République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2020/2021

Sur les équations intégrales fonctionnelles

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

.

par

Rebia Cheikh [1]

Sous la direction de

Pr S. Abbas

Soutenue le 14/07/2021 devant le jury composé de

G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : cheikhrebi@gmail.com

Remerciement

Je remercie **Allah**, le tout puissant, pour m'avoir donné la force et la patience.
J'exprime d'abord mes profonds remerciements et ma vive connaissance à mon encadreur, le professeur **S. Abbas** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour son aide, sa patience, sa grande disponibilité et ses conseils.
Je remercie tous les membres de jury pour l ?intérêt qu ?ils ont porté à mon travail, en acceptant de l ?examiner et de l ?enrichir par leurs remarques.
Je voudrais également remercier toute ma famille, et mes collègues.

Table des matières

Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle important dans de nombreuses recherches théoriques et appliquées, en raison de la possibilité d'exprimer l'équation intégrales comme un opérateur intégrale continu ou discontinu et modélisant ainsi certains problèmes en recherche qui accepte l'opérateur intégra-tif comme modèle pour la description mathématique du problème appliqué, et à partir de là nous voyons que les équations intégrales jouent un rôle fondamental pour la modélisation mathématique. la mémoire longue peut également être exprimée par l'équation intégrales de Volterra.De plus, la fonction du motif discontinu, qui peut appartenir aux espaces de Sobolev en général, et nous voyons d'autres applications dans la construction architecturale et d'autres domaines appliques, car il existe de nombreuses applications qui utilisent le calcul de transformations dans la domaine de l'électronique, de la mécanique analytique et d'autres domaines Physique.

Ce travail, est décomposé de quatre chapitres.
Dans le premier chapitre nous avons présenté des connaissances de base sur les espaces fonctionnelles ($L_p, p = 1, 2; C^l, l \in N$). Ainsi nous présentons quelques théorèmes du point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, et Schauder) dans des espaces de Banach.

Le *deuxième* chapitre est consacré à la classification des équations intégrales linéaires et non-linéaires. Nous déterminons également la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles. Ainsi nous exposons la théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser et de connaitre l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le *troisième* chapitre, on présente diverses méthodes de résolution analytique des équations intégrales .
Dans le *quatrième* chapitre nous présentons quelques méthodes de résolution de certaines équations intégrales singulières, comme l'équation intégrale d'Abel, avec l'équation intégrale à noyau de Cauchy et Singularité logarithmique.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et Définitions

Définition 1.1.1 [1] Une fonction positive f est dite sommable sur l'intervalle $[a, b]$ si $\int_a^b f(x)dx$ est finie.
Une fonction f de signe arbitraire est sommable sur (a, b) si et seulement si l'intégrale $\int_a^b \mid f(x) \mid dx$ est finie .

Définition 1.1.2 (Espace $L^2([a, b])$) : On dit qu'une fonction f est carré intégrable sur [a,b] si l'intégrale $\int_a^b f^2(x)dx$ existe (est finie).
L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur [a,b] sera noté L^2 tout court .

1.1.1 L'espace $C^{(l)}([a, b])$

Définition 1.1.4 Les éléments de l'espace $C^{(l)}([a, b])$ sont toutes les fonctions continues sur [a,b] et possédant sur cet intervalle des dérivées continues jusqu'à l'ordre l

Définition 1.1.5 une fonction F de la variable (x, t) est dite carré sommable si

$$\int_a^b \int_a^b F^2(x,t)dxdt < +\infty$$

avec $(a \leqslant x, t \leqslant b)$.

1.2 Quelques théorèmes de point fixe

Théorème de point fixe de Banach

Définition 1.1.6 Soient $(E, \|.\|)$ une espace de Banach et $G : E \longrightarrow E$ une application de E dans E.
On dit que G est une application contractante s'il existe une constante $0 \leqslant k < 1$ telle que

$$\|G(u) - G(v)\| \leqslant k\|u - v\|$$

pour tout u,$v \in E$.

Théorème 1.1.1 Soit G une application contractante sur E. Alors l'équation

$$G(u) = u$$

admet une solution unique dans E. Une telle solution est un point fixe de l'application G.

Théorème du point fixe de Schauder

Définition Soient E un espace de Banach. Un application G est dit compact si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n)_n$ bornée dans E la suite $(G\varphi_n)_n$ admet une sous suite convergente.

Théorème 1.1.2(Théorème du point fixe de Schauder) Soit E un espace de Banach, K un convexe et compact de E et $G : K \longrightarrow K$ une application continue, alors G admet au moins un point fixe dans K.

Chapitre 2

Équations intégrales de Fredholm et de Volterra

Dans ce chapitre, nous traiterons les équations intégrales linéaire et non linéaire de Volterra et de Fredholm des premier et second types et aussi nous considérons l'existence et l'unicité de la solution.

Définition Une équation laquelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégral est dite **équation intégrale**.
Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des différents problèmes de la mécanique et de la physique mathématique ou par remaniement d'une importante classe de problèmes formulés auparavant par des opérateurs différentiels.

2.1 Équations intégrales de Volterra

2.1.1 Équation intégrale linéaire de Volterra

Définition 2.1.1 [2] Une équations, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.1}$$

ou $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est une paramètre numérique, est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce. La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation de Volterra.
Si $f(x) = 0$,l'équation (2.1) s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2}$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce .
Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.3}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

Exemple 2.1.1 L'équation intégrale $\varphi(x) = x^2 - \int_0^x (t+x)\varphi(t)dt$. Est une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce, $f(x) = x^2$, et $\lambda = -1$, et le noyau $K(x,t) = t + x$.

Relation entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Lemme 2.1.1 [2] Pour tout fonction $\varphi(x)$,

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \varphi(t)dtdx_1 = \int_a^x (x-t)\varphi(t)dt$$

.

Démonstration. posons

$$G(x) = \int_a^x (x-t)\varphi(t)dt, \tag{2.4}$$

ou $G(0) = 0$. La différenciation des deux membres de (2.4) donne
$G'(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$.
En intégrant les deux membres de la dernière équation de a à x, nous obtenons
$G(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \varphi(t)dtdx_1$ □

Théorème 2.1.1

$$\int_a^x \int_a^{x_1} ... \int_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)dx_n dx_{n-1}...dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt,$$

cette formule sera utilisée pour convertir les équations différentielle en équations intégrales de Volterra.

Corollaire 2.1.1

$$\int_a^x \int_a^x ... \int_a^x (x-t)\varphi(t)dtdt...dt = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\varphi(t)dt.$$

C'est une formule essentielle et utile qui a beaucoup d'applications dans les problèmes d'équations intégrales.

Définition 2.1.2 une équation différentielle linéaire

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_n(x)y(x) = g(x) \tag{2.5}$$

Ou $y(x)$ fonction inconnu, est une équation différentielle ordinaire d'ordre n linéaire.
Nous supposons que les fonctions $a_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont analytiques à l'origine et la fonction $g(x)$ est continue sur l'intervalle de discussion. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue sur l'intervalle de discussion.
Nous fixons : les conditions initiales $y(0) = c_0$, $y^i(0) = c_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x) \tag{2.6}$$

L'intégration des deux membres de (2.6) par rapport à x donne

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= y^{(n-1)}(0) + \int_0^x \varphi(t)dt \\ &= c_{n-1} + \int_0^x \varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De nouveau intégrons les deux membres de (2.7) de 0 à x, nous obtenons

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x) &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x \int_0^x \varphi(t)dtdt \\ &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \end{aligned} \tag{2.8}$$

procédons comme avant, nous trouvons

$$y^{(n-3)}(x) = c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt. \tag{2.9}$$

En continuant le processus d'intégration, nous obtenons

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i!}x^i + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt. \tag{2.10}$$

La substitution de (2.6)-(2.10) dans (2.5) donne

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{j} \frac{c_{n-i}}{(j-i)!}x^{j-i}) - \int_0^x \sum_{i=0}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\varphi(t)dt \\ &= f(x) - \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{2.11}$$

C'est une équation intégrale linéaire de Volterra du seconde espèce non homogène.

Exemple 2.1.2 Soit l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' + xy' + y = 0$$

et aux conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
Posons $y'' = \varphi(x)$.
Alors l'équation différentielle : $y'' + xy' + y = \varphi(x) + 1 + \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt$.

Inversement On résout certaines équations de Volterra de première et de seconde espèce en les ramenant à des équations différentielles

Exemple 2.1.3 Soit l'équation intégrale : $\varphi(x) = x(1 + \int_0^x t\varphi(t)dt)$
posons $y(x) = 1 + \int_0^x t\varphi(t)dt$.
Dérivons la dernière égalité : $y'(x) = x\varphi(x)$.
Donc $\varphi(x) = xy(x)$,nous obtenons une équation différentielle par rapport à $y(x)$:
$y'(x) = x^2y(x)$.
Sa solutions générale s'écrit $y'(x) = Ce^{\frac{x^3}{3}}$. $\varphi(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}$.

2.1.2 Équation intégrale non linéaire de Volterra

Définition 2.1.3 [2] On appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt$$

ou φ est une fonction inconnue et K et f sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.
Une équation de la forme

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = f(x)$$

est appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce.

2.2 Équations intégrales de Fredholm

2.2.1 Équation intégrale linéaire de Fredholm

Définition 2.2.1 [3] On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.12}$$

ou $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle $[a,b]$ et λ un facteur numérique. On suppose que le noyau $K(x,t)$ est défini dans le carré $\Omega = \{a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant t \leqslant b\}$ du plan (x,t) et continu dans Ω, ou bien présente des discontinuités *telles que* l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b \mid K(x,t) \mid^2 dxdt$$

soit finie.
Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.12) est dit non homogène d'où l'équation de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.13}$$

est dit homogène

Définition 2.2.2 [1] On appelle une équation de la forme

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.14}$$

une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce .
Les bornes a et b dans les équations (2.12), (2.13) et (2.14) peuvent être fines ou infinies.

Remarque 2.2.1 L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm : il suffit de prendre le noyau K qui vérifie la condition

$$K(x,t) = 0, pour x < t$$

.

Définition 2.2.3 On appelle solution des équations intégrales (2.12), (2.13) et (2.14) tout fonction $\varphi(x)$ *telle qu'aprs* sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in [a, b]$.

Conversion du problème des valeurs limites en équation intégrale de Fredholm

On considère le problème suivant

$$y''(x) + g(x)y(x) = h(x), 0 < x < 1, \tag{2.15}$$

$$et$$

$$y(0) = \alpha, y(1) = \beta$$

nous posons

$$y''(x) = \varphi(x). \tag{2.16}$$

Intégrons les deux membres de (2.16) de 0 à x, nous obtenons

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x \varphi(t)dt, \tag{2.17}$$

ce qui donne

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x \varphi(t)dt, \tag{2.18}$$

la condition $y'(0)$ sera déterminée plus tard en utilisant la condition limite en $x = 1$. Intégrons les deux membres de (2.18) de 0 à x, cela donne

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x \int_0^s \varphi(t)dtds, \tag{2.19}$$

ou

$$y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \tag{2.20}$$

Pour déterminer $y'(0)$, nous substituons $x = 1$ dans les membres de (2.20) et en utilisant la condition au bord $y(1) = \beta$, nous trouvons

$$y(1) = \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt, \tag{2.21}$$

ce qui donne

$$y'(0) = \beta - \alpha - \int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt. \tag{2.22}$$

la substitutions de (2.22) dans (2.20) donne

$$y(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x - \int_0^1 x(1-t)\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \tag{2.23}$$

La substitutions de (2.16) et (2.23) dans (2.15) conduit à

$$h(x) = \varphi(x) + \alpha g(x) + (\beta - \alpha)xg(x) + g(x)\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt - xg(x)\int_0^1 (1-t)dt$$

$$\varphi(x) = h(x) - \alpha g(x) - (\beta - \alpha)xg(x) - g(x)\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$$
$$+xg(x)[\int_0^x (1-t)\varphi(t)dt + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt].$$

d'où

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt$$

2.2.2 Équation intégrale non linéaire de Fredholm

Définition 2.2.4 [1] L'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt$$

est dite équation intégrale non linéaire de Fredholm de second espèce.
Équation intégrale

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = 0$$

est dite equation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce.

2.3 Existence et unicité des solutions des équations intégrales

Dans cette section, on a étudie l'existence et l'unicité des équations intégrales linéaires et non linéaires dans les espaces de Banach par le théorie du point fixe.

2.3.1 Existence et unicité des solutions des équations intégrales linéaire

Proposition 2.3.1 Le noyau itéré de l'équation intégrale est donné par

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_n(z,t)dz$$

Théorème 2.3.1 Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.24}$$

on suppose que $K(x,t)$ une fonction continue sur le carré $\Omega = \{0 \leqslant x, t \leqslant 1\}$. Alors , l'équation (2.24) admet une solution unique .

Preuve . On considère

$$S\varphi = f + \lambda T\varphi,$$

ou

$$T\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

. Maintenant nous allons prouver que S^n est contractant, il s'agit de prouver l'existence d'un point fixe pour S.

Soit

$$S^n\varphi = \lambda^n T^n\varphi + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k T^k f$$

avec

$$T^n\varphi(x) = \int_0^x K_n(x,t)\varphi(t)dt$$

Donc,

$$\|S^n\varphi_1 - S^n\varphi_2\| = |\lambda|^n \| \int_0^x K_n(x,t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))dt\|$$

Pour déterminer $K_n(x,t)$, on pose

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

et calculer

$$K_n(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz, n = 2.3.4...$$

Comme $K(x,t)$ est continue sur $\Omega = \{0 \leqslant x, t \leqslant 1\}$, Alors $\exists M \in R$ *tel que* $|K(x,t)| < M$

Donc

$$|K_n(x,t)| \leqslant \frac{M^n(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Pour $n+1$, o na

$$\begin{aligned} |K_{n+1}(x,t)| &\leqslant \int_t^x |K(x,z)||K_n(z,t)|dt \\ &\leqslant \frac{M^{n+1}}{(n-1)!} \int_t^x (z-t)^{n-1} dz \\ &\leqslant \frac{M^{n+1}(x-t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Donc, $\|S^n\varphi_1 - S^n\varphi_2\| \leqslant \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \| \int_0^x (\varphi_1(t) - \varphi_2(t))dt\| \leqslant \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|$. Donc S^n est contractant, alors l'équation (2.24) admet une solution unique.

Théorème 2.3.2 Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivant

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.25}$$

Si le noyau $K(x,t)$ est définie sur le carré $\Omega = \{a \leqslant x, t \leqslant b\}$, avec $|\lambda| < \frac{1}{B}$ *telle que*

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt}$$

. Alors l'équation de (2.25) admet une solution unique $\varphi(x) \in L^2([a,b])$.

Preuve On pose l'opérateur

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

Et maintenant nous prouvons que $T\varphi \in L^2[a,b]$ car $\varphi(x) \in L^2[a,b]$
$\int_a^b (T\varphi)^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt)dx + \lambda^2 \int_a^b (\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt)^2 dx.$
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt)dx &= \int_a^b \int_a^b K(x,t)\varphi(t)f(x)dxdt \\ &\leqslant (\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\| \|f\| \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donc $T\varphi \in L^2([a,b])$.
Et maintenant nous prouvons que T est contractant, soient $\varphi(x), \phi(x) \in L^2([a,b])$,

$$\begin{aligned} \|T\varphi - T\phi\| &= (\int_a^b |T\varphi - T\phi|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| [\int_a^b (\int_a^b K(x,t)[\varphi(t) - \phi(t)]dt)^2 dx]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant |\lambda| (\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |\varphi(t) - \phi(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant |\lambda| B \|\varphi - \phi\|. \end{aligned}$$

Alors T est contractant. Donc l'équation (2.25) admet unique solution $\varphi(x)$.

Théorème 2.3.3 Soit K et f deux fonctions continues .Alors si λ est suffisamment petit ; l'équation l'intégrale linéaire de Fredholm admet une unique solution qui sera de plus continue sur $[a,b]$.

Preuve .

$$\begin{aligned} \|T(\varphi) - T(\phi)\|_\infty &\leqslant \|T(\varphi)(x) - T(\phi)(x)\| \\ &\leqslant |\lambda| \|K\|_\infty |b-a| \|\varphi - \phi\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc admet un unique point fixe (point fixe est une solution de l'équation intégrale de Fredholm).

2.3.2 Existence et unicité des solutions des équations intégrales non linéaires

Théorème 2.3.4 Soit $K(x,t,\varphi)$ une fonction continue sur le carré $\Omega = \{0 \leqslant x,t \leqslant S\}$. Et on pose la condition suivant

$$\|K(x,t,\varphi_1) - K(x,t,\varphi_2)\| \leqslant M\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Alors, l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt, \tag{2.27}$$

admet une solution unique continue pour tout $f \in C([0,S])$.

Preuve . Soit l'espace $C([0,S])$ muni de la norme, $\|\varphi\| = max|\varphi(x)|$ pour tout $x \in [0,S]$.
On pose l'opérateur T, *telle que*

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt$$

et maintenant nous prouvons que T^m est contractant. Soient φ_1, φ_2 deux éléments de $C([0,S])$
pour tout $1 \leq n$

$$\|T^n\varphi_1(x) - T^n\varphi_2(x)\| \leq \frac{M^nS^n}{n!}\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned}
|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| &= \left|\int_0^x \{K(x,t,\varphi_1(t)) - K(x,t,\varphi_2(t))\}dt\right| \\
&\leqslant M\int_0^x |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt \\
&\leqslant M\|\varphi_1 - \varphi_2\|x \\
&\leqslant M\|\varphi_1 - \varphi_2\|S.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leqslant MS\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Pour $n = m + 1$

$$\begin{aligned}
|T^{m+1}\varphi_1(x) - T^{m+1}\varphi_2(x)| &= |T(T^m)\varphi_1(x) - T(T^m)\varphi_2(x)| \\
&= |\int_0^x \{K(x,t,T^m\varphi_1(t)) - K(x,t,T^m\varphi_2(t))\}dt| \\
&\leqslant \int_0^x M|T^m\varphi_1(t) - T^m\varphi_2(t)|dt \\
&\leqslant \int_0^x M\frac{M^m S^m}{m!}\|\varphi_1 - \varphi_2\|dt \\
&\leqslant \frac{M^{m+1}S^{m+1}}{(m+1)!}\|\varphi_1 - \varphi_2\|
\end{aligned}$$

Comme la suit $\frac{M^n S^n}{n!}$ tend vers 0. Alors T^m est contractant.

Théorème 2.3.5 Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt, \tag{2.28}$$

ou $f \in L^2[a,b]$ et $K(x,t,\varphi)$ vérifie

1. $\| \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt\| \leqslant M\|\varphi(t)\|.$

2. $|K(x,t,\varphi_1) - K(x,t,\varphi_2)| \leqslant L(x,t)|\varphi_1 - \varphi_2|.$

ou

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |L(x,t)^2|dxdt} < \infty.$$

Si $|\lambda| < \frac{1}{B}$. alors l'équation (2.28) admet une solution unique.

Preuve . On pose l'opérateur

$$S\varphi = f + \lambda T\varphi,$$

ou

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt.$$

$$\begin{aligned}
\|S\varphi_1 - S\varphi_2\| &= |\lambda|\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \\
&= |\lambda|\|\int_a^b K(x,t,\varphi_1(t))dt - \int_a^b K(x,t,\varphi_2(t))dt\| \\
&\leqslant |\lambda|\{\int_a^b (\int_a^b |K(x,t,\varphi_1(t)) - K(x,t,\varphi_2(t))|dt)^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant |\lambda|\{\int_a^b (\int_a^b L(x,t)|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt)^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant |\lambda|B\|\varphi_1 - \varphi_2\|.
\end{aligned}$$

S est contractant. Alors l'équation(2.28) admet une solution unique.

Exemple 2.3.1 On considère le problème avec condition initial suivant :

$$\varphi''(x) + \lambda M(x,\varphi(x)) = f(x)$$

avec

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

On pose

$$\|M(x,\varphi(x))\| \leqslant N\|\varphi(x)\|$$

$$|M(x,\varphi(x_1)) - M(x,\varphi(x_2))| \leqslant L(x)|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

avec

$$B^2 = \int_0^1 |L(t)|^2 dt < \infty.$$

Ce problème peut être transformé à l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)M(t,\varphi(t))dt - \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$$

. Comme $|K(x,t)| \leqslant \frac{1}{4}$ et $M(x,\varphi(x))$ satisfait. Donc $|\lambda|B < 4$.
Alors le problème admet unique solution.

Théorème 2. 3. 6 Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivant :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt \tag{2.29}$$

Telle que $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifie les conditions suivantes :

1. $K(x,t,0) = 0$ pour tout : $x,t \in [a,b]$

2. $\frac{dK(x,t,z)}{dz} < \left|\frac{1-\|f\|}{b-a}\right|$

alors pour tout $f \in C([a,b])$ telles que $\|f\| < 1$ l'équation (2.29) admet une solution $\varphi \in C([a,b])$.

preuve On va montrer que $T(B(0,1)) \subset B(0,1)$ *i.e* pour si $\|\varphi\| \leq 1$, alors $\|T\varphi\| \leq 1$.
En effet :

$$\begin{aligned}
\|T\varphi\| &= \|f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt\| \\
&\leq |f(x)| + \|\int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt\| \\
&\leq |f(x)| + \int_0^x \mid K(x,t,\varphi(t)) \mid dt \\
&\leq |f(x)| + \int_0^x \mid K(x,t,\varphi(t)) - K(x,t,0) \mid dt \\
&\leq |f(x)| + \int_0^x \left|(\varphi - 0)\frac{dK(x,t,\varphi(t))}{d\varphi}\right| dt \\
&\leq |f(x)| + \|\varphi\|\frac{1 - \|f\|}{b-a}(b-a) \leqslant 1
\end{aligned}$$

D'après le Théorème Schauder T admet un point fixe. d'où l'équation admet une solution.

Chapitre 3

Méthodes élémentaires

3.1 Résolution à l'aide des noyaux itérés

On considère une équation intégrale linéaire de seconde espèce.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{3.1}$$

ou' les fonctions f et K sont carrés intégrables. Cherchons la solution de cette équation sous la forme de la série entière suivante :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(x) \tag{3.2}$$

Portons cette série dans l'équation $(3,1)$,il vient

$$\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \varphi_n(t)dt$$

.

En procédant par identifications nous obtenons

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

,

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)f(t_1)dt_1dt = \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt = \int_a^b K_n(x,t)f(t)dt \tag{3.3}$$

Ou

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K_1(t_1,t)dt_1$$

$$\vdots$$

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K_{n-1}(t_1,t)dt_1 \tag{3.4}$$

Compte tenu de (3.3) et (3.4) l'égalité (3.2)) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n\geqslant 1}\lambda^n \int_a^b K_n(x,t)f(t)dt$$

.

Définition 3.1.1 Les fonctions

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz$$

avec $(n \geqslant 1)$ s'appellent les *noyaux itérés* du noyau $K(x,t)$ avec $K_1(x,t) = K(x,t)$.

Proposition 3.1.1 Une fonction $R(x,t;\lambda)$ définie par la série

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n\geqslant 1} K_n(x,t)\lambda^{n-1} \tag{3.5}$$

est la *résolvante* de l'équation intégrale (3.1) .
La solution de l'équation (3.1) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt$$

.

Lemme 3.1.1 La résolvant $R(x,t;\lambda)$ vérifie l'équation suivant

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,z)R(z,t;\lambda)dz$$

.

3.1.1 Pour l'équation intégrale de Volterra

On considère une l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.6}$$

ou $K(x,t)$ est une fonction continu pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$, et $f(x)$ est continu lorsque $0 \leqslant x \leqslant a$.

Proposition 3.1.2 La solution de l'équation intégrale $(3,6)$ en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t;\lambda) f(t) dt \tag{3.7}$$

Exemple Soit l'équation intégrale de Volterra à noyau $K(x,t) = 1$.
On pose $K_1(x,t) = K(x,t) = 1$.Conformément aux formules $K_n(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_{n-1}(z,t) dz$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_1(z,t) dz = x - t$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x (z-t) dz = \frac{(x-t)^2}{2!},$$

....

$$K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

Alors,

$$R(x,t;\lambda) = e^{\lambda(x-t)}$$

.

Le noyau est un polynôme de degré $(n-1)$

Supposons que le noyau $K(x,t)$ est un polynôme de degré $(n-1)$ en t et qu'il peut donc s'écrire

$$K(x,t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1},$$

les coefficients $a_k(x)$ étant continus dans $[0,a]$. En définissant une fonction $g(x,t;\lambda)$ comme solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^n} - \lambda\{a_0(x)\frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} + a_1(x)\frac{\partial^{n-2} g}{\partial x^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)g\} = 0$$

qui vérifie les conditions

$$g|_{x=t} = \frac{\partial g}{\partial x}|_{x=t} = \ldots = \frac{\partial^{n-2} g}{\partial x^{n-2}}|_{x=t} = 0, \frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}}|_{x=t} = 1 \tag{3.8}$$

la résolvante sera définie par :

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^n g(x,t;\lambda)}{\partial x^n}$$

.

Si

$$K(x,t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1},$$

la résolvante définie par

$$R(x,t;\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^n g(t,x;\lambda)}{\partial t^n}$$

.

ou $g(x,t;\lambda)$ est la solution de l'équation

$$\frac{\partial^n g}{\partial t^n} + \lambda\{b_0(t)\frac{\partial^{n-1} g}{\partial t^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(t)g\} = 0$$

que vérifie les conditions $(3,8)$.

Exemple Résoudre l'équation intégrale suivant

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$$

est une equation intégrale de Volterra linéaire du seconde espèce .
$K(x,t) = x - t$ est un polynôme de degré 1 avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
$(n-1) = 1 \Rightarrow n = 2$ donc $g(x,t)$ est une solution de l'équation :

$$g''(x,t) - g(x,t) = 0$$

d'où

$$g(x,t) = c_1(t)e^x + c_2(t)e^{-x}$$

avec les condition initiales

$$g'|_{x=t} = 1, g|_{x=t} = 0$$

.

3.1.2 Pour l'équation intégrale de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

ou $K(x,t)$ noyau continu et $f \in [a,b]$.

Proposition 3.1.3 La solution de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt.$$

Et $R(x,t;\lambda)$ elle est convergente pour

$$|\lambda| < B^{-1} et B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K(x,t)^2 dx dt}$$

Définition 3.1.2 Soient $K(x,t)$ et $L(x,t)$ deux noyaux . On dit que le deux noyaux K et L sont orthogonaux si

$$\int_a^b K(x,z)L(z,t)dz = \int_a^b L(x,z)K(z,t)dz = 0$$

Proposition 3.1.4 Si un noyau est orthogonal a lui même alors il coïncide avec sa résolvante.

Proposition 3.1.5 Soient $N(x,t)$ et $L(x,t)$ deux noyaux orthogonaux et $R_1(x,t;\lambda)$, $R_2(x,t;\lambda)$ leurs résolvantes associées respectivement . Alors la résolvante $R(x,t;\lambda)$ relativement au noyau

$$K(x,t) = N(x,t) + L(x,t)$$

est la résolvante

$$R(x,t;\lambda) = R_1(x,t;\lambda) + R_2(x,t;\lambda)$$

Exemple Les noyaux $K(x,t) = xt$ et $L(x,t) = x^2t^2$ sont orthogonaux , en effet

$$\int_{-1}^{1} K(x,z)L(z,t)dz = xt^2 \int_{-1}^{1} z^3 dz = 0$$

$$\int_{-1}^{1} L(x,z)K(z,t)dz = x^2 t \int_{-1}^{1} z^3 dz = 0$$

On remarque que

$$\int_{0}^{2\pi} K(x,z)K(z,t)dz = \int_{0}^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)dz$$

or $\sin(x-2z)\sin(z-2t) = \frac{1}{2}(\cos(x+2t-3z) - \cos(x-2t-z))$, d'où

$$\int_{0}^{2\pi} K(x,z)K(z,t)dz = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (\cos(x+2t-3z) - \cos(x-2t-z))dz = 0$$

Alors le noyau $K(x,t)$ est orthogonal a lui même, ainsi il coïncide avec la résolvante

$$R(x,t;\lambda) = \sin(x-2t)$$

3.2 Résolution au cas d'un noyau dégénéré

Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm du second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.9}$$

Définition 3.2.1 Le noyau $K(x,t)$ d'une équation intégrale linéaire de Fredholm du second espèce est dit *dégénéré* s'il est la somme finie de produit de fonctions de x par de fonctions de t,

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)$$

ou les fonctions a_k, b_k sont continues dans le carré fondamental $a\leqslant x,t\leqslant b$ et linéairement libres.

Méthode de résolution On suppose que l'équation (3.9) a un noyau $K(x,t)$ dégénéré. Alors l'équation (3.9) devient

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)\varphi(t)dt \tag{3.10}$$

permutons l'intégrale avec la somme on aura

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt \tag{3.11}$$

définissons les constantes suivantes

$$C_k=\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt, k=1,2,\ldots,n$$

qui donne par equation. (3.11)

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_ka_k(x) \tag{3.12}$$

les constantes C_k sont maintenant les inconnus à déterminer pour déterminer la solution de l'équation (3.9).
Portons l'équation (3.12) dans l'équation (3.9) et par un calcul, on trouve

$$\sum_{m=1}^{n}\left[C_m-\int_a^b b_m(t)\left(f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_ka_k(t)\right)dt\right]a_m(x)=0$$

or les fonctions $a_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ sont supposées linéairement libre, alors

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left(f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right) dt = 0$$

ce qui donne

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$$

Posons

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt, f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$$

on aura le système à résoudre

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_{km} = f_m, m = 1, \ldots, n$$

qui se développe comme suit

$$(S) \begin{cases} C_1(1 - \lambda a_{11}) - \lambda a_{12} C_2 - \ldots - \lambda a_{1n} C_n = f_1 \\ -\lambda a_{21} C_1 + C_2(1 - \lambda a_{22}) - \ldots - \lambda a_{2n} C_n = f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_2 \ldots + C_n(1 - \lambda a_{nn}) = f_n \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour trouver les constantes C_k $(k = 1, \ldots, n)$, il faut résoudre le système (S) . le déterminant de (S) est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda a_{11}) & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1 - \lambda a_{22}) & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & (1 - \lambda a_{nn}) \end{vmatrix}$$

le système (S) admet une seule solution que si $\Delta(\lambda) \neq 0$ et est donnée par

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} (1-\lambda a_{11}) & \cdots & -\lambda a_{1k} f_1 - \lambda a_{1k+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2k} f_2 - \lambda a_{2k+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{nk} f_1 - \lambda a_{nk+1} & \cdots & (1-\lambda a_{nn}) \end{vmatrix}$$

avec $k = 1, \ldots, n$.
En portant ces constantes dans l'équation (3.12), on trouve la solution de l'équation intégrale de Fredholm du second espèce.

3.2.1 Nombres caractéristiques et fonctions propres

Soit l'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm du second espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{3.14}$$

cette équation admet toujours une solution nulle $\varphi(x) \equiv 0$, elle s'appelle une solution triviale.

Définition 3.2.2 Un nombre λ tel que l'équation $Eq.(3.14)$ admet une solution non triviale s'appelle un nombre (ou une valeur) caractéristique de $Eq.(3.14)$ ou du noyau $K(x,t)$, et toute solution non triviale de l'équation $Eq.(3.14)$ est une fonction propre, correspond au nombre caractéristique λ.
La valeur $\lambda = 0$ n'est pas une valeur caractéristique car elle correspond à la solution triviale $\varphi(x) \equiv 0$.

Exemple l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\cos^2(x)\cos(2t) + \cos(3x)\cos^3(t))\varphi(t)dt,$$

C'est une équation intégrale linéaire homogène de Fredholm du second espèce ou $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, λ un facteur numérique, $K(x,t) =$

$\cos^2(x)\cos(2t) + \cos(3x)\cos^3(t)$ est le noyau et l'intervalle $(0, \pi)$ est le carré fondamental.
On remarque que le noyau $K(x,t)$ est dégénéré, alors on utilise la méthode des noyaux dégénérés.

$$\varphi(x) = \lambda \cos^2(x) \int_0^\pi \cos(2t)\varphi(t)dt + \lambda \cos(3x) \int_0^\pi \cos^3(t)\varphi(t)dt$$

posons

$$C_1 = \int_0^\pi \cos(2t)\varphi(t)dt, C_2 = \int_0^\pi \cos^3(t)\varphi(t)dt \tag{3.15}$$

Alors

$$\varphi(x) = C_1\lambda\cos^2(x) + C_2\lambda\cos(3x) \tag{3.16}$$

substituons $l'Eq.(3,16)$, dans $l'Eq.(3,15)$, on aura un système linéaire d'équations homogènes

$$\begin{cases} C_1(1 - \lambda \int_0^\pi \cos^2(t)\cos(2t)dt) - C_2\lambda \int_0^\pi \cos(3t)\sin(2t)dt = 0 \\ -C_1\lambda \int_0^\pi \cos^5(t)dt + C_2(1 - \lambda \int_0^\pi \cos^3(t)\cos(3t)dt = 0 \end{cases}$$

par calcul d'intégrale, en utilisant les formules trigonométriques, le système se réduit à

$$\begin{cases} C_1(1 - \lambda\frac{\pi}{4}) = 0 \\ C_2(1 - \lambda\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

d'où les nombres caractéristiques se déduisent de

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \lambda\frac{\pi}{8} \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$ et $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$.
Calculons maintenant leurs fonctions propres correspondantes. Si $\lambda = \lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, on a

$$\begin{cases} C_1 \times 0 = 0 \\ C_2 \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

donc $C_2 = 0$ est C_1 arbitraire d'où la fonction propre correspondante et

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= C_1\lambda\cos^2(x) + C_2\lambda cos(3x)\\ &= C_1\lambda\cos^2(x)\end{aligned}$$

si on pose pour $C_1 = \lambda^{-1}$, on aura

$$\varphi_1(x) = \cos^2(x)$$

De même pour $\lambda = \lambda_2 = \frac{8}{\pi}$, on aura

$$\begin{cases} C_1 \times -1 = 0 \\ C_2 \times 0 = 0 \end{cases}$$

d'où$C_1 = 0$ est C_2 arbitraire, ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= C_1\lambda\cos^2(x) + C_2\lambda\cos(3x)\\ &= C_2\lambda\cos(3x)\end{aligned}$$

pour $C_2 = \lambda^{-1}$, on aura

$$\varphi_2(x) = \cos(3x)$$

Finalement. Nombres caractéristiques fonctions propres correspondants

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{4}{\pi} &\qquad \varphi_1(x) &= \cos^2(x)\\ \lambda_2 &= \frac{8}{\pi} &\qquad \varphi_2(x) &= \cos(3x)\end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 Une équation intégrale linéaire homogène de Fredholm du second espèce peut de ne pas avoir de nombres caractéristiques et de fonctions propres correspondantes ou sans nombres caractéristiques réels et fonctions propres correspondantes.

Définition 3.2.3 Un noyau $K(x,t)$ d'une équation intégrale linéaire homogène de Fredholm du second espèce est dit symétrique si

$$K(x,t) = K(t,x)$$

avec

$$a \leqslant x, t \leqslant b$$

Théorème 3.2.1 Si une équation intégrale linéaire homogène de Fredholm du second espèce a un noyau symétrique alors elle admet au mois un nombre caractéristique réel.

Théorème 3.2.2 A chaque nombre caractéristique λ correspond un nombre fini p de fonctions propres linéairement indépendantes et

$$p \leqslant \lambda^2 B^2, B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt$$

p s'appelle la multiplicité du nombre caractéristique.

Théorème 3.2.3 Deux fonctions propres φ_1 et φ_2 correspondant à deux nombres caractéristiques λ_1 et λ_2 sont orthogonales *i.e.*

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$$

Théorème 3.2.4 Tout intervalle fini de l'axe λ contient un nombre fini m de nombres caractéristiques. Le nombre m de l'intervalle $-l < \lambda < l$ est défini par l'inégalité

$$m \leqslant l^2 B^2$$

Théorème 3.2.5 (de Mercer) Si le noyau symétrique $K(x,t) \in L_2$ est continu et a tous ses nombres caractéristiques positifs (ou au plus un nombre fini de nombres caractéristiques négatifs), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

converge absolument et uniformément vers $K(x,t)$ de sorte qu'on a

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

En général, pour $K(x,t) \in L_2$, symétrique, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$ converge en moyenne vers $K(x,t)$.

3.3 Résolution à l'aide des déterminants de Fredholm

Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm du second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.17}$$

On suppose que le noyau $K(x,t)$ est une fonction définie ou l'intégrale suivante

$$\int_a^b \int_a^b K(x,t)^2 dxdt \tag{3.18}$$

est finie.
Maintenant on définit les fonctions $B_n(x,t)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$B_0(x,t) = K(x,t),$$

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{\text{n fois}} \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \cdots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & \cdots & K(t_2,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \tag{3.19}$$

et les coefficients C_n par

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{\text{n fois}} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & \cdots & K(t_2,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n,t_1) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n \tag{3.20}$$

d'où la définition suivante

Définition 3.3.1 On appelle de déterminant mineur de Fredholm de l'équation intégrale $Eq.(3.17)$ la fonction définie par

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} B_n(x,t)\lambda^n \tag{3.21}$$

et le déterminant de Fredholm par la fonction

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} C_n \lambda^n \tag{3.22}$$

Remarque 3.3.1 Les séries entières données par $Eq.(3.21)$ et $Eq.(3.22)$ en puissances de λ sont des séries convergentes pour toute valeurs de λ sous les hypothèses du noyau donnée par les condition $Eq.(3.18)$, d'où elle sont des fonctions analytiques en λ.
Maintenant on définit le noyau résolvant ou la résolvantes de l'équation intégrale $Eq.(3.17)$.

Définition 3.3.2 [2] La résolvantes de l'équation intégrale $Eq.(3.17)$ est donné par

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{3.23}$$

ou on suppose que $D(\lambda) \neq 0$.

Remarque 3.3.2 La résolvantes est une fonction analytique de λ, à l'exception des valeurs de λ qui sont des *zéros* de la fonction $D(\lambda)$. Ces derniers sont les pôles du noyau résolvant $R(x,t,\lambda)$.
Finalement, on peut exprimer la solution de l'équation intégrale $Eq.(3.17)$ par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t) dt \tag{3.24}$$

Exemple L'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 x e^t \varphi(t) dt \tag{3.25}$$

est une équation intégrale linéaire de Fredholm du second espèce non homogène .Pour déterminer les déterminants de Fredholm , on calcule d'abord les fonctions $B_n(x,t)$ et les coefficients C_n. On a

$$B_0(x,t) = K(x,t) = xe^t$$
$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1$$
$$B_2(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0$$

car les déterminants deux a deux sont symétriques et par suite tous les fonctions $B_n(x,t)$ pour $n > 2$ sont nulles. De même pour les coefficients C_n, on a

$$C_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}dt_1 = 1$$

et

$$C_2 = 0$$

et toujours par la symétrie on montre que les coefficients $C_n = 0$, pour $n > 2$. Et par les équations (3.21) et (3.22) les déterminantes de Fredholm sont

$$D(x,t;\lambda) = xe^t$$

$$et$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda$$

Finalement, par $l'Eq.$(3.23). La résolvant est

$$R(x,t;\lambda) = \frac{xe^t}{1-\lambda}; \lambda \neq 1$$

La valeur 1 est un pôle de la résolvante.
D'après $Eq.(3.24)$ la solution de $l'Eq.(3.25)$ est

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda x}{1-\lambda} \int_0^1 e^t f(t) dt$$

Remarque 3.3.3 Dans des situations particulières, il est possible de calculer les fonctions $B_n(x,t)$ et les coefficients C_n par les formules récurrentes suivantes

$$C_0 = 1; B_0(x,t) = K(x,t)$$

$$B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n \int_a^b K(x,s) B_{n-1}(s,t) ds; C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s) ds$$

Alors on trouve les successions C_1, $B_1(x,t)$, C_2, $B_2(x,t)$, C_3 ...

Chapitre 4

Équations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

4.1 Équation intégrale d'Abel

Définition 4.1.1 On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt = f(x) \tag{4.1}$$

On remarque que $l'Eq.$(4.1) est une équation intégrale de Volterra de première espèce.

Définition 4.1.2 On appelle équation intégrale d'Abel généralisée tout équations de la forme

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt = f(x), 0 < \alpha < 1 \tag{4.2}$$

La fonction f sera supposée possédant une dérivée continue sur $[0, a]$. Notons que pour $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, le noyau de l'équation (4.2) n'est pas de carré intégrable

($K(x,t)$ n'est pas une fonction de L_2). Cependant l'équation (4.2) admet une solution .

Méthode d'Abel Admettons que l'équation (4.2) possède bien une solution. Substituons s à x dans (4.2), multiplions membre à membre par $\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ et intégrons par rapport à s entre 0 et x :

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha} dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Intervertissons l'ordre d'intégration dans le premier membre, il vient

$$\int_0^x \varphi(t)dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = F(x), \tag{4.3}$$

ou

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Faisons la substitution $s = t + y(x-t)$ dans l'intégrale intérieure :

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha (1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

L'équation (4.3) entraine alors

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} F(x)$$

ou

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} F'(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right)'_x . \tag{4.4}$$

Ainsi, la solution unique de (4.3) est donnée par la formule (4.4) que l'on récrit en intégrant par parties :

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right] . \tag{4.5}$$

4.2 Équations intégrales à noyau de Cauchy

On considère

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, a < x < b \tag{4.6}$$

qui est une équation intégrale singulière à noyau de Cauchy non homogène. Cette intégrale est prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour résoudre cette équation on fait appelle à l'identité

$$\int_0^y \frac{dt}{(y-t)^{\alpha-1} t^\alpha (t-x)} = \begin{cases} \frac{\pi \cot(\alpha\pi)}{(y-x)^{1-\alpha} x^\alpha}, & 0 < x < y \\ \frac{-\pi \csc(\alpha\pi)}{(x-y)^{1-\alpha} x^\alpha}, & y < x \end{cases} \tag{4.7}$$

et on définit la fonction $\phi(x, y)$ comme suit

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(y-x)^{1-\alpha} x^\alpha}, 0 < x < y \tag{4.8}$$

ou α est tel que $-\pi \cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\lambda}$. Alors $\phi(x, y)$ est une solution de l'équation intégrale

$$-\lambda \int_0^y \frac{\phi(t, y)}{t-x} dt = \phi(x, y), 0 < x < y \tag{4.9}$$

En outre

$$\int_0^y \frac{\phi(t, y)}{t-x} dt = -\frac{\pi \csc(\alpha\pi)}{(x-y)^{1-\alpha} x^\alpha}, y < x \tag{4.10}$$

Si, on multiple (4.6) par x, on obtient

$$\lambda \int_0^1 \frac{t\varphi(t)}{t-x} dt = x\varphi(x) - xf(x) + c \tag{4.11}$$

ou $c = \lambda \int_0^1 \varphi(t)dt$. Maintenant, on multiplie les deux cotés de la relation (4.11) par $\phi(x, y)$ et on intègre de 0 à y et en échangeant l'ordre d'intégration, on trouve

1. $\lambda \int_0^y t\varphi(t)dt \int_0^y \frac{\phi(x,y)}{x-t} dx$
2. $\lambda \int_y^1 t\varphi(t)dt \int_0^y \frac{\phi(x,y)}{x-t} dx = \int_0^y x\varphi(x)\phi(x, y)dx - \int_0^y xf(x)\phi(x, y)dx + c \int_0^y \phi(x, y)dx.$

En utilisant les relations (4.9) et (4.10) et que $\int_0^y \phi(x,y)dx = \pi\csc(\alpha\pi)$, on obtient la relation

$$\lambda\pi\csc(\alpha\pi)\int_y^1 \frac{t^{1-\alpha}\varphi(t)}{(t-y)^{1-\alpha}}dt = -\int_0^y xf(x)\phi(x,y)dx + c\pi\csc(\alpha\pi). \quad (4.12)$$

Qui est une équation intégrale d'Abel dont la solution s'écrit sous la forme

$$\lambda t^{1-\alpha}\varphi(t) = \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi^2}\frac{d}{dt}\left[\int_t^1\int_0^y (y-t)^{-\alpha}(y-x)^{\alpha-1}x^{1-\alpha}f(x)dxdt\right] + \frac{c\sin(\alpha\pi)}{\pi(1-t)^\alpha}$$

Maintenant, on utilise la relation $-\pi\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\lambda}$, et après certains calculs, on obtient

$$\varphi(x) = -\frac{f(x)}{1+\pi^2\lambda^2} + \frac{\lambda}{(1+\pi^2\lambda^2)x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha t^{1-\alpha}f(t)}{t-x}dt$$
$$+ \frac{c}{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha\sqrt{1+\pi^2\lambda^2}}.$$

4.3 Singularité logarithmique

On considère l'équation intégrale

$$\int_{-1}^1 \ln\mid x-t\mid \varphi_0(t)dt = 1, -1 < x < 1. \quad (4.13)$$

En posant $x = \cos\alpha$, et $t = \cos\beta$, l'équation (4.13) devient

$$\int_0^\pi \ln\mid\cos\alpha - \cos\beta\mid \omega(\beta)d\beta = 1, 0 < \alpha < \pi. \quad (4.14)$$

ou $\omega(\beta) = \varphi_0(cos\beta)\sin\beta$. Soit maintenant le développement $\omega(\beta) = \sum_{n=0}^\infty b_n\cos(n\beta)$, alors

$$\ln\mid\cos\alpha - \cos\beta\mid = -\ln 2 - 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\alpha)\cos(n\beta)}{n} \quad (4.15)$$

L'équation (4.14) devient

$$\int_0^\pi \left[-\ln 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)\cos(n\beta)}{n} \right] \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_m \cos(m\beta) \right] d\beta = 1$$

De l'orthogonalité des fonctions cosinus, il en résulte,

$$-\pi b_0 \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \pi b_n \frac{\cos(n\alpha)}{n} = 1$$

ainsi, $b_0 = -(\frac{1}{(\pi \ln 2)})$, $b_n = 0$, $n \geqslant 1$, et on trouve que la solution de l'équation (4.13) est donnée par

$$\varphi_0(t) = -\frac{1}{\pi \ln 2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.16}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques résultats sur les équations intégrales. On a appliqué quelques théorèmes du point fixe (principe de contraction de Banach qui garantit l'existence et l'unicité de la solution, Schauder assure l'existence) sur quelques équations intégrales de type Fredholm et de Volterra, et aussi on a présenté quelques méthodes de résolutions de ces équations, des méthodes analytiques comme la méthode de noyaux itérés, noyau dégénéré,et déterminants de Fredholm (qui s'applique seulement sur les équations intégrales linéaire).
Nous prévoyons dans le futur d'essayer d'améliorer certains résultats afin de pouvoir les appliquer à l'étude d'équations intégrales non linéaires.

Bibliographie

[1] H. Benali, Introduction Aux Équations Intégrales Linéaires, Méthodes et Applications, Université Ibn Khaldoun de Tiaret, Département de Mathématiques, Faculté de Mathématiques et Informatique. 2019

[2] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, Équations intégrales, problèmes et exercices, Édition Mir, Moscou, 1977.

[3] A. Rahmoune, Équations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution. August 16, 2018