



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ.: 2020/2021



Condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappel, abandon et feedback

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université De Saïda Dr Tahar Moulay

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastique, Statistiques des Processus et Applications

par

Benali Hanane¹

Sous la direction de

Soutenue le 14/07/2021 devant le jury composé de

Dr.F. BENZIADI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Dr.M. KADI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Pr.A. KANDOUCI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
Dr.L. YAHYAOU	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

1. e-mail : benalihanane98@gmail.com



REMERCIEMENT

Avant tout je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné la foi et la volonté durant notre cursus et m'avoir aidé à surmonter tous les obstacles. Je tiens d'exprimer mes sincères reconnaissances à mon encadreur de mémoire et mon professeur encadreur :KADI MOKHTAR de m'avoir encadré orienté aidé et conseillé.

Je remercie Dr.F. BENZIADI d'avoir accepté à présider le jury de mon travail.

Je souhaite également remercier Mr.A. KANDOUCI et Mr. L.YAHYAOUI de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être examinateurs de mon mémoire. Leurs remarques et précieux conseils ont abouti à une amélioration du document de mémoire.

Ma gratitude va également aux enseignants du département de mathématiques que j'ai eu durant mon cursus. J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs qui m'ont enseigné. je remercie toute ma famille pour leur soutien qu'ils m'ont apporté pendant ces années d'études.

Enfin je remercie mes amis pour les bons moments passés ensemble et aussi pour leur soutiens et leur encouragements. Et pour finir, merci à toutes les personnes que j'ai oublié de citer et qui m'ont permis de mener à bien ce mémoire .

Dédicace

*OAllah! Tu es mon Dieu, je te
cherche; Mon âme à soif de toi ,mon corps soupire après toi ,
dans une terre aride ,desséchée,sans eau.Ainsi je te contemple dans le sanc-
tuaire pour voir ta puissance et ta gloire .Car ta bonté vaut mieux que la vie ,mes lèvres
célèbrent tes louanges ,je te bénirai donc toute ma vie ,j'élèverai mes mains en ton nom.À
mon prophète [Mouhamed,que la pière d'Allah et son soient sur lui](#) ,qui a dit : " Ce-
lui qui prend un chemin pour rechercher la science,Allah lui fait prendre par cela un chemin
vers le paradis . Certes tous ceux qui sont dans les cieux et sur la terre demandent le pardon
pour le savant même le poisson dans l'eau.Le mérite du savant sur l'adorateur est comme
le mérite de la lune par rapport aux autres astres. Certes les savants sont les héritiers
des prophètes et les prophètes n'ont pas laissé comme héritage des dinars ou des di-
rhams mais ils ont laissé la science ,celui qui la prend aura prit une part impor-
tante ". Puis ,à mes très chères [Parents](#),pour ses encouragements et ses
soutiens,et à toute la famille [Benali](#) et [Bentayeb](#) .Je dédie égale-
ment ma réussite à mon frère [Mouhamed](#) et très chers sœurs
[Imane](#) ,[Narimene](#) , [Asma](#). À tous les membres
de ma promotion Master A.S.S.P.A
2021. À toutes les personnes
qui m'aiment .*



Table des matières

Introduction générale	7
1 Processus Stochastique	9
1.1 Loi de poisson et loi exponentielle	10
1.1.1 Loi de poisson	10
1.1.2 Loi exponentielle	11
1.1.3 Relation entre la distribution Exponentielle et la distribution de Poisson . . .	13
1.2 Processus à accroissements indépendants	13
1.3 Processus de comptage	13
1.4 Processus de poisson	14
1.5 Processus de renouvellement	15
1.6 Processus de naissance et de mort	15
2 Systèmes de files d'attente	19
2.1 Files d'attente simple	21
2.2 Loi de Little	23
2.3 Notation de Kendall	24
2.4 Quelque modèle sur les files d'attente	26
2.4.1 Modèle d'attente M/M/1	26
2.4.2 Modèle d'attente M/M/1/K	29
2.4.3 Modèle d'attente M/M/C	31
2.4.4 Modèle d'attente M/M/ ∞	34
2.5 Systèmes de files d'attente avec impatience	35
2.5.1 Files d'attente avec rappel	35
2.5.2 Files d'attente avec abandon	36
2.5.3 Files d'attente avec feedback	37

3 Condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappel,abandon et feedback	39
3.1 Introduction :	39
3.2 Le modèle	40
3.3 Résultat principal : condition nécessaire de stabilité	41
Conclusion	47
Bibliographie	47

Introduction générale

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent dans la nature : fluctuations de la température, de la pression atmosphérique, ... etc. En électronique et en télécommunications, l'étude des processus aléatoires est utile notamment dans le contexte des communications numériques, certains signaux sont impossibles à caractériser a priori. L'exploitation des processus aléatoires est aussi à la base de nombreuses approches en traitement du signal, que ce soit pour caractériser le contenu fréquentiel du signal ou pour coder et tatouer un signal de parole. Plus généralement, les sources d'information telles que le son, les images sont aléatoires et varient dans le temps. Enfin, les processus aléatoires ont une application dans le cadre du traitement du trafic dans les réseaux et notamment pour l'analyse du temps de transfert et/ou du temps de traitement d'un paquet d'informations de taille aléatoire, généré à des intervalles de temps aléatoires (Théorie des Files d'Attente). La théorie des processus aléatoire vise à introduire les outils de traitement des phénomènes variant aléatoirement dans le temps.

Les phénomènes d'attente sont devenus l'une des préoccupations de l'homme depuis bien longtemps. Attendre, constitue la tâche la plus désagréable de la vie moderne. Comment gérer un système présentant des files d'attente, afin d'améliorer sa qualité de service ? Cette question a été abordée, pour la première fois par A.K. Erlang avec ses travaux concernant le réseau téléphonique de Copenhague [32]. La théorie mathématique s'est ensuite développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek [32] et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques. Cette théorie s'est ensuite étendue à de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les télécommunications en général, la fiabilité de systèmes complexes, ... Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont omniprésents dans notre société. Les exemples ne manquent pas :

- Attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration),
- trafic urbain ou aérien.
- réseaux téléphoniques.

- circulation de pièces dans un atelier.
- programmes dans un système informatique,...

En effet, afin d'analyser le comportement de ces systèmes, évaluer et optimiser leurs performances, il faut d'abord les représenter par des modèles mathématiques qui proviennent de la théorie des files d'attente. Un modèle typique de files d'attente nécessite la définition des processus d'inter-arrivées et la durée de service de client, la taille de la file qui peut être finie ou non, ainsi que la discipline de service. Tous ces paramètres sont indiqués dans la notation dite de Kendall. Dans certains systèmes, on est amené à imposer des priorités d'utilisation du service. Notre travail consiste à étudier une classe de systèmes de files d'attente, qui porte le nom de système de files d'attente simple comprenant une station de service et pour lequel la capacité de l'espace est infinie et de discipline de service FIFO. Dans notre mémoire nous analysons des conditions de stabilité d'un système de files d'attente avec rappel, abandon, feedback. La mémoire est composée de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous abordons les processus à la base de l'étude de tels systèmes d'attente qui sont les processus stochastiques. Nous présentons une introduction aux concepts de base de la théorie des processus stochastiques. Nous présentons également les relations fondamentales entre les différents processus stochastiques.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la terminologie de la théorie des files d'attente. Certaines définitions et notations qui sont nécessaires dans l'étude des systèmes de files d'attente (la notation de KANDELL, la formule de LITTLE ...) sont notamment données. Et nous étudions quelques modèles de files d'attente ($M/M/1$, $M/M/1/K$, $M/M/c$, $M/M/\infty$) et l'évaluation de leurs paramètres de performance.

Après nous présentons une étude de certains modèles d'attente avec clients impatientes. Nous traitons le cas de files d'attente avec rappels, ensuite un système d'attente avec abandon et enfin un modèle avec feedback.

Enfin Dans le troisième, on donne la condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappel, abandon et feedback.

Chapitre 1

Processus Stochastique

L'étude des processus stochastiques s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique [23] (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc.), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie). Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. Par exemple, le prix d'un baril du Pétrole, qui ont tiré l'attention de beaucoup des spécialistes économiques. En effet, ce prix, dans la bourse, varie tout le temps, cette variation nous donne l'idée d'établir un processus aléatoire, ou encore un processus stochastique, d'où la modélisation par une famille de variables aléatoires $X(t)_{t \in T}$ où T est l'ensemble des temps pendant lesquels le phénomène est observé. La famille $X(t)_{t \in T}$ est appelée processus aléatoire, ou encore processus stochastique.

Définition 1.1. *Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires indexées par T à valeurs dans un ensemble X . Sa caractéristique de base est le fait que la loi de la variable X soit fonction de t définies dans le même espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$, $t \in T$ représente une date [35]*

★ Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

★ lorsque T est un intervalle $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus à temps continu.

Définition 1.2. *On appelle espace des états (des phases) l'ensemble \mathbb{E} où les variables X_n prennent leurs valeurs. L'ensemble \mathbb{E} peut être discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre types de processus :*

1. Suite stochastique à espace d'état discret.
2. Suite stochastique à espace d'état continu.
3. Processus continu à espace d'état discret.

4. *Processus continu à espace d'état continu.*

La loi d'un processus stochastique est caractérisée par la donnée de la loi du vecteur qui lui est associé.

Définition 1.3. Un processus stochastique $\mathcal{E}_t, t \leq 0$ est **strictement stationnaire**, si $\forall (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(\mathcal{E}_{t_0}, \dots, \mathcal{E}_{t_n}) = \mathcal{F}(\mathcal{E}_{t_0+t}, \dots, \mathcal{E}_{t_n+t})$.

Définition 1.4. $\{\mathcal{E}, t \geq 0\}$ est à **accroissement stationnaire** (homogène), si $\forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R} : X_{t_2+h} - X_{t_1+h} \text{ et } X_{t_2} - X_{t_1}$ sont des variables aléatoire de même loi.

Définition 1.5. Un processus est à accroissement indépendant stationnaire $(N_t)_{\mathbb{R}_+}$ est dit événement rare si

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \mathbb{P}([N_h > 0]) = 0$$

et si

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}([N_h > 1])}{\mathbb{P}([N_h = 1])} = 0.$$

1.1 Loi de poisson et loi exponentielle

1.1.1 Loi de poisson

Définition 1.1.1. : *(Loi de poisson)*

Une variable aléatoire X à valeurs entières suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \exp(-\mu)$$

Propriété 1.1.1. :

Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une distribution poissonnienne.

- La fonction génératrice des moments est :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{\mu(e^t - 1)}$$

- La moyenne et la variance sont :

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \mu.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \\
&= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^k}{k!} \\
&= e^{-\mu} e^{\mu e^t}
\end{aligned}$$

Calculons les dérivées de la fonction génératrice

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \mu e^t e^{\mu(e^t-1)} \\
\varphi''(t) &= (1 + \mu e^t) \mu e^t e^{\mu(e^t-1)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x] &= \varphi'(0) = \mu \\
\text{Var}(x) &= \varphi''(0) - \mathbb{E}[x]^2 = \mu
\end{aligned}$$

□

1.1.2 Loi exponentielle

Définition 1.1.2. : (*Loi exponentielle*)

Soit la variable aléatoire X continue de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ à valeurs strictement positives de probabilité :

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(X = t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

Propriété 1.1.2. :

La loi exponentielle de paramètre λ est notée $\varepsilon(\lambda)$.

Soit X une variable aléatoire de loi $\varepsilon(\lambda)$.

Sa fonction de répartition est :

$$F(t) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa fonction génératrice des moments est : $\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \infty & \text{si } t \geq \lambda \\ \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{si } t < \lambda \end{cases}$

Sa moyenne et sa variance sont : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Preuve :

Soit X une variable aléatoire de loi $\varepsilon(\lambda)$

* $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 0$ si $t < 0$ car X est une variable positive et si $t > 0$ on a

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f_X(x) dx \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Sa fonction génératrice des moments vérifie

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{tx} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x} dx \\ &= \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Calculons les dérivées de la fonction génératrice, on a

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

$$\varphi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

D'où

$$\mathbb{E}[X] = \varphi'(0) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \varphi''(0) - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

□

1.1.3 Relation entre la distribution Exponentielle et la distribution de Poisson

La densité de probabilité d'une distribution exponentielle $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Supposons τ est exponentielle avec une espérance $\frac{1}{\lambda}$, et n est de Poisson de moyenne μ on a :

$$\begin{aligned} P(\tau > t) &= 1 - F(t) \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P(n = 0 \text{ en } t) \\ &= P(0, t) \end{aligned}$$

Notons $P(n, t)$ la probabilité d'avoir n unite dans le temps t .

$$\begin{aligned} P(0, t) &= e^{-\mu t} \\ P(1, t) &= \int_{\tau=0}^t P(0, \tau) f(1 - \tau) d\tau = \lambda t e^{-\lambda t} \\ P(2, t) &= \int_{\tau=0}^t P(1, \tau) f(1 - \tau) d\tau = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} / 2! \\ &\dots \\ P(n, t) &= \int_{\tau=0}^t P(n-1, \tau) f(1 - \tau) d\tau = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n! \end{aligned}$$

1.2 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.2.1. : (*Processus à accroissements indépendants*)

Un processus stochastique est dit un processus à accroissements indépendants s'il vérifie la propriété :

$\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, N_{t+s} - N_t$ est indépendante de $N_u, \forall u \leq t$.

Un processus à accroissements stationnaires est un processus stochastique qui vérifie la propriété :

La loi de $N_{t+s} - N_s$ ne dépend pas de t .

1.3 Processus de comptage

Définition 1.3.1. : (*Processus de comptage*)

Soit $N(t)$ un processus stochastique si $N(t)$ représente le nombre total des évènements qui sont arrivés avant l'instant t , on dit que $N(t)$ est un processus de comptage discret à temps continu tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

1. le nombre $N(t)$ est à valeurs entières positives, Pour tout $t \geq 0$.

2. La fonction $t \mapsto N(t)$ est croissante.

3. la différence $N(t) - N(s)$ représente le nombre d'évènement se produisant dans l'intervalle de temps $]s, t]$, Pour tout couple $(s, t) (0 < s < t)$.

le processus des temps d'inter-arrivées $\{W_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ou $\forall n \in \mathbb{N}_0$ la variable aléatoire W_n est le temps d'attente entre les $(n-1)^{\text{ième}}$, $n^{\text{ième}}$ occurrences, est un processus peut être associé au processus des temps d'occurrence [34] càd :

$$W_n = T_n - T_{n-1}$$

avec T_n est le temps d'arrivé du $n^{\text{ième}}$ client.

Démonstration :

On a $W_n = T_n - T_{n-1}$

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = T_1 - T_0 + T_2 - T_1 + T_3 - T_2 + \dots + T_{n-1} - T_{n-2} + T_n - T_{n-1}$$

$$= T_0 + T_n$$

$$= T_n \quad \text{car} \quad T_0 = 0$$

□

1.4 Processus de poisson

Le processus de Poisson sert à modéliser l'occurrence d'évènements successifs. Chaque évènement est tel que dans un intervalle de temps $(t, t + \Delta_t)$ avec Δ_t petit [18].

Exemple 1.4.0.1. : Les exemples de processus ne se limitent évidemment pas à la biologie :

- Appels téléphoniques à un standard.
- Prise d'un poisson par un pêcheur.
- Arrivée d'un client à un guichet.
- Passage d'un autobus.

Définition 1.4.1. : Un processus de comptage $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, tel que $N_0 = 0$ est un processus de Poisson [17] si :

1. $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est stationnaire.
2. $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements indépendants.
3. $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à évènements rares.

1.5 Processus de renouvellement

Les processus de Poisson et de renouvellement sont des processus aléatoires de comptage à temps continu qui conviennent la description des phénomènes dont les occurrences surviennent en des temps successifs aléatoires. Ils sont utiles à la modélisation des files d'attente apparaissant à l'entrée de services et dans les réseaux de communication, et permettent de résoudre des problèmes de maintenance.

processus de renouvellement est un processus de comptage pour le quel les temps entre deux arrivés consecutives sont des variables aléatoires indépendantes s'appelle processus de renouvellement. Les temps de renouvellement (ou les temps de la n-ième arrivée) sont :

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad n = 1, 2, \dots$$

on voit que le nombre d'arrivées avant le temps t , i.e. le processus

$$(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = \sup_k \{k, A_k \leq t\}$$

est un processus de comptage.

1.6 Processus de naissance et de mort

Définition 1.6.1. : On peut réaliser un processus de naissance et de mort de la façon suivante :

- Les arrivées et les départs d'entités obéissent à des lois exponentielles de taux respectifs $\lambda(n)$ et $\mu(n)$.
- A l'aide l'hypothèse de régularité : deux événements ne peuvent pas se produire en même temps, donc la probabilité que deux événements se produisent dans un intervalle de temps dt est négligeable.
- Il y a une transition vers un état voisin, soit par l'arrivée d'un client (naissance), soit par le départ d'un client (mort).

Si $\pi_n(t)$ est la probabilité pour qu'il y ait n clients dans le système à l'instant t , l'équation de Kolomogorov [36] s'écrit, pour $n > 0$:

$$\pi_n(t + dt) = (1 - (\lambda_n + \mu_n) dt) \pi_n(t) + \mu_{n+1} \pi_{n+1}(t) dt + \lambda_{n-1} \pi_{n-1}(t) dt + o(dt)$$

C'est-à-dire, en faisant tendre dt vers 0, pour $n > 0$:

$$\frac{d}{dt} \pi_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) \pi_n(t) + \mu_{n+1} \pi_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} \pi_{n-1}(t)$$

De la même façon, on obtient pour $n = 0$:

$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda_0\pi_0(t) + \mu_1\pi_1(t)$$

Un cas particulier du processus de naissance et de mort c'est Le processus de Poisson avec $\mu_n = 0$ et $\lambda_n = \lambda$ dans ce cas on trouve pas un régime stationnaire [19] les équations différentielles s'écrivent alors

$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t} \quad , \quad \frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda_0\pi_0(t) \quad , \quad \frac{d}{dt}\pi_n(t) = -\lambda(\pi_n(t) - \pi_{n-1}(t))$$

La solution est $\pi_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$.

Représentation de transition d'un processus de naissance et mort

Définition 1.6.0.1. : (Processus de naissance et de mort)

C'est un cas particulier de chaîne de Markov [5] où seules les transitions d'un état à un état voisin sont permises, on s'intéresse au cas continu avec des taux de transition c'est le point de départ de la théorie des files d'attente. On introduit les données suivantes :

λ_n :taux de naissances quand le nombre de population égale à n .

μ_n :taux de morts quand le nombre de population égale à n .

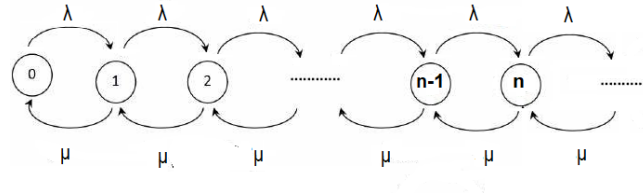


FIGURE 1.1 – Diagramme de transition d'un processus de naissance et de mort.

Ce graphe représente les transitions d'un état à un autre. La transition vers la droite représente une naissance et celle vers la gauche représente une mort.

- Si tous les λ_i sont nuls, on parle de processus de mort.
- Si tous les μ_i sont nuls, on parle de processus de naissance.

Processus de naissance

Définition 1.6.0.2. : Le processus de naissance est la généralisation direct d'un processus de poisson lorsque le paramètre d'intensité λ dépend de l'état courant du processus, il va nous permettre

d'introduire le concept "d'explosion" Si la taille d'une population a une transition $n \rightarrow n + 1$ donc il correspond à une naissance.

Processus de mort

Si la taille d'une population à une transition $n \rightarrow n - 1$ donc il correspond à une mort.

Chapitre 2

Systèmes de files d'attente

La théorie des files d'attente a commencé en 1909 avec les travaux de recherches de l'ingénieur danois Agner Krarup Erlang (1878,1929) sur le trafic téléphonique de Copenhague pour déterminer le nombre de circuits nécessaires afin de fournir un service téléphonique acceptable. Par la suite, les files d'attente ont été intégrés dans la modélisation de divers domaines d'activité [15]. On assista alors à une évolution rapide de la théorie des files d'attente qu'on appliqua à l'évaluation des performances des systèmes informatiques et aux réseaux de communication. Les chercheurs oeuvrant dans cette branche d'activité ont élaboré plusieurs nouvelles méthodes qui ont été ensuite appliquées avec succès dans d'autres domaines, notamment dans le secteur de la fabrication. On a aussi constaté une résurgence des applications pratiques de la théorie des files d'attente dans des secteurs plus traditionnels de la recherche opérationnelle, un mouvement mené par Peter Kolesar et Richard Larson [6]. Grâce à tous ces développements, la théorie des files d'attente est aujourd'hui largement utilisée et ses applications sont multiples.

Définition 2.0.1 (File d'attente) [10]

Une file d'attente est un système dans lequel arrivent des clients auquel des serveurs fournissent un service. Ce formalisme peut être utilisé dans des situations diverses : guichet de poste, trafic routier, traitement des instructions par un processeur, gestion de communications téléphoniques, ateliers de réparation,... etc. On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées clients se présentent d'une manière aléatoire à des stations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire. Dans l'étude de systèmes de files d'attente, on s'intéresse essentiellement à deux grandeurs : le nombre de clients dans le système, et le temps passé par un client dans le système. Ce dernier se décompose en un temps d'attente et un temps de service.

Classification des files d'attente [24] :

Pour décrire une file d'attente, on doit donc se donner les éléments suivants :

- La nature du processus des arrivées qui est définie par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- La distribution du temps aléatoire de service.
- Le nombre s des stations de service.
- La capacité N du système. Si $N < \infty$, la file ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unités. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

Terminologie et notations [4] :

En lien avec la loi exponentielle :

◦ λ : Le taux d'arrivée ; le nombre moyen d'arrivées par unité de temps.

◦ $\frac{1}{\lambda}$: L'intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives.

◦ μ : Le taux de service ; le nombre moyen de clients servis par unité de temps.

◦ $\frac{1}{\mu}$: Temps moyen de service d'un client dans le système.

L'analyse d'un système de file d'attente dépend de l'état initial et du temps écoulé. C'est la situation transitoire où l'étude est très complexe. Dans la théorie des files d'attente l'étude se fait une fois que le système atteint sa situation d'équilibre ; où les états du système sont essentiellement indépendants de l'état initial et du temps déjà écoulé. On suppose que le système est en opération depuis un très long moment.

En situation d'équilibre on note : [7]

◦ \mathbb{P}_n : Probabilité qu'il y ait n clients dans le système.

◦ L_s : Nombre moyen (espérance mathématique) de client dans le système.

◦ L_q : Nombre de clients dans la file d'attente excluant ceux qui sont dans le service.

◦ W_q : Le temps moyen passé par un client dans la file (excluant le temps de service).

Les différents types de files d'attente :

Les figures suivantes représentent les différents systèmes de files d'attente selon l'espace d'attente et l'espace de service figure(2.1), figure(2.2), figure(2.3) :

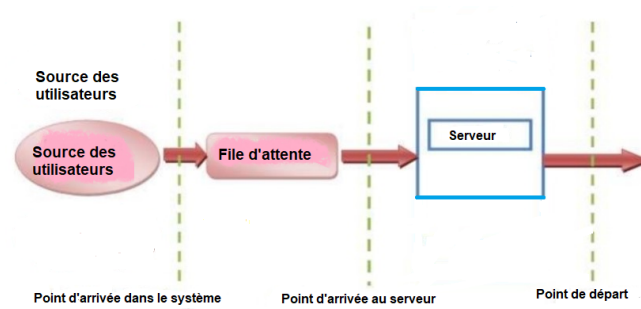


FIGURE 2.1 – File d'attente avec un seul espace d'attente et un seul serveur.

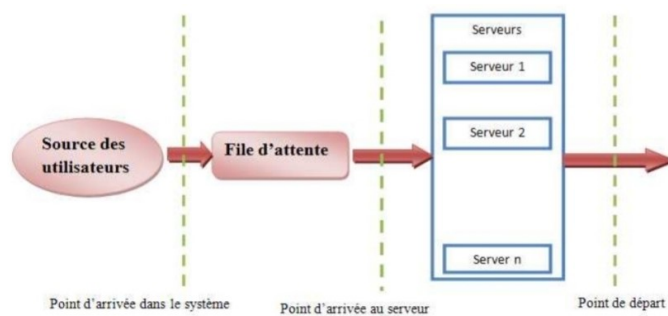


FIGURE 2.2 – File d'attente avec un seul espace d'attente et plusieurs serveurs.

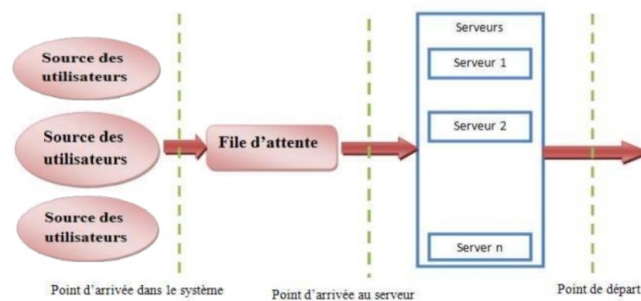


FIGURE 2.3 – File d'attente avec plusieurs espace d'attente et plusieurs serveurs.

2.1 Files d'attente simple

Définition 2.1.1. Une file d'attente simple est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station [20]. Afin de spécifier complètement une file d'attente simple, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que

la structure et la discipline de service de la file d'attente figure(2.4) .

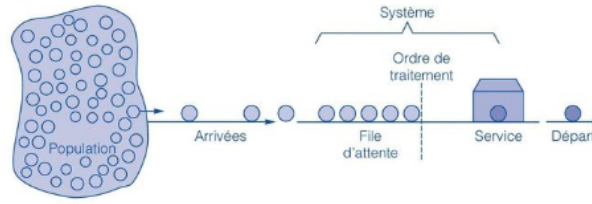


FIGURE 2.4 – File d'attente simple.

Processus d'arrivée

L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$.

- Si A_n désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client dans le système, on aura ainsi : $A_0 = 0$ et $A_n = \inf \{t; N_t = n\}$.
- Si T_n désigne la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du $(n-1)^{\text{ième}}$ client et du $n^{\text{ième}}$ client [21], on a alors :

$$T_n = A_n - A_{n-1}$$

Temps de service

Considérons tout d'abord une file à serveur unique. On note D_n la variable aléatoire mesurant l'instant de départ du $n^{\text{ième}}$ client du système et Y_n la variable aléatoire mesurant le temps de service du $n^{\text{ième}}$ client (le temps séparant le début et la fin du service). Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut en effet qu'un client qui quitte la station laisse celle-ci vide. le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arrivée du prochain client. On note μ le taux de service :

$1/\mu$ est la durée moyenne de service.

Structure de la file

Nombre de serveurs

Une station peut disposer de plusieurs serveurs en parallèle. Soit C le nombre de serveurs. Dès qu'un client arrive à la station, soit il y a un serveur libre, le client entre instantanément en service, soit tous les serveurs sont occupés et le client se place dans la file en attente de libération d'un des

serveurs. Mais on suppose à la plupart du temps que les serveurs sont identiques et indépendants les uns des autres. Une station particulière est la station **IS** (infinite servers) dans la quelle le nombre de serveurs est infini. Cette station ne comporte donc pas de file d'attente.

Capacité de la file :

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit K la capacité de la file, une file à capacité illimitée vérifie $K = +\infty$.

2.2 Loi de Little

La loi de Little est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime permanent du système. Aucune hypothèse sur les variables aléatoires qui caractérisent le système (temps d'inter-arrivées, temps de service,...etc). La seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable. Le débit du système est alors indifféremment soit le débit d'entrée, soit le débit de sortie : $d_s = d_e = d$. La loi de Little s'exprime telle que dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. (Formule de Little) :

Le nombre moyen de clients, le temps moyen passé dans le système et le débit moyen d'un système stable en régime permanent se relient de la façon suivante :

$$\bar{N} = \lambda_e \bar{T}$$

pour une file $(M/M/1)$, $\lambda_e = \lambda$

On a vu que la loi de Little nous dit qu'il existe une relation entre le nombre moyen de clients dans la file (en attente ou en service) et le temps moyen total de séjour d'un client dans la file (temps d'attente + temps de service).

Remarque 2.2.1. :

La loi de Little s'applique à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file $M/M/1$).

Mesure de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente ou d'un réseau de files d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données, et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

$\bar{N} = \mathbb{E}(N)$: nombre moyen de clients dans le système.

$\overline{N_s}$: nombre moyen de clients en train d'être servis.

$\overline{N_Q}$: nombre moyen de clients dans la file d'attente.

N_Q, N_s et N : sont les variables aléatoires correspondantes.

\overline{T} : temps moyen qu'un client passe dans le système.

$\overline{T_s}$: temps moyen de service.

$\overline{T_s}$: temps moyen d'attente d'un client dans la file.

T_Q, T_s et T : sont les variables aléatoires correspondantes.

De manière générale, une file est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté λ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter μ clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est c , une file est stable si et seulement si

$$\lambda < c\mu \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$$

où, ρ est appelé l'intensité du trafic.

Arrivée avant un départ et départ avant une arrivée

▷ Temps pour qu'une nouvelle arrivée se produise :

$$A \sim \exp(\lambda)$$

▷ Temps pour qu'un nouveau départ se produise :

$$D \sim \exp(\mu)$$

(A et D sont indépendantes).

▷ Probabilité qu'une arrivée se produise avant un départ :

$$\mathbb{P}(A < D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

▷ Probabilité qu'un départ se produise avant une arrivée :

$$\mathbb{P}(D < A) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

2.3 Notation de Kendall

La notation suivante, appelée la notation de Kendall, est largement utilisée pour classer les différents systèmes de files d'attente [14] :

$$T/Y/C/K/m/Z$$

avec

1. **T** : indique le processus d'arrivée des clients. Les symboles utilisés sont :
 - M** : Inter-arrivées des clients sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle. Il correspond à un processus de Poisson ponctuel (propriété sans mémoire).
 - D** : Les temps inter-arrivées des clients ou les temps de service sont constants et toujours les mêmes.
 - GI** : Inter-arrivées des clients ont une distribution générale (il n'y a aucune hypothèse sur la distribution mais les inter-arrivées sont indépendantes et identiquement distribuées).
 - G** : Inter-arrivées des clients ont une distribution générale et peuvent être dépendantes.

- E_k** : Ce symbole désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi d'Erlang d'ordre k .
2. **Y** : décrit la distribution des temps de service d'un client. Les codes sont les mêmes que **T**.
3. **C** : nombre de serveurs.
4. **K** : capacité de la file c'est le nombre de places dans le système en d'autre terme c'est le nombre maximal de clients dans le système y compris ceux en service.
5. **m** : population des usagers.
6. **Z** : discipline de service c'est la façon dont les clients sont ordonnés pour être servi. Les codes utilisés sont les suivants :
 - **FIFO** (first in, first out) ou **FCFS** (first come, first served) : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur, termine avant lui.
 - **LIFO** (last in, first out) ou **LCFS** (last come, first served). Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). A nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file mono serveur.
 - **SIRO** (Served In Random Order), les clients sont servis aléatoirement.
 - **PNPN** (Priority service), les clients sont servis selon leur priorité. Tous les clients de la plus haute priorité sont servis premiers, puis les clients de priorité inférieure sont servis, et ainsi de suite.

-PS (Processor Sharing), les clients sont servis de manière égale. La capacité du système est partagée entre les clients.

2.4 Quelques modèles sur les files d'attente

2.4.1 Modèle d'attente M/M/1

Le système de files d'attente M/M/1 est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attente. Le flot des arrivées est poissonnien de paramètre λ et la durée de service est exponentielle de paramètre μ , la discipline d'attente est FIFO, la file d'attente est de capacité infinie [22]. La file peut être considérée comme un processus de naissance et de mort, figure(2.5), pour lequel :

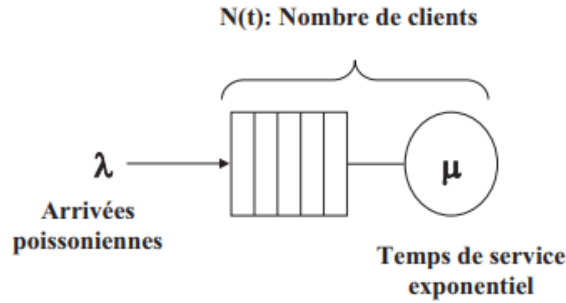


FIGURE 2.5 – La file M/M/1.

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \forall n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Régime transitoire :

Pour ce système, le plus simple de la théorie des files d'attente, le flux des arrivées est poissonnien de paramètre λ et la durée de service est exponentielle de paramètre μ . La capacité d'attente est illimitée et il y a une seule station de service. Le processus (X_t) est markovien (doté de la propriété d'absence de mémoire), ce qui rend son étude aisée. Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de loi exponentielle, nous avons pour un petit intervalle de temps Δt les équations différentielles de Kolmogorov, figure(2.6) :

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) & , n = 0, \\ P'_n(t) = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) & , n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

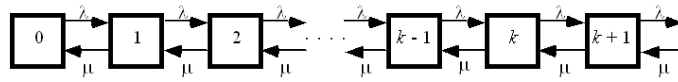


FIGURE 2.6 – Diagramme de file d'attente M/M/1

où

$$P_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n)$$

Régime stationnaire

Quand $t \rightarrow \infty$, on peut montrer que $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$ existent et sont indépendante de l'état initial du processus et que

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\pi = \{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelé distribution stationnaire, elle suit une loi géométrique. On obtient alors un système d'équations linéaires homogène

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 & , n = 0 \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n & , n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

aux quelles on ajoute la condition $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$. En additionnant les $(n+1)$ premières équations, on trouve

$$\mu P_{n+1} = \lambda P_n.$$

D'où

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

alors

$$P_n = (1 - \rho)(\rho)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

à condition que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1.$$

On constate que la file M/M/1 est gouvernée par la loi géométrique.

• $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ est le coefficient d'utilisation du système ou intensité du trafic.

ρ correspond au nombre moyen d'arrivées par la durée moyenne du service.

- $P_0 = 1 - \rho$ correspond à la probabilité que le système soit inoccupé. Si $\rho \geq 1$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ie : la longueur de la file d'attente dépasse toute mesure.

Caractéristiques du système :

Une importante caractéristique des systèmes de files d'attente est

- Le nombre moyen de clients dans le système :

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \mathbb{E}(N) \\ &= \sum_{n \geq 0} n \pi_n \\ &= (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

- le nombre moyen de clients en train d'être servis :

$$\overline{N}_s = 1 - \pi_0 = \rho$$

- le nombre moyen de clients dans la file :

$$\begin{aligned} \overline{N}_Q &= \sum_{n \geq 1} (n - 1) \pi_n \\ &= \frac{\rho^2}{1 - \rho} \end{aligned}$$

De la même manière, on peut trouver,

- * La variance du nombre de clients dans le système

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \text{Var}(X) \\
&= (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} (K - N) \rho^k \\
&= \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}
\end{aligned}$$

Le temps moyen de séjour dans le système. On peut l'obtenir en appliquant la formule de Little.

- *Temps moyen qu'un client passe dans le système :*

$$\begin{aligned}
\bar{T} &= \frac{\bar{N}}{\lambda} \\
&= \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho} \\
&= \frac{1}{\mu - \lambda}
\end{aligned}$$

- *Temps moyen de service :*

$$\bar{T}_s = \frac{1}{\mu}$$

- *Temps moyen d'attente :*

$$\begin{aligned}
\bar{T}_Q &= \bar{T} - \bar{T}_s \\
&= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}
\end{aligned}$$

2.4.2 Modèle d'attente M/M/1/K

Soit K la capacité de la file d'attente : c'est le nombre maximal de clients qui peuvent être présents dans le système, soit en attente, soit en service. Quand un client arrive alors qu'il y a déjà K clients présents dans le système, il est perdu. Ce système est connu sous le nom de file M//M/1//K.

L'espace d'états E est maintenant infini : $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ La capacité de la file étant limitée, même

si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que ce que le serveur de la file est capable de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés. Le nombre de clients dans la file ne peut donc jamais partir à l'infini [25].

De plus, dès qu'un client est autorisé à entrer, il sortira un jour et son temps de séjour dans la file est fini, puisqu'il correspond au temps de service de tous les clients devant lui et que ce nombre est limité par K . Sur un temps très long, le débit de sortie sera donc bien égal au débit d'entrée, ce qui correspond bien à la stabilité inconditionnelle du système.

Le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors défini de la façon suivante, figure(2.7), figure(2.8) :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{si } n < K \\ 0 & \text{si } n > K \end{cases}$$

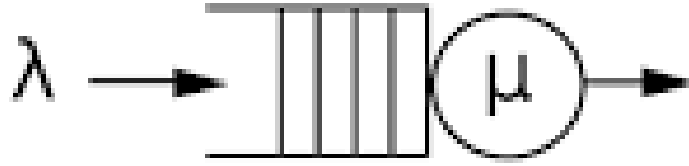


FIGURE 2.7 – La file M/M/1/K.

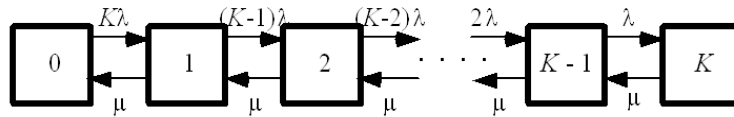


FIGURE 2.8 – Évaluation de l'état dans la file d'attente M/M/1/K.

L'intégration de l'équation récurrente permettant de calculer π_n se fait alors comme suit :

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \rho^n & \text{pour } n \leq K \\ 0 & \text{pour } n > K \end{cases}$$

$$\pi_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{n=0}^K \rho^n} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \\ \frac{1}{K+1} & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

Caractéristiques du système :

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^K n\pi_n = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} \quad (2.1)$$

Lorsqu' K tend vers l'infini et $\rho < 1$, on retrouve les résultats de la file $M/M/1$:

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\bar{N}_Q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \bar{N} - (1 - \pi_0) \quad (2.2)$$

Le temps moyen qu'un client passe dans le système \bar{T} et le temps moyen d'attente dans la file \bar{T}_Q sont obtenus à partir la loi de Little :

- Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} \quad (2.3)$$

- Temps moyen d'attente

$$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda} \quad (2.4)$$

2.4.3 Modèle d'attente M/M/C

On considère un système identique à la file $M/M/1$ excepté qu'il comporte C serveurs identiques et indépendants les uns des autres. On conserve les hypothèses :

- Le processus d'arrivée des clients poissonien de taux λ .
- Le temps de service exponentiel de taux μ .

Ce système est connu sous le nom de file $M/M/C$ [16]. L'espace d'états E est, comme pour la $M/M/1$ infini : $E(0, 1, 2, \dots)$ La file d'attente est de capacité infini. Si l'un des serveurs est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce serveur. Dans le cas contraire, le client prend sa place dans une file d'attente commune pour tous les serveurs. Lorsqu'un serveur se libère, le client

en tête de la file occupe ce serveur. Par conséquent, la discipline d'attente est FIFO.

Le processus de naissance et de mort [1] modélisant ce type de file d'attente est alors défini de la façon suivante, figure(2.9) , figure(2.10) :

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n\mu & \forall n = 1, \dots, C \\ C\mu & \forall n \geq C \end{cases}$$

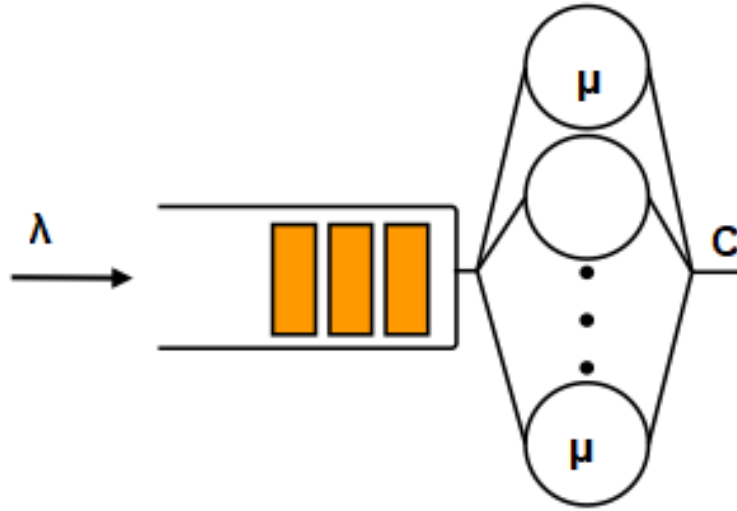


FIGURE 2.9 – La file M/M/C.

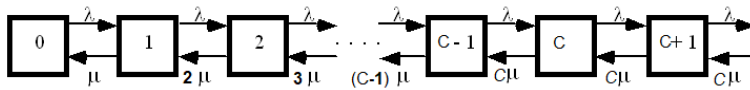


FIGURE 2.10 – Evaluation de l'état dans la file d'attente M/M/C.

D'après le diagramme et l'analyse du système en régime stationnaire, à l'aide de la procédure des équations de Chapman Kolmogorov on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\
(\lambda + n\mu)\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} \quad 1 \leq n < c \\
(\lambda + c\mu)\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1} \quad n \geq c
\end{aligned} \tag{2.5}$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

La résolution du système ci-dessus présente la distribution stationnaire suivante :

$$\overline{N}_Q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \overline{N} - (1 - \pi_0) \tag{2.6}$$

$$\pi_n = \frac{\rho^C}{C!} (A)^{n-C} \pi_0, \quad n \geq C \tag{2.7}$$

où

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!} \sum_{n=C}^{\infty} \rho^{n-C} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ et } A = \frac{\lambda}{C\mu}$$

Cette dernière existe si : $\lambda < C\mu$

Caractéristiques du système :

À partir de la distribution stationnaire du processus $\{N(t), t \geq 0\}$, on peut calculer les caractéristiques du système. En effet,

– Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\overline{N} = \rho + \frac{\rho^{C+1}}{C.C!(1-A)^2} \rho_0 \tag{2.8}$$

– Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\overline{N}_Q = \frac{\rho^{C+1}}{C.C!(1-A)^2} \rho_0 \tag{2.9}$$

– Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\overline{T} = \frac{C\mu\rho^C}{C!(C\mu - \lambda)^2} \rho_0 \tag{2.10}$$

– Temps moyen d'attente

$$\bar{T}_Q = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^C}{\mu C \cdot C!(1-A)^2} \rho_0 \quad (2.11)$$

2.4.4 Modèle d'attente M/M/ ∞

Pour ce modèle de file d'attente, le système est composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il est immédiatement servi (c'est le cas où il n'y a pas d'attente). Dans cette file les clients arrivent à des instants $0 < t_1 < t_2 < \dots$ formant un processus de Poisson de taux λ et les temps de service sont exponentiels de taux μ . Ce système est connu sous le nom de file M/M/ ∞ . Comme cela a été fait pour la file M/M/C, on peut facilement démontrer que le taux de transition d'un état n quelconque vers l'état $n-1$ est égal à $n\mu$ et correspond au taux de sortie d'un des n clients en service [2]. De même, le taux de transition d'un état n vers l'état $n+1$ est égal à λ et correspond au taux d'arrivée d'un client. donc c'est un processus de naissance et de mort avec :

$$\pi_{n-1}\lambda = \pi_n n\mu \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{soit} \quad \pi_n = \frac{\rho}{n} \pi_{n-1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \quad \text{où } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

les probabilités en fonction de π_n .

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

La condition de normalisation nous donne alors immédiatement π_0

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}} \\ &= e^{-\rho} \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

car la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}$ converge pour toutes valeurs de ρ (donc de λ et de μ), ce qui est cohérent avec

la stabilité inconditionnelle de la file.

Caractéristiques du système :

– Nombre moyen de clients \bar{N}

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi_n \\
 &= e^{-\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} \\
 &= e^{-\rho} \rho e^{\rho} \\
 &= \rho
 \end{aligned}$$

– Temps moyen de séjour \bar{T} Intuitivement, le temps moyen passé dans le système est réduit au temps moyen de service, soit $\frac{1}{\mu}$. On peut redémontrer ce résultat en utilisant la loi de Little :

$$\begin{aligned}
 \bar{T} &= \frac{\bar{N}}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{\mu}
 \end{aligned}$$

□

2.5 Systèmes de files d'attente avec impatience

Dans divers domaines, les clients impatients, découragés soit par la qualité de service soit par la longueur de la file d'attente ou abandonnés carrément la file, sont devenus le but de plusieurs études. Ces systèmes qui contiennent des clients impatients ont fait des pertes considérables à l'économie de plusieurs firmes [3].

Dans ce chapitre on s'intéresse aux files d'attente avec rappel, abandon et feedback.

- **Rappel** : Dans une file d'attente les rappels sont caractérisés par la propriété qu'un client qui trouve à son arrivée tous les serveurs occupés quitte l'espace de service et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit en orbite.
- **Abandon** : Après un temps passé dans la file, le client impatient décide de quitter le système sans avoir le service.
- **Feedback** : Le client insatisfait de la qualité du service, décide de quitter la file pour redemander ou compléter son service après un temps aléatoire.

2.5.1 Files d'attente avec rappel

Les systèmes de files d'attente avec rappel sont des systèmes utilisés dans la modélisation des réseaux de télécommunication et dans les systèmes informatiques. Après son arrivée à une station

donnée, un client qui trouve tous les serveurs occupés et ne peut pas recevoir le service immédiatement, quitte le système pour être rappelé ultérieurement à des instants aléatoires jusqu'à satisfaction de sa demande. C'est le cas pour les appels téléphoniques par exemple, entre deux appels successifs, le client en question se trouve en orbite. Un tel système est appelé système de files d'attente avec rappel (retour).

En général un système de files d'attente avec rappels est composé de c serveurs [19] et de $m - c$ places d'attente. Les arrivées des clients dans le système sont aléatoires, et les temps de service distribués selon une loi donnée, mais au moment de son arrivée, un client, qui trouve les serveurs occupés, soit il rejoint la file d'attente soit il quitte l'espace de service pour renouveler sa demande de service après une durée de temps aléatoire. La capacité de l'orbite peut être finie ou infinie. Le client rappelé de l'orbite, est traité de la même manière qu'un client venant de l'extérieur, figure(2.11).

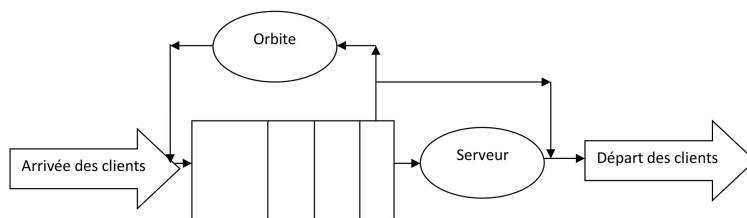


FIGURE 2.11 – système de files d'attente avec rappel

2.5.2 Files d'attente avec abandon

Après un moment passé dans la file, le client décide de quitter le système sans être servi [27].

La théorie des files d'attente avec abandon joue un rôle important dans la modélisation de beaucoup de problèmes de la vie réelle. Ces applications sont utilisées dans plusieurs secteurs (informatique, communication, industrie, ...) ou encore dans les secteurs de la santé et des sciences médicales, figure(2.12).

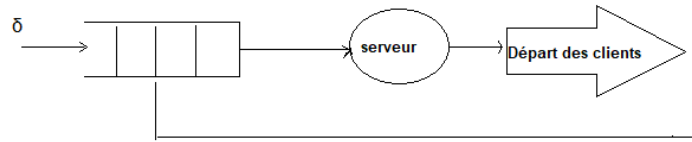


FIGURE 2.12 – système de files d'attente avec abandon

2.5.3 Files d'attente avec feedback

Le client insatisfait de la qualité du service, décide de quitter la file pour redemander ou compléter son service après un temps aléatoire [31], figure(2.13).

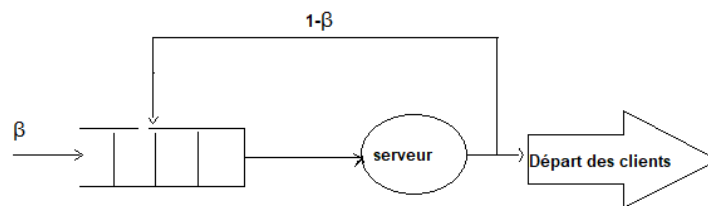


FIGURE 2.13 – système de files d'attente avec feedback

Chapitre 3

Condition de stabilité d'un système de files d'attente avec rappel, abandon et feedback

3.1 Introduction :

Dans la théorie classique des files d'attente, on suppose que tout client qui ne peut pas obtenir de service immédiatement à son arrivée se joint à une file d'attente ou quitte le système pour toujours. Mais il y a des situations réelles où les clients bloqués quittent temporairement la zone de service mais reviennent pour répéter leur demande après un certain temps aléatoire. Ce comportement de file d'attente est appelé files d'attente avec rappel (Parveen et Begum (2014)).

Les files d'attente avec rappel sont caractérisées par la fait que si un client trouve le serveur occupé ou en panne ou en vacances, il peut décider de rejoindre un groupe de clients bloqués dans un espace (appelé orbite) pour répéter leur demandes, ou demander après un certain laps de temps, ou quitter le système immédiatement.

L'étude des files d'attente avec rappel a été une priorité par de nombreux auteurs en raison de sa large applicabilité dans l'accès Web, les systèmes téléphoniques, les réseaux de télécommunication et les réseaux informatiques De nombreux articles dans ce domaine Yang et Templeton (1987) et Falin (1990) [33], et une monographie sur ce sujet est donnée par Falin et Templeton (1997).

Les feedbacks dans les files d'attente représentent l'insatisfaction des clients en raison d'une qualité inappropriée de service. En cas de feedback, après avoir obtenu un service partiel ou incomplet, le client réessaye sa demande de service. Dans la communication informatique, la transmission d'une

unité de données de protocole est parfois répétée en raison d'une erreur. Cela se produit généralement en raison d'une qualité non satisfaisante de service. La reprise dans les opérations industrielles est également un exemple de file d'attente avec rappel (Sharma et Kumar (2014)). Takacs (1963) a été le premier à étudier les modèles de file d'attente avec feedback. L'auteur a étudié files d'attente avec rappel pour déterminer le processus stationnaire pour la taille de la file d'attente et les deux premiers moments de la fonction de distribution du temps total passé dans le système par un client. Études sur la longueur de la file d'attente, le temps total de séjour et le temps d'attente pour une file $M/G/1$ avec Bernoulli ont été donné par Vanden Berg et Boerma (1991). Choi et coll. (1998) ont étudié un modèle $M/M/c$ de file d'attente avec rappel, abandon géométrique et feedback [26] [28] [29]. Santhakumaran et Thangaraj (2000) ont considéré un système de file d'attente avec feedback, serveur unique et impatience. Choudhury et Paul (2005) ont donné la distribution de la taille de la file d'attente à une durée aléatoire et à l'achèvement d'un service pour un modèle $M/G/1$. Thangaraj et Vanitha (2009) ont obtenu des solutions du modèle de file d'attente $M/M/1$ avec feedback, catastrophes en utilisant des fractions continues, la solution d'état d'équilibre, les moments en régime permanent et l'analyse de la période d'occupation sont calculés. Kumar et Sharma (2012) ont analysé un système de file d'attente d'un seul serveur avec rétention des clients abandonnés. Arivudainambi et Godhandaraman (2012) ont considéré un système de file d'attente avec des arrivées par groupes, deux phases de service, feedback, K vacances et rappel [30] [11] [12]. Bouchentouf et al [9] . (2014) ont analysé un modèle de file d'attente avec deux serveurs hétérogènes dérobade, abandon et feedback.

Motivé par la nécessité d'analyser les réseaux de files d'attente avec rappel et par la nécessité de développer des outils qui permettent d'améliorer les paramètres de performance des systèmes de télécommunication (centres d'appels), là où les abandons, les rappels et le feedback surviennent naturellement.

Nous présentons un modèle de file d'attente avec rappel, abandon et feedback des clients, de plus le système est composé de deux orbites. Nous donnons sa condition de stabilité nécessaire.

3.2 Le modèle

Le système markovien de file d'attente avec rappel, deux orbites, abandon et feedback, figure(3.1).

Dans ce modèle, il s'agit de deux flux de clients des orbites Poissonniens indépendants, S_1 et S_2 . le client se dirige vers le serveur unique. Le taux d'arrivée des clients S_i est $\alpha_i, i = 1, 2$, avec $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Les temps de service sont indépendants et distribués de manière exponentielle avec une moyenne $\frac{1}{\mu}$. À son arrivée si le client de type i trouve le serveur (principal) occupé, il est orienté

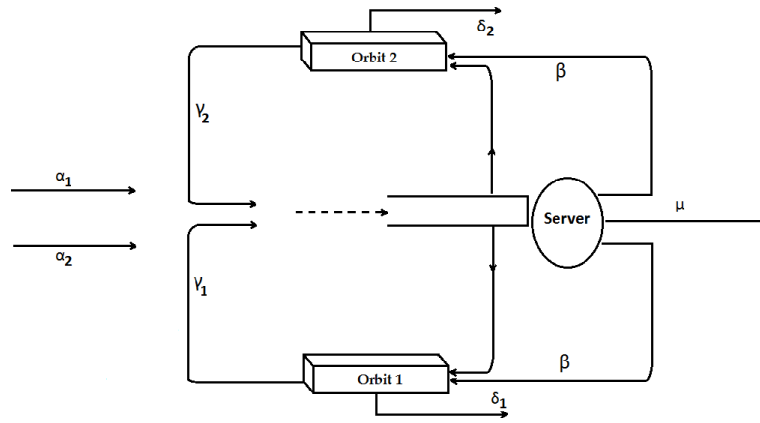


FIGURE 3.1 – Un modèle de file d'attente avec deux orbites, l'abandon et feedback

vers une file d'attente dite (orbite) et redemande le service avec un taux de rappel exponentielle. Les taux de rappels sont différents des taux des d'entrées au système. Ainsi, les clients bloqués dans les orbites de type i forment une file d'attente orbitale à serveur unique de type i qui tentent d'avoir le service. Les taux de rappels sont Poissonnien de paramètres $\gamma_i, i = 1, 2$. Cela crée un système avec trois files d'attente dépendantes. Le client sur l'orbite essaie à nouveau le service après un temps aléatoire ou quitte le système après un temps aléatoire au taux $\delta_i, i = 1, 2$. Une fois que le client est complètement servi, il décide soit de rejoindre de nouveau les clients en orbites pour un autre service avec la probabilité β ou quitter le système définitivement avec la probabilité $\bar{\beta} = 1 - \beta$.

Soit $C(t)$ le nombre de clients dans la file d'attente principale. $C(t)$ prend les valeurs 0 ou 1. Soit $N_i(t)$ le nombre de clients dans la file d'attente orbitale $i, i = 1, 2$. Le processus de Markov $\{(N_1(t), N_2(t), C(t)) : t \in [0, +\infty)\}$ est irréductible sur l'espace d'états $\{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1\}$.

3.3 Résultat principal : condition nécessaire de stabilité

L'objectif principal de ce travail est de donner la condition de stabilité nécessaire à un système de file d'attente avec rappels constants, deux orbites, abandon et feedback des clients. Le résultat principal est donné dans la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. [8]

La condition suivante

$$\frac{\alpha (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2)}{[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha \gamma_1 \gamma_2 - \alpha_1 \delta_1 \gamma_2 - \alpha_2 \delta_2 \gamma_1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\gamma_i + \delta_i} \right) < 1 \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (3.1)$$

et

$$[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\gamma_2 - \alpha_2\delta_2\gamma_1 \neq 0 \quad (3.2)$$

est nécessaire pour la stabilité du système.

Preuve

Le système markovien $\{(N_1(t), N_2(t), C(t)) : t \in [0, +\infty)\}$ de files d'attente avec rappels, c deux orbites, des taux de rappels constants, abandon et feedback, est stable.

Nous devons d'abord montrer que

$$\frac{\alpha (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2)}{[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\gamma_2 - \alpha_2\delta_2\gamma_1} \leq 1 \quad (3.3)$$

et pour $i = 1, 2$

$$\frac{\alpha (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2)}{[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\gamma_2 - \alpha_2\delta_2\gamma_1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\gamma_i + \delta_i}\right) \leq 1 \quad (3.4)$$

sont les conditions nécessaires d'existence d'un état stationnaire.

Présentons les équations d'équilibre et les fonctions génératrices. Considérons le système en état stable, où nous définissons par (N_1, N_2, C) l'état stationnaire de la chaîne de Markov $\{(N_1(t), N_2(t), C(t)) : t \in [0, \infty)\}$. Définir l'ensemble des probabilités stationnaires $P_{n_1 n_2}(c)$ comme suit :

$$\begin{aligned} P_{n_1 n_2}(c) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2, C(t) = c) \\ &= P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, C = c) \end{aligned}$$

pour $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$, et $c = 0, 1$, lorsque ces limites existent. On définit les probabilités marginales

$$P_{n_1}(c) = \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1 n_2}(c) = P(N_1 = n_1, C = c), n_1 = 0, 1, 2, \dots, \quad c = 0, 1$$

et

$$P_{.n_2}(c) = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1 n_2}(c) = P(N_2 = n_2, C = c), n_2 = 0, 1, 2, \dots, c = 0, 1.$$

Maintenant, écrivons les équations d'équilibre

1. $N_2 = n_2 = 0$

1.1. $N_1 = n_1 = 0, c = 0$

$$\alpha P_{00}(0) = \bar{\beta}\mu P_{00}(1) + \delta_1 P_{10}(0) + \delta_2 P_{01}(0) \quad (3.5)$$

1.2. $N_1 = n_1 \geq 1, c = 0$

$$(\alpha + \gamma_1 + \delta_1) P_{n_1 0}(0) = \bar{\beta} \mu P_{n_1 0}(1) + \beta \mu P_{n_1 - 10}(1) + \delta_1 P_{n_1 + 10}(0) + \delta_2 P_{n_1 1}(0) \quad (3.6)$$

1.3. $N_1 = 0, c = 1$

$$(\alpha + \mu) P_{00}(1) = \alpha P_{00}(0) + \gamma_1 P_{10}(0) + \gamma_2 P_{01}(0) + \delta_1 P_{10}(1) + \delta_2 P_{01}(1). \quad (3.7)$$

1.4. $N_1 = n_1 \geq 1, c = 1$

$$\begin{aligned} (\alpha + \mu + \delta_1) P_{n_1 0}(1) = & \alpha P_{n_1 0}(0) + \gamma_1 P_{n_1 + 10}(0) + \gamma_2 P_{n_1 1}(0) \\ & + \delta_1 P_{n_1 + 10}(1) + \delta_2 P_{n_1 1}(1) + \alpha_1 P_{n_1 - 10}(1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

2. $N_2 = n_2 \geq 1$

2.1. $N_1 = 0 \quad c = 0$

$$(\alpha + \gamma_2 + \delta_2) P_{0n_2}(0) = \bar{\beta} \mu P_{0n_2}(1) + \beta \mu P_{0n_2 - 1}(1) + \delta_1 P_{1n_2}(1) + \delta_2 P_{0n_2 + 1}(0). \quad (3.9)$$

2.2. $N_1 = n_1 \geq 1 \quad c = 0$

$$\begin{aligned} (\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) P_{n_1 n_2}(0) = & \beta \mu P_{n_1 - 1n_2}(1) + \beta \mu P_{n_1 n_2 - 1}(1) \\ & + \bar{\beta} \mu P_{n_1 n_2}(1) + \delta_1 P_{n_1 + 1n_2}(0) + \delta_2 P_{n_1 n_2 + 1}(0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

2.3. $N_1 = 0 \quad c = 1$

$$\begin{aligned} (\alpha + \mu + \delta_2) P_{0n_2}(1) = & \alpha P_{0n_2}(0) + \gamma_1 P_{1n_2}(0) + \gamma_2 P_{0n_2 + 1}(0) + \delta_1 P_{1n_2}(1) \\ & + \delta_2 P_{0n_2 + 1}(1) + \alpha_2 P_{0n_2 - 1}(1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

2.4. $N_1 = n_1 \geq 1 \quad c = 1$

$$\begin{aligned} (\alpha + \mu + \delta_1 + \delta_2) P_{n_1 n_2}(1) = & \alpha P_{n_1 n_2}(0) + \gamma_1 P_{n_1 + 1n_2}(0) + \gamma_2 P_{n_1 n_2 + 1}(0) \\ & + \delta_1 P_{n_1 + 1n_2}(1) + \delta_2 P_{n_1 n_2 + 1}(1) + \alpha_1 P_{n_1 - 1n_2}(1) + \alpha_2 P_{n_1 n_2 - 1}(1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

La fonction génératrice de probabilité de l'état stationnaire du processus de Markov $\{(N_1(t), N_2(t), C(t)) : t \in [0, +\infty)\}$ est donné par

$$F(z_1, z_2, z) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{c=0}^1 P_{n_1 n_2}(c) z_1^{n_1} z_2^{n_2} z^c \quad (3.13)$$

Définissons également la fonction génératrice de probabilité (partielle) suivante

$$R_{n_2}^{(c)}(z_1) = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1 n_2}(c) z_1^{n_1}, \quad c = 0, 1, n_2 = 0, 1, \dots$$

et

$$F^{(c)}(z_1, z_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1 n_2}(c) z_1^{n_1} z_2^{n_2} = \sum_{n_2=0}^{\infty} R_{n_2}^{(c)}(z_1) z_2^{n_2}, c = 0, 1. \quad (3.14)$$

$$F(z_1, z_2, z) = F^{(0)}(z_1, z_2) + z F^{(1)}(z_1, z_2), \quad |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$$

pour $n_2 = 0$ et $c = 0$ on multiplie (3.5) et (3.6) par $z_1^{n_1}$, on a

$$((\alpha + \gamma_1 + \delta_1) z_1 - \delta_1) R_0^{(0)}(z_1) - ((\gamma_1 + \delta_1) z_1 - \delta_1) P_{00}(0) = (\bar{\beta} \mu z_1 + \beta \mu z_1^2) R_0^{(1)}(z_1) + \delta_2 z_1 R_1^{(0)}(z_1) \quad (3.15)$$

pour $n_2 = 0$ et $c = 1$ on multiplie (3.8) et (3.9) par $z_1^{n_1}$, on a

$$((\alpha + \mu + \delta_1) z_1 - \delta_1 - \alpha_1 z_1^2) R_0^{(1)}(z_1) - (\delta_1 z_1 - \delta_1) P_{00}(1) = (\alpha z_1 + \gamma_1) R_0^{(0)}(z_1) - \gamma_1 P_{00}(0) + \delta_2 z_1 R_1^{(1)} + \gamma_2 z_1 R_1^{(0)} \quad (3.16)$$

pour $n_2 \geq 1$ et $c = 0$ on multiplie (3.10) et (3.11) par $z_1^{n_1}$, on a

$$((\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) z_1 - \delta_1) R_{n_2}^{(0)}(z_1) - ((\gamma_1 + \delta_1) z_1 - \delta_1) P_{0n_2}(0) = (\bar{\beta} \mu z_1 + \beta \mu z_1^2) R_{n_2}^{(1)}(z_1) + \beta \mu z_1^2 R_{n_2-1}^{(1)}(z_1) + \delta_2 z_1 R_{n_2+1}^{(1)}(z_1) \quad (3.17)$$

pour $n_2 \geq 1$ et $c = 1$ on multiplie (3.12) et (3.16) par $z_1^{n_1}$, on a

$$((\alpha + \mu + \delta_1 + \delta_2) z_1 - \delta_1 - \alpha_1 z_1^2) R_{n_2}^{(1)}(z_1) - (\delta_1 z_1 - \delta_1) P_{0n_2}(1) = (\alpha z_1 + \gamma_1) R_{n_2}^{(0)} z_1 + \gamma_2 z_1 R_{n_2+1}^{(0)}(z_1) + \alpha_2 z_1 R_{n_2-1}^{(1)}(z_1) + \delta_2 z_1 R_{n_2+1}^{(1)}(z_1) - \gamma_1 P_{0n_2}(0) \quad (3.18)$$

En utilisant les équations (3.16) et (3.18) puis en multipliant par $z_2^{n_2}$, on a

$$(z_1 (\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) z_2 - \delta_1 z_2 - \delta_2 z_1) F^{(0)}(z_1, z_2) - (z_1 (\gamma_2 + \delta_2) z_2 - \delta_2 z_1) F^{(0)}(z_1, 0) - (z_1 (\gamma_1 + \delta_1) z_2 - \delta_1) z_2 F^{(0)}(0, z_2) = (\bar{\beta} \mu z_1 z_2 + \beta \mu z_1^2 z_2 + \beta \mu z_1^2 z_2^2) F^{(1)}(z_1, z_2) \quad (3.19)$$

Nous faisons de même avec les équations (3.17) et (3.19)

$$\begin{aligned} & (z_1 (\alpha + \mu + \delta_1 + \delta_2) z_2 - \alpha_1 z_1^2 z_2 - \delta_1 z_2 - \delta_2 z_1 - \alpha_2 z_1 z_2^2) F^{(1)}(z_1, z_2) \\ & - (z_1 z_2 \delta_2 - \delta_2 z_1) F^{(1)}(z_1, 0) + \gamma_2 z_1 F^{(0)}(z_1, 0) \\ & - z_2 (\delta_1 z_1 - \delta_1) F^{(1)}(0, z_2) + \gamma_1 F^{(0)}(0, z_2) \\ & = ((\alpha z_1 + \gamma_1) z_2 + \gamma_2 z_1) F^{(0)}(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Laisser

$$a_1 P_{n_1}.(1) = \gamma_1 P_{n_1+1}.(0) + \delta_1 P_{n_0+1}.(1) \quad (3.21)$$

Récapitulation n_1 , on a

$$1 - F^{(0)}(0, 1) = \left(1 + \frac{\alpha_1}{\gamma_1 + \delta_1}\right) F^{(1)}(1, 1) \quad (3.22)$$

Puis par symétrie

$$1 - F^{(0)}(1, 0) = \left(1 + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 + \delta_2}\right) F^{(1)}(1, 1) \quad (3.23)$$

Puis

$$F^{(1)}(1, 1) = \frac{\alpha (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2)}{[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\gamma_2 - \alpha_2\delta_2\gamma_1}, \quad (3.24)$$

avec $[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\gamma_2 - \alpha_2\delta_2\gamma_1 \neq 0$.

Deuxièmement, nous devons prouver que pour $i = 1, 2$, si

$$\frac{\alpha (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2)}{[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\gamma_2 - \alpha_2\delta_2\gamma_1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\gamma_i + \delta_i}\right) = 1 \quad (3.25)$$

puis les deux files d'attente N_1 et N_2 sont illimités avec la probabilité un.

$$\frac{\alpha (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2)}{[\alpha + (\beta + 1)\mu] (\gamma_1 + \delta_1) (\gamma_2 + \delta_2) - \alpha\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\delta_1\gamma_2 - \alpha_2\delta_2\gamma_1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\gamma_i + \delta_i}\right) = 1$$

de sorte que $F^{(0)}(1, 0) = 0$ à partir de (3.23). Depuis $F^{(0)}(1, 0) = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1,0}(0)$

(voir(3.15)), la condition $F^{(0)}(1, 0) = 0$ implique que

$$P_{n_1,0}(0) = 0 \text{ pour } n_1 = 0, 1, \dots \quad (3.26)$$

de sorte que de (3.6) à (3.7)

$$P_{n_1,0}(1) = 0 \text{ pour } n_1 = 0, 1, \dots \quad (3.27)$$

Nous utilisons maintenant un argument d'induction pour prouver que

$$P_{n_1,n_2}(0) = 0 \text{ pour } n_1, n_2 = 0, 1, \dots \quad (3.28)$$

Nous avons déjà montré dans (3.26) que (3.28) est vrai pour $n_2 = 0$. Suppose que (3.28) est vrai pour $n_2 = 0, 1, \dots, k$ et montrons que c'est toujours vrai pour $n_2 = k + 1$

À partir de (3.11) et de l'hypothèse d'induction, nous obtenons que $P_{n_1,k}(0) = P_{n_1,k}(1) = 0$ pour $n_1 = 1, 2, \dots$. Cette dernière égalité implique, en utilisant (3.16), que $P_{n_2,k+1}(0) = 0$. Cela montre que (3.28) tient pour $n_1 = 0, 1, \dots$, et $n_2 = k + 1$, et complète l'argument d'induction, prouvant que (3.28) est vrai. Nous ont donc prouvé que $P_{n_1,n_2}(0) = 0$ pour tous $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$.

Prouvons que $P_{n_1,n_2}(1) = 0$ pour tous $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$. Ce dernier est vrai pour $n_1, n_2 = 1, 2, \dots$, (3.11). C'est également vrai pour $n_2 = 0, n_1 = 0, 1, \dots$, de (3.27). Il reste à enquêter sur le cas où $n_1 = 0$ et $n_2 = 0, 1, \dots$.

Par (3.10) et (3.28) nous obtenons que $P_{0,n_2}(1) = 0$ pour $n_2 = 1, 2, \dots$, alors que nous avons déjà remarqué que $P_{0,0}(1) = 0$. En résumé, $P_{n_1,n_2}(0) = P_{n_1,n_2}(1) = 0$ pour tous $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$, de sorte que $P(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = P_{n_1,n_2}(0) + P_{n_1,n_2}(1)$ pour tous $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$, ce qui complète la preuve.

□

Conclusion

Le but de ce mémoire, est de donné une condition nécessaire à la stabilité d'un système de file d'attente avec rappels markovien, deux classes d'orbites et des rappels de clients constants, abandon et feedback.

Bibliographie

- [1] Abou El-Ata, M. O. and Hariri, A. M. A. The $M/M/c/N$ queue with balking and reneging. *Computers and Operations Research*. 19 (1992), No. 13 713-716.
- [2] A. Gomez-Corral and M.F. Ramalhoto. On the waiting time distribution and the busy period of a retrial queue with constant retrial rate. *Stochastic Modelling and Applications*, 3, 37-47, (2000).
- [3] Ancker, Jr. , C.J. and Gafarian, A.V. some queuing with balking and reneging :I. *Operartions Research*. 11(1963), No. 1, 88-100.
- [4] Anisimov, V.V., Zakusilo, O.K., and Donchenko, V.S., 1987. *Elements of Queueing Theory and Asymptotic System Analysis*. Vishcha Shkola, Kiev (in Russian).
- [5] Arnaud GUYADER , *Processus Markoviens de sauts* , Université de Rennes 2006/2007.
- [6] Baccelli, F., and Bremaud, P. 1990. *Mathematical Theory of Queues*. SpringerVerlag, Berlin.
- [7] Bagchi, T.P., and Templeton, J.P.C. 1972. *Numerical Methods in Markov Chains and Bulk Queues*. Lecture Note in conomics and Mathematical S ystems 72, Springer-Verlag, New York.
- [8] Bouchentouf, A. A., Kadi, M., and Rabhi, A. (2014). Analysis of two heterogeneous server queueing model with balking, reneging and feedback. *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*, Vol. 2, No. 2, pp. 10-21.
- [9] Bouchentouf, A. A., Sakhi, H. (2015). A note on an $M/M/s$ queueing system with two reconnect and two redial orbits. *Appl. Appl. Math*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-12.
- [10] Cheprasov, V. P. 1985. *Elements of Queueing Theory*. Kazan Aviation Institute (in Russian).
- [11] Choi, B. D., Kim, Y. C., and Lee, Y. W. (1998). The $M/M/c$ Retrial Queue with Geometric Loss and Feedback. *Computers Math. Applic*, Vol. 36, No. 6, pp. 41-52.
- [12] Choi, B.D., Park, K.K., and Pearce, C.E.M. (1993a). An $M/M/1$ retrial queue with control policy and general retrial times. *Queueing Syst*, Vol. 14, pp. 275-292.
- [13] Claudie Chabriac. *Processus stochastiques et modélisation*. (2012-2013).

- [14] Claudie Hassforder CHABRIAC, *Éléments de Théorie des files d'attente*, page 05, Janvier 2008.
- [15] Gelenbe, E., and Pujolle, G. 1987. *Introduction to Queuing Networks*. John Wiley and Sons, Chichester, England (French Original : *Introduction aux réseaux de files d'attente*, Edition Eyrolles ; Paris).
- [16] Gross, D. and C.M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, Wiley, New York, 1975 1984.
- [17] G. Rubino, *Processus Stochastiques*, Février 2006.
- [18] Jean Louis Poss, *Probabilité et statistique version 2.1 Mai 2003* p74.
- [19] J. W. Cohen. *Basic Problems of Telephone Traffic Theory and Influence of Repeated Calls*. *Philips Telecom. Review*, 18(2) :49-100, (1957).
- [20] K.B, GK, *Techniques de modélisation : Méthodes analytiques*.
- [21] Khintchine, A. Y 1969. *Mathematical Methods in the Theory of Queueing*. Second edition, Hafner Publishing Company, New York (First edition : Griffin, London, 1960 ; Russian original : 1955). 859-866.
- [22] Kumar, R. and Sharma, S.K. *An M/M/1/N Queueing Model with Retention of reneged customers and Balking*, *American Journal of Operational Research*. 2(2012), No. 1, 1-5.
- [23] LeGall, P. (1962). *Les systemes avec ou sans attente et les processus stochastiques*, Tome I. Dunod, Paris.
- [24] Newell, G.F. 1982. *Applications of Queueing Theory*. Second edition, Chapman and Hall, London (First edition : 1971)
- [25] Newell, G.F. 1982. *Applications of Queueing Theory*. Second edition, Chapman and Hall, London (First edition : 1971).
- [26] Sharma, S. K., Kumar, R. (2014). *A Single-Server Markovian Feedback Queueing System with Discouraged Arrivals and Retention of Reneged Customers*. *American Journal of Operational Research*, Vol. 4, No. 3, pp. 35-39.
- [27] S. Bocquet. *Queueing Theory with Reneging*. *Defence Science and Thechnology Organisation*. (2005).
- [28] Szpankowski, W. (1994). *Stability conditions for some multiqueue distributed systems : buffered random access systems*. *Adv. Appl. Probab*, Vol. 26, pp. 498-515.
- [29] Takacs, L. (1963). *A single server queue with feedback*. *Bell. Syst. Tech. J*, Vol. 42, pp. 505-519.
- [30] Thangaraj, V., Vanitha, S. (2009). *On the Analysis of M/M/1 Feedback Queue with Catastrophes using Continued Fractions*. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 53, No. 1, pp. 131-151.

-
- [31] Vanden Berg, J.L., and Boxma, O.J. (1991). The $M/G/1$ queue with processor-sharing and its relation to a feedback queue. *Queueing Systems*, Vol. 9, pp. 365-402.
- [32] W.GRASSMANN, Modeling Markovien Queues and Similar Process, Department of Cumputer Science, University of Sakatchewan, 2000. [http ://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/GC/sources/Survie-Sas.pdf](http://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/GC/sources/Survie-Sas.pdf).
- [33] Yang, T., and Templeton, J.G.C. (1987). A survey on retrial queue. *Queueing Syst*, Vol. 2, pp. 201-233.
- [34] Yves Caumel. *Probabilités et processus stochastiques*. Springer. Verlag France,(2011).
- [35] Zakhar Kabluchko, *Stochastic Processes (Stochastik II)*, University of Ulm Institute of Stochastics, (2013-2014).
- [36] Zakhar Kabluchko, *Stochastic Processes (Stochastik II)*, University of Ulm Institute of Stochastics, (2013-2014).