de J. L. Doob, puis systématisés par les spécialistes de la "Théorie Générale des Processus" de l'école de Strasbourg, autour de P. A. Meyer.

Définition 1.4.1. *Un processus $\mathbf{B} : (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé **mouvement Brownien** si :*

1. $\mathbf{B}_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s. ;
2. $\forall 0 \leq s \leq t$, la v.a $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s ;
3. $\forall 0 \leq s \leq t$, $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Autrement dit, le processus \mathbf{B} part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Remarque 1.4.1. *Lorsque $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de $(\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}$, on dit que \mathbf{B} est un mouvement Brownien naturel.*

Caractère gaussien du mouvement Brownien

Théorème 1.4.1. – *Soit $\mathbf{B} : (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement Brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\mathbf{B}_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s. ;
2. $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $(\mathbf{B}_{t_1}, \dots, \mathbf{B}_{t_n})$ est un vecteur gaussien centré ;
3. $\forall s, t \geq 0$, $\mathbb{E}(\mathbf{B}_s \mathbf{B}_t) = \min(s, t)$.

C'est-à-dire \mathbf{B} est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariane

$$\Gamma(s, t) = \min(s, t).$$

- *Inversement, si un processus \mathbf{B} vérifie 1, 2, 3 et si on note $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle de la famille $(\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}$ alors $\mathbf{B} : (\mathcal{F}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, (\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un mouvement Brownien (naturel).*

Preuve. : voir (18).

Quelques propriétés du mouvement Brownien

Proposition 1.4.1. *Si \mathbf{B} est un mouvement Brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements Browniens.*

- $\tilde{\mathbf{B}}_t = \mathbf{B}_t$; (symétrie)
- $\tilde{\mathbf{B}}_t = t\mathbf{B}_{\frac{1}{t}}$, $\mathbf{B}_0 = 0$; (inversion du temps)
- $a > 0$ fixé, $\tilde{\mathbf{B}}_t = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{B}_{at}$; (Changement d'échelle "scaling")
- $T > 0$ fixé, $\tilde{\mathbf{B}}_t = \mathbf{B}_T - \mathbf{B}_{T-t}$, $t \in [0, T]$. (retournement du temps)

Preuve. voir (18).

Théorème 1.4.2. (Propriété de Markov simple).

Soit $s \geq 0$. Le processus $(\tilde{\mathbf{B}}_t := \mathbf{B}_{t+s} - \mathbf{B}_s, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, indépendant de \mathcal{F}_s .

Preuve. voir (27).

Théorème 1.4.3. (Propriété de Markov forte).

Soit τ un temps d'arrêt. Conditionnellement à $\tau < \infty$, le processus $(\tilde{\mathbf{B}} := \mathbf{B}_{\tau+t} - \mathbf{B}_\tau, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_τ .

Preuve. voir (31).

1.5 Martingales à temps continu

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.5.1. Soit $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté et intégrable ($\forall t \geq 0, \mathbb{E}(|\mathbf{M}_t|) < \infty$), on dit que \mathbf{M} est

1. Une ***martingale*** si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(\mathbf{M}_t / \mathcal{F}_s) = \mathbf{M}_s.$$

2. Une ***surmartingale*** si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(\mathbf{M}_t / \mathcal{F}_s) \leq \mathbf{M}_s.$$

3. Une ***sousmartingale*** si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}(\mathbf{M}_t / \mathcal{F}_s) \geq \mathbf{M}_s.$$

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ qui vérifie les conditions habituelles. Si τ est un temps d'arrêt, et si $X := (X_t, t \geq 0)$ est un processus continu, on note X^τ le processus arrêté $(X_t^\tau = X_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$.

Définition 1.5.2. Un processus continu adapté $\mathbf{M} := (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ est appelé ***une martingale locale*** (continue) s'il existe une suite croissante $(\tau_n, n \geq 1)$ de temps d'arrêt telle que $\tau_n \nearrow \infty$ p.s. et que pour tout n , $\mathbf{M}^{\tau_n} - \mathbf{M}_0$ soit une martingale uniformément intégrable. On dit que la suite de temps d'arrêt (τ_n) ***réduit*** \mathbf{M} .

Définition 1.5.3. Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est appelé ***une semimartingale continue*** s'il s'écrit sous la forme

$$X_t = X_0 + \mathbf{M}_t + V_t,$$

où \mathbf{M} est une martingale locale continue et V est un processus à variation finie, avec $\mathbf{M}_0 = V_0 = 0$.

Mouvement Brownien et martingales

Théorème 1.5.1. (Propriété de martingale du mouvement Brownien).

Le mouvement Brownien est une martingale par rapport à la filtration canonique $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Preuve. voir (8).

Proposition 1.5.1. • $(\mathbf{B}_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.

• Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $(\exp(\gamma \mathbf{B}_t - \gamma^2 \frac{t}{2}))_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.

Preuve. voir (8).

Théorème 1.5.2. (Caractérisation de P. Lévy du mouvement Brownien).

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration et $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale continue avec $\mathbf{M}_0 = 0$. Si le processus $(\mathbf{M}_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est aussi une \mathcal{F}_t -martingale, alors \mathbf{M} est un mouvement Brownien.

Preuve. : voir (18).

Théorème 1.5.3. (Caractérisation du MB par son crochet).

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un processus à trajectoires continues $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté issu de 0. Il y a équivalence entre

- X est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement Brownien en dimension d .
- Les processus X_1, \dots, X_d sont des $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingales locales continues et de plus

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{i,j} t,$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

En particulier, une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale locale continue \mathbf{M} issue de 0 est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement Brownien si et seulement si $\langle \mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle_t = 0$.

Preuve. voir (18).

Quelques inégalités

Théorème 1.5.4. (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

En se plaçant sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}^2$) muni du produit scalaire $(f, g) \rightarrow \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$, on obtient :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt},$$

avec E est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, ceci définissent bien une norme sur E .

Preuve. voir (24).

Théorème 1.5.5. (Inégalité maximale de Doob)

Si $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue à droite, alors

$$\forall p > 1, \quad \left(\mathbb{E} \left[\left| \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{M}_s \right|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\mathbb{E} \left[|\mathbf{M}_s|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve. voir (8).

Théorème 1.5.6. (Inégalité de Doob)

Soit $(\mathbf{M}_t, t \geq 0)$ une martingale continue. Alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{M}_s^2 \right) \leq 4 \mathbb{E} \left(\mathbf{M}_t^2 \right).$$

1.6 Intégrale stochastique (Intégrale d'Itô)

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa filtration naturelle i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbf{B}_u, u \leq t)$. Le mouvement Brownien n'étant pas à variation bornée, on ne peut pas s'appuyer sur la théorie de l'intégration classique de Riemann-Stieltjes afin de donner un sens à la quantité

$$\int_0^t H_s d\mathbf{B}_s,$$

où H est un processus stochastique continu. C'est pour cette raison qu'on construit une nouvelle intégrale, appelée l'intégrale d'Itô, définie dans un sens quadratique.

Définition 1.6.1. (Intégrale d'Itô) Soient $\mathbf{B} : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un mouvement Brownien ainsi que $H : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique de carré intégrable adapté à la filtration naturelle associée à \mathbf{B} , alors l'intégrale d'Itô est définie par :

$$\int_0^t H_s d\mathbf{B}_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n H_{t_i} (\mathbf{B}_{t_{i+1}} - \mathbf{B}_{t_i}) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ est une subdivision de $[0, t]$ de pas $\delta = \sup_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1})$.

Lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, ces sommes considérées comme des sommes de Riemann-Stieltjes pour chaque trajectoire du mouvement Brownien donné, ne convergent pas en général; la raison en est que le mouvement Brownien n'est pas à variations bornées. L'usage de la convergence quadratique est le point essentiel de cette définition.

Formule d'Itô

Soient $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathbf{B}_s, \quad \forall t \leq T \quad \mathbb{P} - p.s.,$$

avec, $K_s \in \mathbb{L}^1$ et $H_s \in \mathbb{L}^2$,

et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique : elle montre qu'une fonction de classe \mathcal{C}^2 de p semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.

Théorème 1.6.1. (Formule d'Itô) Soient X une semimartingale et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s. \quad (1.1)$$

Si on considère p semimartingales continues X^1, \dots, X^p et $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 alors,

$$F(X_t^1, \dots, X_t^p) = F(X_0^1, \dots, X_0^p) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, \dots, X_s^p) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, \dots, X_s^p) d\langle X^i, X^j \rangle_s. \quad (1.2)$$

Preuve. voir (9)

Formule d'intégration par parties (IPP)

Corollaire 1.6.1. (IPP)

Soient $(X_t), (Y_t)$ deux processus d'Itô. Alors pour tout $t \geq 0$ on a

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t, \text{ p.s.},$$

qu'on écrit encore sous forme différentielle

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Preuve. voir (9).

Propriétés

Avec les notations précédentes, le processus stochastique $(Y_t)_{t \geq 0}$ défini, pour tout t réel positif, par $Y_t = \int_0^t H_s dB_s$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Y_t est une martingale ;
2. $\mathbb{E}(Y_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s^2) ds$ (Isométrie d'Itô) ;
3. $\mathbb{E}(\int_0^t H_t dB_t) = 0$.

Application

Soient $t > 0$ et $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement Brownien réel. Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ une partition de l'intervalle $[0, t]$.

- Calculer l'intégrale $\int_0^t B_s dB_s$ au sens d'Itô.

- Méthode 1 : Utilisons la définition de l'intégrale d'Itô

$$\begin{aligned}
 \int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} B_{t_i} - B_{t_{i-1}}^2 \\
 &= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.
 \end{aligned}$$

- Méthode 2 : Appliquons la formule d'Itô

Si $f(x) = x^2$ et $X_t = B_t$ donc,

$$\begin{aligned}
 B_t^2 &= 2 \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds \\
 \Rightarrow \int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.
 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Equations Différentielles Stochastiques

On présente dans ce chapitre les équations différentielles stochastiques browniennes. On commence par en donner une motivation en Section (2.1) en tant que généralisation des équations différentielles ordinaires dans un contexte d'incertitude représentée par un bruit aléatoire, après on décrit les principaux résultats d'existence et d'unicité en Section (2.2), des exemples d'EDS classiques sont présentés en Section (2.3), et à la fin on parle brièvement sur les solutions d'EDS appelées diffusions ainsi que des outils importants pour leur étude en Section (2.4).

2.1 Introduction, définitions

Equations différentielles et EDS

Les équations Différentielles Stochastiques ont été d'abord étudiées par Itô, dans le but de construire les diffusions (c'est-à-dire, processus continus et fortement markoviens dont les générateurs sont des opérateurs différentiels du second ordre). C'est d'ailleurs dans ce but qu'il a introduit le calcul stochastique.

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS).

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t)), \quad (2.1)$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée \dot{x} et elle-même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (2.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec $b(t, x) = b + cx$ indépendant de t et affine par rapport à x . Symboliquement, l'équation (2.1) se réécrit

$$dx(t) = b(t, x(t))dt. \quad (2.2)$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x(t))_{t \geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, à la date t , selon le taux $b(t, x(t))$. Par exemple, avec $b(t, x) = b(t)x$, l'équation $dx(t) = b(t)x(t)dt$ modélise le cours d'un actif financier $x(t)$ soumis au taux d'intérêt variable $b(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $b(t)$. Il est bien connu que la solution

est

$$x(t) = x_0 \exp \left(\int_0^t b(s) ds \right).$$

Les EDS sont des généralisations des équations (2.2) où la dynamique déterministe d'évolution b est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit, qui sera de la forme $\sigma d\mathbf{B}_t$, où \mathbf{B} désigne un mouvement Brownien et une intensité de bruit $\sigma(t, x)$:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathbf{B}_t, \quad (2.3)$$

où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps t (X_t) mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en $t(\sigma(X_t))$ ou encore être constante σ .

En fait, l'écriture (2.3) est symbolique car $d\mathbf{B}_t$ n'a pas vraiment de sens (le mouvement Brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (2.3) sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)d\mathbf{B}_s \quad (2.4)$$

qui, elle, a un sens si l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s, X_s)d\mathbf{B}_s$ a un sens. On généralise encore dans la définition suivante la notion d'EDS dans un cadre vectoriel.

Définition 2.1.1. (EDS) On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation en le processus X (à valeurs dans \mathbb{R}^d) de la forme

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathbf{B}_t \quad (E(b, \sigma))$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)d\mathbf{B}_s^j, \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.5)$$

où, pour m, d des entiers positifs,

- $b(t, x) = (b_i(t, x))_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur mesurable de \mathbb{R}^d défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **dérive** ou **drift** de l'EDS,
- $\sigma(t, x) = (\sigma_{i,j}(t, x))_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ est une matrice $d \times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **coefficient de diffusion** de l'EDS,

et $\mathbf{B} = (\mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^m)$ est un mouvement Brownien standard en dimension m .

La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Plus précisément, on a :

Définition 2.1.2. (Solution d'une EDS).

On appelle solution de l'EDS $E(b, \sigma)$ la donnée de

- un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles ;

- un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement Brownien $(\mathbf{B} = (\mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^m))$ dans \mathbb{R}^m défini sur cet espace de probabilité;
- un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté continu $X = (X^1, \dots, X^d)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que (2.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$: (2.5).

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(b, \sigma)$.

2.2 Existence et unicité

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, Le caractère aléatoire impose plusieurs notions d'existence et d'unicité des EDS. Dans ce qui suit, on considère l'EDS $E(b, \sigma)$.

Définition 2.2.1. (Existence, unicité des EDS).

Pour l'équation $E_x(b, \sigma)$, on dit qu'il y a :

- Existence d'une solution faible : si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X .
- Existence d'une solution forte : si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X qui soit adaptée à la filtration du Brownien porteur.
- Unicité faible : si tous les processus X solutions de $E_x(b, \sigma)$ ont même loi.
- Unicité trajectorielle : si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et le Brownien porteur étant fixés, deux solutions quelconques X et X' de $E_x(b, \sigma)$ sont indistinguables.

Remarque 2.2.1. La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre.

Il peut y avoir existence et unicité faible sans qu'il y ait unicité trajectorielle. Pour voir cela, on considère un mouvement Brownien β issu de $\beta_0 = y$ et on pose

$$\mathbf{B}_t = \int_0^t \text{sign}(\beta_s d\beta_s),$$

avec $\text{sign}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\text{sign}(x) = -1$ si $x < 0$. On constate facilement que

$$\beta_t = y + \int_0^t \text{sign}(\beta_s) d\mathbf{B}_s.$$

Comme \mathbf{B} est une martingale locale à trajectoires continues et que

$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle_t = \int_0^t \text{sign}(\beta_s)^2 d\langle \beta, \beta \rangle_s = \int_0^t ds = t,$$

le Théorème de P. Lévy (1.5.3) justifie que \mathbf{B} est un mouvement Brownien (issu de 0). On voit alors que β est solution de l'EDS

$$dX_t = \text{sign}(X_t) d\mathbf{B}_t, \quad X_0 = y, \quad (2.6)$$

pour laquelle il y a donc existence faible. À nouveau, par le Théorème de Lévy (1.5.3), on prouve l'unicité faible : toute solution X de (2.6) est une martingale locale à trajectoires continues et vérifie

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \text{sign}(X_s)^2 d\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle_s = \int_0^t ds = t,$$

et doit donc être un mouvement Brownien (Théorème de P. Lévy 1.5.3).

Par contre, il n'y a pas, en général, unicité trajectorielle : pour $y = 0$, on voit facilement que β et $-\beta$ sont deux solutions de (2.6) associées au même Brownien \mathbf{B} . Noter que $\int_0^t \mathbb{1}_{\{\beta_s=0\}} d\mathbf{B}_s = 0$ car

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{\beta_s=0\}} d\mathbf{B}_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\beta_s=0\}}^2 ds \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\beta_s=0\}} ds \right] = \int_0^t \mathbb{P}(\beta_s = 0) ds = 0,$$

et donc $\int_0^t \mathbb{1}_{\{\beta_s=0\}} d\mathbf{B}_s = 0$ p.s. Aussi, β n'est pas solution forte de l'EDS : la filtration de \mathbf{B} coïncide avec la filtration canonique de $|\beta|$, qui est strictement plus petite que celle de β .

Le résultat suivant relie les différentes notions d'existence et d'unicité :

Théorème 2.2.1. (Yamada-Watanabe).

Existence faible et unicité trajectorielle impliquent unicité faible. De plus, dans ce cas, pour tout espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement Brownien \mathbf{B} il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution forte de $E_x(b, \sigma)$.

Preuve. voir (16).

Théorème 2.2.2. (Cauchy-Lipschitz pour EDS).

On suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$

1. Condition de Lipschitz

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|;$$

2. Croissance linéaire

$$|b(t, x)| \leq K(1 + |x|), |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|).$$

Alors il y a unicité trajectorielle pour $E_x(b, \sigma)$.

De plus, pour tout espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement Brownien, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution forte pour $E_x(b, \sigma)$.

Preuve. voir (16).

Pour montrer l'unicité trajectorielle on a besoin de lemme suivant :

Lemme 2.2.1. (Gronwall).

Soient $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0, T]$. On suppose qu'il existe

deux constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Alors on a :

$$g(t) \leq a \exp(bt) \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Preuve. voir (9)

Preuve du Théorème : (Existence et unicité)

Afin d'alléger les notations, on traitera uniquement le cas $d = m = 1$. Commençons par établir l'unicité trajectorielle.

Unicité trajectorielle : Soit $t \in [0, T]$.

On considère deux solutions X et X' de $E_x(b, \sigma)$ avec $X_0 = X'_0$ définies sur le même espace et avec le même mouvement brownien \mathbf{B} . Pour $M > 0$ fixé, on considère le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{t \geq 0, |X_t| \geq M \text{ ou } |X'_t| \geq M\}.$$

D'après $E_x(b, \sigma)$ on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$X_{t \wedge \tau} = X_0 + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X_s) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X_s) d\mathbf{B}_s.$$

Vu que X' est aussi une solution, nous avons l'équation analogue :

$$X'_{t \wedge \tau} = X'_0 + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X'_s) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X'_s) d\mathbf{B}_s.$$

On considère $t \in [0, T]$. Par différence, comme $X = X'_0$ et comme X, X' sont bornées par M sur $[0, \tau]$, l'expression de la variance d'une intégrale stochastique L^2 , l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|\int_0^t f ds|^2 \leq t \int_0^t |f|^2 ds$, $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$), les hypothèses lipschitziennes et la majoration $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ donnent

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2 \right] \\ & \leq 2 \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) d\mathbf{B}_s \right)^2 \right] \right) \\ & \leq 2 \left(T \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))^2 ds \right] \right) \\ & \leq 2K^2(T+1) \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} (X_s - X'_s)^2 ds \right] \\ & \leq 2K^2(T+1) \mathbb{E} \left[\int_0^t (X_{s \wedge \tau} - X'_{s \wedge \tau})^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Si on pose $h(t) = \mathbb{E} \left[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2 \right]$ et $C = 2K^2(T+1)$, alors on a établi que h vérifie pour $t \in [0, T]$:

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s) ds.$$

De plus, par définition de τ , la fonction h est bornée par $4M^2$, l'inégalité de Gronwall s'applique avec $a = 0$ et $b = C$. On obtient $h = 0$, c'est à dire $X_{t \wedge \tau} = X'_{t \wedge \tau}$ p.s. Finalement, en faisant $M \rightarrow +\infty$ on a $\tau \rightarrow +\infty$ et donc $X_t = X'_t$ p.s. Les processus X et X' sont des modifications à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle. ■

Passons à présent au deuxième point.

Existence forte : On procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x \\ X_t^1 &= x + \int_0^t b(s, x) ds + \int_0^t \sigma(s, x) d\mathbf{B}_s \\ X_t^2 &= x + \int_0^t b(s, X_s^1) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^1) d\mathbf{B}_s \\ \dots &= \dots \\ X_t^n &= x + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) d\mathbf{B}_s. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n , X_t^n est continu et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(t, X_t^n)$ l'est aussi (hypothèse lipschitzienne) et l'intégrale correspondante bien définie. On fixe maintenant $T > 0$ et on raisonne sur $[0, T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}[(X_t^n)^2] \leq C_n. \tag{2.8}$$

En effet, (2.8) est immédiate si $n = 0$ avec $C_0 = x$. Puis, on suppose que (2.8) est vraie au rang $n - 1$ avec

$$|b(s, y)| \leq K' + K|y|, \quad |\sigma(s, y)| \leq K' + K|y|, \quad s \in [0, T], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothèse de récurrence (2.8), on a $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds] < +\infty$ on a donc

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) d\mathbf{B}_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds \right].$$

Comme $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie L^2 , et les hypothèses lipschitziennes, on majore comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^n)^2] &\leq 3 \left(|x|^2 + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) d\mathbf{B}_s \right)^2 \right] \right) \\
&\stackrel{(convexité)}{\leq} 3 \left(|x|^2 + t \mathbb{E} \left[\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds \right] \right) \\
&\stackrel{(isométrie L^2, Cauchy-Schwarz)}{\leq} 3 \left(|x|^2 + 2(T+1) + \mathbb{E} \left[\int_0^t ((K')^2 + K^2 (X_s^{n-1})^2) ds \right] \right) \\
&\stackrel{(hypothèses lipschitziennes)}{\leq} 3(|x|^2 + 2T(T+1)((K')^2 + K^2 C_{n-1})) =: C_n,
\end{aligned}$$

ce qui établit (2.8) par récurrence.

La borne (2.8) et la croissance sous-linéaire de σ assurent alors que, pour chaque n , la martingale locale $(\int_0^t \sigma(s, X_s^n) d\mathbf{B}_s)$ est une vraie martingale bornée dans L^2 sur l'intervalle $[0, T]$.

Cela va permettre de majorer par récurrence $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n-1} - X_t^n|^2]$. On a

$$X_t^{n-1} - X_t^n = \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})) d\mathbf{B}_s.$$

En utilisant les inégalités de Doob (1.5.6) et de Cauchy-Schwarz ainsi que les hypothèses lipschitziennes, on déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \\
&\leq 2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})) du \right|^2 + \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})) d\mathbf{B}_u \right|^2 \right] \\
&\stackrel{(convexité)}{\leq} 2 \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})| du \right)^2 \right] + 4 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})) d\mathbf{B}_u \right)^2 \right] \right) \\
&\stackrel{(inégalité de Doob)}{\leq} 2 \left(T \mathbb{E} \left[\int_0^t (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))^2 du \right] + 4 \mathbb{E} \left[\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))^2 du \right] \right) \\
&\stackrel{(isométrie L^2, Cauchy-Schwarz)}{\leq} 2(T+4)K^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du \right] \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(hypothèses lipschitziennes)}{\leq} C_T \mathbb{E} \left[\int_0^t \sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 du \right] \tag{2.10}$$

avec $C_T = 2(4+T)K^2$. Si on note $g_n(u) = \mathbb{E}[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2]$ et $g_0(u) = \mathbb{E}[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^0|^2] = x^2$ alors on a établi

$$g_{n+1}(t) \leq C_T \int_0^t g_n(u) du. \quad (2.11)$$

Par ailleurs, par (2.8) et les inégalités précédentes (cf. (2.9)), on voit que les fonctions g_n sont bornées sur $[0, T]$. En effet, $g_0(t) = x^2$ pour $t \in [0, T]$ et par une récurrence utilisant (2.11), on établit que pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$ on a

$$g_n(t) \leq x^2 C_T^n \frac{t^n}{n!}.$$

On déduit alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty$, comme

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \right\|_2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \right\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty$$

cela entraîne que p.s.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| < +\infty,$$

et donc p.s. la suite $(X_t^n)_{t \in [0, T]}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t \in [0, T]}$ qui est continu. Comme par récurrence, chaque processus X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de \mathbf{B} , X l'est aussi à la limite.

Les estimations (2.10) établissent aussi que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^n - X_s|^2 \right] \leq \left(\sum_{k=n}^{+\infty} g_k(T)^{1/2} \right)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

On déduit alors de l'isométrie L^2 , des hypothèses lipschitziennes que, avec des limites dans L^2 on a

$$L^2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) ds = \int_0^t b(s, X_s) ds,$$

$$L^2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) d\mathbf{B}s = \int_0^t \sigma(s, X_s) d\mathbf{B}s.$$

Finalement, en passant à la limite dans l'équation de récurrence (2.7), on obtient que X est solution forte de $E_x(b, \sigma)$ sur $[0, T]$.

■

2.3 Exemples d'EDS

Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les

EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, i.e. $d = m = 1$.

2.3.1 Equations linéaires

Ornstein-Uhlenbeck : équation $b(t, x) = -bx$ $b \geq 0$ et $\sigma(x) = \sigma$. Il s'agit de l'équation de Langevin :

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma d\mathbf{B}_t \quad (2.12)$$

c'est à dire avec $b(t, x) = -bx$ $b \geq 0$ et $\sigma(x) = \sigma$. La solution est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} d\mathbf{B}_s. \quad (2.13)$$

Sans le terme $\sigma d\mathbf{B}_t$, l'équation $dX_t = -bX_t dt$ se résout immédiatement en $X_t = C e^{-bt}$. Pour tenir compte du terme $\sigma d\mathbf{B}_t$ on fait "varier la constante C " :

$$\begin{aligned} dC e^{-bt} - b C e^{-bt} dt &= dX_t = -bX_t dt + \sigma d\mathbf{B}_t \\ dC &= \sigma e^{bt} d\mathbf{B}_t \\ C &= X_0 + \int_0^t \sigma e^{bs} d\mathbf{B}_s \end{aligned}$$

et, avec $X_t = C e^{-bt}$ l'expression (2.13) est obtenue.

On peut observer directement que (2.13) est satisfaite en dérivant $X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} d\mathbf{B}_s$ avec la formule d'Itô :

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce cas se généralise au contexte vectoriel.

Equation $b(t, x) = b_t x$ et $\sigma(x) = \sigma_t x$. On suppose les processus $(b_t)_{t \geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ bornés ou vérifiant l'intégrabilité $\int_0^T |b_t| dt < +\infty$, $\int_0^T |\sigma_t|^2 dt < +\infty$ l'EDS

$$dX_t = X_t(b_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t), \quad X_0 = x \quad (2.14)$$

admet pour solution

$$X_t = x \exp \left(\int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s d\mathbf{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right). \quad (2.15)$$

Pour le voir, on suppose X positivement borné sur $[0, T]$ (minoré par 1 = n , majoré par n) sinon, on introduit le temps d'arrêt $T_n = \inf(t : X_t \leq \frac{1}{n} \text{ ou } X_t > n)$ et on arrête les processus à ces dates. On applique la formule d'Itô à $X_{t \wedge T_n}$ et à la fonction \ln (qui est C^2 sur $[\frac{1}{n}, n]$). De l'équation (2.14), on déduit $d\langle X, X \rangle_t = X_t^2 \sigma_t^2 dt$. Le processus $Y_t = \ln(X_{t \wedge T_n})$ vérifie alors

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} \frac{d\langle X, X \rangle_t}{X_t^2} = (b_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t) - \frac{\sigma_t^2}{2} dt = (b_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2) dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t,$$

ce qui prouve le résultat (2.15).

Black et Scholes. C'est le cas particulier où $b(t, x) = bx$ et $\sigma(t, x) = \sigma x$, ie.

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t d\mathbf{B}_t. \quad (2.16)$$

Cette EDS modélise l'évolution d'un cours X soumis à un taux d'intérêt déterministe b et à une perturbation stochastique $\sigma X_t d\mathbf{B}_t$. Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ est appelé volatilité. Noter que la partie déterministe de l'accroissement de $X_t(bX_t)$ et sa partie aléatoire (σX_t) sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante, X_t , en t (ce qui est typique des modèles de croissance).

La solution de (2.16) est un cas particulier de (2.15) :

$$X_t = X_0 \exp \left(bt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma \mathbf{B}_t \right).$$

On retrouve le mouvement brownien géométrique.

2.3.2 Equations affines

On suppose que $b(t, x) = b_t x + c_t$ et $\sigma(t, x) = \sigma_t x + \delta_t$, c'est à dire qu'on considère l'EDS affine générale

$$dX_t = X_t(b_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t) + c_t dt + \delta_t d\mathbf{B}_t. \quad (2.17)$$

Elle a une solution construite à partir de la solution Z de l'EDS linéaire $dZ_t = Z_t(b_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t)$ de condition initiale $Z_0 = 1$, ie.

$$Z_t = \exp \left(\int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s d\mathbf{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)$$

donnée, avec $\tilde{c}_t = c_t - \sigma_t \delta_t$, par

$$X_t = Z_t \left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1} (\tilde{c}_s ds + \delta_s d\mathbf{B}_s) \right). \quad (2.18)$$

Avec la formule d'Itô, on vérifie que (2.18) satisfait effectivement l'équation (2.17) :

$$\begin{aligned} dX_t &= Z_t(Z_t^{-1}(\tilde{c}_t dt + \delta_t d\mathbf{B}_t)) + X_t(b_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t) + d\langle Z_t, Z_t^{-1} \delta_t \mathbf{B}_t \rangle_t \\ &= \tilde{c}_t dt + \delta_t d\mathbf{B}_t + X_t(b_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t) + \sigma_t \delta_t dt \\ &= X_t(b_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t) + c_t dt + \delta_t d\mathbf{B}_t. \end{aligned}$$

2.4 Générateur des diffusions

Dans l'étude des diffusions, il est particulièrement intéressant de considérer la dépendance des solutions dans la condition initiale $X_0 = x$. La propriété de Markov affirme que l'état X_t en un temps donné t détermine univoquement le comportement à tous les temps futurs. Ceci permet de démontrer la propriété de semi-groupe, qui généralise celle du flot d'une équation différentielle ordinaire.

Un semi-groupe de Markov peut être caractérisé par son générateur, qui s'avère être un opérateur différentiel du second ordre dans le cas des diffusions.

2.4.1 Diffusion

Définition 2.4.1. (Processus de Diffusion). On appelle diffusion un processus stochastique obéissant à une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geq s > 0, \quad X_s = x. \quad (2.19)$$

Définition 2.4.2. (Diffusion d'Itô). Une diffusion d'Itô homogène dans le temps est un processus stochastique $\{X_t(\omega)\}_{t \geq 0}$ satisfaisant une équation différentielle stochastique de la forme

$$dX_t = \underbrace{b(X_t)}_{\text{Coeff-dérive}} dt + \underbrace{\sigma(X_t)}_{\text{Coeff-diffusion}} dB_t,$$

où :

- B_t est un mouvement Brownien standard de dimension m ;
- $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, coefficient de dérive ;
- $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, coefficient de diffusion,

tels que l'EDS (2.19) admette une unique solution en tout temps.

Nous noterons la solution de l'équation (2.19), $X_t^{s,x}$.

2.4.2 Propriété de Markov

L'homogénéité en temps, c'est-à-dire le fait que b et σ ne dépendent pas du temps, a la conséquence importante suivante.

Lemme 2.4.1. Les processus $\{X_{s+h}^{s,x}\}_{h \geq 0}$ et $\{X_h^{0,x}\}_{h \geq 0}$ ont la même loi.

Théorème 2.4.1. (Propriété de Markov pour les diffusions d'Itô). Pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}^x(\varphi(X_{t+h})/\mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbb{E}^{X_t(\omega)}(\varphi(X_h)), \quad (2.20)$$

le membre de droite désignant la fonction $\mathbb{E}^y(\varphi(X_h))$ évaluée en $y = X_t(\omega)$.

Preuve. Considérons pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $s \geq t$ la fonction

$$F(y, t, s, \omega) = X_s^{t,y}(\omega) = y + \int_t^s b(X_u(\omega))du + \int_t^s \sigma(X_u(\omega))dB_u(\omega).$$

On notera que F est indépendante de \mathcal{F}_t . Par unicité des solutions de l'EDS (2.19), on a

$$X_s(\omega) = F(X_t(\omega), t, s, \omega).$$

Posons $\sigma(y, \omega) = \varphi \circ F(y, t, t+h, \omega)$. On vérifie que cette fonction est mesurable. La relation (2.20) est alors équivalente à

$$\mathbb{E}(\sigma(X_t, \omega)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\varphi \circ F(y, 0, h, \omega))|_{y=X_t(\omega)}.$$

On a

$$\mathbb{E}(\sigma(X_t, \omega)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(g(y, \omega)/\mathcal{F}_t)|_{y=X_t(\omega)}.$$

En effet, cette relation est vraie pour des fonctions de la forme $g(y, \omega) = \phi(y)\psi(\omega)$, puisque

$$\mathbb{E}(\phi(X_t)\psi(\omega)/\mathcal{F}_t) = \phi(X_t)\mathbb{E}(\psi(\omega)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(y)\psi(\omega)/\mathcal{F}_t)|_{y=X_t(\omega)}.$$

Elle s'étend alors à toute fonction mesurable bornée en approximant celle-ci par une suite de combinaisons linéaires de fonctions comme ci-dessus. Or il suit de l'indépendance de F et de \mathcal{F}_t que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sigma(y, \omega)/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(\sigma(y, \omega)) \\ &= \mathbb{E}(\varphi \circ F(y, t, t+h, \omega)) \\ &= \mathbb{E}(\varphi \circ F(y, 0, h, \omega)), \end{aligned}$$

la dernière égalité est suivant du Lemme précédent. Le résultat s'obtient alors en évaluant la dernière égalité en $y = X_t$. \square

Comme pour le mouvement Brownien, la propriété de Markov se généralise à des temps d'arrêts.

Théorème 2.4.2. (*Propriété de Markov forte pour les diffusions d'Itô*). *Pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et tout temps d'arrêt τ fini presque sûrement,*

$$\mathbb{E}^x(\varphi(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau)(\omega) = \mathbb{E}^{X_\tau(\omega)}(\varphi(X_h)).$$

2.4.3 Semi-groupe

Définition 2.4.3. (*Semi-groupe de Markov*). *A toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on associe pour tout $t \geq 0$ la fonction $T_t\varphi$ définie par :*

$$(T_t\varphi)(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_t)).$$

L'opérateur linéaire T_t est appelé le semi-groupe de Markov associé à la diffusion. Par exemple, si $\varphi(x) = 1_A(x)$ est la fonction indicatrice d'un Borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$(T_t 1_A)(x) = \mathbb{P}^x\{X_t \in A\}.$$

Le nom de semi-groupe est justifié par le résultat suivant.

Lemme 2.4.2. (*Propriété de semi-groupe*). *Pour tous $t, h \geq 0$, on a*

$$T_h \circ T_t = T_{t+h}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} (T_h \circ T_t)(\varphi)(x) &= (T_h(T_t\varphi))(x) \\ &= \mathbb{E}^x((T_t\varphi)(X_h)) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{X_h}(\varphi(X_t))) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^x(\varphi(X_{t+h})/\mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}^x(\varphi(X_{t+h})) \\ &= (T_{t+h}\varphi)(x). \end{aligned}$$

De plus, on vérifie facilement les propriétés suivantes :

1. T_t préserve les fonctions constantes : $T_t(c1_{\mathbb{R}^n}) = c1_{\mathbb{R}^n}$;
2. T_t préserve les fonctions non-négatives : $\varphi(x) \geq 0, \forall x \implies (T_t\varphi)(x) \geq 0, \forall x$;
3. T_t est contractante par rapport à la norme L^∞ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(T_t\varphi)(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\mathbb{E}^x(\varphi(X_t))| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\varphi(y)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathbb{E}^x(1) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\varphi(y)|.$$

Le semi-groupe de Markov est donc un opérateur linéaire positif, bornée par rapport à la norme L^∞ . En fait, il est de norme opérateur 1. La propriété de semi-groupe implique que le comportement de T_t sur tout intervalle $[0, \epsilon]$, avec $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, détermine son comportement pour tout $t \geq 0$. Il est donc naturel de considérer la dérivée de T_t en $t = 0$.

2.4.4 Générateur de diffusion

Il est fondamental pour beaucoup d'applications que nous pouvons associer un opérateur différentiel de second ordre L à une diffusion d'Itô X_t ; la relation de base entre L et X_t est que L est le générateur de la diffusion d'Itô X_t .

Définition 2.4.4. (Générateur d'une diffusion d'Itô). Le générateur infinitésimal L d'une diffusion d'Itô est défini par son action sur une fonction test φ via :

$$(L\varphi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(T_h\varphi)(x) - \varphi(x)}{h}. \quad (2.21)$$

Le domaine de L est par définition l'ensemble des fonctions φ pour lesquelles la limite existe pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.4.1. Formellement, la relation (2.21) peut s'écrire

$$L = \left. \frac{dT_t}{dt} \right|_{t=0}.$$

Par la propriété de Markov, cette relation se généralise en

$$\frac{d}{dt}T_t = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{T_{t+h} - T_t}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{T_t - id}{h}T_t = LT_t,$$

et on peut donc écrire formellement

$$T_t = \exp(tL).$$

Pour montrer la relation entre L et les coefficients σ et b on a la proposition suivante :

Proposition 2.4.1. Le générateur de la diffusion d'Itô (2.19) est l'opérateur différentiel

$$L = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Le domaine de L contient l'ensemble des fonctions deux fois continûment différentiables à support compact.

Démonstration : Considérons le cas $m = n = 1$. Soit φ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact, et soit $Y_t = \varphi(X_t)$. Par la formule d'Itô,

$$Y_h = \varphi(X_0) + \int_0^h \varphi'(X_s)b(X_s)ds + \int_0^h \varphi'(X_s)\sigma(X_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^h \varphi''(X_s)\sigma(X_s)^2ds.$$

$$\mathbb{E}^x(Y_h) = \varphi(x) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^h \varphi'(X_s)b(X_s)ds + \frac{1}{2} \int_0^h \varphi''(X_s)\sigma(X_s)^2ds\right), \quad (2.22)$$

d'où

$$\frac{\mathbb{E}^x(Y_h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbb{E}^x(\varphi'(X_s)b(X_s))ds + \frac{1}{2h} \int_0^h \mathbb{E}^x(\varphi''(X_s)\sigma(X_s)^2)ds.$$

En prenant la limite $h \rightarrow 0_+$, on obtient

$$(L\varphi)(x) = \varphi'(x)b(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)\sigma(x)^2.$$

Les cas où $n \geq 2$ ou $m \geq 2$ se traitent de manière similaire, en utilisant la formule d'Itô multidimensionnelle. \square

Chapitre 3

Généralité sur les EDPs et la méthode des différences finis

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme (Exemple : les équations de Maxwell). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines. Nous pouvons citer par exemple :

1. L'équation de Fourier ou équation de la chaleur qui décrit l'évolution de la température en fonction du temps et de l'espace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}. \text{ Le nombre } \alpha \text{ est appelé diffusivité thermique du milieu.}$$

2. l'équation de Black-Scholes utilisée en finances :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + S \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 \text{ où } c = c(t, S) \text{ est un prix et } \sigma, r \text{ des constantes.}$$

3. l'équation d'advection qui décrit comment une quantité est transportée dans un courant (par exemple un polluant dans l'eau) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t), \text{ c : étant la vitesse du milieu qui est souvent une constante.}$$

Certaines de ces EDP ont été résolues analytiquement et leurs solutions sont connues. Toutefois, un nombre important de ces EDP existent sans solutions analytiques. C'est dans cette optique que les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour arriver à approximer les solutions de ces équations.

Notons que malgré ces efforts indéniables, il n'existe pas de méthodes universelles pour la résolution numérique des EDP. L'algorithme de résolution dépend très étroitement du type de

problème posé. C'est pour cela que nous allons restreindre notre champs d'étude. On exigera que l'équation satisfasse quelques propriétés comme la linéarité pour que la résolution soit possible.

3.1 Généralité sur les équations aux dérivées partielles

3.1.1 Définitions - Exemples

Définition 3.1.1. *En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u définie comme ci dessous), des variables indépendantes $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :*

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0. \quad (3.1)$$

Exemples :

- l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ qui admet comme solutions $u(x, y) = (x + y)^3, u(x, y) = \sin(x - y), \dots$
- l'équation de la Laplace $\Delta u = 0$, en dimensions $2D$, qui admet aussi au moins deux solutions dont $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = e^x \sin(y)$.

Définition 3.1.2. *Une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si u est une fonction à valeurs scalaires des variables x et y , $(x, y) \in \Omega$ où Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 , une EDP est une relation de la forme :*

$$F(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega, \quad (3.2)$$

où F désigne une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^5 .

L'ordre et la dimension d'une EDP :

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. L'équation (3.2) est donc d'ordre 1.

La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u . L'équation (3.2) est donc de dimension 2.

Remarque 3.1.1. *Résoudre une EDP consiste à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (3.2).*

les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire ; les problèmes incluent souvent **des conditions aux limites** qui restreignent l'ensemble des solutions. Pour assurer donc l'unicité de la solution, comme on le fait avec les équations différentielles ordinaires, EDO, on tiendra compte des conditions prédonnées comme **les conditions aux limites** et **les conditions initiales**.

En général, une EDP est complétée par des conditions sur le bord de Ω du type :

$$\mathcal{G}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Ces conditions peuvent être de nature très différentes et influent fortement sur l'existence et la forme des solutions. Quand les conditions portent sur le bord complet du domaine, on parle de **problème aux frontières**. Quand le domaine est d'extension infinie autour d'un obstacle compact (par exemple ; lors de l'étude de la signature radar d'un objet), on parle de **problème extérieur**.

Quand les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation, on parle de **problème de Cauchy**.

Les équations de la physique sont fréquemment posées sur des domaines spatio-temporels du type $\Omega = w \times [t_0, +\infty[$ où w est un ouvert de l'espace \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3) et $[t_0, +\infty[$ est l'intervalle temporel d'étude, t_0 est l'instant initial (souvent pris égal à 0). Le temps joue un rôle particulier, dans la mesure où il est porteur du principe de causalité (C'est le principe suivant lequel, si un phénomène physique, nommé cause, produit un autre phénomène, l'effet, alors ce dernier ne peut précéder la cause). On a alors le plus souvent un problème aux frontières en espace et un problème de Cauchy en temps que l'on appelle également **problème aux conditions initiales**.

Les problèmes aux frontières et les problèmes aux conditions initiales obéissent à des logiques différentes : pour les premiers, l'état est partiellement connu sur les bords et on cherche à l'aide de l'EDP à déterminer la solution dans l'ensemble de domaine w , pour les seconds, l'état est complètement connu à l'instant initial t_0 , on va chercher à propager la solution à l'instant d'après puis, de proche en proche, déterminer la solution sur l'ensemble de l'intervalle temporel d'étude.

3.1.2 Les conditions aux limites

Pour résoudre une équation différentielle régissant un domaine D , il nous faut connaître les conditions aux limites que l'on applique sur les frontières ∂D . Ces conditions aux limites peuvent être de différents types :

- **Dirichlet** : Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul

$$u = f \quad \text{sur } \partial D. \quad (3.4)$$

- **Neumann** : La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien définie

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{sur } \partial D. \quad (3.5)$$

- **Mixte** : Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière

$$\frac{\partial u}{\partial n} + K\phi = f, \quad K > 0 \quad \text{sur} \quad \partial D. \quad (3.6)$$

Il n'existe pas de résultats généraux sur l'existence de solutions des équations aux dérivées partielles, il est nécessaire de restreindre l'étude à certains cas. On donne donc, dans ce qui suit, une rapide classification des EDP.

3.1.3 Classification des équations aux dérivées partielles

Définition 3.1.3. (Classification des EDP) Cette classification est illustrée dans le cas des équations du second ordre.

- i) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **linéaire** si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u + g(x, y) = 0.$$

L'équation est dite **homogène** si la fonction g est identiquement nulle sur Ω .

- ii) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **semi-linéaire** si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0,$$

où a, b, c désignent des fonctions des variables x et y , et F une fonction définie dans un ouvert de \mathbb{R}^5 .

- iii) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **quasi-linéaire** si elle est de la forme :

$$a(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0,$$

où a, b, c et F sont des fonctions définies dans un ouvert de \mathbb{R}^5 .

- iv) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **complètement non linéaire** si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

Classification physique des EDP :

De nombreux phénomènes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes :

- Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (champ, chaleur...) dans un domaine borné ou non. Ils sont gouvernés par l'EDP elliptiques.
- Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critiques de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas par exemple de la résonance des circuits électriques.
- Les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration,...) à partir d'un état initial donné. Ils sont gouvernés par des EDP hyperboliques ou des EDP paraboliques.

Classification mathématique des EDPs linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) :

Comme il est dit en haut, il n'existe pas des méthodes universelles pour la résolution des EDP, nous allons nous contenter de celles qui sont linéaires et du second ordre.

Quand on pose $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, une équation aux dérivées partielles du second ordre sera de la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i}(X) + cu = g(X),$$

avec $a_{i,j}, b_i, c, g$ des fonctions indépendantes de u ne s'annulant pas toutes simultanément dans \mathbb{R}^n . Si nous nous limitons dans \mathbb{R}^2 , c'est à dire $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'égalité précédemment posée prend la forme de :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g(x, y). \quad (3.7)$$

La classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de :

$$\Delta = b^2(x_0, y_0) - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0).$$

- Si $\Delta < 0$: on parle d'une équation elliptique,
- Si $\Delta = 0$: l'EDP est dite parabolique,
- Si $\Delta > 0$: on a une équation hyperbolique.

Cette appellation est faite par analogie avec l'équation générale du second ordre en géométrie analytique

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d, \quad (3.8)$$

où a, b et c ne dépendent que de (x, y) et d est une fonction linéaire de $(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

Ainsi, selon le signe du discriminant $\Delta = (b^2 - 4ac)$ nous obtenons différentes formes géométriques :

- $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0 \longrightarrow$ ellipse.

- $\Delta = (b^2 - 4ac) = 0 \longrightarrow$ parabole.
- $\Delta = (b^2 - 4ac) > 0 \longrightarrow$ hyperbole.

On peut dire que :

- les problèmes elliptiques vont concerner les problèmes de la mécanique ;
- les problèmes paraboliques ceux de type équation de la chaleur ;
- les problèmes hyperboliques ceux de la propagation des ondes.

Exemples :

- L'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est une équation aux dérivées partielles elliptique.

- L'équation de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

est une équation aux dérivées partielles parabolique, avec α un réel strictement positif.

- L'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est une équation aux dérivées partielles hyperbolique, avec c un réel strictement positif.

Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes) :

Si u est une fonction de n variables indépendantes, les EDP linéaires du second ordre sont du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n) u + d(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (3.9)$$

- Si tous les a_i sont non nuls et de même signe, l'EDP est de type elliptique.
- Si tous les a_i sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l'EDP est de type hyperbolique.
- Si un seul des a_i est nul (noté a_{i0}) et tous les autres de même signe et si b_{i0} est non nul, l'EDP est de type parabolique.

Les fonctions a_i et b_i étant dépendantes des variables (x_1, \dots, x_n) , la classification est évidemment fonction du point (x_1, \dots, x_n) considéré. Une EDP peut donc être de différents types suivant les points considérés : on dit qu'elle est de type mixte.

Remarque 3.1.2. *Un problème aux dérivées partielles nécessite la donnée :*

- *Un domaine D ;*
- *Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) ;*
- *Des conditions aux limites (pour tous les problèmes) ;*
- *Une condition initiale (pour les problèmes d'évolution).*

Un problème est dit bien posé si :

- Il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions aux frontières (existence).
- La solution doit être unique (unicité).
- La solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).

Remarque 3.1.3. *Notons que les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe plusieurs méthodes de discrétisation des équations aux dérivées partielles. Nous allons citer les plus couramment utilisées dans la résolution numérique des EDPs.*

Pour des modèles d'EDPs qui ne dépendent que de la variable spatiale x (EDPs elliptiques par exemple), nous allons avoir besoin de les discrétiser selon la variable spatiale x par une des méthodes suivantes :

1. *La méthode des différences finies,*
2. *La méthode des éléments finis,*
3. *la méthode des volumes finis,*
4. *la méthode des caractéristiques.*

Pour des EDPs dépendant d'une variable temporelle t , en plus de la variable x (EDPs d'évolution comme les équations paraboliques ou hyperboliques), on aura besoin d'une discrétisation spatio-temporelle. Spatiale à l'aide d'une des méthodes mentionnées ci-dessus. Temporelle avec une des méthodes suivantes :

1. *Euler explicite.*
2. *Euler implicite.*
3. *Runge-Kutta.*
4. *Crank-Nicolson.*

Dans la suite de ce manuscrit, et par souci de simplicité, nous allons utiliser la méthode des différences finies pour la discrétisation en espace, et la méthode d'Euler explicite pour la discrétisation en temps.

la méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande

simplicité d'écriture et un faible coût de calcul. Elle est couramment pratique et facile d'accès. Elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

Maillage :

Puisqu'on a évoqué le mot maillage dans le paragraphe précédent et qu'on en aura tout le temps besoin, définissons-le ici.

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Pour une application définie sur un segment de \mathbb{R} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment ; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir, éventuellement, des points du contours du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins. En dimension 1, cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant, il peut même être judicieux de ne pas le fixer comme tel. Le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage. Ainsi, si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude par densité.

Exemple :

Pour un intervalle de validité $[0, 2]$, avec n le nombre des pas, on aura $n + 1$ points qui sont donnés par la relation $x_i = i \times h$ avec $h = \frac{2}{n}$ constant, $0 \leq i \leq n$.

Notation indicielle :

Durant ces projets nous utiliserons souvent *la notation indicielle*. C'est pourquoi nous voulons en rappeler le principe. si x est un des vecteurs de base du repère (quadrillage) discrétisé, nous noterons le point $x(i)$, qui est la i^{eme} abscisse par x_i et de même la j^{eme} ordonnée $y(j)$ sera noté y_j et si u est maintenant la fonction, ici la solution de l'équation aux dérivées partielles dépendant seulement des variables de l'espace, on remplacera $u(x_i, y_j)$ par $u_{i,j}$. Si, en plus des variables de l'espace, il existe une variable temporelle $t(k) = t_k$, alors la fonction $u(x_i, y_j, t_k)$ sera notée $u_{i,j}^k$.

En résumé, les indices des variables spatiales resteront en indices et celui du temps sera en exposant. C'est ce qu'on appellera *la notation indicielle*.

3.1.4 Consistance, Convergence et stabilité

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP). Les trois principales sont **la convergence**, **la stabilité** et **la consistance**. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue. Ces différents liens, résumés sur la Figure 3.1, sont :

- la stabilité, c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.
- la consistance, c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation (Δt et Δx) tendent vers zéro.
- la convergence, c'est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la (ou une) solution exacte des équations continues. C'est évidemment la propriété la plus recherchée.

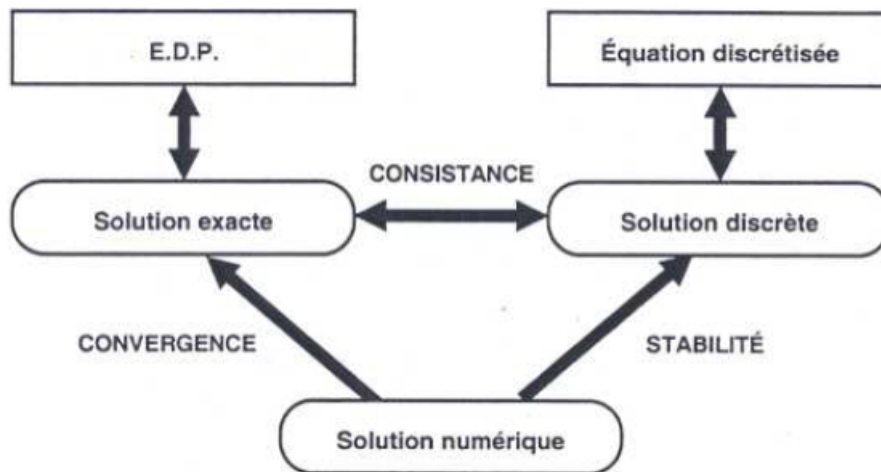


FIGURE 3.1 – Solutions exacte, numérique et discrète

Ces propriétés sont liées les unes aux autres par des théorèmes : (voir 19)

Le théorème de Lax

Dans un problème bien posé, et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

Condition de stabilité CFL

Pour des problèmes d'évolution temporelle, certains schémas sont stables à condition que le pas de temps soit inférieur à une certaine valeur critique fonction du pas d'espace. Cette inégalité constitue la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (1928) ou **condition CFL**. Elle est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité.

La condition CFL varie d'une équation à une autre.

Par exemple pour l'équation de la chaleur 1D (pour plus de détail voir (19) page [19-20]), les schémas explicites (Euler) sont stables sous la condition CFL suivante :

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 0.5,$$

avec α c'est le paramètre de diffusion de l'équation de la chaleur.

Alors que les schémas implicites sont toujours stables.

Dans cette section nous étudierons la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (les EDPs elliptiques et les EDPs paraboliques).

3.2 La résolution numérique des EDPs

3.2.1 Cas elliptique :

Dans cette sous section on va traiter le cas des EDPs elliptiques.

3.2.1.1 Discrétisation de l'EDP :

Soit l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d].$$

On prendra h_x et h_y les pas de discrétisation des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$.

1. Discrétisation de l'intervalle $[a, b]$:

$$h_x = \frac{b-a}{n_x} \quad (n_x \text{ étant le nombre d'intervalles dans } [a, b])$$

$$\implies x(i) = x_i = a + i \times h_x, i = 0, 1, \dots, n_x.$$

2. Discrétisation de l'intervalle $[c, d]$:

$$h_y = \frac{d-c}{n_y} \quad (n_y \text{ étant le nombre d'intervalles dans } [c, d])$$

$$\implies y(j) = y_j = c + j \times h_y, j = 0, 1, \dots, n_y.$$

Remarque 3.2.1. *Constatons que $x_{i+1} = a + (i + 1)h_x = (a + ih_x) + h_x = x_i + h_x$. Dans la suite, nous remplacerons chaque fois $x_i + h_x, x_i - h_x, y_j + h_y, y_j - h_y$ successivement par $x_{i+1}, x_{i-1}, y_{j+1}, y_{j-1}$.*

A) Méthode des différences finies :

Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée.

Soit $f(x, y)$ une fonction continue et dérivable de classe C^∞ , alors la dérivée partielle première de f par rapport à x est calculée par la formule :

$$f'_x(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}.$$

Si $h_x \ll 1$, le développement de Taylor au voisinage de 0 de $f(x + h_x, y)$ donne :

$$\begin{aligned} f(x + h_x, y) &= f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} \text{ avec une erreur de l'ordre de } h_x. \\ \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}, \end{aligned}$$

ceci est appelé le **schéma avant**.

De la même manière, nous pouvons aussi donner le **schéma arrière** qui est de la forme :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}.$$

Avec la formule de Taylor, ceci nous donne :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ avec une erreur de } h_x \\ \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\simeq \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}. \end{aligned}$$

La somme de ces deux schémas nous donne le schéma centré suivant :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x}.$$

En résumé, on a les trois approximations suivantes pour la dérivée partielle première de $f(x, y)$ par rapport à x avec la formule de Taylor :

$$f'_x(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x} \approx \begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}, & \text{schéma avant;} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}, & \text{schéma arrière;} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x}, & \text{schéma centré.} \end{cases}$$

La dérivée seconde f''_x de $f(x, y)$ sera alors de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{\frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{h_x} - \frac{f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{h_x}}{h_x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\simeq \frac{f(x_{i+1}, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Nous utiliserons tour à tour ces égalités dans la suite pour approximer les dérivées partielles.

B) Approximation de l'équation différentielle partielle :

Soit l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.11)$$

Posons $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ (en notation indicielle). Compte tenu de la relation (3.10) du paragraphe précédent,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}.$$

Puisque x_i et y_j jouent un rôle symétrique dans l'équation du potentiel (de Laplace), un raisonnement analogue à celui de l'approximation de f''_x nous donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2},$$

rapportons ces approximations dans l'EDP (3.11) :

$$\Leftrightarrow \Delta u \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = 0.$$

Dans ce cas particulier où $h_x = h_y = h$, donc, nous avons finalement :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0, \\ i = 0, 1, \dots, n_x \quad \text{et} \quad j = 0, 1, \dots, n_y. \end{cases}$$

Remarque 3.2.2. A chaque étape, nous remarquons que pour calculer la valeur de $u_{i,j}$ au point (x_i, y_j) nous avons besoin de connaître les points $u_{i-1,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i+1,j}$ et $u_{i,j+1}$ comme l'indique le dessin suivant :

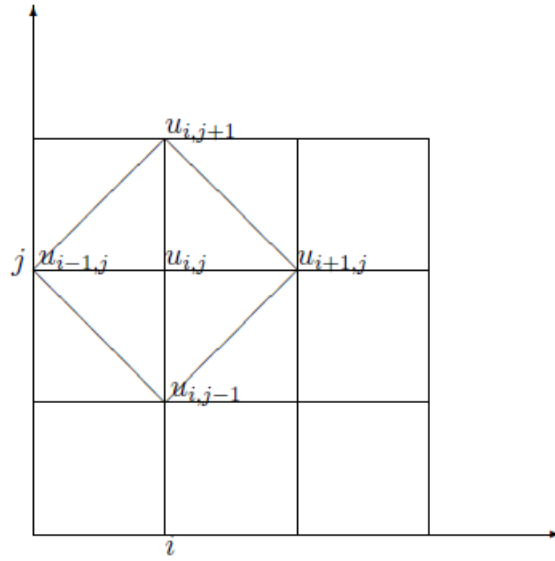


FIGURE 3.2 – Illustration de la position de $u_{i,j}$ par rapport aux point $u_{i-1,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i+1,j}$ et $u_{i,j+1}$

C'est pour cela que nous appelons cette formule "la formule à 5 points" qui peut être représentée comme suit :

$$\Delta u = 0 \implies \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} u_{i,j} = 0.$$

3.2.1.2 Résolution de l'EDP elliptique par la méthode directe :

Exemple :

Soit à résoudre l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans le domaine } (x, y) \in [0, 20] \times [0, 10], \\ u(x, 0) = u(x, 10) = u(0, y) = 0 \text{ et } u(20, y) = 100 \\ h_x = h_y = h \in \{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125\}. \end{cases}$$

Tout en variant h , résoudre cette EDP En utilisant la méthode directe.

Cas où $h=5$:

On a : $h_x = \frac{b-a}{n_x} \Rightarrow n_x = \frac{b-a}{h_x} = \frac{20-0}{5} = 4$ et $n_y = \frac{d-c}{h_y} = \frac{10-0}{5} = 2$. La grille maillée contient alors $(n_x + 1) \times (n_y + 1)$ mailles vu que nous avons à rajouter les points où $x_i = 0$ et ceux où $y_j = 0$ c'est à dire les points intersection de la courbe avec les axes. Mais comme les conditions aux limites nous donnent les images sur les bords, alors les points inconnus restent seulement ceux de l'intérieur du cadrillage. Ce qui fait donc que le nombre d'inconnues est alors $(n_x - 1) \times (n_y - 1) = 3 \times 1 = 3$.

Nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} -4u_{1,1} + u_{2,1} + 0u_{3,1} = 0, \\ u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{3,1} = 0, \\ 0u_{1,1} + u_{2,1} - 4u_{3,1} = -100. \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système matriciel : $A \times U = B$ Avec :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix}.$$

Avec une des méthodes vues en Analyse Numérique II (résolution des systèmes linéaires), nous obtenons la solution :

$$U = \begin{pmatrix} 1.786 \\ 7.143 \\ 26.786 \end{pmatrix}$$

Cas où $h = 2.5$:

Nous avons aussi : $n_x = \frac{b-a}{h} = \frac{20-0}{2.5} = 8$ et $n_y = \frac{d-c}{h} = \frac{10-0}{2.5} = 4$, ce qui nous donne un système à $n = (n_x - 1) \times (n_y - 1) = 7 \times 3 = 21$ équations à 21 inconnues de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -4u_{1,1} + u_{2,1} + \dots + u_{1,2} + \dots = 0 \\ u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{3,1} + \dots + u_{2,2} + \dots = 0 \\ \vdots \\ \dots + u_{6,1} - 4u_{7,1} + \dots = -100 \\ u_{1,1} + \dots - 4u_{2,1} + u_{2,2} + \dots = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites nous ont ramené à avoir la grille suivante dans laquelle nous allons chercher les inconnus de l'équation :

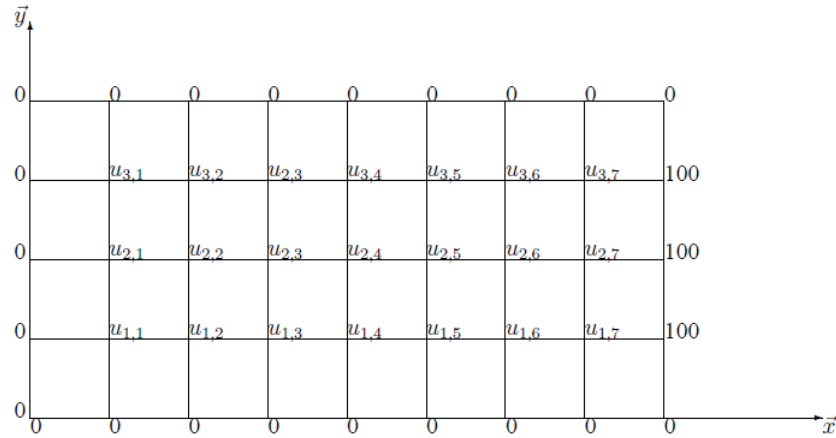


FIGURE 3.3 – La position de la solution $u_{i,j}$ sur la grille qui correspond au système (I).

Avec un petit programme sur Matlab, nous transformons la matrice U en un vecteur \vec{v} pour pouvoir bien résoudre le système sans erreur puisque la résolution du système $AU = B$ exige que U soit un vecteur. Voici le programme qui a assuré la transformation :

```
*****
for j = 1 : ny - 1
for i = 1 : nx - 1
v(k) = u(i, j);
k = k + 1;
end
end
*****
```

Ce qui nous donne après, le système :

$$\begin{cases} -4v_1 + v_2 + \dots + v_8 + \dots = 0 \\ v_1 - 4v_2 + v_3 + \dots + v_9 + \dots = 0 \\ \vdots \\ \dots + v_6 - 4v_7 + \dots = -100 \\ v_1 + \dots - 4v_8 + v_9 + \dots = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système matriciel suivant : $A \times \vec{v} = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & 1 & & \\ 0 & 1 & -4 & 1 & & & 1 & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \ddots \\ & & & 1 & -4 & 0 & & 1 \\ 1 & & & & 0 & -4 & 1 & \\ 0 & \ddots & & \ddots & & 1 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3.4 – La matrice A et le vecteur B obtenu après la discrétisation.

Voici le programme complet, expliqué, saisi en Matlab qui nous a permis d'avoir la matrice U à partir des calculs des éléments du vecteur \vec{v} .

```
clc;clear
h = 2.5;
a = 0;
b = 20;
c = 0; d = 10;
nx = (b - a)/h;
ny = (d - c)/h;
n = (nx - 1) * (ny - 1);
(remplissage des éléments de la matrice A)
A = zeros(n);
for i = 1 : (n - 1)
    A(i, i) = -4;
    A(i + 1, i) = 1;
    A(i, i + 1) = 1;
    if(mod(i, (nx - 1)) == 0)
        A(i + 1, i) = 0;
        A(i, i + 1) = 0;
    end
end
for i = 1 : n - nx + 1
    A(nx - 1 + i, i) = 1;
    A(i, nx - 1 + i) = 1;
end
A(n, n) = -4;
(remplissage des éléments de la matrice B)
for i = 1 : n
    B(i) = 0;
    if(mod(i, nx - 1) == 0)
        B(i) = -100;
    end
end
end
(résolution du système  $Av = B$  et transformation du vecteur  $\vec{v}$  en la matrice  $U$ ).
```

```

V = inv(A) * B';
k = 1;
for j = 1 : ny - 1
for i = 1 : nx - 1
u(j, i) = V(k);
k = k + 1;
end
end
(décalage des éléments pour insérer les conditions aux limites)
for j = ny : -1 : 2
for i = nx : -1 : 2
u(j, i) = u((j - 1), i - 1);
end
end
for i = 1 : nx
for j = 1 : ny
u(1, i) = 0;
u(j, 1) = 0;
u(ny + 1, i) = 0;
u(j, nx + 1) = 100;
end
end
u(1, nx + 1) = 0;
les vecteurs x et y
x = 0 : h : b; y = 0 : h : d;
(affichage la surface en tenant compte des vecteurs x ,y et de la matrice U)
mesh(x, y, u)
*****

```


Remarque 3.2.3. Pour évaluer le système avec les autres valeurs de h , il suffit de remplacer $h = 2.5$ par les autres valeurs et compiler le programme, cela donnera la surface correspondante pour chaque valeur de h .

Voici en résumé, les surfaces qu'on obtient en variant h :

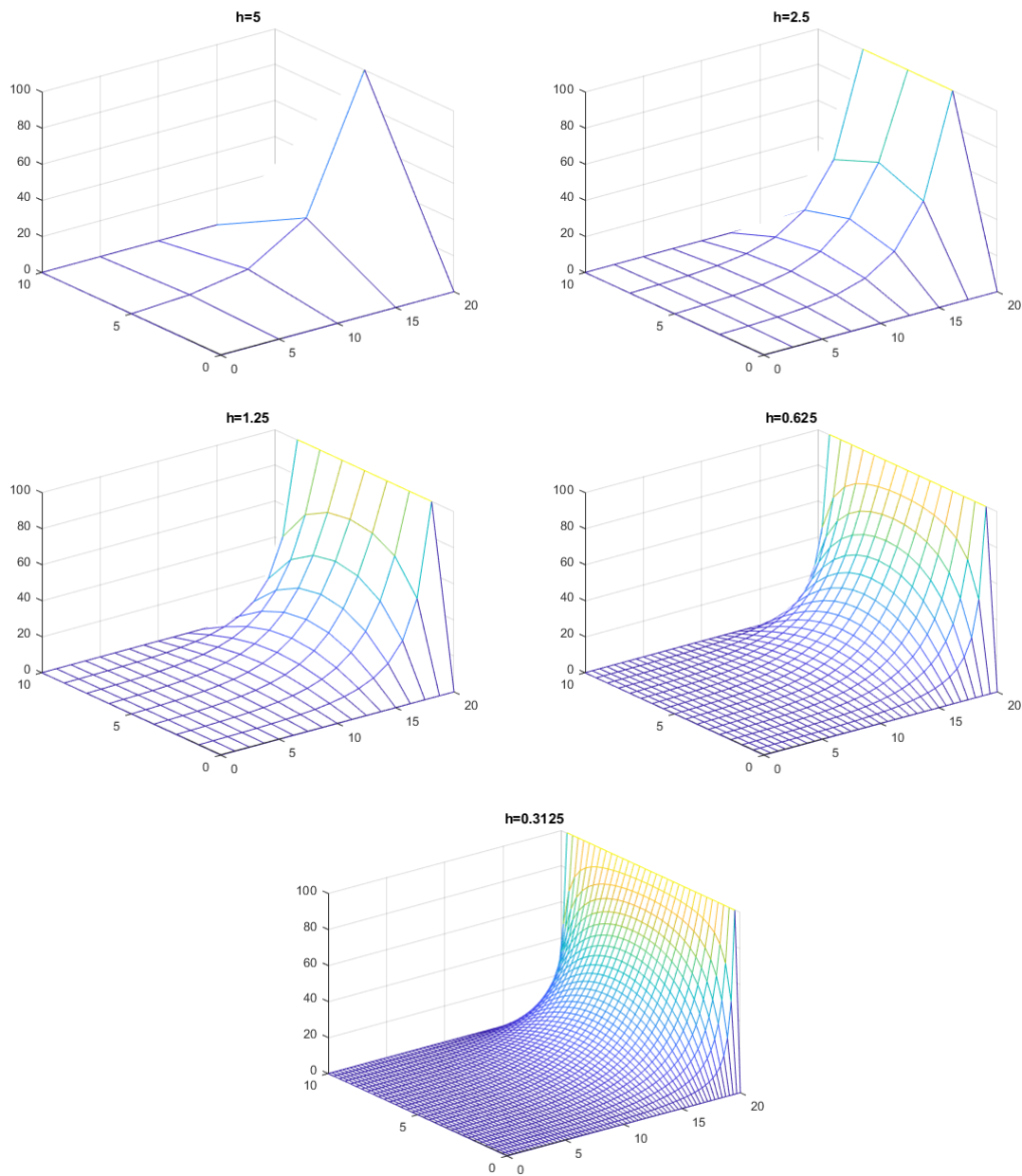


FIGURE 3.5 – Evolution de la surface représentative de la solution de $\Delta u = 0$ en fonction de h avec la méthode directe.

3.2.2 Cas parabolique :

Dans cette sous section, on va traiter le cas des EDPs paraboliques où on va prendre deux exemples qui sont l'équation de la chaleur en 2D et 1D.

A) L'équation de la chaleur en 2D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 & \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (3.12)$$

On commence par la discrétisation temporelle du terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ avec une méthode d'Euler explicite qui va s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t},$$

avec Δt est le pas de discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ avec une subdivision : $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ et $t_N = T$ ($N = \frac{T}{\Delta t}$) et u^{k+1} représente la solution à l'instant t_{k+1} . (L'indice k représente le temps).

En reprenant la notation indicielle (i, j) qui représente (x, y) , on retrouve :

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2} \quad (3.13)$$

où le membre droit de l'équation (3.13) est obtenu à partir de la discrétisation de l'EDP elliptique représenté dans le cas précédent.

Nous déduisons que la solution est obtenue par itération selon la formule :

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\Delta t}{h^2} \left(u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k \right) \quad (3.14)$$

avec la notation : $u_{i,j}^k \approx u(x_i, y_j, t_k)$.

Pour le schéma (3.14) soit stable, il faut choisir Δt et h pour que la condition de stabilité de CFL soit vérifiée (voir section 3.2.3 pour plus de détails).

Comme cela, on obtient un schéma convergent .

La condition de stabilité dans le cas d'EDP de chaleur en 2D est :

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} < 0.5$$

Dans notre cas $\alpha = 1$ (paramètre de diffusivité) et $\Delta x = \Delta y = h$

On obtient donc $2 \frac{\Delta t}{h^2} < 0.5$ et la condition de stabilité sera $\frac{\Delta t}{h^2} < 0.25$.

Résolution de l'EDP parabolique par la méthode directe :

Le programme suivant représente la résolution numérique de l'EDP de chaleur en $2D$ avec la condition initiale et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{dans } D \times [0, T]; \\ u(x, t) = 0, & \text{dans } \partial D \times [0, T]; \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2, & \text{si } 1 \leq x \leq 1.5 \text{ et } 1 \leq y \leq 1.5; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases} \quad (3.15)$$

avec $D = [a, b] \times [c, d]$ où $a = c = 0$ et $b = d = 3.5$, et $T = 0.1$ et $x = (x, y)$.

```
clear
clc
a = 0;
c = 0;
(Nombre de points en x)
nx = 50;
(Nombre de points en y)
ny = 50;
(Nombre de points en t)
nt = 100;
(pas de temps)
dt = 0.001;
(pas en x)
dx = 0.07;
(pas en y)
dy = 0.07;
b = dx * nx;
d = dy * ny;
x = a : dx : b;
y = c : dy : d;
(initialisation u)
u = zeros(nx + 1, ny + 1);
(Preallocating un)
un = zeros(nx + 1, ny + 1);
alpha = 1;
(x = a Dirichlet B.C)
uxa = 0;
(x = b Dirichlet B.C)
uxb = 0;
(y = c Dirichlet B.C)
uyc = 0;
(y = d Dirichlet B.C)
uyd = 0;
h = dx;
```

```
uinit = 2;
```

```

for i = 1 : nx
for j = 1 : ny
if ((1 <= y(j)) and (y(j) <= 1.5) and (1 <= x(i)) and (x(i) <= 1.5))
u(i, j) = uinit;
else
u(i, j) = 0;
end
end
end

    i = 2 : nx - 1;
    j = 2 : ny - 1;
    it = 0 : nt;
    for k = 1 : length(it)
un = u;
hh=surf(x, y, u', "EdgeColor", "none");
shading interp
zlim([0uinit])
title(["Equation de la chaleur en 2D"]; ["Temps (t) = ", num2str(it(k)*dt)])
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('u(x,y,t)')

    drawnow ;
    refreshdata(h)
    u(i, j) = un(i, j) + (alpha * dt * (un(i + 1, j) - 4 * un(i, j) + un(i - 1, j)) + un(i, j + 1) + un(i, j - 1))) / (h^2)
    u(1, :) = uxa;
    u(nx, :) = uxb;
    u(:, 1) = uyc;
    u(:, ny) = yd;
end
*****

```

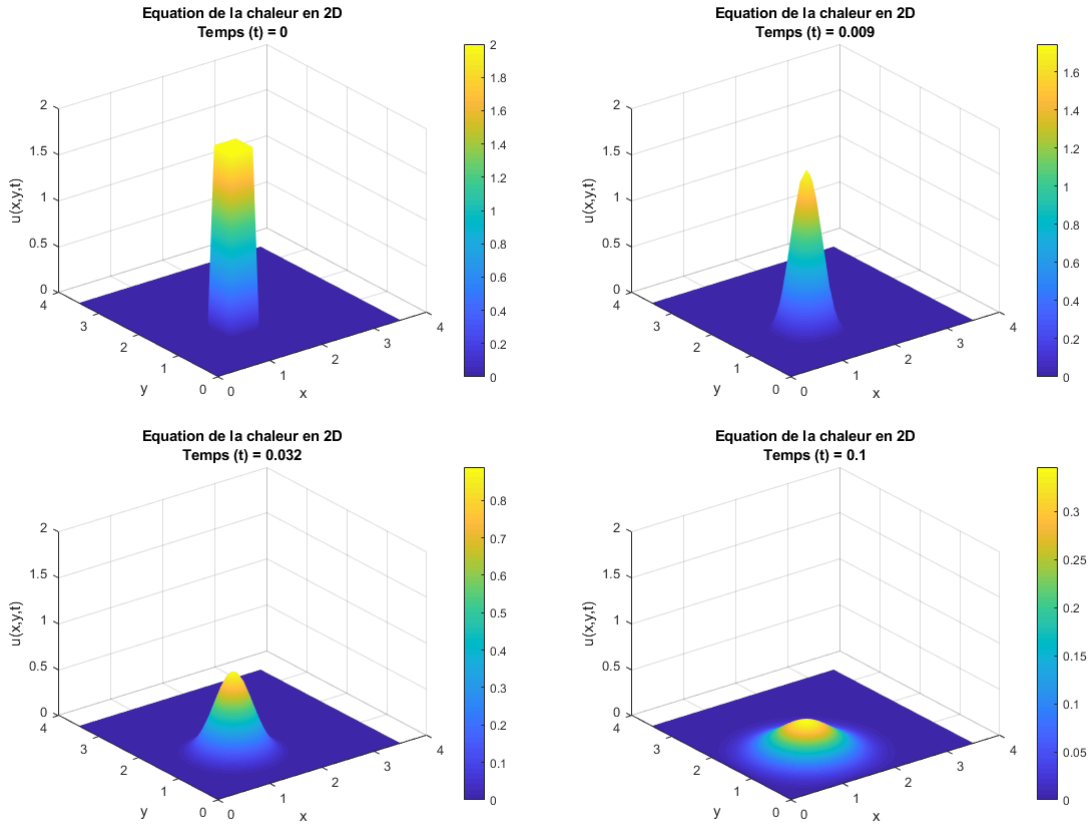


FIGURE 3.6 – Solution de l'équation de la chaleur en 2D en 4 instants différents $T = 0$, $T = 0.09$, $T = 0.032$ et $T = 0.1$

B) L'équation de la chaleur en 1D :

Maintenant, on va résoudre une équation de chaleur en 1D.

Nous choisissons un problème que nous savons résoudre analytiquement et par différences finies pour faire une comparaison entre les deux.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & \text{Dans } D = [0, x_f] \times [0, T]; \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \quad (3.16)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{domaine } D = [0, 3] \times [0, 0.1], & a = 1; \\ \text{condition initiale } f(x) = \sin \pi x. \\ \text{condition aux limites } \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.17)$$

On sait résoudre cette équation analytiquement et la solution (exacte) est :

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t).$$

Le programme suivant en matlab nous permet de calculer la solution exacte et la solution approximée de l'EDP (3.16) avec les conditions (3.17).

```
clear
clc
(Coefficient de diffusivité de l'equation de chaleur en 1D)
a = 1;
(Condition initiale du problème)
f = inline('sin(pi * x)', 'x');
(Condition aux limites de Dirichlet)
bx0 = inline('0');
(Conditions aux limites de Dirichlet)
bxf = inline('0');
(L'intervale pour  $x \in [0, xf]$ )
xf = 3;
(Nombre de points en  $x$ )
M = 150;
dx = xf/M;
x = linspace(0, xf, M);
T = 0.1;
(Respect de la condition de stabilite de CFL)
dt = ((dx^2 * 0.5)/1) - 1e - 6;
t = 0 : dt : T;
(Nombre de points en temps)
N = length(t);

    for i = 1 : M
        (Prise en compte de la condition initiale dans u)
        u(i, 1) = f(x(i));
    end

    (Prise en compte des conditions aux limites)
    for n = 1 : N
        u(1, n) = bx0(t(n));
        u(M, n) = bxf(t(n));
    end
    (Calcul de la solution par iteration en temps  $k + 1$ )
    for k = 1 : N - 1
        for i = 2 : M - 1
            u(i, k + 1) = u(i, k) + dt * (u(i + 1, k) - 2 * u(i, k) + u(i - 1, k))/dx^2;
        end
    end
    (Dessin de la solution approchee)
    figure, mesh(t, x, u);
    xlabel('t')
    ylabel('x')
    zlabel('u(x,t)');
    title('Solution numerique de l''EDP par differences finies')
```

$$(u_{exacte} = (u(x, t) = \sin(\pi * x) * \exp(-\pi^2 * t)) :)$$

```
    for i = 1 : M
for j = 1 : N
u_exact(i,j) = sin(pi * x(i)) * exp(-pi^2 * t(j));
end
end
figure, mesh(t, x, u_exact);
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('u(x,t)');
title('Solution exacte');
```

La Figure 3.7 représente la solution analytique $u(x, t)$ en fonction de t et x .

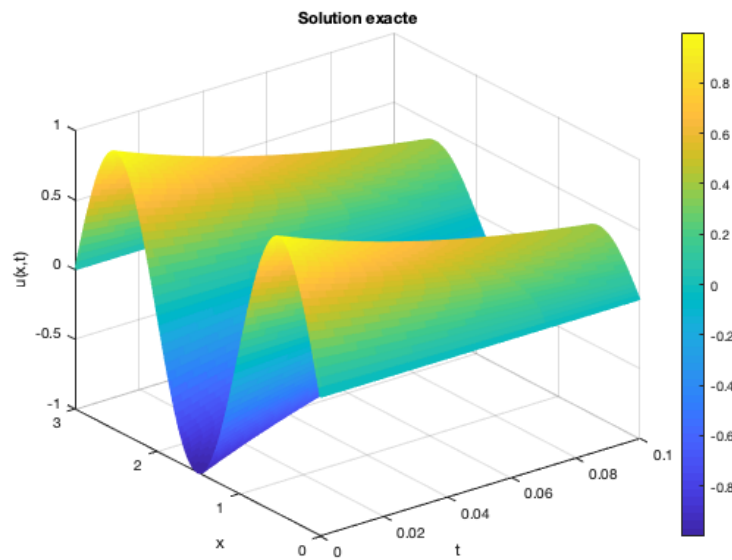


FIGURE 3.7 – Solution analytique $u(x, t)$ en fonction de x et t

La Figure 3.8 donne l'illustration graphique de la solution approximée en fonction de x et t (par différences finies).

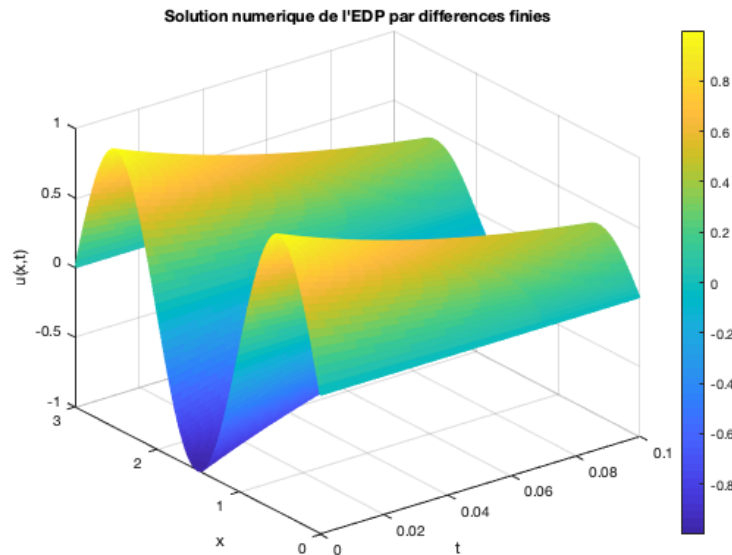


FIGURE 3.8 – Solution approximée par la méthode des différences finies.

La Figure 3.9 illustre la solution exacte et approximée au long de l'axe t et pour un point d'espace fixé $x = 1.5$. On remarque que les deux graphes sont presque confondus ce qui veut signifier que l'erreur est acceptable.

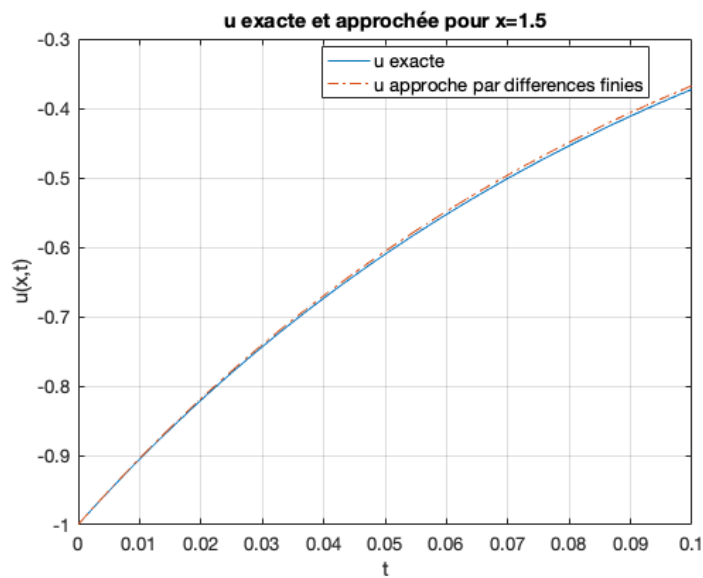


FIGURE 3.9 – Solution exacte et approximée par la méthode des différences finies de l'EDP (3.16) pour $x = 1.5$

La Figure 3.10 illustre le vecteur $e(x; t)$ (Erreur) de la méthode des différences finies pour $x = 1.5$.

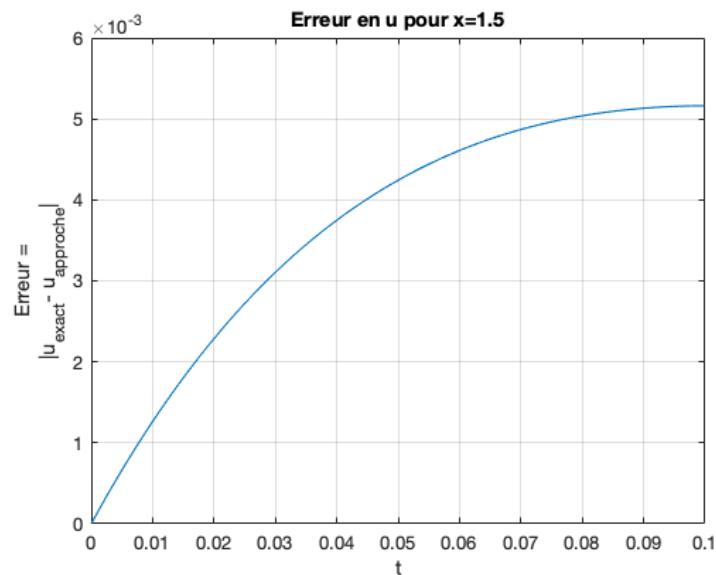


FIGURE 3.10 – L'erreur de la méthode pour $x = 1.5$

Chapitre 4

Approche probabiliste des EDPs

Le but de ce chapitre est de montrer les liens qui peuvent exister entre la théorie des processus stochastiques et les équations aux dérivées partielles (EDP). Les processus stochastiques utilisés sont des processus possédant la propriété de Markov. L'idée principale est de montrer que l'espérance mathématique de fonctionnelles de ces processus fournit une représentation probabiliste de solutions de certaines équations, i.e. les processus de diffusions obtenus comme solution d'EDS à partir de processus de Wiener, nous permettent de représenter les solutions des EDP du second ordre.

L'approche probabiliste permet d'avoir accès rapidement à une expression de la solution pour des domaines D de géométrie (relativement) arbitraire. De plus, elle ouvre la porte à des techniques de simulations de ces solutions d'EDP (méthode de Monte-Carlo) pour approximer les espérances.

4.1 Diffusion et EDP

Dans cette section, on va présenter quelques rapports entre les diffusions et les équations aux dérivées partielles. Grâce à la formule d'Itô, il est possible de donner une interprétation probabiliste à certaines équations aux dérivées partielles, ce qui permet ainsi de prouver l'existence de solutions.

4.1.1 La formule de Dynkin

La formule de Dynkin est essentiellement une généralisation de l'expression (2.22) à des temps d'arrêt. Elle fournit une première classe de liens entre diffusions et équations aux dérivées partielles.

Proposition 4.1.1. (Formule de Dynkin) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une diffusion de générateur $L, x \in \mathbb{R}^n, \tau$ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$ et, $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Alors :

$$\mathbb{E}^x[\varphi(X_\tau)] = \varphi(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau (L\varphi)(X_s) ds \right].$$

Preuve. Afin de simplifier la preuve, on considère le cas $n = m = 1$, (m étant la dimension du mouvement Brownien).

En utilisant la formule d'Itô et en prenant l'espérance de deux membres, on obtient :

$$\mathbb{E}^x[\varphi(X_\tau)] = \varphi(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau (L\varphi)(X_s) ds \right] + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \sigma(X_s) \varphi'(X_s) dB_s \right].$$

Il suffit donc de montrer que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle.

Puisque pour toute fonction h bornée par M , et $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau \wedge N} h(X_s) dB_s \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^N \mathbf{1}_{\{s < \tau\}} h(X_s) dB_s \right] = 0,$$

car $\mathbf{1}_{\{s < \tau\}}$ et $h(X_s)$ sont \mathcal{F}_s -mesurables.

Puis :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\left(\int_0^\tau h(X_s) dB_s - \int_0^{\tau \wedge N} h(X_s) dB_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau \wedge N}^\tau h(X_s)^2 ds \right] \\ &\leq M^2 \mathbb{E}^x [\tau - \tau \wedge N], \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, en vertu de l'hypothèse $\mathbb{E}^x(\tau) < +\infty$, par convergence dominée. On a donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau \wedge N} h(X_s) dB_s \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau h(X_s) dB_s \right] = 0,$$

ce qui conclut la preuve pour $h = \sigma\varphi'$ qui est bornée car continue à support compact.

La preuve du cas général est analogue. ■

4.1.2 Liens avec des EDPs linéaires

La seconde classe de liens entre équations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles est constituée par les EDP linéaires.

Nous supposons dans cette sous section que b et σ sont continus et indépendants du temps.

On note $C_b^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions sur \mathbb{R}^d de classe C^k continues et bornées avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre k .

Equations paraboliques :

Nous nous intéressons à des équations aux dérivées partielles (EDP) paraboliques de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée, avec

$$u(., x) \in C^1(]0, +\infty[), \quad u(t, .) \in C_b^2(\mathbb{R}^d), \quad \forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d. \quad (4.2)$$

Théorème 4.1.1. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si u satisfait (4.1)–(4.2) et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de $E^x(b, \sigma)$ alors*

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)], \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Preuve :

Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(u(t-s, X_s))_{s \in [0, t]}$:

$$du(t-s, X_s) = \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right)(t-s, X_s)ds + dM_s,$$

où M est une martingale. Donc

$$u(t, x) = u(0, X_t) + M_t = f(X_t) + M_t,$$

et en prenant l'espérance nous avons le résultat souhaité. ■

La formule de Feynman-Kac :

Jusqu'ici nous avons rencontré des problèmes à valeurs au bord elliptique de la forme $Lu = \theta$, et des équations d'évolution paraboliques de la forme $\partial_t u = Lu$. la formule de Feynman-Kac montre q'on peut également lier des propriétés d'une diffusion à celles d'équation paraboliques où le générateur contient un terme linéaire en u .

L'ajout d'un terme linéaire dans le générateur peut s'interpréter comme le fait de "tuer" la diffusion avec un certain taux. Le cas le plus simple est celui d'un taux constant.

Soit $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement ($\inf V > -\infty$). Nous nous intéressons à l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu - Vu, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.4)$$

où $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 4.1.2. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si u satisfait (4.2), (4.4) et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de $E^x(b, \sigma)$ alors*

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[f(X_t) \exp \left(- \int_0^t V(X_s) ds \right) \right], \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(e^{-\int_0^s V(X_u) du} u(t-s, X_s))_{s \in [0, t]}$:

$$d(e^{-\int_0^s V(X_u) du} u(t-s, X_s)) = e^{-\int_0^s V(X_u) du} \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + Lu - Vu \right)(t-s, X_s)ds + dM_s,$$

où M est une martingale. Donc

$$u(t, x) = e^{-\int_0^t V(X_u) du} u(0, X_t) + M_t = e^{-\int_0^t V(X_u) du} f(X_t) + M_t,$$

et en prenant l'espérance nous avons le résultat souhaité.

Cette formule a été inspirée par la mécanique quantique, où V joue le rôle d'un potentiel.

■

Equations elliptiques :

Nous nous intéressons à l'EDP

$$\lambda u - Lu = f, \quad (4.6)$$

où $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$

Théorème 4.1.3. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si u satisfait (4.6), $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de $E^x(b, \sigma)$ alors*

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}[f(X_t)] dt. \quad (4.7)$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(e^{-\lambda s} u(X_s))_{s \in [0, t]}$:

$$d(e^{-\lambda s} u(X_s)) = e^{-\lambda s} (-\lambda u + Lu)(X_s) ds + dM_s,$$

où M est une martingale. Donc

$$u(x) - e^{-\lambda t} u(X_t) = \int_0^t e^{-\lambda s} f(X_s) ds - M_t.$$

En prenant l'espérance et en faisant tendre $t \rightarrow +\infty$ nous obtenons

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mathbb{E}^x[f(X_s)] ds.$$

■

Problème de Dirichlet :

Nous considérons un ouvert régulier borné $D \subset \mathbb{R}^d$ et l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu, & t > 0, x \in D; \\ u(t, x) = g(x), & t > 0, x \in D; \\ u(0, x) = f(x), & x \in D, \end{cases} \quad (4.8)$$

où $f \in C_b(D)$, $g \in C_b(\partial D)$ et $u : \mathbb{R}_+ \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée, avec

$$u(\cdot, x) \in C^1([0, +\infty[) \quad u(t, \cdot) \in C_b^2(D), \quad \forall (t, x) \in]0, +\infty[\times D. \quad (4.9)$$

Théorème 4.1.4. Soit $x \in D$. si u satisfait (4.8) – (4.9) et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de $E^x(b, \sigma)$ alors pour tout $t \geq 0$

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x[\mathbf{1}_{(t < \tau)} f(X_t)] + \mathbb{E}^x[\mathbf{1}_{(t \geq \tau)} g(X_\tau)], \quad \tau := \inf\{u > 0 : X_u \notin D\}. \quad (4.10)$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(u(t-s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}))_{s \in [0, t]}$:

$$du(t-s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}) = \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) + (t-s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}) ds + dM_s^\tau,$$

où M est une martingale bornée. Donc

$$u(t, x) = u(t-t \wedge \tau, X_{t \wedge \tau}) - M_t^\tau = \mathbf{1}_{(t < \tau)} f(X_t) + \mathbf{1}_{(t \geq \tau)} g(X_\tau) - M_t^\tau.$$

Donc, par le théorème d'arrêt, en prenant l'espérance nous avons le résultat souhaité. ■

Exemple :

Si $g \equiv 0$ alors nous avons un problème de Dirichlet homogène et la solution s'écrit

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x[\mathbf{1}_{(t < \tau)} f(X_t)].$$

On peut remarquer que cette solution est égale à celle d'une équation de Feynman-Kac avec

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in D; \\ +\infty, & x \notin D, \end{cases}$$

car dans ce cas $\exp(-\int_0^t V(X_u) du) = \mathbf{1}_{(t < \tau)}$. On dit que le processus X est tué au bord de D .

Si nous considérons maintenant l'équation

$$\begin{cases} -Lu = f, & x \in D; \\ u(x) = g(x), & x \in \partial D, \end{cases} \quad (4.11)$$

où $f \in C_b(D)$ et $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée, avec $u \in C_b^2(D)$.

Théorème 4.1.5. *Soit $x \in D$. Si u satisfait (4.11) et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de $E_x(b, \sigma)$ et, en définissant $\tau := \inf\{u > 0 : X_u \notin D\}$, $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ alors*

$$u(x) = \mathbb{E}[g(X_\tau)] + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau f(X_s)ds\right]. \quad (4.12)$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(u(X_{s \wedge \tau}))_{s \in [0, t]}$:

$$du(X_{s \wedge \tau}) = \mathbf{1}_{(s < \tau)}(-\lambda u + Lu)(X_{s \wedge \tau})ds + dM_s^\tau,$$

où M est une martingale bornée. Donc

$$u(x) = u(X_{t \wedge \tau}) + \int_0^{t \wedge \tau} f(X_s)ds - M_t^\tau.$$

Par le théorème d'arrêt, en prenant l'espérance nous avons

$$u(x) = \mathbb{E}[u(X_{t \wedge \tau})] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} f(X_s)ds\right],$$

et en faisant tendre $t \rightarrow +\infty$

$$u(x) = \mathbb{E}[g(X_\tau)] + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau f(X_s)ds\right].$$

■

4.1.3 EDP de type Dirichlet

Considérons le cas où le temps d'arrêt τ est le temps de première sortie d'un ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que le problème avec conditions au bord

$$\begin{cases} (Lu)(x) = \theta(x), & x \in D; \\ u(x) = \psi(x), & x \in \partial D. \end{cases} \quad (4.13)$$

admet une unique solution. C'est le cas si D , θ et ψ sont suffisamment réguliers. Substituant φ par u dans la formule de Dynkin, on obtient la relation

$$u(x) = \mathbb{E}^x\left(\psi(X_\tau) - \int_0^\tau \theta(X_s)ds\right) \quad (4.14)$$

Pour $\psi = 0$ et $\theta = -1$, $u(x)$ est égale à l'espérance de τ partant de x . Pour $\theta = 0$ et ψ l'indicatrice d'une partie A du bord ∂D , $u(x)$ est la probabilité de quitter D par A . Ainsi, si l'on sait résoudre le problème (4.13), on obtient des informations sur le temps et le lieu de sortie de D .

Exemple : (Temps de sortie moyen du mouvement Brownien d'une boule)

Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$ la boule de rayon R centrée à l'origine. Soit

$$\tau_K = \inf\{t > 0 : x + \mathbf{B}_t \notin K\} \quad (4.15)$$

et soit

$$\tau(N) = \tau_K \wedge N. \quad (4.16)$$

La fonction $\varphi(x) = \|x\|^2 \mathbf{1}_{\|x\| \leq R}$ est à support compact et satisfait $\Delta(\varphi(x)) = 2n$ pour $x \in K$. On peut par ailleurs la prolonger en dehors de K de manière qu'elle soit lisse et à support compact. En substituant dans la formule de Dynkin, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x(\|x + \mathbf{B}_{\tau(N)}\|^2) &= \|x\|^2 + \mathbb{E}^x\left(\int_0^{\tau(N)} \frac{1}{2} \Delta \varphi(\mathbf{B}_s) ds\right) \\ &= \|x\|^2 + n \mathbb{E}^x(\tau(N)). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Comme $\|x + \mathbf{B}_{\tau(N)}\| \leq R$, faisant tendre N vers l'infini, on obtient par convergence dominée

$$\mathbb{E}^x(\tau_K) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{n}. \quad (4.18)$$

4.2 Mouvement Brownien et EDP

Des liens importants existent entre probabilités et EDP via les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines EDP en termes de processus stochastiques. L'opérateur le plus simple est celui de Laplace Δ et il est directement relié au mouvement Brownien. On étudie dans cette section les connexions entre mouvement Brownien et équations liées au laplacien (équation de Laplace, problème de Dirichlet, équation de la chaleur, formule de Feynman- Kac).

4.2.1 Fonctions harmoniques

Le laplacien Δu d'une fonction C^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^d est défini par

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Le mouvement Brownien B dans \mathbb{R}^d est naturellement relié à cet opérateur, en effet la formule d'Itô montre que si $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est C^2 alors

$$\Phi(B_t) = \Phi(B_0) + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta \Phi(B_s) ds + \int_0^t \nabla \Phi(B_s) \cdot dB_s. \quad (4.19)$$

Ainsi, si $\Delta \Phi = 0$, alors $\Phi(B)$ est une martingale locale.

Définition 4.2.1. (Fonction harmonique) Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine (ouvert, connexe). Une fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ est *harmonique* si u est de classe C^2 sur D et satisfait l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ dans D .

Exemples

1. En dimension 2 : $u(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ et $u(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$ sont harmoniques.

2. En dimension $d : 1/|x|^{d-2}$ est une fonction harmonique sur $D = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

La propriété suivante joue un rôle essentiel pour relier les solutions d'EDP à des espérances de processus arrêtés en des temps de sortie de domaine. Dans la suite, pour G ouvert, on note pour B mouvement Brownien :

$$\begin{aligned}\tau_G &= \inf(t \geq 0 : B_t \notin G) \text{ le temps d'entrée dans } G^c, \\ \sigma_G &= \inf(t > 0 : B_t \notin G) \text{ le temps de sortie de } G.\end{aligned}$$

On note que le temps de sortie de G est plus grand que le temps d'entrée dans G^c : $\sigma_G \geq \tau_G$. Par exemple si G est ouvert et B part de ∂G , on a $\tau_G = 0$ mais $\sigma_G > 0$ si B commence par entrer dans G .

Proposition 4.2.1. *Soit G un ouvert borné avec $\overline{G} \subset D$ et B un mouvement Brownien issu de $a \in G$. Si $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique alors*

$$M_t = u(B_{t \wedge \tau_G}) - u(a)$$

est une martingale centrée.

Preuve. : voir (28).

Formule de la moyenne

Définition 4.2.2. (Formule de la moyenne) *Une fonction réelle u est dite satisfaire la formule de la moyenne sur D si pour toute boule ouverte $B(a, r)$ telle que $\overline{B}(a, r) \subset D$, on a*

$$u(a) = \int_{\partial B(a, r)} u(x) \lambda_{a, r}(dx), \quad (4.20)$$

où $\lambda_{a, r}$ est la probabilité uniforme sur la sphère $\partial B(a, r)$.

Proposition 4.2.2. *Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors u est harmonique sur D ssi u vérifie la formule de la moyenne (4.20).*

Preuve. : voir (28).

4.2.2 Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet (D, f) consiste à trouver une fonction harmonique $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \overline{D} et \mathcal{C}^2 sur D , prolongeant une fonction continue définie sur la frontière de l'ouvert D telle que $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. En résumé, le problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{sur } D, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases} \quad (4.21)$$

Ce problème porte le nom du mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Il s'agit d'un problème bien connu qu'on peut résoudre explicitement de façon analytique en utilisant la transformation de Fourier sur des domaines pertinents. L'approche probabiliste permet d'avoir accès rapidement à une expression de la solution pour des domaines D de géométrie (relativement) arbitraire. De plus, elle ouvre la porte à des techniques de simulations

de ces solutions d'EDP (méthode de Monte-Carlo). Cependant pour simplifier, nous supposons que D est borné.

Théorème 4.2.1. (Dirichlet 1) *On considère le problème de Dirichlet (4.21). Soit*

$$u(x) = \mathbb{E}^x[f(B_{\tau_D})], \quad x \in \overline{D}. \quad (4.22)$$

(1) *Si $\mathbb{E}^x[|f(B_{\tau_D})|] < \infty, \forall x \in D$, alors u donnée par (4.22) vérifie (4.21).*

(2) *Si f est bornée et*

$$\mathbb{P}^a(\tau_D < +\infty) = 1, \quad \forall a \in D$$

alors toute solution bornée du problème de Dirichlet (D, f) s'écrit comme (4.22).

Si D est bornée alors la condition dans (1) au dessus est satisfaite car B_{τ_D} reste dans D et f est finie sur un domaine borné.

D'après le Théorème (4.2.1), pour résoudre le problème de Dirichlet (4.21), il reste seulement à voir la continuité sur ∂D de u donnée par (4.22), c'est à dire

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \rightarrow a}} \mathbb{E}^x[f(B_{\tau_D})] = f(a), \quad a \in \partial D. \quad (4.23)$$

Ceci est lié à la notion de [régularité du bord](#), cf. ci-dessous.

Preuve.

On montre d'abord (2) puis (1).

(2) On suppose d'abord qu'il existe u vérifiant le problème de Dirichlet (4.21). Soient $x \in D$ et $D_-^\epsilon = \{x \in D : \text{dist}(x, D^c) > \epsilon\}$ le ϵ -intérieur de D . Pour ϵ assez petit, $x \in D_-^\epsilon$. On applique alors la Proposition (4.2.1) et en prenant l'espérance de la martingale obtenue, on a

$$u(x) = \mathbb{E}^x[u(B_{t \wedge \tau_{D_-^\epsilon}})].$$

Par hypothèse, on a $\tau_{D_-^\epsilon} < +\infty$ p.s. ($D_-^\epsilon \subset D$) : On se ramène facilement, au cas où D est un rectangle et on utilise les temps de sortie des marginales de B qui sont des mouvements browniens unidimensionnels dont les temps de sorties d'intervalles sont bien connus. On utilise le théorème de convergence dominée (u bornée sur \overline{D} puisque D est borné) pour faire successivement $t \rightarrow +\infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$: d'abord comme $\tau_{D_-^\epsilon} < +\infty$ p.s.

$$u(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^x[u(B_{t \wedge \tau_{D_-^\epsilon}})] = \mathbb{E}^x[u(B_{\tau_{D_-^\epsilon}})].$$

Puis comme $D = \cup_{\epsilon > 0} D_-^\epsilon$, on a $\tau_{D_-^\epsilon} \nearrow \tau_D$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ donc par continuité de B et de u , à nouveau par convergence dominée :

$$u(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}^x[u(B_{\tau_{D_-^\epsilon}})] = \mathbb{E}^x[u(B_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x[f(B_{\tau_D})],$$

où la dernière égalité vient de la condition au bord du problème de Dirichlet (4.21) avec $B_{\tau_D} \in \partial D$. Finalement, si $x \in \partial D$, $\tau_D = 0$ et on a $u(x) = f(x)$.

Si elle existe, la solution de (4.21) est donc unique et nécessairement donnée par (4.22).

(1) On considère maintenant u donnée par (4.22). Comme pour (2), il est immédiat que $u(x) = f(x)$ si $x \in \partial D$. Pour montrer que u est harmonique dans D , on montre que u vérifie la formule de la moyenne, ce qui est équivalent par la Proposition (4.2.2).

Soit $B(a, r) \subset D$. Quand B part de $a \in B(a, r) \subset D$, comme $\tau_{B(a, r)} \leq \tau_D$, on a $\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}} \subset \mathcal{F}_{\tau_D}$ et par conditionnement on a

$$u(a) = \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})] = \mathbb{E}_a[\mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}}]].$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}}] &= \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D} - B_{\tau_{B(a, r)}} + B_{\tau_{B(a, r)}})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}}] \\ &= \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D - \tau_{B(a, r)}}^{(\tau_{B(a, r)})} + B_{\tau_{B(a, r)}})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}}] \\ &= \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D'}^{(\tau_{B(a, r)})} + B_{\tau_{B(a, r)}})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}}] \\ &= u(B_{\tau_{B(a, r)}}), \end{aligned}$$

car par la propriété de Markov forte, $B_t^{(\tau_{B(a, r)})} = B_{t+\tau_{B(a, r)}} - B_{\tau_{B(a, r)}}$, $t \geq 0$, est un mouvement Brownien issu de 0, indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}}$ et donc sachant $\mathcal{F}_{\tau_{B(a, r)}}$, $B_{t+\tau_{B(a, r)}}^{(\tau_{B(a, r)})} + B_{\tau_{B(a, r)}}$ est un mouvement Brownien partant de $B_{\tau_{B(a, r)}} \in \partial B(a, r)$ pour lequel $\tau_D' = \tau_D - \tau_{B(a, r)}$ reste le temps de sortie D (il s'agit de τ_D reinitialisé à la date $\tau_{B(a, r)}$).

Finalement, on a

$$u(a) = \mathbb{E}_a[u(B_{\tau_{B(a, r)}})] = \int_{\partial B(a, r)} u(y) \lambda_{a, r}(dy),$$

ce qui établit la formule de la moyenne donc l'harmonicité par la Proposition (4.2.2), c'est à dire l'équation de Laplace sur D . ■

Régularité du bord :

Pour avoir une solution au problème de Dirichlet (4.21) à partir de (4.22), il reste à voir la continuité sur ∂D , ie. (4.23). Pour cela, on utilise la notion de régularité du bord.

Définition 4.2.3. (Régularité) On rappelle que $\sigma_D = \inf(t > 0 : B_t \notin D)$ est le temps de sortie de D d'un mouvement Brownien B .

1. Un point $x \in \partial D$ est régulier pour D si $\mathbb{P}^x(\sigma_D = 0) = 1$.
2. Le domaine D est régulier si tous ses points frontières le sont :

$$\mathbb{P}^x(\sigma_D = 0) = 1 \quad \forall x \in \partial D.$$

Proposition 4.2.3. (Régularité du bord) Soient $d \geq 2$ et $a \in \partial D$. les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La condition (4.23) est remplie pour toute fonction mesurable bornée $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, continue en a .
2. Le point a est régulier pour D .
3. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \rightarrow a}} \mathbb{P}^x(\tau_D > \epsilon) = 0.$$

Preuve. voir (28).

Théorème 4.2.2. (Dirichlet 2) *Si le domaine D est régulier, alors la fonction u donnée par (4.22) est l'unique solution du problème de Dirichlet, ie. u est C^2 sur D et continue sur \overline{D} et (4.21) est satisfait.*

Preuve. voir (28).

4.2.3 Equation de la chaleur

Les lois de la thermodynamique expliquent que la solution u du problème de Dirichlet (D, f) en (4.8) est le champ de température à l'équilibre à l'intérieur D d'un récipient dont les parois ∂D sont maintenues à température f (cette interprétation suppose que $f \geq 0$). On s'intéresse maintenant aux équations de Laplace avec évolution dans le temps : par exemple, pour poursuivre la même interprétation thermodynamique, on considère une plaque infiniment mince isolée homogène et infinie. La température $u(t, y, z)$ au point (y, z) à l'instant t se détermine en fonction de la température initiale f comme la solution de l'EDP.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

partant de $u(0, \cdot) = f(\cdot)$. Le coefficient $\sigma > 0$ ne dépend pas de (y, z) et caractérise la conductance thermique de la plaque.

En dimension d quelconque, on appelle **équation de la chaleur**, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u, \\ u(0, \cdot) = f. \end{cases} \quad (4.24)$$

Remarque 4.2.1. *L'équation de la chaleur modélise la "diffusion" de la chaleur dans un fil : $u(t, x)$ représente la température du filament au point x au temps t . Et f représente le "profil" initial de la température sur le fil.*

Nous allons relier cette EDP à des objets probabilistes. On considère d'abord la loi de \mathbf{B}_t sachant \mathcal{F}_s : par indépendance et stationnarité des accroissements, en écrivant $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_s$, on constate qu'il s'agit de la loi gaussienne (conditionnelle) $\mathcal{N}_d(\mathbf{B}_s, (t-s)\mathbb{I}_d)$ de densité au point y , en notant $\mathbf{B}_s = x$ donnée par

$$p(t-s, x, y) = g_{t-s}(y-x).$$

On voit sans difficulté que $p = p(t, x, y)$ vérifie

$$p^{-1} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{d}{2t} + \frac{|y-x|^2}{2t^2}$$

et que

$$p^{-1} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2},$$

de sorte que la fonction p est solution de l'équation progressive (dite forward) (ie. en la variable y de la position future)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_y p, \quad \lim_{t \searrow 0} p dy = \delta_x,$$

où δ_x est la mesure de Dirac en 0 et aussi par symétrie solution de l'équation rétrograde (dite backward) (ie. en la variable x de la position passée)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_x p, \quad \lim_{t \searrow 0} p \, dx = \delta_y.$$

Ces relations justifient que p est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. (De ce fait, on appelle p le noyau de la chaleur).

Proposition 4.2.4. *On suppose que la condition initiale f vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| e^{-c|x|^2} dx < +\infty$ pour une constante $c > 0$. Alors la fonction*

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x[f(\mathbf{B}_t)]$$

est solution de l'équation de la chaleur (4.24) sur $[0, t_0[\times \mathbb{R}^d$ avec $t_0 = 1/(2c)$.

Démonstration :

Par définition, on a $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p(t, x, y) dy$. La propriété d'intégrabilité de f permet de dériver sous le signe intégrale pour $t \in [0, 1/(2c)[$ et d'avoir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int f(y) \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} dy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \int f(y) \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x_i^2} dy,$$

ce qui implique d'après l'équation rétrograde pour p que u est solution de (4.24) sur cet intervalle de temps avec la bonne condition initiale. ■

4.2.4 Formule de Feynman-Kac

On considère l'EDP parabolique linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u - ku, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d; \\ u(0, \cdot) = f. \end{cases} \quad (4.25)$$

Le terme supplémentaire $k(x)$ représente le taux de dissipation de la chaleur en x dans le cas où $k \geq 0$. Dans le cas où k n'est pas positive, on interprétera plutôt cette équation avec $f \geq 0$ comme décrivant la densité $u(t, x)$ au temps t et au point x de particules diffusant dans l'espace qui se multiplient dans les sites tels que $k(x) \leq 0$ (à un taux $-k$) et qui sont tuées dans les sites tels que $k(x) \geq 0$ (à un taux k). Puisque cette équation se réduit si $k = 0$ à l'équation de la chaleur, le résultat suivant n'est pas surprenant compte tenu de la Proposition (4.2.4) :

Proposition 4.2.5. *On suppose que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont boréliennes avec f à croissance sous-exponentielle et k bornée. Alors toute solution $u(t, x)$ de l'EDP parabolique linéaire (4.25) de classe $C^{1,2}$ dont le gradient est à croissance sous-exponentielle (uniformément en temps), est donnée par la formule*

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x \left[f(\mathbf{B}_t) \exp \left(- \int_0^t k(\mathbf{B}_s) ds \right) \right]. \quad (4.26)$$

En particulier, une telle solution est unique.

Démonstration :

On fixe $t \geq 0$ et on applique la formule d'Itô au temps $s \in]0, t[$ à $s \mapsto u(t-s, \mathbf{B}_s) \exp(-\int_0^s k(\mathbf{B}_r)dr)$. Il vient

$$\begin{aligned} & d \left[u(t-s, \mathbf{B}_s) \exp \left(- \int_0^s k(\mathbf{B}_r) dr \right) \right] \\ &= \left[-k(\mathbf{B}_s) u(t-s, \mathbf{B}_s) ds - \frac{\partial u(t-s, \mathbf{B}_s)}{\partial t} ds + \nabla u(t-s, \mathbf{B}_s) d\mathbf{B}_s + \frac{1}{2} \Delta u(t-s, \mathbf{B}_s) ds \right] \\ & \quad \times \exp \left(- \int_0^s k(\mathbf{B}_r) dr \right) \\ &= \nabla u(t-s, \mathbf{B}_s) d\mathbf{B}_s \exp \left(- \int_0^s k(\mathbf{B}_r) dr \right) \end{aligned}$$

en utilisant l'EDP (4.25). On intègre entre $s = 0$ et $s = t$:

$$\begin{aligned} \exp \left(- \int_0^t k(\mathbf{B}_r) dr \right) u(0, \mathbf{B}_t) - u(t, \mathbf{B}_0) &= \exp \left(- \int_0^t k(\mathbf{B}_r) dr \right) f(\mathbf{B}_t) - u(t, \mathbf{B}_0) \\ &= \int_0^t \exp \left(- \int_0^s k(\mathbf{B}_r) dr \right) \nabla u(t-s, \mathbf{B}_s) d\mathbf{B}_s. \end{aligned}$$

On passe à l'espérance sous \mathbb{P}^x , en notant que l'intégrale stochastique est une martingale L^2 d'après les hypothèses de croissance sous-exponentielle de u et de la bornitude pour k ; elle est donc d'espérance nulle. On obtient alors

$$\mathbb{E}^x \left[\exp \left(- \int_0^t k(\mathbf{B}_r) dr \right) f(\mathbf{B}_t) - u(t, \mathbf{B}_0) \right] = 0$$

soit, puisque $\mathbf{B}_0 = x$ sous \mathbb{P}_x ,

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x \left[\exp \left(- \int_0^t k(\mathbf{B}_r) dr \right) f(\mathbf{B}_t) \right]$$

ce qui est la formule de Feynman-Kac (4.26). ■

Remarque 4.2.2. Dans le cas où on a une EDP avec des coefficients non constants, l'importance de la méthode probabiliste est bien apparue car l'application de la méthode des différences finies sur cette EDP est difficile à cause des coefficients non constant, c'est-à-dire, dépendent de la variable de l'espace, cette dépendance rend la solution non stable parfois. La méthode probabiliste nous donne une bonne représentation de la solution grâce à la formule de Feynman-Kac. Plus on augmente le nombre des trajectoires dans la méthode de Monte-Carlo on obtient une solution plus précise avec une erreur faible.

4.3 Discrétisation de problème

On a vu dans ce chapitre que l'interprétation des EDPs conduit à écrire la solution sous forme $\mathbb{E}[f(X_t)]$ avec la quantité $f(X_t(w))$ dépend de temps t et du hasard w . Le processus X est une diffusion, il n'est alors pas possible de calculer exactement $\mathbb{E}[f(X_t)]$ et l'on a naturellement recours à la simulation numérique. Tout d'abord une discrétisation temporelle de la dynamique permet de générer une variable aléatoire \bar{X}_t dont la loi est proche de celle de X_t . On applique ensuite la méthode de Monte Carlo : la moyenne arithmétique de N copies indépendantes de la variable $f(\bar{X}_t)$ converge vers $\mathbb{E}[f(\bar{X}_t)]$.

4.3.1 Le schéma d'Euler

Une des simples méthodes de discrétisation de processus de diffusion est l'approximation d'Euler, appelée Euler-Maruyama. On considère un processus de diffusion $X = (X_t)$, $t_0 \leq t \leq T$ satisfait l'EDS :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (4.27)$$

La méthode d'Euler qui représente la première étape dans la simulation, permet de donner une variable aléatoire \bar{X} qui est proche en loi de X , où $X = (X_t^x)$ est le processus de Markov solution de l'équation différentielle stochastique (4.27).

Soit T un temps fini, on peut sans perte de généralité prendre $T = 1$; on cherche à estimer la loi de $X_T^x = X_1^x$ qui en général n'est pas connue. Pour ce faire on approche X^x par son schéma d'Euler d'ordre $n \geq 1$, disons $\bar{X}^{n,x}$, défini de la façon suivante : on considère la subdivision régulière $\gamma_n = \{0 = t_0^n < \dots < t_{n-1}^n < t_n^n = 1\}$ de l'intervalle $[0, 1]$ i.e. $t_n^n = k/n$ et on pose $X_0^x = X$, et pour tout $k = \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$.

$$\bar{X}_t^{n,x} = \bar{X}_{t_k^n}^{n,x} + b(\bar{X}_{t_k^n}^{n,x})(t - t_k^n) + \sigma(\bar{X}_{t_k^n}^{n,x})(B_t - B_{t_k^n})$$

Le schéma d'Euler est simulable. C'est une petite perturbation X^x que l'on peut expliquer de la façon suivante :

- On part à la date 0 de la valeur vraie x .
- Sur l'intervalle $[0, t_1^n]$, on gèle les coefficients de l'EDS en leurs valeurs exactes $b(x)$ et $\sigma(x)$ à gauche de cet intervalle et on calcule la valeur $\bar{X}_{t_1^n}^{n,x}$ en t_1^n de la solution de cette nouvelle petite EDS.
- Sur l'intervalle $[t_1^n, t_2^n]$, on gèle les coefficients de l'EDS en leurs valeurs exactes $b(\bar{X}_{t_1^n}^{n,x})$ et $\sigma(\bar{X}_{t_1^n}^{n,x})$ à gauche de cet intervalle et on calcule la valeur $\bar{X}_{t_2^n}^{n,x}$ en t_2^n de la solution de cette nouvelle petite EDS.
- Et ainsi de suite....

De plus, on a les variables aléatoires $B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi gaussienne centrée de variance $t_{k+1}^n - t_k^n$.

4.3.2 La méthode de Monte-carlo

On voit que les EDPs peuvent être interprétés à l'aide de processus de Markov bien choisis : on interprète u à l'aide du générateur infinitésimal du semi-groupe de transition d'un processus de Markov $(X_t, t \geq 0)$. Les motivations de cette démarche peuvent être d'ordre théorique et/ou numérique. En effet, en particulier lorsque $(X_t, t \geq 0)$ est solution d'une équation différentielle stochastique, le calcul stochastique permet parfois d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité ou de régularité de la solution de l'EDP.

D'autre part, dès que l'on peut écrire la solution de l'EDP sous la forme d'une espérance du type $u(t) = \mathbb{E}F(X)$ avec F fonctionnelle sur l'espace des trajectoires de X entre 0 et t , on peut chercher à développer une méthode de Monte-Carlo pour approcher $u(t)$ même si on ne sait pas simuler des trajectoires exactes de X : il suffit de construire un processus proche (en loi) de X , comme on a vu dans le paragraphe précédent (schéma d'Euler), en simulant un grand nombre de trajectoires entre 0 et t , évaluer la fonctionnelle F le long de chaque trajectoire simulée et enfin moyenner toutes les valeurs obtenues.

Considérons un exemple élémentaire donnée par l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \nu \Delta u(t, x), \quad \forall (t, x) \in]0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad (4.28)$$

avec la condition initiale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ est une fonction mesurable bornée. Le Paramètre ν est strictement positif qui s'appelle "paramètre de viscosité" en mécanique des fluides ou "volatilité" en finance.

D'après ce qui précède, on a la fonction :

$$\forall (t, x) \in]0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad u(t, x) = \mathbb{E}u_0(x + \sqrt{2\nu t}B_t)$$

où (B_t) est un mouvement Brownien standard à valeur dans \mathbb{R}^d , satisfait (4.28) ainsi que $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u_0(x)$ en tout point de continuité de u_0 . Par application de la loi des grands nombres, on peut donc approcher $u(t, x)$ par :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_0(x + \sqrt{2\nu t}g_i(w)),$$

où les $\{g_i(w)\}$ forment une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, à valeurs dans \mathbb{R}^d , centrées et de matrice de covariance $Id_{\mathbb{R}^d}$. Cet algorithme est très simple à mettre en œuvre : on sait effectuer des tirages gaussiens indépendants à l'aide d'appels à un générateur de nombres pseudo-aléatoires uniformément répartis. La vitesse de convergence est décrite par des théorèmes limites tels que le théorème de limite centrale, la loi du logarithme itéré, l'inégalité de Berry-Essen : la convergence est d'ordre $1/N$, elle est donc lente. Toutefois, le coût de l'algorithme croît seulement linéairement avec la dimension d de l'espace puisqu'on simule Nd trajectoires d'un mouvement Brownien unidimensionnel standard, et ce coût est indépendant du paramètre ν .

Typiquement, les méthodes de Monte-carlo pour des équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques peuvent permettre de traiter des problèmes extrêmes, en très grande dimension ou avec de très faibles viscosités, lorsqu'il serait difficile, ou extrêmement coûteux, d'utiliser des algorithmes classiques.

A l'aide de schéma d'Euler on peut écrire :

$$u(t, x) \sim \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_0(\bar{X}_t^{nx}(w_i)).$$

4.4 Application

On applique dans cette section quelques formules et méthodes citées dans les sections précédentes. Cette application repose sur la simulation numérique. Pour commencer, nous abordons la simulation des trajectoires de mouvement Brownien qui est la base des autres simulations

stochastiques de notre travail. Il faut discrétiser le problème (3.16), cette discrétisation se faisant au niveau des variables, par exemple sur la variable de temps pour le mouvement Brownien.

Après la simulation du mouvement Brownien, on passe à l'illustration numérique du problème par la méthode probabiliste qui est notre point essentiel.

4.4.1 Discrétisation du mouvement Brownien

Le mouvement Brownien standard est une variable aléatoire $\mathbf{B}(t)$ qui dépend continuellement de temps ($t \in [0, T]$) et satisfait les quatre conditions connues (Chap1).

Pour la computation proposée, il est utile de considérer le mouvement Brownien discrétisé, où $\mathbf{B}(t)$ est spécifié aux valeurs discrètes de t ; ainsi nous donnons $\Delta t = \frac{T}{N}$, pour un certain entier positive N et soit \mathbf{B}_j une notation de $\mathbf{B}(t_j)$ avec $t_j = j\Delta t$.

La première condition est $\mathbf{B}_0 = 0$ avec une probabilité 1, la deuxième et la troisième sont données par :

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_{j-1} + \Delta \mathbf{B}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

où $\Delta \mathbf{B}_j$ est une variable aléatoire indépendante de $\sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1)$.

Le programme (PROG1) en MATLAB nous donne la simulation d'une trajectoire du Mouvement Brownien standard sur l'intervalle $[0, 0.1]$ avec $N = 503$. Le résultat de la simulation est illustré dans la Figure 4.1 qui représente 503 points (t_j, \mathbf{B}_j) en les joignant par interpolation linéaire :

PROG1 : Simulation du MB

```
clear
clc
tic
xf = 3;
Nombre de points en espace
M = 150;
dx = xf/M;
x = linspace(0, xf, M);
T = 0.1;
respect de la condition de stabilité CFL
dt = ((dx^2 * 0.5)/1) - 1e - 6;
t = 0 : dt : T;
Nombre de points en temps
N = length(t);
```

Simulation du MB :

```
for i = 1 : N
dB(1, i) = 0;
end
dB = sqrt(dt) * randn(N, N);
B = cumsum(dB, 2);
*****
```

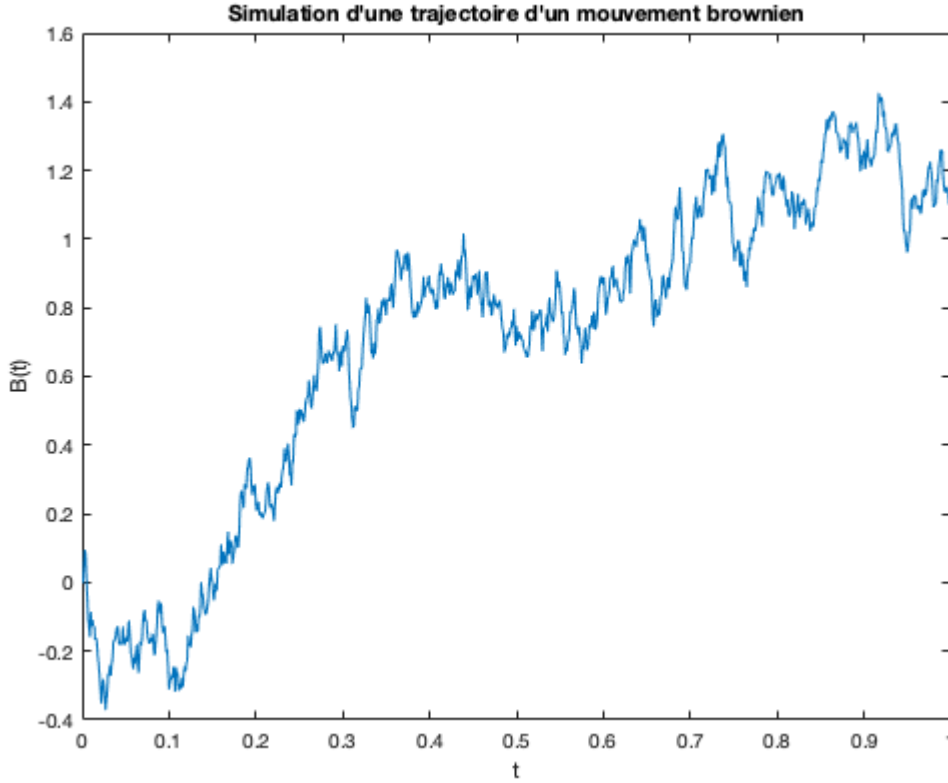


FIGURE 4.1 – Simulation d'une trajectoire d'un MB

4.4.2 Illustration numérique du problème par la méthode probabiliste

On passe maintenant à l'application de la méthode probabiliste sur le même problème (3.16), donc on s'intéresse à l'interprétation probabiliste de la solution de l'équation de la chaleur 1D (3.16), pour $t \in [0, T]$. Ce problème est traité dans le chapitre précédent, et par l'application de la formule de Feynman-Kac on peut écrire la solution sous forme :

$$u(x, t) = \mathbb{E}^x[f(X_t)], \quad (4.29)$$

où le processus stochastique sous-jacent (X_t) est la solution de :

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{2} d\mathbf{B}_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.30)$$

La solution numérique est obtenue par la simulation de Monte-Carlo ; l'application de schéma d'Euler donne une solution approximée de l'équation (3.16). On simule N trajectoires de cette solution, et par la fonction de condition initiale on calcule les valeurs $f(X_t)$. En moyennant ces valeurs on trouve :

$$u(x, t) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\pi X_t^k). \quad (4.31)$$

Le programme suivant donne la solution approximée par la méthode probabiliste, où le processus (X_t^k) est discrétisé avec le même pas de temps utilisé dans la première méthode (différences finies abordée dans le 3^{ème} chapitre), c.-à-d. on prend $N = 503$ et donc $\Delta t = T/N = 1/503$.

```
*****
clear
clc
tic
xf = 3;
(Nombre de points en espace)
M = 150;
dx = xf/M;
x = linspace(0, xf, M);
T = 0.1;
(respect de la condition de stabilité CFL)
dt = ((dx^2 * 0.5)/1) - 1e - 6;
t = 0 : dt : T;
(Nombre de points en temps)
N = length(t);

(Simulation du MB :)
for i = 1 : N
dB(1, i) = 0;
end
dB = sqrt(dt) * randn(N, N);
B = cumsum(dB, 2);
for k = 1 : length(x)
(Position initiale)
xzero = x(k);
for i = 1 : N
for j = 1 : N
(Condition initiale appliquee au processus correspondant a l'EDP)
fX(i, j) = sin(pi * (xzero + sqrt(2) * B(i, j)));
end
end
(Monte Carlo pour le calcul de l'esperance de f(X))
u(k, :) = mean(fX);
end
figure, mesh(t, x, u)
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('u(x,t)')
title('Solution u obtenue avec u = E(f(X_t))');
toc
```

L'illustration graphique de la solution (4.31) est donnée par la Figure 4.2

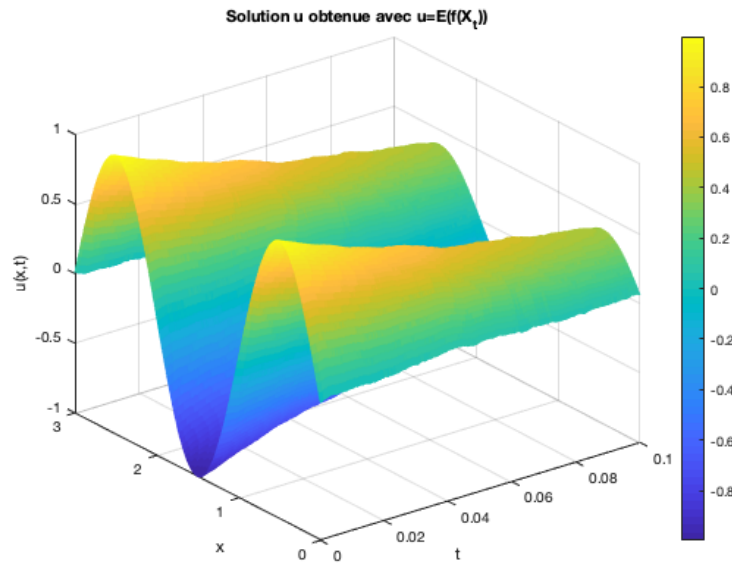


FIGURE 4.2 – Solution approximée par la méthode probabiliste.

La Figure 4.3 illustre la solution probabiliste et la solution exacte au long de l'axe de temps et pour un point d'espace fixé $x = 1.5$, on peut voir que la solution probabiliste approche de la solution exacte avec des perturbations.

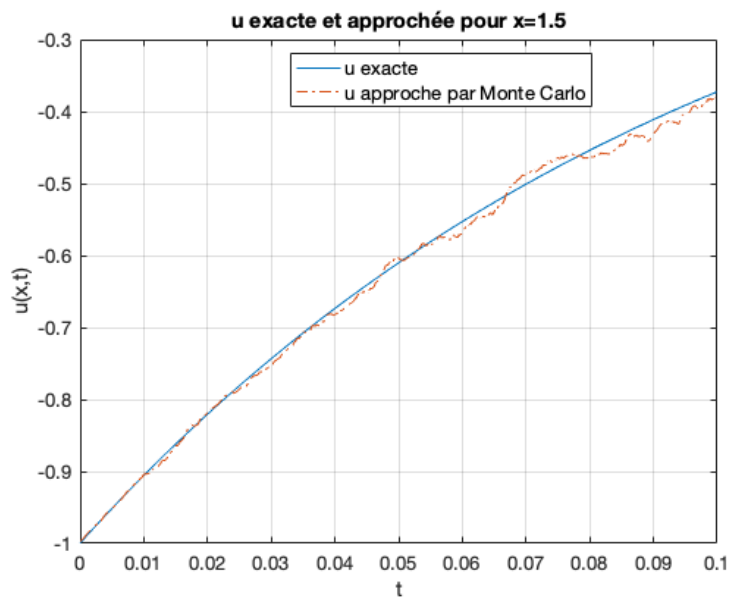


FIGURE 4.3 – Solution exacte et probabiliste de l'EDP (3.16) pour $x = 1.5$

La Figure 4.4 illustre le vecteur $e(x, t)$ (Erreur) pour une valeur de x fixé comme dans la première méthode mentionnée dans le chapitre précédent (méthode des différences finies) pour $x = 1.5$.

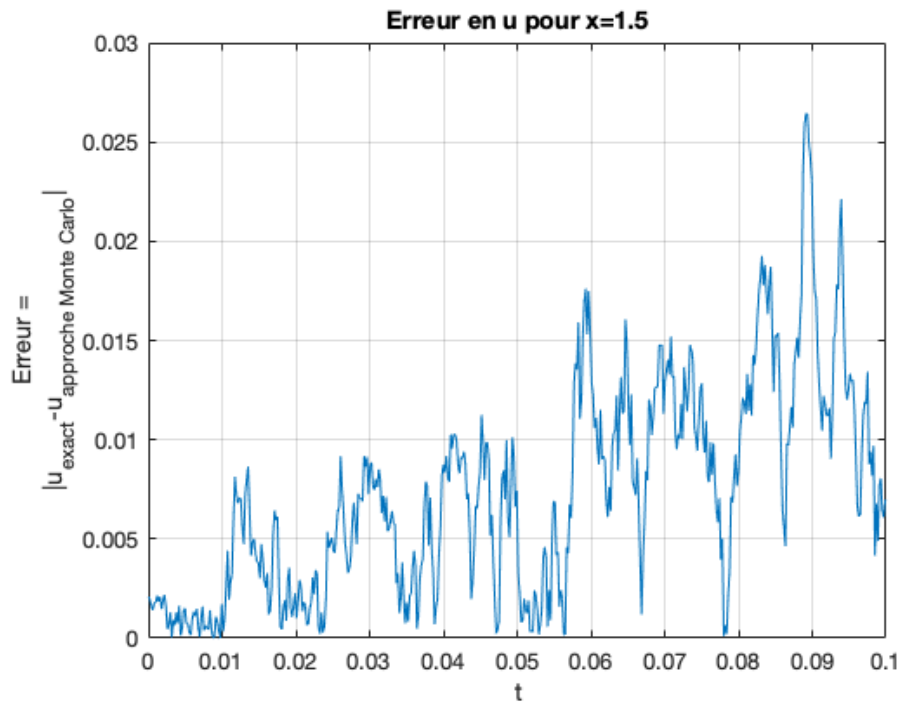


FIGURE 4.4 – L'erreur de la méthode probabiliste pour $x = 1.5$

On remarque visuellement que l'erreur est plus grande que celle de la première méthode mentionnée dans le chapitre précédent (la méthode des différences finies). Ce qui signifie que la solution approximée par méthode des différences finies est meilleure que celle de la méthode probabiliste.

Interprétation des résultats :

Malgré que l'approximation de la solution par la méthode des différences finies soit meilleure que celle de la méthode probabiliste, on peut dire que la méthode probabiliste donne une approximation acceptable de la solution.

Puisque la méthode est basée sur la simulation de Monte-Carlo, la convergence de la méthode est lente, et l'approximation sera faible de celles des méthodes déterministes.

L'utilisation de cette méthode est avantageuse dans le cas de résolution des EDPs où la résolution par les méthodes déterministes implique une résolution des systèmes linéaires à grandes dimensions.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté les équations différentielles stochastiques qui sont des EDOs perturbées par un terme aléatoire, où on a démontré le théorème fondamental d'existence et d'unicité. Ensuite, on a parlé des équations aux dérivées partielles du second ordre, et des méthodes numériques pour les résoudre (la méthode des différences finies et la méthode d'Euler). On a terminé ce travail par une interprétation probabiliste des EDPs à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo.

L'approche probabiliste sert à étudier le lien mathématique profond entre certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et les EDS. On a illustré ce lien par la formule de Dynkin, le problème de Dirichlet, l'équation de la chaleur et la formule de Feynman-Kac.

L'avantage de cette approche est qu'elle permet d'avoir accès rapidement à une expression de la solution des EDPs et éviter les complications des méthodes numériques utilisées pour la résolution des EDPs.

Pour bien présenter l'utilité de la méthode probabiliste on a fait une application sur un exemple d'EDP parabolique que nous savons résoudre analytiquement et par la méthode des différences finies. La comparaison faite entre les solutions approximatives de chaque méthode et la solution exacte montre qu'on peut adopter la méthode probabiliste comme une méthode de résolution, mais les avantages de cette méthode apparaissent dans les différents cas où on veut résoudre un problème en dimension élevée (par exemple supérieure à 4). Les méthodes classiques conduisent à l'obtention de systèmes linéaires de taille qui deviennent impraticable, et la méthode probabiliste est souvent utilisée.

Bibliographie

- [1] A. Abbès. Méthodes Numériques appliqués aux calculs des écoulements et du transfert de chaleur. Faculté de Génie-Mécanique USTO MB. Version 1, Juin 2011.
- [2] S. Asmussen, P. W. Glynn. *Stochastic Simulation : Algorithms and Analysis*. Springer Science+Business Media, LLC 2007.
- [3] T. J. Barth, M. Griebel, D. E. Keyes, R. M. Nieminen, D. Roose, T. Schlick. *Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Printed in The Netherlands. 2006.
- [4] V. Bally, D. Talay. The law of the Euler scheme for stochastic Differential Equations (I) : Convergence rate of the distribution function. *Probability Theory and Related Fields*, 104 (1), 1996.
- [5] V. Bally, D. Talay. The law of the Euler scheme for stochastic Differential Equations (II) : convergence rate of the density. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2 :93-128, 1996.
- [6] F. E. Benth, G. D. Nunno, T. Lindstrøm, B. Øksendal, T. Zhang. *Stochastic Analysis and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.
- [7] N. Bouleau. *Processus stochastiques et Applications*. Hermann, 2000.
- [8] N. Berglund. Martingales et calcul stochastique. *Master 2 Recherche de Mathématiques*. Université d'Orléans. Version de Janvier 2014.
- [9] J. C. Breton. Calcul stochastique. *M2 Mathématiques*, Université de Rennes 1. Septembre-Décembre 2014. Version du 5/12/14.
- [10] C. Breton. *Intégrale de Lebesgue et Probabilités*. Université Paris-Dauphine. Septembre 2020.
- [11] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'intégration*, 5e édition, Vuibert 2012.
- [12] K. L. Chung, R. J. Williams. *Introduction to Stochastic Integration*. 2e édition. Birkhäuser, 1990.

-
- [13] F. Comets et T. Meyre. *Calcul Stochastique et Modèles de Diffusions*, Cours et Exercices. Dunod, 2006.
- [14] C. David et P. Gosslet. *Équations aux dérivées partielles*. Cours et exercices corrigés. 2ème édition. © Dunod, 2012, 2015.
- [15] R. Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. Wadsworth, 1984.
- [16] J. F. Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer, Coll. Mathématiques et applications, vol. **71**, 2013.
- [17] C. F. Gerald, P. O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company 1984.
- [18] L. Gallardo. *Mouvement brownien et calcul d'Ito*. Hermann, 2008, Pages 50-75.
- [19] E. Goncalvès. Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO. Institut national polytechnique de grenoble, septembre 2005.
- [20] H. Guiol. Calcul Stochastique Avancé. *TIMB/TIMC - IMAG*, 2006.
- [21] M. Haneche. Processus stochastiques et équations aux dérivées partielles. Mémoire de magister. Université M'hamed Bougara Boumerdès, 2009.
- [22] Y. Harnane. Méthodes numériques I Méthodes des différences finies. *Cours*, Université Larbi Ben M'Hidi - Oum-El-Bouaghi Faculté des Sciences et Sciences Appliquées Département de Génie Mécanique. Année Universitaire 2015-2016.
- [23] B. Helffer à partir du texte établi par T. Ramond. Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles. Département de Mathématiques Université Paris-Sud, Version de Janvier-Mai 2007.
- [24] J. B. Hiriart-Urruty. Des démonstrations qui font boum. Institut de mathématiques. *Université PAUL SABATIER*. 118 route de Narbonne. 31062 TOULOUSE Cedex 9, France. jbh@ict.fr.
- [25] N. Ikeda, S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. 2e édition. North Holland, 1988.
- [26] M. Jeanblanc. Cours de Calcul stochastique. *Dess in evry option finance*, Septembre 2002.
- [27] M. Jeanblanc et T. Simon. Elements de calcul stochastique. IRBID, Septembre 2005.
- [28] L. Karatzas, S-E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1987.

-
- [29] O. Lévêque. Cours de probabilités et calcul stochastique. *Cours et Exercices corrigés*. EPFL, semestre d'hiver 2004-2005.
- [30] V. Manet. La Méthode des éléments Finis. Vulgarisation des aspects mathématiques Illustration des capacités de la méthode. version du 12 juillet 2013.
- [31] H. P. McKean, Jr., *Stochastic integrals, Probability and Mathematical Statistics*, No. **5**, Academic Press, New York, 1969.
- [32] P. Mörters, Y. Peres. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2010.
- [33] D. Revuz, M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, 1991.
- [34] L. C. G. Rogers, D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Vol. **II**, Itô Calculus. Wiley, 1987.
- [35] A. Taik. Equations aux Dérivées Partielles, Méthodes des Différences Finies. *Cours AN3 LST-MI*. Département de Mathématiques FST-Mohammedia, (2008).
- [36] L. Zambotti. Calcul stochastique et processus de diffusion. Université Pierre-et-Marie-Curie, M2 "*Probabilités et Modèles Aléatoires*". Année 2017 – 2018.