République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année univ.: 2020/2021

Produit de deux Variétés Riemannienne

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Mathématique

par

Bentadj Belmokhtar [1]

Sous la direction de

Mr B. Saadli

Soutenu le 12/09/2021 devant le jury composé de

Mme F.Z Mostfai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr H. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mr F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : mokhtarbentadj@gmail.com

Remerciements

Je tiens à remercier mon Dieu Allah et toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon mémoire et mon période de étude et mon encadreur Dr Saadli Benjdide et Mr Khater Mammar qui résolu mon pb.
et toutes les Profs de Université Saida
et les membre de jury Dr F.Z.Mostfai et Dr H.Dida et Dr Z.Hathout.
Je remercie mes très chers parents maman "Allah yerhamha " et mon père et mes soeurs et mes familles et mes amis
Merci

DÉDICACE

A mon père et ma mère
A mes frères et mes seours
A toutes ma famille
A tous mes amis proche et collègues
A chacun des soutiens moraux tout au long d'un parcours académique
Je dédie ce modeste travail

Table des matières

Introduction

En mathématiques, il y a plusieurs branches parmi les quelles a géométrie, cette dernière étudie les propriétés et les relations des formes et des figures dans un espace. La géométrie se divise en deux types, la géométrie analytique et la géométrie différentielle :

1. La géométrie analytique : Partie de la géométrie ayant recours au calcul algébrique et analytique. Elle facilité les Étude des propriétés géométriques des courbes et des surfaces et de leurs présentations graphiques ou la recherche de "lieux géométriques".
2. La géométrie différentielle : Est une continuité du calcul infinitésimal [2], elle permet d'étudier

grâce aux techniques du calcul différentiel, une nouvelle famille d'espaces topologiques appelées "variété différentiable", permettant la rénovation de la vieille géométrie des courbes et des surfaces de $\mathbb{R}^3$ la Gauss . Pendant de nombreux siècles, le cadre naturel de la géométrie est la géométrie euclidienne du plan ou de l'espace. Les infructueuses tentatives de démonstration du postulat des parallèles ont aidé les géomètres à imaginer les moyens de dépasser ce cadre. Ainsi Lobatchevski en 1829 et Bolyai en 1832 introduisent les premiers exemples de géométrie non euclidienne. Les espaces à géométrie hyperbolique qu'ils construisent sont maintenant vus comme des cas particuliers de variétés riemanniennes "à courbure négative. Quelques années auparavant, Gauss étudie la géométrie différentielle des surfaces de l'espace euclidien. Il introduit pour les décrire une quantité fondamentale, la courbure de Gauss. Il réalise que cette courbure peut être calculée sans faire intervenir l'espace ambiant, directement à partir d'informations disponibles sur la surface, théorème qu'il qualifie de "remarquable" (théorème egregium) [3]. Gauss passe lui-même tout près de la découverte de la géométrie hyperbolique Le premier pas de la géométrie riemannienne proprement dite remonte aux travaux de Bernhard Riemann au dix-neuvième siècle et en particulier lors d'une conférence inaugurale intitulée "Über die Hypothesen, welche der Géométrie zu Grunde liegen1" (soit en français : Sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie). C'est une généralisation directe de la géométrie différentielle des surfaces de Gauss en n dimensions. Cette nouvelle démarche a largement étendu l'idée de géométrie non euclidienne, même si son cadre conceptuel a mis plusieurs décennies à se mettre en place

2. calcul infinitésimal c à d calcul différentiel et calcul intégral
3. En mathématiques, et plus précisément en géométrie, le theorema egregium (« théorème remarquable » en latin) est un important théorème énoncé par Carl Friedrich Gauss et portant sur la courbure des surfaces. Il énonce que celle-ci peut être entièrement déterminée à partir de la métrique locale de la surface1, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la manière dont la surface peut être plongée dans l'espace tridimensionnel.

Chapitre 1

Rappel et définition

1.1 Notion d'espace topologique

1.1.1 Espace topologie

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble non vide une famille T de partie de X est une topologie si et seulement si ;*

1) $X, \emptyset \in T$
2) $\forall A, B \in T, A \cap B \in T$
3) soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelque de X,alors $\cup_{i \in I} A_i \in T$
(i) les élément de T appelé les ouverts de T
(ii) le couple (X, T) est appelé un espace topologique sur X.

Exemple 1.1.1. *Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $T = \{\emptyset, X, 1, 3, 4, 1, 2, 4\}$ est une espace topologie sur X puis qu'il vérifier les trois axiomes précédent.*

Définition 1.1.2. *Un espace topologie X est dit espace T_1 [1] si et seulement si :$\forall a, b \in X$ avec $a \neq b$ alors $\exists v_a \in V(a), v_b \in V(b)$ $V(a)$ design l'ensemble des voisinages de a $V(b)$ design l'ensemble des voisinages de b tel que $b \notin v_a$ et $a \notin v_b$.*

Remarque 1.1.1. *v_a, v_b n'est pas nécessairement disjoint .*

Définition 1.1.3. *Un espace topologique X est un espace T_1 si et seulement si les $\{x\} \subset X$ sont des fermés.*

Preuve :

Supposons que X est un espace T_1, il suffit de montre que $\{x\} \subset X$ est fermé.
Soit $y \in \{x\}^c$ on suppose que X plus qu'on point alors on peut choisir un ouvert $V_y \subset X$ qui contient a y mais pas $x \Rightarrow \{x\}^c = \bigcup V_y$ est un ouvert . donc $\Rightarrow \{x\}$ est fermé
$\Leftarrow$) on suppose que $\forall \{x\}$ est fermé, et on montre que X est un espace T_1 .
$\forall x, y \in X$ avec $x \neq y \Rightarrow \exists$ un ouvert$U$ tell que $x \notin U \subset \{x\}^c$,(il est le mémé de y). Donc X est un espace T_1.

---

1. Un espace topologique E est T_1 si pour tout couple (x, y) d'éléments de E distincts, il existe un ouvert contenant x et pas y

1.1.2 Espace Séparé

Définition 1.1.4. *Un espace topologique X est un espace sépare ou Hausdorff*[2] *ou espace T_2 si et seulement si :* $\forall a, b \in X$ *et* $a \neq b$ $\exists v_a \in V(a)$ *et* $v_b \in V(b)$ *tell que* $v_a \cap v_b = \emptyset$.

Exemple 1.1.2. *Tout espace métrique est un espace séparé.*

Preuve :
Soit (X, d) un espace métrique. soit $x, y \in X$, $x \neq y$ on pose $0 < \dfrac{d(x,y)}{2} = r$ et $U = B(x,r), V = B(y,r)$. supposons que $z \in U \cap V$. alors on a : $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < 2r = d(x,y)$ contradiction. Donc $U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ est Séparé .

Remarque 1.1.2. *Un espace Séparé est toujours espace T_1 mais la réciproque faux .*

Exemple 1.1.3. *La topologie grossière $T_g = \{\emptyset, X\}$ est un espace T_1 En effet $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$ et $\forall B(x,r) = B(y,r) = X$. Donc $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset \Rightarrow T_g$ n'est pas Séparé .*

1.1.3 Différentielle D'une application sur un espace vectoriel normé

Définition 1.1.5. *Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ on appelle norme sur E tout application $\|.\|$:$E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifier les condition suivant :*

(1) $\forall x \in E, \|u\| \geq 0$ *et* $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
(2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$
(3) $\forall (x, y) \in E \times E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Un espace vectoriel munie d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.4. *Les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ considère $\forall x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}$ les réel $\|x_1\|, \|x_2\|, \|x_\infty\|$ définie par :
$\sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x_2\| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k^2|)^{\frac{1}{2}}$, $\|x_\infty\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

Définition 1.1.6. *Soient E,F deux espace vectoriel normés U un ouvert de E et f :$u \longrightarrow F$ une application, on dit que f est différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application linéaire g de E dans F telle que :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - g(x - x_0)\|_F}{\|x - x_0\|_E} = 0$$

ou $f(x_0 + h) - f(x_0) - g(h) = o(\|h\|)\varepsilon(h) avec \lim_{\|h\| \longrightarrow 0} \epsilon(h) = 0 et (h = x - x_0)$ On dit que g est la différentielle de f en x_0 et est noté par $D_{x_0} f$

— *on dit que f est différentiable sur U s'elle est différentiable en tout point x en U.*
— *f est de classe C^1 si d'application différentielle est continue.*
— *si f admet k-différentielle continues on dit que f est de classe $C^k (k > 1)$.*

2. un espace séparé, dit aussi espace de Hausdorff, est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints. Cette condition est aussi appelée axiome T_2 au sein des axiomes de séparation.

Exemple 1.1.5. *Toute application constante est différentiable en tout point a de U et* $Df = 0$.

Propriété 1.1.1. *si f est différentiable au point* x_0 *alors l'application linéaire continue g de la définition est unique.*

Preuve :
Soient g_1 et g_2 deux application linéaire continue de E dans F tell que $\forall h \in E$ avec $x_0 + h \in U$, on ait ; $f(x_0+h) = f(x_0) + g_1(h) + o(\|h\|)\epsilon_1(h) = f(x_0) + g_2(h) + o(\|h\|)\epsilon_2(h)$
avec $\lim \epsilon_1(h) = 0$ et $\lim \epsilon_2(h) = 0$
alors on a $\|(g_1 - g_2)(h)\| = o(\|h\|\varepsilon(h)$ tell que $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$.
puis que $\lim \epsilon_1(h) = 0$ et $\lim \epsilon_2(h) = 0$,il en est de même de ϵ
Donc $\forall r > 0$, il excite $\alpha > 0$ tells que pour tout $h \in E$, $\|h\| \leq \alpha \Rightarrow \|\epsilon(h)\| \leq r$
on a alors
$\|h\| \leq \alpha, \|(g_1 - g_2)(h)\| = o(\|h\|)\epsilon(h) \leq r\,\|h\|$.
Il síen suite que $\|(g_1 - g_2)\| \leq r \forall r > 0$.
Donc $\|(g_1 - g_2)\| = 0$, et obtient $g_1 = g_2$.

Propriété 1.1.2. *Soient E F,G des espace vectoriel normés U un ouvert de E et V un ouvert de F,* $f : U \to V, g : V \to G$ $a \in U, f(a) = b \in V$. *si f est différentiable en a et g différentiable en b alors* $g \circ f$ *est différentiable en a et*

$$D(g \circ f)(a) = D(g(f(a)) \circ D(f(a))$$

Preuve :
On a $(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) = g(f(a+h)) - g(f(a))$. puis que f est différentiable au point a on a alors

$$\begin{cases} f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + \epsilon(h)\,\|h\| \\ \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0 \end{cases}$$

posons $Df(a)(h) + \epsilon(h)\,\|h\| = l$ donc $g(f(a+h)) = g(f(a)+l)$. puis que g est différentiable au point $f(a)$ on a alors

$$\begin{cases} g(f(a)+l) = g(f(a)) + Dg(f(a))(l) + \epsilon'(l)\,\|l\| \\ \lim_{l \to 0} \epsilon'(l) = 0 \end{cases}$$

1.1.4 Variété Différentiable

Soit M une espace topologique.

Définition 1.1.7. *Une carte local* (U, ϕ) *de dimension n pour M consiste en un ouvert* $UdeM$ *appelé domaine de la carte,*
et un homéomorphisme[3] $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ *appelé application de coordonnées.*

Définition 1.1.8. *Un atlas différentiable A de dimension n pour M est une collection* $A = \{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ *des cartes locales de dimension n pour M tell que :*

- $\cup_{i \in A} U_i = M$.
- *si* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *pour* $i, j \in I$, *alors l'application de changement de carte* $\phi_i \circ \phi_j^{-1}; \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ *est différentiable.*

3. application $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$est un homéomorphisme si ϕ est bijective, et si ϕ et ϕ^{-1}sont continue

Définition 1.1.9. *Une variété topologique est un espace M muni d'une topologie pour laquelle il est séparé*[4]*, qui est homéomorphe a $\mathbb{R}^n$,i.e pour tout $x \in M$, il existe un homomorphisme.*
$\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$*, ou U est un voisinage ouvert de x dans M et $\phi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 1.1.6. *L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n.*

Définition 1.1.10. *Deux carte (U_1, ϕ_1) et(U_2, ϕ_2) d'une variété topologique M, d'ordre K compatible si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ou si l'application de changement de carte*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}; \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est $\mathbb{C}^k$ difféomorphisme[5].

Exemple 1.1.7. *La sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, est une variété de dimension 2 : on peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique. Les points $N(0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$ désignant respectivement les pôles nord et sud .*

Définition 1.1.11. *Un atlas différentiable A pour une variété différentiable M est dit maximal si il n'est pas inclus strictement dans un autre atlas différentiable pour M.*

Définition 1.1.12. *Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique M muni d'un atlas différentiable maximal de dimension n.*

Exemple 1.1.8. *L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n et de classe $\mathbb{C}^\infty$.*

Exemple 1.1.9. *La sphère $\mathbb{S}^2$ est une variété différentiable de dimension 2.*

---

4. Une espace topologique M est dit séparé si deux points distincts de M possèdent des voisinages disjoint

5. Un difféomorphismes de classe C^k est une application bijective de classe C^k dont réciproque est aussi de classe C^k

1.1.5 Théorème d'inversion locale

Définition 1.1.13. *Soit $f : U \to V$ une application ,où U est un ouvert de E et V un ouvert de F et $k \in \mathbb{N}^*U\{\infty\}$ On dit que f est un C^k-difféomorphisme de U sur V si seulement si :*
• *f est bijective.*
• *f^{-1} et f sont de classe C^k.On dit alors que U et V sont difféomorphes.*

Propriété 1.1.3. *Si $f : U \to F$ est un C^k-difféomorphisme, alors l'image de tout ouvert de U est un ouvert de V , et l'image réciproque de tout ouvert de V est un ouvert de U*

Définition 1.1.14. *Soit $f : U \to F$ et $x_0 \in U$. f est un C^k-difféomorphisme local en x_0 si seulement si il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 dans U , un voisinage $V_{f(x_0)}$ dans F tel que $f : U_{x_0} \to V_{f(x_0)}$ soit un C^k difféomorphisme.*

Définition 1.1.15. *$f : U \to F$ est un C^k difféomorphisme local sur U si seulement si c'est un C^k difféomorphisme local en tout point de U.*

Théorème 1.1.1. *[4] **(d'inversion local 1)***
Soit E et F deux espace Banach[6] .Si $f : U \to F$ est C^k en x_0 et $d_{x_0}f \in Iso(E; F)$ alors f est un C^k difféomorphisme en x_0.

Théorème 1.1.2. *[4] **(d'inversion local 2)***
Soit E et F deux espace Banach .Si $f : U \to F$ est C^k sur U et $d_{x_0}f \in Iso(E; F)$ pour tout $x \in U$. Alors f est un C^k difféomorphisme local sur U.

Théorème de Rang

Définition 1.1.16. *(Rang d'une application)*
Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espace de Banach et $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^1 Si $Im(D_xf) = D_xf(h); h \in E$ est une espace vectoriel de dimension fini.on dit alors que f est de rang fini en x et on note

$$rang_x(f) = dim(Im(D_xf))$$

Remarque 1.1.3. *Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espace de Banach et $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^1.Si E est de dimension fini ,alors*

$$dim(E) = dim(ker(D_xf)) + dim(Im(D_xf))$$

d'où

$$reng_x(f) = dim(Im(D_xf)) = dim(E) - dim(ker(D_xf))$$

Définition 1.1.17. *(Immersion)*
Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espace de Banach et $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^1.On dit que f est une immersion en $x \in U$ si $D_xf : E \to F$ est une application injective (i.e $ker(D_xf) = \{0\}$.
f est dit immersion sur U si elle est immersion en tout point $x \in U$.

6. Un espace vectoriel normé est un espace de Banach si et seulement si, dans cet espace, toute série absolument convergente est convergente

Définition 1.1.18. *(submersion)*
Soient $(E, ||.||_E)$ *et* $(F, ||.||_F)$ *deux espace de Banach et* $f : U \subset E \to F$ *une application de classe* C^1.*On dit que* f *est une submersion en* $x \in U$ *si* $D_x f : E \to F$ *est une application surjective (i.e* $Im(D_x f) = F$.
f *est dit submersion sur* U *si elle est submersion en tout point* $x \in U$.

Remarque 1.1.4. *Si* E *et* F *sont de dimension finis alors :*

1. f *est une immersion en* x *si et seulement si* $rang_x(f) = dim(E)$
2. f *est une submersion en* x *si et seulement si* $rang_x(f) = dim(F)$

1.2 Espace tangent et fibré tangent

Soit M *une variété différentielle de dimension* n. *On note* $\mathbb{C}^\infty$ *l'ensemble des fonctions réelles de classe* $\mathbb{C}^\infty$ *sur* M.

Définition 1.2.1. *L'ensemble* $\mathbb{C}^\infty(M)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *est une algèbre associative et commutative avec le produit usuel* $(fg)(x) = f(x)g(x)$, *ou* $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$ *et* $x \in M$.

1.2.1 Espace tangent

Définition 1.2.2. *Un vecteur tangent en un point* $p \in M$ *est l'application*

$$v : \mathbb{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, *pour tout* $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$,*on a*

1. v*est* $\mathbb{R}$*-Linéaire :* $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$.
2. v *satisfait la règle de Leibniz :* $v(f.g)(p) = v(f)g(p) + v(g)f(p)$.

L'ensemble de vecteurs tangents au point p *de* M *est noté par* T_pM *et on l'appelle l'espace tangent en* $p \in M$ *c'est un espace vectoriel de dimension* n $(dimM)$.
Il existe une autre notion de l'espace tangent .

Définition 1.2.3. *On définit l'espace tangent à* M *en un de ses points comme l'ensemble des vecteurs tangents à une courbe tracée dans* M *: un vecteur* v *de* $\mathbb{R}^n$ *est dit tangent à* M *en un point* x *de* M *s'il existe une courbe paramétrée de classe* C^1.

Exemple 1.2.1. *L'espace tangent en tout point* p *d'un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *est* $T_pU = \mathbb{R}^n$.

Propriété 1.2.1. *L'espace tangent* T_pM *est un espace vectoriel réel de dimension* n. *Si* (U, ϕ) *est une carte local en* p *avec coordonnées local* $(x^1, ...x^n)$.

1.2.2 Fibré tangent

Définition 1.2.4. *On appelle fibré tangent a* M,*qu'on l'on désigne par* TM, *l'ensemble de tout les vecteurs tangent de* M *en ses points, c'est donc la réunion de tout les espaces tangents* T_pM *en ses divers points :*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_P M = \bigcup_{p \in M} \{(p, v) | p \in M, v \in T_pM\}.$$

C'est une famille d'espace vectoriel paramétrisé par M. *On peut le munir d'une projection* $\pi : TM \longrightarrow M$ *définie par* $\pi(T_xM) = x$.

Exemple 1.2.2. *Si $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace tangent a M en chaque point x s'identifie canoniquement a $\mathbb{R}^n$, en utilisant l'atlas à un seul élément donné par l'inclusion de M dans $\mathbb{R}^n$.*
Le fibré tangent de U s'identifier alors à $U \times \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.2.3. *Le fibré tangent au cercle*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

apparait ainsi comme la variété

$$\{(x, y, X, Y) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 = 1, xX + yY = 0\}$$

il est difféomorphe au cylindre $S^1 \times \mathbb{R}^n$.

Propriété 1.2.2. *[4] Si M une variété différentiable de $\mathbb{R}^n$, de dimension n et de classe $\mathbb{C}^k$,$k > 1$, alors son fibré tangent est une variété $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de dimension $2n$ et de classe $\mathbb{C}^{k-1}$.*

1.2.3 Champ de vecteur

On désigne par T_pM l'espace tangent à une variété M en un point p. Les espace tangents T_pM ou p parcourt la variété M forment une variété différentiable de dimension $2n$ (ou $n = dimM$), noté TM qui se projette canoniquement sur M la projection

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

associé a tout vecteur X son point d'application, c à d un point $p \in M$ tel que $X \in T_pM$ de sort que $T_pM = \pi^{-1}(p)$. les section de cette projection c à d les application différentiable.

$$\begin{aligned} X : M &\to TM \\ p &\mapsto X_p \end{aligned}$$

tel que $\pi \circ X = id$ c à d $X_p \in T_pM$ s'appellent champ de vecteurs sur M. Ces champs des vecteurs engendrent canoniquement un espace vectoriel de dimension infinie qui sera désigné $\mathcal{H}(M)$.

Définition 1.2.5. *soit M est une variété différentiable.*
Le crochet de Lie noté $[,]$ est définie par $[X, Y] = XY - YX$ pour tout $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ vérifient les propriété suivants :

1. *$[,]$ est bilinéaire et antisymétrique*
2. *$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ pour $X, Y \in \mathcal{H}(M)$.*
3. *$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ pour $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ et $f, g \in \mathbb{C}^\infty$*
4. *$[X, Y] = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}$ ou $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$*

Définition 1.2.6. *Soient $V_1, V_2, ..., V_k$ et W des espaces vectoriels, soit F une application de $V_1 \times ... \times V_k \to W$. On dit que l'application F est k-linéaire ou (multilinéaire ?aire) si elle est linéaire sur chaque variable i.e*

$$F(v_1, ..., \alpha v_{i_1} + \beta v_{i_2}, ..., v_k) = \alpha F(v_1, ..., v_{i_1}, ..., v_k) + \beta F(v_1, .., v_{i_2}, ..., v_k)$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $i = 1, ..., k$. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, l'application $\omega : V \to \mathbb{R}$ est applée un covecteur, l'ensemble des covecteurs est appelé le dual de V noté V^*.
On va considérer que $\langle \omega, v \rangle = \langle v, \omega \rangle = \omega(v) \in \mathbb{R},\ v \in V,\ \omega \in V^*$.

Propriété 1.2.3. *Si $(v_1, ..., v_n)$ est une base de V espace vectoriel de dimension n, alors $(w^1, ..., w^n)$ est une base de V^* et on a $w^j(v_i) = \delta_{ij}$. En particulier, dim V = dim V^*.*

Définition 1.2.7.

1. *Un k-tenseur covariant sur V est une application k-linéaire $V^k \to \mathbb{R}$ tel que $V^k = \underbrace{V \times ... \times V}_{k\ fois}$. On note $T^k(V)$ l'ensemble des tenseurs k-covariante sur V*
2. *Un l-tenseur contravariant est une application linéaire sur $V^{*l} \to \mathbb{R}$. On note $T_l(V)$ l'ensemble des tenseurs l-contravariant sur V*
3. *Un k-tenseur covariant et l-tenseur contravariante est une application $(k+l)$-linéaire sur $V^k \times V^{*l} \to \mathbb{R}$. un tenseur de type (k, l) est k-covariante et l-contravariante. On note $T^k_l(V)$ l'ensemble des tenseurs de type (k, l).*
4. *Par convention $T^0(V) = T_0(V) = \mathbb{R}$.*

Définition 1.2.8. *Le produit tensoriel de deux tenseurs $F \in T^k_l(V)$ et $G \in T^p_q(V)$ est le tenseur noté $F \otimes G \in T^{k+p}_{l+q}(V)$*

$$F \otimes G(v_1, ..., v_k, ..., v_{k+p}, w^1, ..., w^l, ..., w^{l+q}) =$$
$$F(v_1, ..., v_k, w^1, ..., w^l) G(v_{k+1}, ..., v_{k+p}, w^{l+1}, ..., w^{l+q}).$$

Lemme 1.2.1. *Si $(v_1, ..., v_n)$ est la base de V et $(\omega_1, ..., \omega_n)$ la base duale correspondante à V (i.e. $\omega^i(v_j) = \delta^i_j$), alors le tenseur :*

$$w^{i_1} \otimes ... \otimes w^{i_k} \otimes v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_l},\ 1 \leq j_p,\ i_q \leq n$$

forme une base de $T^k_l(V)$. Par conséquent, dim $T^k_l(V) = n^{k+1}$ Tenseurs sur une variété. Pour tout $p \in M$, définissons l'espace vectoriel

$$T^{(s,r)}_p M = \underbrace{T_pM \otimes ... \otimes T_pM}_{s\ fois} \otimes \underbrace{T^*_pM \otimes ... \otimes T^*_pM}_{r\ fois}$$

Un élément $T \in T^{(s,r)}_p M$ est un tenseur de type (s, r) au dessus de p. Dans une base associée à des coordonnées (x_i) au voisinage de p, il s'écrit

$$T_{|p} = T^{i_1 ... i_s}_{j_1 ... j_r}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx^{j_1}_{|p} \otimes ... \otimes dx^{j_r}_{|p}$$

Chapitre 2

Introduction à La géométrie Riemannienne

2.1 Notion de Tenseur

2.2 Métrique Riemannienne sur une variété

Définition 2.2.1. *Une métrique Riemannienne g sur une variété M est une application,*

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^{\infty}(M)$$

$C^{\infty}(M)$ bilinéaire,symétrique,non dégénéré et définie positif .

Remarque 2.2.1. *Soit g une métrique Riemannienne sur M pour tout $V, W \in \Gamma(TM)$ on à :*

- *$g(V, W) = g(W, V)$. (symétrique)*
- *$g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$ (non dégénéré)*
- *$g(V, V) \geq 0$ (définie positif)*

2 $g \in \Gamma(TM^*) \otimes \Gamma(TM^*)$ si (U, ϕ) une carte sur M alors

$$g = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

ou g_{ij} sont des fonction différentiable sur U appelé composantes de tenseur métrique relativement a la carte (U, ϕ).
localement, si $V = V^i \partial_i$ et $W = W^j \partial_j$ on à

$$g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$$

3 pour tout $x \in M$ on à

$$g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire,symétrique non dégénéré et définie positif ou T_xM désigne l'espace tangent en x.

Définition 2.2.2. *Une variété riemannienne est un couple (M, g) ou M est une variété différentiable et g une métrique Riemannienne sur le fibré tangent (TM, π, M).*

Exemple 2.2.1. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard*

$$g_0(v,w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

ou $v = (v_1, ...v_n)_x$ et $w = (w_1, ...w_n)_x \in T_x\mathbb{R}^{\ltimes}$ et $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$.

Exemple 2.2.2. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard*

$$g_0(v,w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

ou $v = (v_1, ...v_n)_x$ et $w = (w_1, ...w_n)_x \in T_x\mathbb{R}^{\ltimes}$ et $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$.
sur $M = \mathbb{R}^3$ on pose $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = dx^2 + dy^2 + dz^2$
la matrice associé à g est

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g est bilinéaire car soit $V_1, V_2, W_1, W_2 \in \Gamma(TM)$ et $f, h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} g(fV_1 + hV_2, W) &= dx^2(fV_1 + hV_2, W) + dy^2(fV_1 + hV_2, W) + dz^2(fV_1 + hV_2, W) \\ &= dx(fV_1 + hV_2)dx(W) + dy(fV_1 + hV_2)dy(W) + dz(fV_1 + hV_2)dz(W) \\ &= fdx(V_1)dx(W) + hdx(V_2)dx(W) + fdx(V_1)dy(W) + hdy(V_2)dy(W) \\ &+ fdz(V_1)dz(W) + hdz(V_2)dz(W) \\ &= fg(V_1, W) + hg(V_2, W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(V, fW_1 + hW_2) &= dx^2(V, fW_1 + hW_2) + dy^2(V, fW_1 + hW_2) + dz^2(V, fW_1 + hW_2) \\ &= fg(V, W_1) + hg(V, W_2) \end{aligned}$$

det $(g_{ij}) = 1 \neq 0$ non dégénéré
$g_{12} = g_{21}, g_{13} = g_{31}, g_{23} = g_{32}$ alors g est symétrique
det $g_{ij} = 1 > 0$ définie positif
donc g une métrique Riemannienne.

2.3 Connexion Linéaire

Définition 2.3.1. *Une connexion linéaire sur une variété M est une application*

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X, V) &\mapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

vérifiant :

1 $\nabla_X(V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2 $\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V$
3 $\nabla_{X+fY} = \nabla_X V + f\nabla_Y V$

pour tout $X, Y, V, W \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^{\infty}(M)$.

Définition 2.3.2. *Soient* ∇ *une connexion sur une variété* M *de dimension* n *et* $(\partial_1, ...\partial_n)$ *resp*$(dx^1, ...dx^n)$ *une base local de section de* $\Gamma(TM)$*resp*$\Gamma(T^*M)$ *on définie les coefficient de Christoffel par :*

$$\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i}\partial_j).$$

Définition 2.3.3. *Une section* $V \in \Gamma(TM)$ *est dite parallèle par rapport à la connexion* ∇ *si :*

$$\nabla_X V = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

2.4 Tenseur de Torsion

Définition 2.4.1. *Soient M une variété différentiable et ∇ la connexion linéaire sur M le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectorielle $C^\infty(M)$-bilinéaire définie par*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ (x,y) & \longmapsto & T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \end{array}$$

pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$ la connexion ∇ est dite sans torsion si $T\equiv 0$.

Remarque 2.4.1. *on à les propriété suivants :*

1. *T une champ de tenseur de type (1,2).*
2. *$T(X,Y)=-T(Y,X)$ pour tout*
3. *la connexion ∇ est sans torsion ssi pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$ on à*

$$[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$$

4. *pour tout $x\in M$ le tenseur de torsion T induit une application bilinéaire vectoriel $T_x : T_xM\times T_xM \ \rightarrow T_xM(v,w) \ \mapsto T_xM(v,w)=(\nabla_X Y)_x-(\nabla_Y X)_x-[X,Y]_x$ ou $X,Y\in\Gamma(TM)$,telle que $X_x=v$,$Y_x=w$ indépendamment du choix X,Y.*

Théorème 2.4.1. *[8] Soit ∇ une connexion linéaire sur M si $p\in M$ tel que $T_p\cong 0$ alors il existe une carte $(u,x^1,...x^n)$ telle que pour tout $i,j,k=1,...n$, on à*

$$\Gamma_{ij}^k(p)=0$$

.

2.5 Connexion Levi-Cevita

Théorème 2.5.1. *Soit (M,g) une variété Riemannienne,l'application*

$$\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$$

définie par la formule de kozul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z)+Yg(X,Z)+Zg(X,Y) \\ &\quad +g(Z,[X,Y])+g(Y,[Z,X])-g(X,[Y,Z]) \end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur M,appelé connexion de Levi-Cevita.

Preuve :
pour tout $X,Y,Z\in\Gamma(TM) etf\in C^{\infty\prime}M)$ on à

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{fX}Y,Z) &= fXg(Y,Z)+Yg(Z,fX)-Zg(fX,Y)+g(Z,[fX,Y])\\&+g(Y,[Z,fX])-g(fX,[Y,Z])\\&= fXg(Y,Z)+Y(f)g(Z,X)+fY(g(Z,X))-Z(f)g(X,Y)\\&-fZ(g(X,Y))-Y(f)g(Z,X)+fg(Z,[X,Y])\\&+Z(f)g(Y,X)+fg(Y,[Z,X])-fg(X,[Y,Z])\\&= fXg(Y,Z)+fYg(Z,X)-fZg(X,Y)+fg(Z,[X,Y])\\&+fg(Y,[Z,X])-fg(X,[Y,Z])\\&= 2fg(\nabla_XY,Z)\end{aligned}$$

a et comme g non dégénéré $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$
2.

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{X+W}Y,Z) &= (X+W)g(Y,Z)+yg(Z,X+W)-Zg(X+W,Y)\\&+g(Z,[X+W,Y])+g(Y,[Z,X+W])-g(X+W,[Y,Z])\\&= X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))+g(Z,[X,Y])\\&+g(Y,[Z,X])-g(X,[Y,Z])+Wg(Y,Z)+Y(g(Z,W))\\&-Z(g(W,Y))+g(Z,[W,Y])+g(Y,[Z,W])-g(W,[Y,Z])\\&= 2g(\nabla_XY,Z)+2g(\nabla_WY,Z)\\&= 2g(\nabla_XY+\nabla_WY,Z)\end{aligned}$$

d'ou $\nabla_{X+W}Y = \nabla_XY+\nabla_WY$.
3.

$$\begin{aligned}2g(\nabla_XfY,Z) &= X(g(fY,Z))+fYg(Z,X)-Z(g(X,fY))+g(Z,[X,fY])\\&+g(fY,[Z,X])-g(X,[fY,Z])\\&= X(f)g(Y,Z)+fXg(Z,Y)+fYg(Z,X)-Z(f)g(X,Y)\\&-fZg(X,Y)+X(f)g(Z,Y)+fg(Z,[X,Y])+fg(Y,[Z,X])\\&+Z(f)g(X,Y)-fg(X,[Y,Z])\\&= 2X(f)g(Y,Z)+fXg(Y,Z)+fYg(Z,X)-fZg(X,Y)\\&+fg(Z,[X,Y])+fg(Y,[Z,X])-fg(X,[Y,Z])\\&= 2X(f)g(Y,Z)+2fg(\nabla_XY,Z)\\&= 2g(X(f)y+f\nabla_XY,Z)\end{aligned}$$

d'où $\nabla_XfY = X(f)Y+f\nabla_XY$
De même manière on obtient,$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_Xy+\nabla_XZ$.*Donc* ∇ *une connexion linéaire sur M.*

Théorème 2.5.2. *(théorème fondamental sur la géométrie Riemannienne)*
si (M,g) est une variété Riemannienne,alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g.

Preuve :

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2}\{g(Z,[X,Y]) - g(Z,[Y,X])\} \\ &= g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion.Et ;

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y Z, Y) &= \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Xg(Z,Y)\} \\ &= Xg(Y,Z) \end{aligned}$$

cela prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M comme est non dégénéré cette relation détermine complètement la connexion ∇, Ce qui donne l'unicité.

Propriété 2.5.1. *soient (M^m, g) une variété Riemannienne de dimension m et ∇ la connexion de Levi-Cevita. si (U,ϕ) est une carte sur M avec les champs de bases $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial}{\partial x^k})$ associé alors les coefficient de Christoffel Γ_{ij}^k sont donné par :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{gl}\{\frac{\partial g_j l}{\partial x^i} + \frac{\partial g_i l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_i j}{\partial x^l}\}.$$

$$g_{kl}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\{\frac{\partial g_j l}{\partial x^i} + \frac{\partial g_i l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_i j}{\partial x^l}\}.$$

ou g_{ij} sont les coordonnée de g relativement à la carte (U,ϕ).

Preuve :
comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$,pour tout $i, j = 1, \dots m$,ou $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$pour tout $i = 1, ..m$ on à

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) &= 2\sum_{s=1}^m g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l) \\ &= 2\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_s l \\ &= \partial_i(g(\partial_j,\partial_l)) + \partial_j(g(\partial_l,\partial_i)) + \partial_l(g(\partial_i,\partial_j)) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_s l = \frac{1}{2}\{\partial_i g_j l + \partial_j g_l i - \partial_l g_i j\}$$

d'où

$$\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_s l g^l k = \frac{1}{2} g^l k \{\partial_i g_j l + \partial_j g_l i - \partial_l g_i j\}$$

et

$$\sum_{s,l=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_s l g^l k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^l k \{\partial_i g_j l + \partial_j g_l i - \partial_l g_i j\}$$

et comme $(g^i j)$ *est la matrice inverse de* $(g_i j)$ *on à* $\sum_{l=1}^{m} g_s l g^l k = \delta_k s$ *ou*$\delta_k s$ *le symbol de Kronecker d'ou*

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{gl} \{\frac{\partial g_j l}{\partial x^i} + \frac{\partial g_i l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_i j}{\partial x^l}\}.$$

.

Exemple 2.5.1. *Nous paramétrons la surface du Tore X par*

$$X(u,v) = \begin{cases} x &= (c + a\cos v)\cos u \\ y &= (c + a\cos v)\sin u \\ z &= a \sin v \end{cases}$$

Nous commençons par calculer
1/la métrique induite *: Soit* $g_{eu} = dx^2 + dy^2 + dz^2$ *la métrique Euclidienne sur* $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} dx &= -(c + a\cos v)\sin u du - a\cos u \sin v dv \\ dy &= (c + a\cos v)\cos u du - a \sin u \sin v dv \\ dz &= 0du + a\cos v dv \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx^2 &= (-(c + a\cos v)\sin u)^2 du^2 + (-a\cos u \sin v) dv^2 \\ dy^2 &= ((c + a\cos v)\cos u)^2 du^2 + (-a \sin u \sin v)^2 dv^2 \\ dz^2 &= 0du^2 + (a\cos v)^2 dv^2 \end{cases}$$

Alors, $g_{eu} = (c + a\cos v)^2 du^2 + a^2 dv^2$. *La matrice et son inverse sont données par* $g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c + a\cos v)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$; $g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(c+a\cos v)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$
les dérivées partielles : $g_{ij,u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $g_{ij,v} = \begin{bmatrix} -2a\cos v(c + a\cos v) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2/ les symbole de Christoffel :

$$
\begin{aligned}
\Gamma^u_{uu} &= \frac{1}{2}\left[g^{uu}(g_{uu,u}+g_{uu,u}-g_{uu,u})+g^{uv}(g_{vu,u}+g_{vu,u}-g_{uu,v})\right]\\
\Gamma^u_{uu} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(0+0-0)+0(g_{vu,u}+g_{vu,u}-g_{uu,v})]\\
\Gamma^u_{uu} &= \Gamma^v_{vv}=0\\
\Gamma^u_{uv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uv,u}+g_{uu,v}-g_{uv,u})+g^{uv}(g_{vv,u}+g_{vu,v}-g_{uv,v})]\\
\Gamma^u_{uv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(0+g_{uu,v}-0)+0(g_{vv,u}+g_{vu,v}-g_{uv,v})]\\
\Gamma^u_{uv} &= -\frac{a\sin v}{(c+a\cos v)}\\
\Gamma^u_{vu} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uu,v}+g_{uv,u}-g_{vu,u})+g^{uv}(g_{vu,v}+g_{vv,u}-g_{vu,v})]\\
\Gamma^u_{vu} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uu,v}+0-0)+0(g_{vu,v}+g_{vv,u}-g_{vu,v})]\\
\Gamma^u_{vu} &= \Gamma^u_{uv}=-\frac{a\sin v}{(c+a\cos v)}\\
\Gamma^u_{vv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(g_{uv,v}+g_{uv,v}-g_{vv,u})+g^{uv}(g_{vv,v}+g_{vv,v}-g_{vv,v})]\\
\Gamma^u_{vv} &= \frac{1}{2}[g^{uu}(0+0-0)+0(g_{vv,v}+g_{vv,v}-g_{vv,v})]\\
\Gamma^u_{vv} &= 0\\
\Gamma^v_{uu} &= \frac{1}{2}[0(g_{uu,u}+g_{uu,u}-g_{uu,u})+g^{vv}(0+0-g_{uu,v})]\\
\Gamma^v_{uu} &= \frac{1}{a}\sin v(c+acosv)\\
\Gamma^v_{uv} &= \frac{1}{2}[g^{vu}(g_{uv,u}+g_{uu,v}-g_{uv,u})+g^{vv}(g_{vv,u}+g_{vu,v}-g_{uv,v})]\\
\Gamma^v_{uv} &= \frac{1}{2}[0(g_{uv,u}+g_{uu,v}-g_{uv,u})+g^{vv}(0+0-0)]\\
\Gamma^v_{uv} &= \Gamma^v_{vu}=0
\end{aligned}
$$

2.6 Courbure

2.6.1 Tenseur de Courbure.

Définition 2.6.1. *Soit M une variété muni d'un connexion Linéaire ∇,on définie le tenseur de courbure $R:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$, associé a ∇ par :*

$$R(X,Y)V=\nabla_X\nabla_YV-\nabla_Y\nabla_XV-\nabla_{[X,Y]}V$$

pour tout $X,Y,V\in\Gamma(TM)$.

Propriété 2.6.1. *on à les propriété suivants :*

1) la courbure R est $C^\infty(M)$-3 Linéaire.
2) $R(X,Y)V=-R(Y,X)V$ pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)etV\in\Gamma(TM)$ antisymétrique

Définition 2.6.2. *Sur une variété Riemannienne (M, g) le tenseur de courbure de la connexion Levi-Cevita est appelé tenseur de courbure Riemannienne. le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficient de Christoffel.*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^l \partial_l$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^l) - \partial_j(\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^{n} \{\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m\}.$$

ou $(\partial_i)_{i=1...n}$ est une base local de champs de vecteurs sur M.

Propriété 2.6.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. le tenseur de courbure Riemannienne R a la propriété suivants :*

1. *R est un champ de tenseur de type (1,3).*
2. *$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.*
3. *$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.*
4. *R vérifie l'identité de Bianchi Algébrique.*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

5. *R vérifie l'identité de Bianchi différentiel.*

$$(\nabla_X)R(Y, Z) + (\nabla_Y)R(Z, X) + (\nabla_Z)R(X, Y) = 0$$

$\forall X, Y, Z, W, V \in \Gamma(TM)$.

preuve :

Montrons la premier identité de Bianchi(Algébrique) $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned}
R(X, y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X + \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_[X, Y]Z \\
&+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_[Y, Z]X \\
&+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_[Z, X] \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\
&+ \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_[X, Y]Z - \nabla_[Y, Z]X - \nabla_[Z, X] \\
&= \nabla_X[Y, Z] + \nabla_Y[Z, X] + \nabla_Z[X, Y] \\
&- \nabla_{[X,Y]Z} - \nabla_{[Y,Z]X} - \nabla_[Z, X] \\
&= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0
\end{aligned}$$

Preuve :

Montrons la douzième identité de Bianchi (différentiel)

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z)(W) &= \nabla_X(R(Y,Z)(W)) - R(\nabla_X Y, Z)(W) \\
&\quad - R(Y,\nabla_X Z)(W) - R(Y,Z)(\nabla_X W)...(1) \\
(\nabla_Y R)(Z,X)(W) &= \nabla_Y(R(Z,X)(W)) - R(\nabla_Y Z, X)(W) \\
&\quad - R(Z,\nabla_Y X)(W) - R(Z,X)(\nabla_Y W)...(2) \\
(\nabla_Z R)(X,Y)(W) &= \nabla_Z(R(X,Y)(W)) - R(\nabla_Z X, Y)(W) \\
&\quad - R(X,\nabla_Z Y)(W) - R(X,Y)(\nabla_Z W)...(3) \\
(1)+(2)+(3) &= (\nabla_X R)(Y,Z)(W) + (\nabla_Y R)(Z,X)(W) + (\nabla_Z R)(X,Y)(W) \\
&\quad + R(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z)(W) + R(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y)(W) \\
&\quad + R(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z, X)(W) - R(Y,Z)(\nabla_X W) \\
&\quad - R(Z,X)(\nabla_y W) - R(X,Y)(\nabla_Z W)....(*) \\
(*) &= \nabla_X(\nabla_Y(\nabla_Z W)) - \nabla_X(\nabla_Z(\nabla_Y W)) - \nabla_X(\nabla_[Y,Z]W) \\
&\quad + \nabla_Y(\nabla_z(\nabla_X W)) - \nabla_Y(\nabla_X(\nabla_Z W)) - \nabla_Y(\nabla_[Z,X]W) \\
&\quad + \nabla_Z(\nabla_X(\nabla_Y W)) - \nabla_Z(\nabla_Y(\nabla_X W)) - \nabla_Z(\nabla_[X,Y]W) \\
&\quad + R([Y,X],Z)(W) + R([X,Z],Y)(W) + R([Z,X],Y)(W) \\
&\quad - \nabla_Y(\nabla_Z(\nabla_X W)) + \nabla_Z(\nabla_Y(\nabla_X W)) + \nabla_[Y,Z](\nabla_X W) \\
&\quad - \nabla_Z(\nabla_X(\nabla_Y W)) + \nabla_X(\nabla_Z(\nabla_Y W)) + \nabla_[Z,X](\nabla_Y W) \\
&\quad - \nabla_X(\nabla_Y(\nabla_Z W)) + \nabla_Y(\nabla_X(\nabla_Z W)) + \nabla_[X,Y](\nabla_Z W) \\
&= -\nabla_X(\nabla_[Y,Z]W) - \nabla_Y(\nabla_[Z,X]W) - \nabla_Z(\nabla_[X,Y]W) \\
&\quad + \nabla_[Y,X](\nabla_Z W) - \nabla_Z(\nabla_[Y,X]W) - (\nabla_[[Y,X],Z]W) + \nabla_[X,Z](\nabla_Y W) \\
&\quad - \nabla_Y(\nabla_[X,Z]W) - \nabla_[[X,Z],Y]W + \nabla_[Z,Y](\nabla_X W) \\
&\quad - \nabla_X(\nabla_[Z,Y]W) - (\nabla_[Z,Y],X)W + \nabla_[Y,Z](\nabla_X W) + \nabla_[Z,X](\nabla_Y W) \\
&\quad + \nabla_[X,Y](\nabla_Z W) \\
&= -\nabla_{[[Y,X],Z]}W - \nabla_{[[X,Z],Y]}W - \nabla_{[[Z,Y],X]}W \\
&= -\nabla_{[[Y,X],Z]+[[X,Z],Y]+[[Z,Y],X]}W.
\end{aligned}$$

2.6.2 Courbure Sectionnelle

Définition 2.6.3. *Soient(M,g)une variété Riemannienne de dimension $n > 2$ et p un 2-plan de T_xM de base X, Y on appelle Courbure Sectionnelle en x de p.*

$$K_x(P) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

Remarquons que dans la définition précédent, on peut remplacer X par λX pour $\lambda \deg 0$ et Y par $Y - g(X,Y)X$. On peut donc Supposer que X, Y est une base orthonormale. Dans ce cas.

$$K_x(P) = g(R(X,Y)Y,X)$$

On Vérifier que $K_x(P)$ ne dépend pas de la base orthonormés de P : En effet, si Z, Test une autre base orthonormale, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ avec

$$Z = aX + bY, T = -bX + aY$$

Une simple vérification montre que

2.6.3 Courbure de Ricci

Définition 2.6.4. *La courbure de Ricci d'un Variété Riemannienne* (M^m, g) *de dimension* m *est un tenseur de type* $(0,2)$ *défini par.*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= traceR(*,X)Y \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned}$$

pour tout$X, Y \in \Gamma(TM)$ *ou* (e_i) *est un base orthonormé local sur* M, *et*

$$\begin{aligned} R(*,X)Y; \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ Z &\mapsto R(Z,X)Y \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} Ric : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\mapsto Ric(X,Y) \end{aligned}$$

La Courbure de Ricci,Ric est un forme bilinéaire symétrique,en effet

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,Y)X,e_i) \\ &= Ric(Y,X) \end{aligned}$$

Relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1\ldots m}$, *les composantes du tenseur de Ricci Sont donnée par;*

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= Ric(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= traceR(*, \frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= g^{kl} g(R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}) \\ &= g^{kl} R^s_{kij} g_{ls} \\ &= \delta_{ks} R^s_{kij} \\ &= R^k_{kij} \end{aligned}$$

Définition 2.6.5. *Le tenseur de Ricci d'un variété Riemannienne* (M^m, g), *est un tenseur de type* $(1,1)$ *défini par*

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X,e_i)e_i$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ *et* $(e_i)_{i=1\ldots m}$*est une base orthonormé local sur* M.

Remarque 2.6.1. *Soit* (M^m, g)*une variété Riemannienne, de dimension* m *pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *on a*

$$Ric(X,Y) = g(Ricci(X),Y)$$

.

2.7 Opérateur sur une Variété Riemannienne

2.7.1 Opérateur gradient

Définition 2.7.1. *Soit(M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par*

$$grad; C^\infty(M) \to \Gamma(TM)$$
$$f \mapsto gradf = \sharp df$$

ou la df est différentielle de f.

Propriété 2.7.1. *(expression du gradient en coordonné locales)*
Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension m, (U, ϕ) une carte sur M avec les champs de base associé $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial}{\partial x^m}$ alors pour tout $f \in C^{infty}(M)$

$$(gradf)|_U = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

. ***Preuve :***
On applique directement la définition de l'application $\sharp$ et la définition de différentielle de fonction $f \in C^\infty(M)$ relativement a la carte (U, ϕ) sur M on a

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ \sharp df &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

ou $dx^1, ..dx^m$ la base duale.

Propriété 2.7.2. *soit (M, g) une variété Riemannienne. pour tout champ des vecteur $X \in \Gamma(TM)$ et tout fonction $f \in C^\infty(M)$, on a*

$$df(X) = X(f) = g(gradf, X)$$

Propriété 2.7.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. pour touth$f \in C^\infty(M)$ on a :*
1). $grad(f + h) = gradf + gradh$
2). $grad(fh) = hgradf + fgradh$
3). $(gradf)(h) = (gradh)(f)$

Preuve :
Soit $hf \in C^\infty(M)$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a : 1).

$$\begin{aligned} g(grad(f + h), X) &= X(f + h) \\ &= X(f) + X(h) \\ &= g(gradf, X) + g(gradh, X) \\ &= g(gradf + gradh, X) \end{aligned}$$

2).

$$\begin{aligned} g(grad(fh), X) &= X(fh) \\ &= hX(f) + fX(h) \\ &= hg(gradf, X) + fg(gradh, X) \\ &= g(hgradf + fgradh, X) \end{aligned}$$

3).

$$\begin{aligned} (gradf)(h) &= g(gradf, gradh) \\ &= g(gradh, gradf) \\ &= (gradh)(f) \end{aligned}$$

2.7.2 Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteur sur une variété Riemannienne (M, g) on a

$$\begin{aligned} \nabla X : \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ Z &\mapsto \nabla_Z X \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(M)$Linéaire (∇_X est une tenseur de type (1,1))
si $x \in M$ alors

$$\begin{aligned} (\nabla X)_x : T_x M &\to T_x M \\ v &\mapsto (\nabla_v X)_x \end{aligned}$$

est une application linière d'espace vectoriel.

Définition 2.7.2. *Soient (M, g) une variété riemannienne. La divergence d'un champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$, notée $divX$ est un fonction sur M définie par :*

$$divX = tr_g(\nabla X)$$

pour tout $x \in M$, on a

$$(divX)(x) = tr_g((\nabla X)_x)$$

en coordonnée local, on a :

$$\begin{aligned} divX &= dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \end{aligned}$$

2.7.3 Hessienne d'une fonction

Définition 2.7.3. *Soient (M, g) une variété riemannienne et $f \in C^\infty(M)$ La Hessienne de la fonction f noté $Hess(f)$, est une application $C^\infty(M)$-bilinéaire Symétrique définie par :*

$$\begin{aligned} Hess(f) : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to C^\infty(M) \\ (X, Y) &\mapsto g(\nabla_X grad(f), Y) \end{aligned}$$

Preuve :
L'application Hessienne est application bilinéaire Symétrique on a :

$$\begin{aligned} Hess(f) &= g(\nabla_X grad(f), Y) \\ &= X(g(grad(f), Y)) - g(grad(f), \nabla_X Y) \\ &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= [X, Y] + Y(X(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) \\ &= Yg(grad(f), X) - g(grad(f), \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y grad(f), X) \\ &= Hess(f)(Y, X) \end{aligned}$$

2.7.4 Opérateur Laplacien

Définition 2.7.4. *Soient (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien notée Δ sur M par :*

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ f &\mapsto \Delta(f) = div(gradf) = trace_g(Hess(f)) \end{aligned}$$

appelé aussi opérateur de Laplace-Beltrami.

Propriété 2.7.4. *on à les propriété suivants :*

— $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$
— $\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(gradf, gradh)$

Preuve :
d'aprés le définition

$$\begin{aligned} \Delta(f + h) &= div(grad(f + h)) \\ &= div(gradf + gradh) \\ &= div(gradf) + div(gradh) \\ &= \Delta(f) + \Delta(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(fh) &= div(grad(fh)) \\ &= div(fgradh + hgradf) \\ &= div(fgradh) + div(hgradf) \\ &= fdiv(gradh) + (gradh)(f) + hdiv(gradf) + (gradf)(h) \\ &= f\Delta(h) + h\Delta(f) + 2g(gradf, gradh) \end{aligned}$$

Expression du Laplacien En Coordonnée locales

$$\Delta(f) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

Exemple 2.7.1. *soit $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard g_0, $(g_{ij} = \sigma_{ij}$, alors pour tous fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^m$ et $X = (X^1, ...X^m)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ on à :*

—

$$\begin{aligned} gradf &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x^1}...\frac{\partial f}{\partial x^m}) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} divf &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + ...\frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ...\frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{aligned}$$

2.7.5 Formule de Bochner

Définition 2.7.5. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^\infty(M)$, alors f vérifié la formule suivants :*

$$\frac{1}{2}\Delta|grad(f)|^2 = |Hess(f)|^2 + g(grad(f), grad()) + Ric(grad(f), grad(f)) \tag{2.1}$$

ou $|Hess(f)|^2 = \sum_i g(\nabla_{e_i}grad(f), \nabla_{e_i}grad(f))$ relativement une base local orthonormale$(e_1, ...e_m)$.

Preuve :

soient $x \in M$ et $(e_1, ...e_m)$ une base local orthonormale de champs de vecteurs telque $(\nabla_{e_i}e_j)_x = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. En développant le calcul en x on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|grad(f)|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i e_i(e_i g(grad(f), grad(f))) \\ &= \sum_i e_i(g(\nabla_{e_i}grad(f), grad(f))) \\ &= \sum_i e_i(Hess(f)(e_i, grad(f))) \\ &= \sum_i e_i(Hess(f)(grad(f), e_i)) \\ &= \sum_i e_i(g(\nabla_{grad(f)}grad(f), e_i)) \\ &= \sum_i \big(g(\nabla_{e_i}\nabla_{grad(f)}grad(f), e_i) + g(\nabla_{grad(f)}grad(f), \nabla_{e_i}e_i)\big) \\ &= \sum_i g(\nabla_{e_i}\nabla_{grad(f)}grad(f), e_i) \\ &= \sum_i \big\{g(R(e_i, grad(f))grad(f), e_i)) + g(\nabla_{grad(f)}\nabla_{e_i}grad(f), e_i) \end{aligned}$$

$+g(\nabla_{[e_i,grad(f)]}grad(f), e_i).....(1)$

$$\sum_i g(R(e_i, grad(f))grad(f), e_i)) = Ric(grad(f), grad(f))....(2)$$

$$\begin{aligned}
\sum_i g(\nabla_{grad(f)}\nabla_{e_i}grad(f), e_i) &= \sum_i grad(f)(g(\nabla_{e_i}grad(f), e_i)) \\
&- \sum_i g(\nabla_{e_i}grad(f), \nabla_{grad(f)}e_i) \\
&= \sum_i grad(f)g(\nabla_{e_i}grad(f), e_i) \\
&- \sum_i g(\nabla_{e_i}grad(f), e_i(f)\nabla_{e_i}e_i) \\
&= \sum_i grad(f)g(\nabla_{e_i}grad(f), e_i) - 0 \\
&= grad(f)trace_g Hess(f) \\
&= grad(f)(\Delta(f)) \\
&= g(grad(f), grad\Delta(f)).......(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{[e_i,grad(f)]}grad(f), e_i) &= \sum_i Hess(f)([e_i, grad(f)], e_i) \\
&= \sum_i Hess(f)(\nabla_{e_i}grad(f) - \nabla_{grad(f)}e_i, e_i) \\
&= \sum_i Hess(f)(\nabla_{e_i}grad(f), e_i) - \sum_i Hess(f)(\nabla_{grad(f)}e_i, e_i) \\
&= \sum_i Hess(f)(\nabla_{e_i}grad(f), e_i) - 0 \\
&= \sum_i Hess(f)(e_i, \nabla_{e_i}grad(f)) \\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i}grad(f), \nabla_{e_i}grad(f))......(4)
\end{aligned}$$

Enfin, en substituons les formule (1) et (2),(3),(4) dans la formule de Bochner

Chapitre 3

variété Riemannienne produit tordus

3.1 Variété Produit

Définition 3.1.1. *Soient M et N deux variétés de classe C^∞. Le produit $M \times N$ munie de l'atlas W défini par*

$$W = \{(U \times V, \varphi \times \phi)/(U, \varphi) \in atl(M), (V, \phi) \in atl(N)\}$$

est dit variété produit.

Propriétés 3.1.1. *On à les propriété suivants :*

1. *Les deux projections $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ sont des submersions*[1].
2. *Pour tout $(x, y) \in M \times N$ le sous-espace $M \times \{y\}$ et $\{x\} \times N$ sont deux sous-variétés de de la variété produit $M \times N$.*
3. *Pour tout $(x, y) \in M \times N$ on a :*

$$T_{(x,y)}M \times N \cong T_xM \times T_yN$$

4. *Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M et N respectivement, le couple (X, Y) défini par*

$$\begin{array}{rcl} (X,Y) : M \times N & \longrightarrow & TM \times TN \\ (x,y) & \longmapsto & (X_x, Y_y) \end{array}$$

est un champ de vecteurs sur la variété produit $M \times N$

Remarque 3.1.1. *Les applications*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M \times N) \\ X & \longmapsto & \widetilde{X} = (X, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}(N) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M \times N) \\ Y & \longmapsto & \widehat{Y} = (0, Y) \end{array}$$

définissent des relèvements de champ de vecteurs à $\mathcal{H}(M \times N)$ tel que :

$$d_{(x,y)}\pi(\widetilde{X}) = X \circ \pi \quad et \quad d_{(x,y)}\eta(\widetilde{X}) = 0$$
$$d_{(x,y)}\eta(\widehat{Y}) = Y \circ \eta \quad et \quad d_{(x,y)}\pi(\widehat{Y}) = 0$$

1. soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ U est une ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 On dit que f est une submersion en a si df_a est surjective

Propriétés 3.1.2. *[6] Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ deux champs de vecteurs sur M et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$ deux champs de vecteurs sur M. Si $f \in C^\infty(M)$ et $g \in C^\infty(N)$ alors :*

1) $\widetilde{X_1}(f \circ \pi) = (X_1(f)) \circ \pi \quad$ *et* $\quad \widetilde{X_1}(g \circ \eta) = 0$

2) $\widehat{Y_1}(g \circ \eta) = (Y_1(g)) \circ \eta \quad$ *et* $\quad \widehat{Y_1}(f \circ \pi) = 0$

$$3)\ \begin{cases} [\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}] & = ([X_1, X_2], 0) \\ [\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}] & = (0, [Y_1, Y_2]) \\ [\widetilde{X_1}, \widehat{Y_1}] & = 0 \end{cases}$$

4) $[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$

5) $\widetilde{fX_1} = (f \circ \pi)\widetilde{X_1}$ *et* $\widehat{gY_1} = (g \circ \eta)\widehat{Y_1}$

Remarque 3.1.2. *Soient $(U, \varphi) \in atl(M)$ une carte de la variété M et $(V, \phi) \in atl(N)$ une carte de la variété N. Si $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \left(resp \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right)$ désigne la base locale de champ de vecteurs relativement à la carte (U, φ) (resp (V, ϕ)) , alors*

$$\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_1}} \cdots \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_m}} \cdots \widehat{\frac{\partial}{\partial y_1}} \cdots \widehat{\frac{\partial}{\partial y_n}}\right)$$

est la base locale de champ de vecteurs sur $M \times N$ relativement à la carte $(U \times V, \varphi \times \phi) \in atl(M \times N)$

Propriété 3.1.1. *Soient M et N deux variétés. Si S_1 et S_2 sont deux tenseurs sur la variété produit $M \times N$ de type $(0, r)$ ou $(1, r)$, alors $S_1 = S_2$, si et seulement si, pour tout champs de vecteurs $X_1, .., X_r \times \mathcal{H}(M)$ et $Y_1, .., Y_r \times \mathcal{H}(N)$, on a*

$$S_1(\widetilde{X}_1 \ldots \widetilde{X}_r) = S_2(\widetilde{X}_1 \ldots \widetilde{X}_r)$$

et

$$S_1(\widehat{Y}_1 \ldots \widehat{Y}_r) = S_2(\widehat{Y}_1 \ldots \widehat{Y}_r)$$

3.1.1 Connexion linéaire produit

Propriété 3.1.2. *[1] Soient M et N deux variétés. Si ∇^M et ∇^N sont deux connexions linéaires sur M et N respectivement, alors il existe une unique connexion linéaire ∇ sur $M \times N$ telle que pour tous $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, on a*

$$\begin{aligned} \nabla_{(X_1, Y_1)}(X_2, Y_2) &= (\nabla^M_{X_1} X_2, 0) + (0, \nabla^N_{Y_1} Y_2) \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} &= (\nabla^M_{X_1} X_2, 0) \\ \nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} &= (0, \nabla^N_{Y_1} Y_2) \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{Y_2} &= \nabla_{\widehat{Y_1}} \widetilde{X_2} = 0 \end{aligned}$$

∇ est appelé connexion linéaire produit.

3.1.2 Tenseur de Torsion produit

Propriété 3.1.3. *Soient ∇^M une connexion linéaire sur M et ∇^N une connexion linéaire sur N . Si T_M et T_N désignent les tenseurs de torsions sur M et N respectivement, alors le tenseur de torsion produit sur $M \times N$ est donné par*

$$T = (T_M, 0) + (0, T_N) = (T_M, T_N)$$

Preuve :
De la Proposition [1] on a :

$$\begin{aligned} T(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) &= \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} - \nabla_{\widetilde{X_2}} \widetilde{X_1} - [\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}] \\ &= \left(\nabla^M_{X_1} X_2, 0\right) - \left(\nabla^M_{X_2} X_1, 0\right) - ([X_1, X_2], 0) \\ &= \left(\nabla^M_{X_1} X_2 - \nabla^M_{X_2} X_1 - [X_1, X_2], 0\right) \\ &= (T_M(X_1, X_2), 0) \\ &= (T_M, T_N)(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) \end{aligned}$$

pour tout $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$, et

$$\begin{aligned} T(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) &= \nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} - \nabla_{\widehat{Y_2}} \widehat{Y_1} - [\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}] \\ &= (0, T_N(Y_1, Y_2)) \\ &= (T_M, T_N)(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) \end{aligned}$$

pour tout $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$

3.1.3 Tenseur de courbure produit

Propriété 3.1.4. *[3] Soient M une variété munie d'une connexion linéaire ∇^M et N une variété munie d'une connexion linéaire ∇^N. Si R_M et R_N désignent les tenseurs de courbures sur M et N respectivement, alors le tenseur de courbure produit sur la variété produit $M \times N$ est donné par*

$$R = (R_M, R_N)$$

Remarque 3.1.3. *On à*

1. *La variété produit $M \times N$ est sans torsion si et seulement si les variétés M et N sont sans torsion.*
2. *La variété produit $M \times N$ est localement plate si et seulement si les variétés M et N sont localement plates.*

3.1.4 Métrique produit (diagonal)

Définition 3.1.2. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement. On définie la métrique Riemannienne produit sur $M \times N$ par*

$$G = \pi^* g + \eta^* h$$

$\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent la première et la deuxième projection canonique.

Propriété 3.1.5. *pour tout $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$ on a :*

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= g(X_1,Y_1) + h(X_2,Y_2) \\ G(\widetilde{X_1},\widetilde{X_2}) &= g(X_1,X_2) \\ G(\widehat{Y_1},\widehat{Y_2}) &= h(Y_1,Y_2) \\ G(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}) &= 0 \end{aligned}$$

où $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

Propriété 3.1.6. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Si ∇^M (resp ∇^N) désigne la connexion de Levi-Civita sur M (resp N), alors la connexion de levi-civita sur la variété $M \times N$ associée à la métrique produit $G = \pi^* g + \eta^* h$ conicide avec la connexion linéaire produit définie par :*

$$\begin{cases} \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Y_1} = (\nabla_{X_1} Y_1, 0) \\ \nabla_{\widehat{X_2}} \widehat{Y_2} = (0, \nabla_{X_2} Y_2) \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{X_2} = \nabla_{\widehat{X_2}} \widetilde{X_1} = 0 \end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$.

Preuve : *Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TN)$ on pose $X = (X_1, X_2) et Y = (Y_1, Y_2) et Z = (Z_1, Z_2)$des champ des vecteurs sur $M \times_{f^2} N$ de la formule Koszule on ob-*

tient :

$$
\begin{aligned}
\bullet G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}) &= \frac{1}{2}\Big\{\widetilde{X_1}\left(G(\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1})\right)+\widetilde{Y_1}\left(G(\widetilde{X_1},\widetilde{Z_1})\right)-\widetilde{Z_1}\left(G(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\right)\\
&\quad +G\left(\widetilde{Z_1},[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]\right)+G\left(\widetilde{Y_1},[\widetilde{Z_1},\widetilde{X_1}]\right)-G\left(\widetilde{X_1},[\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}]\right)\Big\}\\
&= \frac{1}{2}\Big\{X_1\left(g(Y_1,Z_1)\right)+Y_1\left(g(X_1,Z_1)\right)-Z_1\left(g(X_1,Y_1)\right)\\
&\quad +g\left(Z_1,[X_1,Y_1]\right)+g\left(Y_1,[Z_1,X_1]\right)-g\left(X_1,[Y_1,Z_1]\right)\Big\}\\
&= g\left(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1\right)\\
&= G\left((\nabla^M_{X_1}Y_1,0),\widetilde{Z_1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1},\widehat{Z_2}) &= 0\\
\bullet G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2},\widetilde{Z_1}) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2},Z_2) &= \frac{1}{2}\Big\{\widehat{X_2}\left(G(\widehat{Y_2},\widehat{Z_2})\right)+\widehat{Y_2}\left(G(\widehat{X_2},\widehat{Z_2})\right)-\widehat{Z_2}\left(G(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})\right)\\
&\quad +G\left(\widehat{Z_2},[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]\right)+G\left(\widehat{Y_2},[\widehat{Z_2},\widehat{X_2}]\right)-G\left(\widehat{X_2},[\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}]\right)\Big\}\\
&= \frac{1}{2}\Big\{X_2\left(h(Y_2,Z_2)\right)+Y_2\left(h(X_2,Z_2)\right)-Z_2\left(h(X_2,Y_2)\right)\\
&\quad +h\left(Z_2,[X_2,Y_2]\right)+h\left(Y_1,[Z_1,X_1]\right)-h\left(X_1,[Y_1,Z_1]\right)\Big\}\\
&= g\left(\nabla^N_{X_2}Y_2,Z_2\right)\\
&= G\left((0,\nabla^N_{X_2}Y_2),\widehat{Z_2}\right)\\
\bullet G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widehat{Y_2},\widetilde{Z_1}) &= G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}) = G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}) = G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widetilde{Y_1},\widehat{Z_2}) = 0
\end{aligned}
$$

Des Proposition 3.5 et 3.6, on déduit.

Propriété 3.1.7. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes. alors le tenseur et la courbure de Ricci ainsi que la courbure scalaire sur la variété Riemannienne produit $(M\times N, G=\pi^*g+\eta^*h)$ sont donnés par :*

$$
\begin{aligned}
Ricci(X) &= (Ricci_M(X_1), Ricci_N(X_2))\\
Ric(X,Y) &= Ric_M(X_1,Y_1)+Ric_N(X_2,Y_2)\\
S &= S_M+S_N
\end{aligned}
$$

Pour tout $X=(X_1,X_2)$ et $Y=(Y_1,Y_2)$.

3.1.5 Opérateur Laplacien produit

Définition 3.1.3. *On à*

1. *Si $l_1\in C^\infty(M)$, alors $l_1\circ\pi\in C^\infty(M\times N)$*

2. *Si* $l_2 \in C^\infty(N)$, *alors* $l_2 \circ \eta \in C^\infty(M \times N)$
3. *Si* $\alpha \in C^\infty(M \times N)$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_y : M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha(x,y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \alpha_x : N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \alpha(x,y) \end{array}$$

sont des applications de classe C^∞.

Propriétés 3.1.3. *Soient* (M,g) *et* (N,h) *des variétés Riemanniennes, alors*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(l_1 \circ \pi) & = & \Delta_M(l_1) \circ \pi \\ \Delta(l_2 \circ \eta) & = & \Delta_N(l_2) \circ \eta \\ \Delta\alpha(x,y) & = & (\Delta_M \alpha_y)(x) + (\Delta_N \alpha_x)(y) \end{array}$$

Preuve :

Si $(e_1, .., e_m)$ *(resp* $(e_{m+1}, ..., e_{m+n})$ *) une base orthonormale locale de champ de vecteurs sur la variété Riemannienne* (M,g) *(resp* (N,h)*), alors* $(\widetilde{e_1}, ..., \widetilde{e_m}, \widehat{e_{m+1}}, ..., \widehat{e_{m+n}})$ *une base orthonormale locale de la variété Riemannienne produit* $(M \times N, G)$ *, et on a*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\alpha) & = & trace(\nabla d\alpha) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\nabla_{\widetilde{e_i}} d\alpha)(\widetilde{e_i}) + \sum_{i=m+1}^{m+n} (\nabla_{\widehat{e_i}} d\alpha)(\widehat{e_i}) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\widetilde{e_i}(\widetilde{e_i}(\alpha))) - \sum_{i=1}^{m} (d\alpha(\nabla_{\widetilde{e_i}} \widetilde{e_i})) + \sum_{i=m+1}^{m+n} (\widehat{e_i}(\widehat{e_i}(\alpha))) - \sum_{i=m+1}^{m+n} (d\alpha(\nabla_{\widehat{e_i}} \widehat{e_i})) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (e_i(e_i(\alpha_y))) - (d\alpha_y(\nabla^M_{e_i} e_i)) + \sum_{i=m+1}^{m+n} (e_i(e_i(\alpha_x))) - (d\alpha_x(\nabla^N_{e_i} e_i)) \\ & = & \Delta_M(\alpha_y)\Delta_N(\alpha_x) \end{array}$$

3.2 Produit Tordu de Variété Riemannienne

Définition 3.2.1. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes de dimension m et n respectivement et $f \in C^{\infty}(M)$ une fonction strictement positive. La variété produit tordu $M \times_{f^2} N$ est définie comme étant la variété $M \times N$ munie de la métrique G_{f^2} telle que*

$$G_{f^2} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \eta^* h$$

où $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent les projections canoniques. si $X, Y \in \mathcal{H}(M \times N)$

$$G_{f^2} = g\left(d\pi(X), d\pi(Y)\right) + (f \circ \pi)^2 h\left(d\eta(X), d\eta(Y)\right)$$

Remarque 3.2.1. *Relativement à des cartes locales $(U, x^i) \in atl(M)$ et $(V, y^i) \in atl(N)$,la matrice associée à G_{f^2} est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2 h_{lk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse

$$A = \begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2} h^{lk} \end{pmatrix}$$

La connexion de levi-civita de $M \times_{f^2} N$ peut être maintenant rapprochée à celle de M et de N comme suit.

3.2.1 Connexion de Levi-Civita de la Variété Produit Tordu

Propriété 3.2.1. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes. Si ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associé à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ asoociée à la variété produit tordu $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ est donnée par*

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y \; &= \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2} X_1(f^2)(0, Y_2) + \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2)(0, X_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} h(X_2, Y_2)(grad(f^2), 0) \end{aligned}$$

por tout $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

Preuve :
Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2, Z_3 \in \mathcal{H}(N)$, on pose $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$

et $Z = (Z_1, Z_2)$ des champs de vecteurs sur $M \times_{f^2} N$. De la formule de Koszule on obtient

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= X\left(G_{f^2}(Y,Z)\right) + Y\left(G_{f^2}(X,Z)\right) - Z\left(G_{f^2}(X,Y)\right)\\
&\quad + G_{f^2}\left(Z,[X,Y]\right) + G_{f^2}\left(Y,[Z,X]\right) - G_{f^2}\left(X,[Y,Z]\right)\\
&= X\left(g(Y_1,Z_1)\circ\pi + f^2\circ\pi.h(Y_2,Z_2)\circ\eta\right)\\
&\quad + Y\left(g(X_1,Z_1)\circ\pi + f^2\circ\pi.h(X_2,Z_2)\circ\eta\right)\\
&\quad - Z\left(g(X_1,Y_1)\circ\pi + f^2\circ\pi.h(X_2,Y_2)\circ\eta\right)\\
&\quad + g\left(Z_1,[Y_1,X_1]\right)\circ\pi + f^2\circ\pi.h\left(Z_2,[X_2,Y_2]\right)\circ\eta\\
&\quad + g\left(Y_1,[Z_1,X_1]\right)\circ\pi + f^2\circ\pi.h\left(Y_2,[Z_2,X_2]\right)\circ\eta\\
&\quad - g\left(X_1,[Y_1,Z_1]\right)\circ\pi - f^2\circ\pi.h\left(X_2,[Y_2,Z_2]\right)\circ\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2g(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1)\circ\pi + 2f^2\circ\pi.h(\nabla^N_{X_2}Y_2,Z_2)\circ\eta\\
&\quad + X_1(f^2)\circ\pi.h(Y_2,Z_2)\circ\eta + Y_1(f^2)\circ\pi.h(X_2,Z_2)\circ\eta\\
&\quad - Z(f^2)\circ\pi.h(X_2,Z_2)\circ\eta\\
&= 2G_{f^2}\Big((\nabla^M_{X_1}Y_1,\nabla^N_{X_2}Y_2),Z\Big) + h\Big(X_1(f^2)\circ\pi.Y_2\\
&\quad + Y_1(f^2)\circ\pi.X_2, Z_2\Big)\circ\eta - g\Big(h(X_2,Z_2)\circ\eta.grad(f^2),Z_1\Big)\circ\pi\\
&= 2G_{f^2}\Big((\nabla^M_{X_1}Y_1,\nabla^N_{X_2}Y_2),Z\Big) + G_{f^2}\left(\frac{X_1(f^2)}{f^2}\circ\pi.Y_2 + \frac{Y_1(f^2)}{f^2}\circ\pi.X_2, Z\right)\\
&\quad - G_{f^2}\Big(h(X_2,Z_2)\circ\eta.grad(f^2),Z\Big)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= \Big(2G_{f^2}\Big((\nabla^M_{X_1}Y_1,\nabla^N_{X_2}Y_2) + \frac{X_1(f^2)}{f^2}\circ\pi.Y_2 + \frac{Y_1(f^2)}{f^2}\circ\pi.X_2\\
&\quad -\frac{1}{2}h(X_2,Z_2)\circ\eta\cdot grad(f^2),Z\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.1. *Le Tore T^2 est la variété produit $S^1 \times S^1$ avec $g_u = \dfrac{4}{(1+u^2)^2}du^2$ une métrique Riemannienne sur la sphère unité S^1 alors,*

$$\tilde{g} = g_u + f^2 g_v$$

est une métrique Riemannienne tordu sur le Tore T^2 ou f une fonction de classe C^∞ sur S^1 strict positive.

Exemple 3.2.2. *Le Tore T^3 aussi la variété produit $S^1 \times S^1 \times S^1$ et le métrique Riemannienne*

$$\tilde{g_1} = g_u + f^2(g_v + g_w)$$

et

$$\tilde{g_2} = (g_u + g_v) + f_2^2 g_w$$

ou f_1 fonction de classe C^∞ sur S^1 et f_2 fonction de classe C^∞ sur $S^1 \times S^1$ stict positive.

3.2.2 Tenseur de Courbure du Produit Tordu

Propriété 3.2.2. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes. Si R et $\widetilde{R}$ désignent les tenseurs de courbures de la variété Riemannienne produit $(M\times N,G)$ et de la variété Riemannienne produit $(M\times_{f^2} N, G_{f^2})$ respectivement, alors :*

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)-R(X,Y) &= \frac{1}{2}\Big\{(\nabla^M_{Y_1}grad(f^2)-\frac{1}{f^2}Y_2(f^2)gradf^2,0)\wedge_{G_{f^2}}(0,X_2)\\ &-\nabla^M_{X_1}grad(f^2)-\frac{1}{2f^2}Y_2(f^2)gradf^2,0)\wedge_{G_{f^2}}(0,Y_2)\\ &-\frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,X_2)\wedge_{G_{f^2}}(0,Y_2)\Big\}\end{aligned}$$

où

$$(X\wedge_{G_{f^2}}Y)Z=G_{f^2}(Z,Y)X-G_{f^2}(Z,X)Y$$

pour tout $X_1,Y_1\in\mathcal{H}(M)$, $X_2,Y_2\in\mathcal{H}(N)$, $X=(X_1,X_2)$ et $Y=(Y_1,Y_2)$.

Preuve :
Soient $X_1,Y_1,Z_1\in\mathcal{H}(M)$ et $X_2,Y_2,Z_2\in\mathcal{H}(N)$, on pose $X=(X_1,X_2)$, $Y=(Y_1,Y_2)$ et $Z=(Z_1,Z_2)$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= \widetilde{R}\left((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\right)Z\\ &= \widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})Z+\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})Z+\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1})Z+\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})Z\end{aligned}$$

Développant chaque terme de la dernière équation

1) $\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})Z=\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\widetilde{Z_1}+\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\widetilde{Z_2}$

$$\begin{aligned}a)\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widetilde{Z_1}\\ &= \nabla^M_{X_1}\nabla^M_{Y_1}Z_1-\nabla^M_{Y_1}\nabla^M_{X_1}Z_1-\nabla^M_{[X_1,Y_1]}Z_1\\ &= (R_M(X_1,Y_1)Z_1,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b)\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2}\\ &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2}-\frac{[X_1,Y_1](f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2}\\ &= \Big[X_1\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}+\frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2}-Y_1\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\\ &\quad-\frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2}-\frac{[X_1,Y_1](f^2)}{2f^2}\Big]\widehat{Z_2}\\ &= 0\end{aligned}$$

de a) et b) on déduit que :

$$\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})Z=(R_M(X_1,Y_1)Z_1,0) \tag{3.3}$$

2) $\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})Z=\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})\widetilde{Z_1}+\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})\widehat{Z_2}$

$$
\begin{aligned}
a)\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}]}\widetilde{Z_1}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Y_2}-\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla^M_{X_1}Z_1}\\
&= X_1\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Y_2}+\frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2}\widehat{Y_2}-\frac{1}{2f^2}\nabla^M_{X_1}Z_1(f^2)\widehat{Y_2}\\
&= \frac{1}{2f^2}\left[X_1(Z_1(f^2))-\nabla^M_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1}(f^2)-\frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{2f^2}\right]\widehat{Y_2}\\
&= \frac{1}{2}\left[g(\nabla^M_{X_1}gradf^2,Z_1)-\frac{X_1(f^2)}{2f^2}g(gradf^2,Z_1)\right]\widehat{Y_2}\\
&= g\left(\frac{1}{2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right],Z_1\right)\widehat{Y_2}\\
&= G_{f^2}\left(\left(\frac{1}{2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right],0\right),(Z_1,0)\right)(0,Y_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}(0,\nabla^N_{Y_2}Z_2)-\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)-\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2}\\
&= \frac{X_1(f^2)}{f^2}\nabla^N_{Y_2}Z_2-\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{X_1}gradf^2\\
&\quad -\frac{X_1(f^2)}{f^2}\left[\nabla^N_{Y_2}Z_2-\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}gradf^2\right]\\
&= -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{X_1}gradf^2+\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}gradf^2\\
&= -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right]\\
&= -G_{f^2}\left((0,Y_2),(0,Z_2)\right)\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right],0\right)
\end{aligned}
$$

de a) et b) on déduit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})Z &= G_{f^2}\left(\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right],0\right),(Z_1,0)\right)(0,Y_2)\\
&\quad -G_{f^2}\Big((0,Y_2),(0,Z_2)\Big)\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right],0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})Z=-\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\right)\wedge_{G_{f^2}}(0,Y_2) \qquad (3.4)
$$

3) $\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})Z = \widetilde{R}(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})\widehat{Z_2}$

$$\begin{aligned}
a)\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widetilde{Z_1} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\widehat{Y_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\widehat{X_2} \\
&\quad -\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)[X_2,Y_2] \\
&= \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left[(0,\nabla^N_{X_2}Y_2) - \frac{h(Y_2,X_2)}{2}(gradf^2,0)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left[(0,\nabla^N_{Y_2}X_2) - \frac{h(Y_2,X_2)}{2}(gradf^2,0)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)(0,[X_2,Y_2]) \\
&= \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left(0,(\nabla^N_{X_2}Y_2 - \nabla^N_{Y_2}X_2 - [X_2,Y_2])\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} \\
&= (0,R(X_2,Y_2)Z_2) - \frac{|gradf^2|^2}{4f^2}\Big[G_{f^2}\left((0,Y_2),(0,Z_2)\right)(0,X_2) \\
&\quad -G_{f^2}\left((0,Z_2),(0,X_2)\right)(0,Y_2)\Big] \\
&= \Big(0,R(X_2,Y_2)Z_2\Big) - \frac{1}{4f^2}|gradf^2|^2(0,X_2)\wedge_{G_{f^2}}(0,Y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\left((0,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)\right) \\
&= (0,\nabla^N_{X_2}\nabla^N_{Y_2}Z_2) - \frac{h(X_2,\nabla^N_{Y_2}Z_2)}{2}(gradf^2,0) \\
&\quad -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}(gradf^2,0) - \frac{X_2(h(Y_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}((0,\nabla^N_{X_2}Z_2) - \frac{h(X_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)) \\
&= (0,\nabla^N_{Y_2}\nabla^N_{X_2}Z_2) - \frac{h(Y_2,\nabla^N_{X_2}Z_2)}{2}(gradf^2,0) \\
&\quad -\frac{h(X_2,Z_2)}{2}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}(gradf^2,0) - \frac{Y_2(h(X_2,Z_2))}{2}(gradf^2,0)
\end{aligned}$$

$$-\widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} \quad = -(0,\nabla^N_{[X_2,Y_2]}Z_2) + \frac{h([X_2,Y_2],Z_2)}{2}(gradf^2,0)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}(gradf^2,0) &= \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2}(0,X_2) = \frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,X_2)\\
\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}(gradf^2,0) &= \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2}(0,Y_2) = \frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,Y_2)
\end{aligned}$$

$$-h(X_2,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - X_2(h(Y_2,Z_2)) + Y_2(h(X_2,Z_2)) + h(Y_2,\nabla^N_{X_2}Z_2) + h([X_2,Y_2],Z_2) = 0$$

D'où

$$\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})Z = (0,R(X_2,Y_2)Z_2) - \frac{1}{4f^2}|gradf^2|^2(0,X_2)\wedge_{G_{f^2}}(0,Y_2) \tag{3.5}$$

4) $\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1})Z = \widetilde{R}(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1})\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1})\widehat{Z_2}$

a)
$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1})\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}]}\widetilde{Z_1}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}(\nabla^M_{Y_1}Z_1,0) - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2}\\
&= \frac{\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2} - Y_1\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2} - \frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2}\\
&= \left[\frac{\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2)}{2f^2} + \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^2} - \frac{Y_1(Z_1(f^2))}{2f^2} - \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{4f^2}\right]\widehat{X_2}\\
&= \frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2) - Y_1(Z_1(f^2)) + \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^2}\right]\widehat{X_2}\\
&= \frac{1}{2f^2}\left[-g(\nabla^M_{Y_1}gradf^2,Z_1) + \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}g(gradf^2,Z_1)\right]\widehat{X_2}\\
&= -G_{f^2}\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{Y_1}gradf^2 + \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right],Z_1\right)(0,X_2)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1})\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\left((0,\nabla^N_{X_2}Z_2) - \frac{h(X_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)\right)\\
&= \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\left[\nabla^N_{X_2}Z_2 - \frac{h(X_2,Z_2)}{2}gradf^2\right] - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\nabla^N_{X_2}Z_2\\
&\quad + \frac{h(X_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{Y_1}gradf^2\\
&= \frac{h(X_2,Z_2)}{2}\left[\nabla^M_{Y_1}gradf^2 - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right]\\
&= G_{f^2}((0,X_2),(0,Z_2))\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{Y_1}gradf^2 - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right],0\right)
\end{aligned}$$

De a) et b) on déduit

$$\widetilde{R}(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1})Z = \frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{Y_1}gradf^2 - \frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\right)\wedge_{G_{f^2}}(0,X_2) \tag{3.6}$$

On obtient la résultat suivant :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)-R(X,Y) &= \frac{1}{2f^2}\Big\{\left(\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\right)\wedge_{G_{f^2}}(0,X_2)\\ &-\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\right)\wedge_{G_{f^2}}(0,Y_2)\\ &-\frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,X_2)\wedge_{G_{f^2}}(0,Y_2)\Big\}\end{aligned}$$

3.2.3 Opérateur Laplacien dans le Produit Tordu

Propriétés 3.2.1. *Soient (M,g) , (N,h) deux variétés riemanniennes. Δ_M , Δ_N désignent les opérateurs laplaciens sur M et N respectivement. Si*

$$\begin{aligned}\alpha : M\times_{f^2}N &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto \alpha(x,y)\end{aligned}$$

est une application de classe C^∞ , alors

$$\widetilde{\Delta}_{(\alpha)}=(\Delta_M(\alpha_y),0)+\left(0,\frac{1}{2f^2}\Delta_N(\alpha_x)\right)+n\,(d\alpha_y(grad\,lnf),0)$$

où $\widetilde{\Delta}$ désigne l'operateur laplacien sur la variété produit tordu $M\times_{f^2}N$.

Pour simplifier, on écrit

$$\widetilde{\Delta}_{(\alpha)}=\Delta_M(\alpha)+\frac{1}{2f^2}\Delta_N(\alpha)+n.d_M\alpha(grad\,lnf)$$

Preuve :

Soit $\{e_1,...,e_m\}$ (resp $\{b_{m+1},....,b_{n+m}\}$) une base locale orthonormale sur M (resp N). On pose

$$\begin{cases}\widetilde{e_i}=(e_1,0) & i=1,....,m\\ \dfrac{1}{f}\widetilde{b}_{i-m}=(0,\dfrac{1}{f}\widetilde{b}_{i-m}) & i=m+1,....,n+m\end{cases}$$

Alors $\{h_1,...,h_{m+n}\}$ est une base locale orthonormale sur la variété produit tordue $M\times_{f^2}N$. On a

$$\widetilde{\Delta}(\alpha)=\Sigma_{i=1}^{n+m}h_i(h_i(\alpha))-(\nabla_{h_i}h_i)(\alpha)$$

Remarquons que $\widetilde{b}_i(f)=0$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{m}\Big\{(\widetilde{e_i}(\widetilde{e_i}(\alpha)))-(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i})(\alpha)\Big\}+\sum_{i=m+1}^{n+m}\left\{\frac{1}{f^2}\widetilde{b_i}(\widetilde{b_i}(\alpha))-\frac{1}{f^2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{b_i}}\widetilde{b_i}(\alpha)\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\{(e_i(e_i(\alpha_y)),0)-((\nabla^M_{e_i}e_i)(\alpha_y),0)\}+\frac{1}{f^2}\sum_{i=m+1}^{n+m}\{(0,b_i(b_i(\alpha_x)))-(0,(\nabla^N_{b_i}b_i)(\alpha_x))\}\\ &\quad+\frac{1}{2f^2}\sum_{i=m+1}^{n+m}h(b_i,b_i)((gradf^2)(\alpha_y),0)\\ &= (\Delta_M(\alpha_y),0)+\frac{1}{f^2}(0,\Delta_N(\alpha_x))+\frac{n}{2f^2}((gradf^2)(\alpha_y),0)\\ &= (\Delta_M(\alpha_y),0)+\frac{1}{f^2}(0,\Delta_N(\alpha_x))+\frac{n}{2f^2}(d\alpha_y(gradf^2),0)\\ &= (\Delta_M(\alpha_y),0)+\frac{1}{f^2}(0,\Delta_N(\alpha_x))+n(d\alpha_y(grad\,lnf),0)\end{aligned}$$

De la Proposition 3.12, on déduit.

Corollaire 3.2.1. — *α harmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} \bullet \quad \alpha_x, \alpha_y \Big(\text{ sont harmoniques } \Big) \\ \bullet \quad d\alpha_y(grad\, ln f) = 0 \end{cases}$$

— *Si f est constante, alors α harmonique si et seulement si α_x et α_y sont harmoniques. i.e*

$$(\widetilde{\Delta}(\alpha) = 0) \Longleftrightarrow (\Delta_M(\alpha) = 0 \quad et \quad \Delta_N(\alpha) = 0)$$

pour tout $x \in M$ et $y \in N$.

Conclusion

La Géométrie Riemannienne est une grand branche et essentiel pour les physicien par example relativité général et théorème d'Albert Einstein et appliqué sur trous noirs et voyage à travers le temps c'est la théorie de la physicien surtout mécanique quantique donc Le développement de la physique et de la science est lié par développement de math.

Bibliographie

[1] Arthur Besse Géométrie riemannienne en dimension 4 Publier :CEDIC Année 1981.

[2] Claude Jean perrin Utilisation du calcul tensoriel dans les géométries riemanniennes - Cours et exercices corrigés Publier :Ellipses Marketing Année 2000

[3] E. Aubry, Introduction à la géométrie riemannienne (2008)

[4] J. Frédéric Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique. Note de cours. Édition 2011-2012.

[5] Jacques Lafontaine Introduction aux Variétés Différentielles.

[6] L. Godinho, J.Natério, An Introduction to Riemann Geometry with Applications,Lisbon 2004

[7] Marcel Berger, Paul Gauduchon Le Spectre d'une Variété Riemannienne Publier :Springer Année 1971

[8] Mustapha Djaa Introduction a la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés 2017