République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2020/2021

Contractions d'algèbres de Lie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Mohamed **H**amiti [1]

Sous la direction de

Dr M. B. Zahaf

Soutenue le 13/07/2021 devant le jury composé de

M. K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. M. B Zahaf	Université AbouBekr Belkaid - Tlemcen	Encadreur
M. H. M. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
M. A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : hamiti.med.am@gmail.com

Dédicaces

A ma Chère Mère Halima
A mon Père Chikh Dont le mèrite,
les sacrifices et les qualités humaines m'ont permis de vivre ce jour.
A Mes frères
Abd alhaq , abd kader, abd ali
A tous les gens qui m'aiment :
Touati Mohamed, Bouazza Mustapha, Mousab Barket, Djamal Mohamdi,...

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier Allah pour cette grâce d'être en vie et en bonne santé, et pour avoir terminé ce travail dans les meilleures conditions et ce malgré toutes les contraintes et les obstacles que nous avons rencontré.
Je tiens à présenter un remerciement bien distingué à mon encadreur Dr. Zahaf Mohammed Brahim pour son soutien, son aide, et ses conseils qui m'ont beaucoup aidé durant l'élaboration de ce mémoire.
En même temps je tiens à exprimer mes remerciements et ma gratitude aux enseignants de l'université de Moulay Tahar, pour leurs dévouements et leurs Assistances tout au long de mes études universitaires.
Je tiens aussi à exprimer ma profonde reconnaissance à tous les membres de jury Dr. K. Djerfi, Dr. H. M. Dida et Dr. A. Zeglaoui d'avoir accepté d'évaluer ce travail.
Enfin je remercie toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et dont les noms ne figurent pas dans ce document.

Table des matières

Introduction

Le processus de contraction d'algèbres de Lie permet d'obtenir à partir d'une algèbre de Lie donnée une nouvelle algèbre de Lie, non isomorphe à la première mais en préservant une partie de sa structure. Il procède par des transformations singulières des éléments infinitésimaux (les générateurs) et, en ce sens, il peut être généralisé à d'autres structures algébriques. A partir d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on construit une famille paramétrée de nouvelles algèbres, $\mathfrak{g}_\varepsilon$, isomorphes à $\mathfrak{g}$ pour $\varepsilon \neq 0$, mais pas pour la valeur singulière $\varepsilon = 0$. Les algèbres $\mathfrak{g}_\varepsilon$, pour $\varepsilon \neq 0$, sont obtenues par re-paramétrisations de $\mathfrak{g}$. Ensuite, la nouvelle algèbre de Lie émerge comme la limite singulière $\varepsilon \to 0$ du paramètre.

Le concept de contractions d'algèbres de Lie introduit par Segal [23] de manière heuristique n'est devenu bien connu qu'après l'invention des contractions d'Inönü-Wigner (IW-contractions) dans [9]. Saletan [22] a donné la première définition générale rigoureuse des contractions et a étudié toute la classe des contractions à un seul paramètre ε pour lesquelles les éléments de la matrice de contraction correspondante sont des polynômes du premier degré en ε. Dans cette classe, les contractions introduites par E. Inönü et E. P. Wigner représentent un cas particulier très simple.

Dans une autre direction les contractions d'Inönü-Wigner généralisées dites aussi contractions de Doebner-Melsheimer [5] représentent l'extension non linéaire en ε des contractions d'Inönü-Wigner normales. Des contractions de type plus général ont été envisagées par d'autres auteurs, en particulier, sous le nom de transitions [21] ou sous le nom de dégénérescences [1, 2, 3, 4, 16].

Les contractions d'algèbres de Lie sont apparues dans différents domaines de la physique et des mathématiques, par exemple dans l'étude des représentations, des invariants et des fonctions spéciales.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

Le chapitre 1 concernera des généralités sur les algèbres de Lie : définitions, exemples, notions de sous-algèbres de lie, d'idéaux, de constantes de structure, de centre, de centralisateur et normalisateur, de morphismes, de représentations. Les trois dernières sections de ce chapitre sont consacrées à la classification des algèbres de Lie, notons qu'il existe différentes familles importantes d'algèbres de Lie qui permettent leur classification : les algèbres de Lie résolubles (l'exemple typique est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures), les algèbres de Lie nilpotente (l'exemple typique est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes), et les algèbres de Lie semi-simples ; un exemple important est l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de trace nulle muni du crochet $[A, B] = AB - BA$. Chaque notion dans ce chapitre est illustrée par un nombre important d'exemples.

Dans le chapitre 2, nous présentons quelques définitions sur la théorie des groupes de Lie. Notons que les algèbres de Lie sont naturellement associées aux groupes de Lie, qui jouent un rôle aussi bien en mathématique qu'en physique (ils décrivent la symétrie continue). La classification des algèbres de Lie est utilisée de façon cruciale pour l'étude des groupes de Lie.

Dans le troisième chapitre, nous donnons la définition des contractions d'algèbres de Lie puis nous citons quelques types simples de contractions notamment les contractions d'Inönü-Wigner, de Saletan et d'Inönü-Wigner généralisées. Ainsi nous donnons les critères nécessaires de contractions, ensuite nous présentons toutes les contractions possibles des algèbres de Lie réelles de dimension 3. Finalement nous terminons ce chapitre par donner la définition des contractions de groupes de Lie inspirée de celles de Mickelsson-Niederle [14], ensuite comme exemples nous montrons que le groupe de Heisenberg H_3 de dimension 3 est une contraction du groupe des déplacements euclidiens du plan $M(2)$, ainsi que le groupe $M(n)$ est une contraction du groupe $SO_0(n, 1)$ (la composante connexe de l'identité du groupe $SO(n, 1)$).

Il est évident que ce mémoire n'a aucune prétention d'innovation, il est la synthèse de plusieurs papiers scientifiques.

Chapitre 1

Algèbres de Lie

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Notion d'algèbre de Lie

Definition 1.1.1. *Une* algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (V, [.,.])$ *de dimension* n *sur* $\mathbb{K}$ *est un espace vectoriel* V *de dimension* n *sur* $\mathbb{K}$*, muni d'un produit bilinéaire antisymétrique* $[.,.]$*, appelé* crochet de Lie*, tel que :*

$$[x, x] = 0 \ \forall x \in V. \qquad \textit{(l'antisymétrie)} \tag{1.1}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \ \forall x, y, z \in V. \tag{1.2}$$

(l'identité de Jacobi)

Proposition 1.1.1. *La condition* (1.1) *est équivalente à la condition*

$$[x, y] = -[y, x]$$

pour tout $x, y \in V$*.*

Démonstration. Supposons que $[x, y] = -[y, x]$ pour tout $x, y \in V$. Alors

$$[x, x] = -[x, x] \Rightarrow [x, x] = 0 \text{ pour tout } x \in V.$$

Inversement, si $[x, x] = 0$ pour tout $x \in V$, alors pour tout $x, y \in V$,

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

$$\Rightarrow [x, y] = -[y, x].$$

□

Proposition 1.1.2. *L'identité de Jacobi (1.2) est équivalente à*

$$[[x,y]\,,z]+[[y,z]\,,x]+[[z,x]\,,y]=0$$

pour tout $x,y,z\in V$.

Démonstration. C'est facile de démontrer, il suffit de multiplier l'identité de Jacobi par -1 et utiliser la proposition précédente □

Considérons maintenant quelques exemples d'algèbres de Lie :

Exemple 1.1.1.
1. Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ muni du crochet $[x,y]=0,\ x,y\in V$, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On voit que les conditions (1.1) et (1.2) sont immédiatement satisfaites.

2. Considérons une algèbre associative $\mathcal{A}$ et définissons un crochet de Lie sur $\mathcal{A}$ en posant

$$[x,y]:=xy-yx$$

Nous devons vérifier que $[x,y]$ est bien un crochet de Lie sur $\mathcal{A}$. Or l'antisymétrie est évidente, et la vérification de l'identité de Jacobi est un calcul simple

$$\begin{aligned}
&[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]\\
=\;&x(yz-zy)-(yz-zy)x+y(zx-xz)\\
&-(zx-xz)y+z(xy-yx)-(xy-yx)z\\
=\;&xyz-xzy-yzx+zyx+yzx-yxz\\
&-zxy+xzy+zxy-zyx-xyz+yxz\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

Le crochet de Lie $[x,y]$ défini ci-dessus est appelé le commutateur de x et y.
3. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V munie du crochet $[A,B]=A\circ B-B\circ A$, est une algèbre de Lie de dimension $dim(V)^2$ sur $\mathbb{K}$. Par exemple si $V=\mathbb{C}^n$ (resp. $V=\mathbb{R}^n$), alors $\mathfrak{gl}(V)$ s'identifie naturellement à l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes (réels). Le crochet de Lie sur $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) est alors défini par le produit matriciel : $[A,B]=A.B-B.A$.

La base standard de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) est l'ensemble des toutes les matrices e_{ij} (ayant 1 en (i,j)-ème position et 0 ailleurs), où $1 \leq i,j \leq n$. Puisque $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, il s'ensuit que les crochets de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) par rapport à sa base standard sont donnés par :

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}.$$

*4. L'espace vectoriel $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de **trace nulle** muni du crochet $[x,y] = xy - yx$, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension n^2-1, appelée **algèbre linéaire spéciale**.*
Prenons tout les e_{ij} $(i \neq j)$, ainsi que tout les $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, pour un total de $n^2 - n + (n-1)$ matrices. Nous considérerons toujours cela comme une base standard de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$.
En particulier, pour $n = 2$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est engendrée par les matrices

$$h = h_1 = e_{11} - e_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations de commutations suivantes

$$[e,f] = h,\ [h,f] = -2f, \quad \textit{et}\ [h,e] = 2e.$$

5. L'algèbre de Heisenberg de dimension 3 est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où x, y, z dans $\mathbb{R}$ muni du crochet des matrices, est une algèbre de Lie et possédant une base $\{X_1, X_2, X_3\}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifiant

$$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = 0,\ [X_2, X_3] = 0.$$

6. L'algèbre $\mathfrak{m}(2)$ *des déplacements euclidiens du plan est l'ensemble des matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta & a \\ \theta & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où θ, a, b *dans* $\mathbb{R}$ *muni du crochet des matrices, est une algèbre de Lie et possédant une base* $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifiant

$$[e_3, e_1] = e_2, \; [e_2, e_3] = e_1 \; \textit{et} \; [e_1, e_2] = 0.$$

7. L'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *composée de toutes les matrices carrées d'ordre* 2 *réelles dont la deuxième ligne est nulle. Les deux éléments*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base et on a $[X_1, X_2] = X_2$.
8. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G *(voir Chapitre 2 pour la définition d'un groupe de Lie) est l'ensemble de tous les champs de vecteurs invariants à gauche sur* G*, le crochet étant le crochet des champs de vecteurs.*

Definition 1.1.2. *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est* abélienne *si* $[x, y] = 0$ *pour tout* x *et* y *dans* $\mathfrak{g}$.

Exemple 1.1.2.

1. *Tout espace vectoriel* V *sur* $\mathbb{K}$ *est muni d'une structure d'algèbre de Lie abélienne sur* $\mathbb{K}$.
2. *Toute algèbre de Lie de dimension* 1 *sur* $\mathbb{K}$ *est abélienne.*

1.1.1 Sous-algèbres de Lie

Definition 1.1.3. *Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est un sous espace vectoriel* $\mathfrak{s}$ *de* $\mathfrak{g}$ *stable par le crochet de Lie i.e.* $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ *ou encore, pour tout* $x \in \mathfrak{s}$ *et* $y \in \mathfrak{s}$ *on a* $[x,y] \in \mathfrak{s}$.

Exemple 1.1.3.

1. *L'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures (ou inférieures) est une sous algèbre de Lie.*
2. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$.

Proposition 1.1.3. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Rappelons que

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}),\ Tr(x) = 0\}.$$

Donc il suffit de montrer que $Tr([x,y]) = 0$ pour $x, y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$. Soit $x, y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$. Alors on a

$$Tr([x,y]) = Tr(xy - yx) = Tr(xy) - Tr(yx) = Tr(xy) - Tr(xy) = 0.$$

□

Proposition 1.1.4. *L'espace des matrices anti-symétriques sur le corps* $\mathbb{K}$*, donné par*

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}),\ x^T + x = 0\}.$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $([x,y])^T + [x,y] = 0$ pour $x, y \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$. Soit $x, y \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$. Alors on a

$$\begin{aligned} ([x,y])^T + [x,y] &= (xy - yx)^T + xy - yx \\ &= y^T x^T - x^T y^T + xy - yx \\ &= (-y)(-x) - (-x)(-y) + xy - yx \\ &= yx - xy + xy - yx \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.1.1 (La sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$). *On note par R_x, R_y et R_z respectivement les trois matrices*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce sont des "rotations infinitésimales" de $\mathbb{R}^3$ autour des axes des x, y, z respectivement.
Clairement, elles forment une base pour $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ (l'algèbre de Lie des matrices d'ordre 3 réelles anti-symétriques) ; elles sont aussi une base, sur $\mathbb{C}$, pour $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$. En utilisant le crochet défini par le produit matriciel, on vérifie que

$$[R_x, R_y] = R_z, \ [R_y, R_z] = R_x, \ [R_z, R_x] = R_y.$$

Proposition 1.1.5. *Soit S une matrice carrée non-singulière (inversible) sur $\mathbb{K}$ et*

$$\mathfrak{g} := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \ Sx^T S^{-1} = -x\}.$$

Alors $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. De plus, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$.

Démonstration. Il est très facile de vérifier que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Ce qui est important est de prouver que $\mathfrak{g}$ est stable par le crochet de Lie dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Autrement dit, nous devons prouver que $[x, y] \in \mathfrak{g}$ dès que x et y sont dans $\mathfrak{g}$.
Soit $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} S([x, y]^T)S^{-1} &= S((xy - yx)^T)S^{-1} \\ &= S(y^T x^T - x^T y^T)S^{-1} \\ &= S(y^T x^T)S^{-1} - S(x^T y^T)S^{-1} \\ &= (Sy^T S^{-1})(Sx^T S^{-1}) - (Sx^T S^{-1})(Sy^T)S^{-1}) \\ &= (-y)(-x) - (-x)(-y) \\ &= yx - xy \\ &= -[x, y]. \end{aligned}$$

ce qui montre que $[x, y]$ appartient à $\mathfrak{g}$.
Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$Tr(Sx^T S^{-1}) = Tr(-x) = -Tr(x).$$

D'autre part, on a

$$Tr(Sx^TS^{-1}) = Tr(x^TSS^{-1}) = Tr(x^T) = Tr(x).$$

Ce qui donne

$$Tr(x) = -Tr(x).$$

Ainsi

$$Tr(x) = 0,$$

et par suite $\mathfrak{g}$ et une sous-algèbre de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. $\square$

Remarque 1.1.2. *Si on pose $S = I_n$ dans la proposition 1.1.5, alors on obtient l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$.*

Exemple 1.1.4. *Soit J_n la matrice carrée d'ordre $2n$ donnée par*

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Si nous appliquons la proposition 1.1.5 à $S = J_n$, alors nous obtenons l'algèbre de Lie symplectique $\mathfrak{sp}(n, K)$, donnée par

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}),\ J_n x^T J_n^{-1} = -x\}.$$

Exemple 1.1.5. *Soit $n = p + q$, où $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Si dans la proposition 1.1.5, S est la matrice carrée d'ordre $p + q$ donnée par*

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p\times q} \\ 0_{q\times p} & I_q \end{pmatrix}.$$

alors on obtient la sous-algèbre de Lie

$$\mathfrak{so}(p, q, \mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{K}),\ I_{p,q} x^T I_{p,q}^{-1} = -x\}$$

de $\mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{K})$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette algèbre de Lie est notée simplement par $\mathfrak{so}(p, q)$. Notons que $\mathfrak{so}(p, 0, \mathbb{K}) = \mathfrak{so}(0, p, \mathbb{K}) = \mathfrak{so}(p, \mathbb{K})$.

On rappelle que l'adjoint d'une matrice complexe x est la matrice $x^* = \overline{x}^T$.

Proposition 1.1.6. *Soit S une matrice carrée non-singulière sur $\mathbb{C}$ et*

$$\mathfrak{g} := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),\ Sx^* S^{-1} = -x\}.$$

Alors $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. De plus, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$.

Démonstration. La preuve est assez similaire à celle de la proposition 1.1.5. □

Exemple 1.1.6. *Dans la proposition 1.1.6, si $S = I_n$, alors on obtient l'algèbre de lie*

$$\mathfrak{u}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),\ x^* = -x\} \tag{1.3}$$

des matrices anti-hermitiennes. Si on considère l'intersection de cette algèbre de Lie avec $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ on obtient l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$

des matrices anti-hermitiennes de trace nulle.
Ici, on a utilisé le fait que l'intersection de deux sous-algèbres de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, qu'on peut facilement vérifier.

Exemple 1.1.7. *Si $n = p + q$ et si, dans la proposition 1.1.6, $S = I_{p,q}$, alors on obtient la sous-algèbre de lie*

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{x \in \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{C}),\ I_{p,q} x^* I_{p,q} = -x\} \tag{1.4}$$

de $\mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{C})$. L'intersection $\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{C})$ est notée par $\mathfrak{su}(p, q)$.

1.1.2 Idéaux dans les algèbres de Lie

Definition 1.1.4. *Un sous espace vectoriel $\mathfrak{s}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{s}$. i.e., pour tout $x \in \mathfrak{s}$ et $y \in \mathfrak{g}$ on a $[x, y] \in \mathfrak{s}$.*

Exemple 1.1.8.

1. *L'algèbre de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.*
2. *Le sous espace vectoriel $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \big\langle \{[x, y]/\ x, y \in \mathfrak{g}\} \big\rangle$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.*
3. *L'espace vectoriel des matrice triangulaires supérieure (resp inférieure) dont les termes diagonaux sont nuls est un idéal de l'algèbre de Lie de matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Remarque 1.1.3. *Tout idéal d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$*. En particulier l'idéal* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *appelé l'algèbre de Lie dérivée (ou commutant de* $\mathfrak{g}$*).*

Remarque 1.1.4. *Il est facile de voir que si* s *et* s' *sont deux Idéaux d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*, il en est de même de* $s + s', s \cap s'$ *et* $[s, s']$*.*

1.1.3 Centre d'une algèbre de Lie

Definition 1.1.5. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *le centre* $Z(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$ *est définie par* $Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g}/\ [x, y] = 0 \quad (\forall y \in \mathfrak{g})\}$*.*

Exemple 1.1.9.

1. *Si* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie abélienne alors* $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$*.*
2. *Le centre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{so}(3)$ *est trivial. Il en est de même pour le centre de* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$*.*
3. *Le centre de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ *est l'ensemble des matrices scalaires i.e.,* $Z(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}$*.*
4. *Le centre de* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ *es trivial.*

1.1.4 Centralisateur et normalisateur

Definition 1.1.6. *Soit* E *un sous-ensemble d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*. Le* normalisateur *(resp.* centralisateur*)* $N_{\mathfrak{g}}(E)$ *(resp.* $Z_{\mathfrak{g}}(E)$*) de* E *dans* $\mathfrak{g}$ *est défini par* $\{x \in \mathfrak{g} | [x, E] \subset E\}$ *(resp.* $\{x \in \mathfrak{g} | [x, E] = 0\}$*).*

En particulier si E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ alors $Z_{\mathfrak{g}}(E) \subset N_{\mathfrak{g}}(E)$.

Exemple 1.1.10.

1. *Si* E *est le sous espace vectoriel de* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K})$ *engendré par la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *alors :*
$$Z_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} /a, b \in \mathbb{K} \right\} \subset N_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} /a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$
2. *Si* E *est le sous espace vectoriel de* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ *engendré par la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *alors :* $Z_{\mathfrak{g}}(E) = N_{\mathfrak{g}}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} /a \in \mathbb{K} \right\}$.

Remarque 1.1.5. *1. Le normalisateur d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{s}$ comme idéal.*

2. Le centralisateur d'un sous-ensemble de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

1.2 Constantes de structure

Soit $\mathfrak{g}$ une l'algèbre de Lie de dimension $n \geq 2$ sur $\mathbb{K}$. Fixons une base $\{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ de $\mathfrak{g}$, en tant que espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Nous avons donc

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^{k} e_k \qquad i, j = 1, ..., n \tag{1.5}$$

où $C_{i,j}^{k} \in \mathbb{K}$.

Definition 1.2.1. *Les constantes $C_{i,j}^{k}$, $1 \leq i, j, k \leq n$ sont appelées les* constantes de structure *de $\mathfrak{g}$ relativement à la base $\{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$.*

Exemple 1.2.1.

1. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne,alors ses coefficients de structure sont tous nuls relativement à toute base de $\mathfrak{g}$.*
2. *Les constantes de structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ relativement à la base $\{X_1, X_2, X_3\}$ sont donnés par : $C_{1,2}^{3} = C_{2,3}^{1} = C_{3,1}^{2} = 1$.*
3. *Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, notons $X_1 = X$ et $X_2 = Y$. Alors les constantes de structure de cette algèbre, relativement à la base $\{X_1, X_2\}$, sont $C_{2,1}^{2} = 1$.*

Proposition 1.2.1. *Le crochet de Lie $[.,.]$ définit une algèbre de Lie de dimension n si et seulement si les constantes de structure vérifient les $n\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]$ conditions d'antisymétrie.*

$$C_{[i,j]}^{k} := C_{i,j}^{k} + C_{j,i}^{k} = 0 \quad i, j, k = 1, 2, 3, ..., n \tag{1.6}$$

et les $n\binom{n}{3}$ relations quadratiques

$$\sum_{l=1}^{n} C_{i,j}^{l} C_{k,l}^{m} + C_{j,k}^{l} C_{i,l}^{m} + C_{k,i}^{l} C_{j,l}^{m} = 0. \quad i, j, k, m = 1, 2, 3, ..., n \tag{1.7}$$

Démonstration. Ces relations ne sont rien d'autre que l'écriture en terme de $C_{i,j}^k$ des axiomes de la définition d'une algèbre de Lie. En effet,

1. pour k fixé et $i,\, j = 1, 2, 3, ..., n$ le nombre de conditions (1.6) est égal à $\binom{n}{2}$ si $i \neq j$ et il est égal à $\binom{n}{1}$ si $i = j$. Alors pour k fixé le nombre de conditions (1.6) est égal à $\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$.

En revanche si k varie dans $\{1, 2, 3, ..., n\}$ alors le nombre de conditions (1.6) est égal à $n\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] = \dfrac{n^2\,(n+1)}{2}$.

2. Pour m fixé et $i, j, k = 1, 2, 3, ..., n$ le nombre de conditions (1.7) est $\binom{n}{3}$. Si m varie dans $\{1, 2, 3, ..., n\}$ alors le nombre de conditions (1.7) est égal à $n\binom{n}{3}$. $\square$

L'ensemble des constantes $\left\{C_{i,j}^k\right\}$ satisfaisant (1.6), (1.7) peut être considéré comme une sous variété $W^n \subset \mathbb{K}^{n^3}$ de dimension

$$\dim W^n \leq n^3 - \frac{n^2\,(n+1)}{2} = \frac{n^2\,(n-1)}{2}. \tag{1.8}$$

En effet, notons par E^n l'espace de tous les ensembles $\left\{C_{i,j}^k\right\}$ satisfaisant (1.6), comme $E^n \subset \mathbb{K}^{n^3}$ il est claire que

$$\begin{aligned} \dim E^n &= n^3 \text{ moins le nombre d'équations "} C_{[i,j]}^k = 0\text{"} \\ &= n^3 - \frac{n^2\,(n+1)}{2} = \frac{n^2\,(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $W^n \subset E^n$ alors

$$\dim W^n \leq \dim E^n = \frac{n^2\,(n-1)}{2}.$$

Remarque 1.2.1. *On a* $\dim W^2 = 2$, $\dim W^3 = 6$ *et pour* $n \geq 3$ *l'inégalité* (1.8) *est stricte.*

1.3 Morphismes d'algèbre de Lie et représentations

1.3.1 Morphisme d'algèbre de Lie

Definition 1.3.1. *Un morphisme d'algèbres de Lie est une application linéaire* $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *qui respecte les crochet de Lie, i.e* $T([x,y]) = [T(x), T(y)]$ *pour tout* x, y *dans* $\mathfrak{g}$.

Il est clair que le noyau (resp. l'image) d'un morphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ d'algèbre de Lie est un idéal (resp. une sous-algèbre de Lie) de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$).

Exemple 1.3.1. *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$*, alors la projection naturelle*

$$\begin{aligned} \pi \ : \ & \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ & x \mapsto x + \mathfrak{a} \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie surjective.

1.3.2 Représentations et représentation adjointe

Definition 1.3.2. *Une représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *est un morphisme d'algèbres de Lie* $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ *(l'algèbre des endomorphismes de* $\mathcal{V}$*). La dimension de cette représentation est la dimension de* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathbb{K}$*. La représentation* $(\phi, \mathcal{V})$ *est fidèle si* ϕ *est injective.*

Definition 1.3.3. *Une représentation* $(\phi, \mathcal{V})$ *est irréductible si les seuls sous espaces vectoriels de* $\mathcal{V}$ *qui sont invariants par* $\mathfrak{g}$ *sont* $\{0\}$ *et* $\mathcal{V}$ *lui même, i.e.,* $(\phi, \mathcal{V})$ *est irréductible si* $\phi(\mathfrak{g})W \subseteq W \Longleftrightarrow W = \{0\}$ *ou* $W = \mathcal{V}$.

Exemple 1.3.2. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *agit naturellement sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *(action d'une matrice réelle carrée d'ordre* n *sur un vecteur de* $\mathbb{R}^n$*).*

Definition 1.3.4. *Le morphisme d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *défini par* $x \longmapsto [x, .]$ *est appelé la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *et est noté ad. L'identité de Jacobi exprime précisément le fait que ad respecte le crochet.*

Exemple 1.3.3. *Considérons l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
Les relations de commutations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ *sont*

$$[e, f] = h, \ [h, f] = -2f, \quad et \ [h, e] = 2e.$$

Ainsi

$ad(h)(e) = 2e + 0f + 0h, \;\; ad(h)(f) = 0e - 2f + 0h, \;\; ad(h)(h) = 0e + 0f + 0h,$

$ad(e)(e) = 0e + 0f + 0h, \;\; ad(e)(f) = 0e + 0f + h, \;\; ad(e)(h) = -2e + 0f + 0h,$

$ad(f)(e) = 0e + 0f - h, \;\; ad(f)(f) = 0e + 0f + 0h, \;\; ad(f)(h) = 0e + 2f + 0h.$

Par conséquent on obtient les matrices $ad(h)$, $ad(e)$ et $ad(f)$

$$ad(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.3.4. *Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ des rotations de l'espace, donc on a :*

$$ad(R_x) = R_x, \; ad(R_y) = R_y, \; ad(R_z) = R_z.$$

Exemple 1.3.5. *Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ nous avons :*

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \, et \, ad(X_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.3.5. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite unimodulaire si $Tr(ad(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.*

Exemple 1.3.6. *Les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sont unimodulaires.*

Definition 1.3.6. *Une* dérivation *de $\mathfrak{g}$ est un endomorphisme D de $\mathfrak{g}$ tel que $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ pour tous x et y dans $\mathfrak{g}$. On notera $Der(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$.*

Exemple 1.3.7. *1. Si $\mathfrak{g} = V$ est un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre de Lie abélienne, alors $Der(\mathfrak{g})$ est l'espace vectoriel de tous les endomorphismes de V.*

2. D'après l'identité de Jacobi, l'endomorphisme $ad(x)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

1.3.3 Forme de Killing

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. nous désignons par V^* le dual vectoriel de V, i.e., l'espace vectoriel des formes sur V. Soient $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ une application bilinéaire et U un sous espace vectoriel de V.

Definition 1.3.7. *Le radical de b est le sous espace vectoriel $rad(b) = \{v \in V/\ b(v, v') = 0, \forall v' \in V\}$ de V. Nous dirons que b est non-dégénérée (resp. dégénérée) si le radical de b est trivial (resp. non trivial).*

Definition 1.3.8. *L'orthogonal de U est le sous espace vectoriel $U^{\perp} = \{v \in V/\ b(v, v') = 0, \forall v' \in U\}$ de V. Nous noterons $b\mid_{U\times U}$ la restriction de b à $U \times U$.*

Proposition 1.3.1.

1. *$rad(b\mid_{U\times U}) = U \cap U^{\perp}$, si de plus est non dégénérée alors :*
2. *$dim(U) + dim(U^{\perp}) = dimV$.*
3. *$U + U^{\perp} = V \Longleftrightarrow b|_{U\times U}$ est non dégénérée.*

Démonstration. (1)- C'est une simple reformulation des définitions.
(2)- Considérons les application linéaires $\phi : V \longrightarrow V^*$ et $\psi : V \longrightarrow U^*$ définies par $v \longmapsto b(v, .)$. En particulier, $Ker(\psi) = U^{\perp}$,et ϕ est un isomorphisme si et seulement si, b est non-dégénérée. Soit U' un sous espace vectoriel de V tel que $V = U \oplus U'$ Tout élément u^* de U^* définit un élément v^* de V^* tel que $v^*|_U = u^*$ et $v^*|_{U'} = 0$. Puisque ϕ est un isomorphisme, alors il existe v dans V tel que $\phi(v) = v^*$, de sotre que $\psi(v) = u^*$, i.e ψ est surjective, et donc $dim(V) = dim(im(\psi)) + dim(Ker(\psi)) = dim(U) + dim(U^{\perp})$.
(3)- C'est une conséquence directe de (1) et (2). □

Remarque 1.3.1. *Il se peut que b soit non dégénérée mais que sa restriction à $U \times U$ est dégénérée.*

Exemple 1.3.8. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x = y\}$ et $b((x, y),(x', y')) = xx' - yy'$ donc $U^{\perp} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/xt - yt = 0\, \forall t \in \mathbb{R}\}$*

Definition 1.3.9. *On appelle* forme de Killing *de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'application κ définie par*

$$\begin{aligned} \kappa \ :\ & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K} \\ & (x, y) \mapsto Tr(ad(x) \circ ad(y)) \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2. *L'application* κ *est*

1. *bilinéaire et symétrique.*
2. *ad-invariant i.e.,* $\kappa(ad(x)(y), z) + \kappa(y, ad(x)(z)) = 0$*, pour tout* x, y, z *dans* $\mathfrak{g}$ *avec*
3. $\kappa(x, y) = (1/2)(\kappa(x + y, x + y) - \kappa(x, x) - \kappa(y, y))$*, pour tout* x, y *dans* $\mathfrak{g}$*.*

Démonstration. (1) et (3) sont facile à vérifier. Pour (2) on a

$$ad([x, y]) = [ad(x), ad(y)]$$

et

$$Tr(f \circ g) = Tr(g \circ f)$$

donc

$$\begin{aligned}
& \kappa(ad(x)(y), z) + \kappa(y, ad(x)(z)) = \kappa([x, y], z) + \kappa(y, [x, z]) \\
= \;& Tr(ad([x, y]) \circ ad(z)) + Tr(ad(y) \circ ad([x, z])) \\
= \;& Tr(ad(x) \circ ad(y) \circ ad(z) - ad(y) \circ ad(x) \circ ad(z) \\
& +(ad(y) \circ ad(x) \circ ad(z) - (ad(y) \circ ad(z) \circ ad(x)) \\
= \;& Tr(ad(x) \circ ad(y) \circ ad(z) - ad(y) \circ ad(z) \circ ad(x)) \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.3.9. *Considérons l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
On a déjà calculer les matrices de $ad(h)$, $ad(e)$ *et* $ad(f)$*. Ainsi la matrice* κ *associée à la forme de Killing est donnée par*

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa(e, e) & \kappa(e, f) & \kappa(e, h) \\ \kappa(f, e) & \kappa(f, f) & \kappa(f, h) \\ \kappa(h, e) & \kappa(h, f) & \kappa(h, h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.3.10.

1. *Pour tout* A *et* M *dans* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *nous avons* $ad(A)^2(M) = A^2M - 2AMA + MA^2$ *de sorte que* $\kappa(A, A) = 2nTr(A^2) - 2(Tr(A))^2$*.*
2. *En utilisant l'exemple précédent, nous trouvons que* $\kappa(A, A) = 2nTr(A^2)$ *pour tout* A *dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$*.*

3. *pour l'algèbre de Lie* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, *nous avons* $\kappa(X,X) = 1$, $\kappa(X,Y) = 0$ *et* $\kappa(Y,Y) = 0$.
4. *Le radical de la forme de Killing* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *est trivial, donc* κ *est non dégénérée.*
5. *Considérons l'algèbre* $\mathfrak{so}(3)$ *des "rotations infinitésimales" de l'espace. Nous trouvons* $\kappa(X,X) = -2(a^2+b^2+c^2)$ *pour tout* $X = aR_x + bR_y + cR_z$.

1.4 Algèbres de Lie nilpotentes

Dans ce qui suit le corps $\mathbb{K}$ est quelconque, en particulier sa caractéristique n'est pas nécéssairement nulle et il n'est pas nécéssairement algébriquement clos.

Definition 1.4.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$. *On pose pour tout entier* $i \geq 0$,

$$\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g} \text{ et } \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \subseteq \mathfrak{g}^i$$

La suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1, \cdots, \supseteq \mathfrak{g}^i \supseteq \cdots$ *est appelée la suite centrale descendante de* $\mathfrak{g}$

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathbb{K}$ *est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule á partir d'un certain rang, i.e., s'il existe un entier* $k \geq 1$ *tel que* $\mathfrak{g}^k = \{0\}$.

Si $\mathfrak{g}^{k-1} \neq \{0\}$ *et* $g^k = \{0\}$, *on dit que* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente de cran (nilindex)* k.

Exemple 1.4.1.

1. *Tout algèbre de Lie abélienne est nilpotente.*
2. *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieures dont les éléments diagonaux sont nuls,*

$$\mathfrak{g} = \{x \in M(n, \mathbb{K},\ x_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j\}.$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\mathfrak{g}^k = \{x \in \mathfrak{g},\ x_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j-k\}.$$

En particulier $\mathfrak{g}^{n-1} = 0$, *et* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente de nilindex* $n-1$.

3. *De même l'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires inférieures, dont les éléments diagonaux sont nuls, est nilpotente.*
4. *Soit* n *un entier naturel non-nul. L'algèbre de Heisenberg* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{2n+1}$ *est l'algèbre de Lie réelle de dimension* $2n+1$ *engendrée par* $2n+1$ *éléments* X_i, Y_i *et* Z, $i = 1, \dots, n$, *soumis aux seuls crochets non-nuls* $[X_i, Y_i] = Z$. *Ainsi* $\mathfrak{g}^1 = \mathbb{K}Z$, *qui est le centre de* $\mathfrak{g}$, *et* $\mathfrak{g}^2 = \{0\}$. *Donc* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente de nilindex* 2.

Definition 1.4.2. *Une algèbre de Lie nilpotente de dimension n est appelée filiforme si son nilindex est égal à $n-1$.*

Exemple 1.4.2. *L'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{f}_{n+2}$ de dimension $n+2$, définie dans la base $\{X_0, X_1, ...X_n, Y\}$ par*

$$[Y, X_j] = X_{j-1},\ j = 1, 2, ..., n.$$

est filiforme.
Notons que $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{f}_3$.

Proposition 1.4.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.*

1. *Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors le centre de $\mathfrak{g}$ n'est pas trivial.*
2. *Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors, tout élément X de $\mathfrak{g}$ est $ad-$nilpotent, i.e. $ad(X)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$.*
3. *Si l'algèbre de Lie $ad(\mathfrak{g}) = \{ad(W)/\ W \in \mathfrak{g}\}$ est une algèbre de lie nilpotente alors $\mathfrak{g}$ nilpotente*
4. *Toute sous-algèbre ou tout quotient d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotent.*
5. *Si $\mathfrak{h}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$ et si l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}|\mathfrak{h}$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Démonstration. (1)- C'est une conséquence immédiate de la définition d'une algèbre de Lie nilpotente.
(2)- Nous avons $ad^j(X)Y \in \mathfrak{g}_{(j)}$ pour tout X et Y dans $\mathfrak{g}$, et $j \geq 1$. D'autre part, puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente, il existe un entier k tel que $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$, et donc $ad^k(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, ce qui démontre (2).
(3)- Puisque $ad(\mathfrak{g})^j = ad(\mathfrak{g}^j)$, alors nous avons $ad(\mathfrak{g})^j = \{0\} \Longrightarrow \mathfrak{g}^{j+1} = \{0\}$.
(4)- Si $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{s}^j \subseteq \mathfrak{g}^j$ pour tout j. Si h est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}|\mathfrak{h}$ la surjection canonique, on a $(\mathfrak{g}|\mathfrak{h})^j \subseteq \pi(\mathfrak{g}^j)$, de sorte que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, alors les algèbres $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{g}|\mathfrak{h}$ sont nilpotentes.
(5)- Soit $\mathfrak{h}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}|\mathfrak{h}$ est nilpotente alors il existe un entier k pour lequel $(\mathfrak{g}|\mathfrak{h})^k \subseteq \mathfrak{h}$, i.e., $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{0\}$ puisque $\mathfrak{h}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$. □

Théorème 1.4.1 (Théorème d'Engel)**.** *[13] Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V de dimension $r = 1$ sur $\mathbb{K}$. Si $\rho(X)$ est un endomorphisme nilpotent de V, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, Alors*

1. *il existe un vecteur non nul v de V tel que $\rho(X)v = 0$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$.*
2. *il existe une chaîne de sous-espace vectoriel $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$ tels que $dim(V_j) = j$ et $\rho(X)V_j \subset V_{(j-1)}$ pour tout j. Autrement dit, il existe une base de V dans laquelle tout endomorphisme $\rho(X)$ de V, $X \in \mathfrak{g}$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont nuls.*
3. *Si $ad(X)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Corollaire 1.4.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotent sur $\mathbb{K}$. Il existe une chaîne d'idéaux de $\mathfrak{g}$:*
$\mathfrak{g}^0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}^1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}^r = \mathfrak{g}$ tels que $dim(\mathfrak{g}^j) = j$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{j-1}$ pour tout j Autrement dit, il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle tout endomorphisme $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les élément diagonaux sont nuls.

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation du théorème de Engel avec $V = \mathfrak{g}$ et $\rho = ad$. □

1.5 Algèbres de lie résolubles

Dans ce qui suit, sauf mention, le corps $\mathbb{K}$ est arbitraire

Definition 1.5.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une Algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On pose pour tout $j \geq 0, \mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$, avec $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supseteq \cdots$ est appelée la suite dérivée de $\mathfrak{g}$.*

Definition 1.5.2. *Une Algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est résoluble si la suite des commutateurs s'annule à partir d'un certain rang, i.e., s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$.*

Exemple 1.5.1.

1. *Tout Algèbre de Lie nilpotente est résoluble, puisque $\mathfrak{g}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}^j$ pour tout j.*
2. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ est de dimension 2. Une base est constituée de deux éléments X_1, X_2 vérifiant*
$$[X_1, X_2] = X_2.$$
Ainsi $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathbb{R}X_2$, $\mathfrak{g}^{(2)} = \{0\}$. Donc $\mathfrak{g}$ est résoluble, mais n'est pas nilpotente.

3. *Soit l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. *Elle possède une base* $\{e, f, h\}$ *vérifiant*

$$[e, f] = h, \ [h, f] = -2f, \quad et\ [h, e] = 2e.$$

Ainsi $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}_{(1)} = \mathfrak{g}$. *Donc* $\mathfrak{g}$ *n'est ni nilpotente, ni résoluble.*

4. *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieures*

$$\mathfrak{g} = \{x \in M(n, \mathbb{K}), \ x_{ij} = 0 \ si\, i > j\}.$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \{x \in \mathfrak{g}, \ x_{ij} = 0 \ si\, i > j - 2^{k-1}\}.$$

Par suite $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ *si* $2^{k-1} \geq n-1$. *Ainsi* $\mathfrak{g}$ *est résoluble, mais n'est pas nilpotente.*

5. *L'algèbre de Lie réelle de dimension* 3 *engendrée par trois éléments* A, X *et* Y *soumis aux seuls crochets non-nuls* $[A, X] = X - Y$ *et* $[A, Y] = X + Y$ *est résoluble mais pas nilpotente.*

Proposition 1.5.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$.

1. *Si* $\mathfrak{g}$ *est résoluble, tout sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *est résoluble. En particulier un idéal dans une algèbre de résoluble est résoluble.*
2. *Si* $\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$, *alors l'algèbre quotient* $\mathfrak{g}|\mathfrak{h}$ *est résoluble.*
3. *Si* $\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{g}|\mathfrak{h}$ *sont résolubles, alors* $\mathfrak{g}$ *résoluble.*

Démonstration. Soient $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ la surjection canonique et $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Il est clair que $(\mathfrak{g}^{(j)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(j)}$ et $\mathfrak{s}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}^{(j)}$ pour tout $j \geq 0$. Cela prouve (1) et (2).
pour (3), supposons que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} = \{0\}$ et $(\mathfrak{h})^{(l)} = \{0\}$. On a $(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} = \{0\}$ et $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{h}$, de sorte que $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subseteq (\mathfrak{h})^{(l)} = \{0\}$. □

Proposition 1.5.2. *La somme de tous les idéaux résoluble de* $\mathfrak{g}$ *est l'unique idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$ *contenant tous les résoluble de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Pour la résolubilité de $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, nous appliquons (2) et (3) de la proposition 1.5.1 à l'isomorphisme $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2 \simeq \mathfrak{h}_1/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$. □

Théorème 1.5.1. *(Théorème de Lie)[13] Supposons que $\mathbb{K}$ soit un corps algèbreiquement clos de caractérisrtique nulle. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V non trivial sur $\mathbb{K}$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors :*

1. *il existe un vecteur non nul commun à tous les $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$, i.e il existe une fonction scalaire $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que $\rho(X)v = \lambda(X)v$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$;*
2. *il existe une suite $V_0 = \{0\} \subset \cdots \subset V_r = V$ de sous-espace vectoriel de V dans laquelle tous les endomorphisme $\rho(X), X \in \mathfrak{g}$, prennent la forme de matrices triangulaires supérieures.*

Corollaire 1.5.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractŕistique nulle.*

1. *$\mathfrak{g}$ résoluble si seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotente ;*
2. *$\mathfrak{g}$ est résoluble alors il existe une suite $\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$ d'idèaux de $\mathfrak{g}$ telle que pour tout j, $dim(\mathfrak{g}_j) = j$, $\mathfrak{g}_j$ est un idéal dans $\mathfrak{g}_{j+1}$ et $\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j$ est une algèbre de Lie abélienne, i.e., $[\mathfrak{g}_{j+1}, \mathfrak{g}_{j+1}] \subset \mathfrak{g}_j$.*

Démonstration. (1)- Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors, d'aprés le théorème de Lie, il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $ad(X), X \in \mathfrak{g}$, prend la forme d'une matrice triangulaire supérieure, de sorte que $ad[X, Y] = [ad(X), ad(Y)]$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont nuls. Ainsi tous les endomorphisme $ad([X, Y]), X, Y \in \mathfrak{g}$ sont nilpotents. D'après le théorème d'Engel, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est une algèbre de Lie nilpotente. Réciproquement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente alors elle est résoluble, et donc $\mathfrak{g}$ est résoluble puisque $\mathfrak{g}^{(j)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{(j-1)}$.
(2)- Il suffit d'appliquer le théorème de Lie à la reprśentation adjointe de $\mathfrak{g}$, i.e., $V = \mathfrak{g}$ et $\rho = ad$. □

1.6 Algèbres de Lie simples

Definition 1.6.1. *Une algèbre de Lie est simple si elle est non abélienne et si elle ne contient pas d'idéaux propres non triviaux.*

Exemple 1.6.1. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ *est simple.*
En effet, supposons que $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ soit un idéal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Soit $v \neq 0$ un élément de $\mathfrak{a}$, et écrivons $v = \alpha e + \beta f + \gamma h$, où α, β et γ ne sont pas tous nuls. Supposons que $\alpha \neq 0$.

Alors d'après les relations de commutation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $[v,f] = \alpha h - 2\gamma f \in \mathfrak{a}$, *et donc* $[[v,f],f] = -2\alpha f \in \mathfrak{a}$. *Ainsi* $f \in \mathfrak{a}$, *et donc* $h = [e,f] \in \mathfrak{a}$ *et aussi* $e = \frac{1}{2}[h,e] \in \mathfrak{a}$. *Ainsi* $\alpha \neq 0$ *implique que* $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. *Un argument similaire montre que* $\beta \neq 0$ *implique* $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.
Enfin, si $\gamma \neq 0$, *alors* $[v,e] = -\beta h + 2\gamma e \in \mathfrak{a}$, *donc par un argument similaire du précédent montre que* $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

1.7 Algèbres de Lie semi-simples

Dans ce paragraphe le corps $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Definition 1.7.1. *On appelle* radical *d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$, *noté* $Rad(\mathfrak{g})$ *l'idéal résoluble qui contient tout idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$ *(il existe toujours et il est unique voir proposition 1.5.2).*

Exemple 1.7.1. *Le radical de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ *est trivial.*

Definition 1.7.2. *Une algèbre de Lie est semi-simple si elle ne contient pas d'idéaux résoluble non triviaux, i.e., si* $Rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Exemple 1.7.2. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{so}(3)$ *est semi-simple.*

Proposition 1.7.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur le corps* $\mathbb{K}$

1. *L'algèbre de Lie quotient* $\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g})$ *est semi-simple.*
2. *Si* $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.
3. *Si* $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*
4. *Si* $\mathfrak{g}$ *est simple alors le centre de* $\mathfrak{g}$ *est trivial.*
5. *Si* $\mathfrak{g}$ *est simple alors tout idéal de* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*
6. *Si* $\mathfrak{g}$ *est simple alors* $\mathfrak{g}$ *est la somme directe de deux idáux semi-simples.*

Théorème 1.7.1. *[10] Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *et* κ *la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. κ *est non-dégénérée.*
2. $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

3. $\mathfrak{g}$ *est une somme directe* $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ *d'idéaux simples de* $\mathfrak{g}$. *Cette décomposition est unique à une permutation près sur les* i, *et tout idéal de* $\mathfrak{g}$ *est une somme de ces* $\mathfrak{g}_i$.

Exemple 1.7.3. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ *est semi-simple.*
On a déjà calculer la matrice associée à la forme de Killing

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

et $\det \kappa = -32 \neq 0$.

Definition 1.7.3. *Une sous-algèbre de Lie nilpotente* $\mathfrak{h}$ *d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *qui est égale à son normalisateur dans* $\mathfrak{g}$ *est dite sous-algèbre de* Cartan *de* $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.7.2. *[10] Une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple complexe est abélienne.*

Chapitre 2

Groupes de Lie

2.1 Définitions et exemples

Definition 2.1.1. *Un groupe de Lie est un sous-ensemble non vide, G, satisfaisant les conditions suivantes :*
1. G est un groupe (avec l'élément neutre noté e).
2. G est une variété différentiable.
3. L'application

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 g_2^{-1} \end{array} \tag{2.1}$$

est $\mathcal{C}^\infty$.

Il y a aussi une notion de groupe de Lie complexe, dont la définition est obtenue à partir de la définition ci-dessus en remplaçant le mot variété différentiable par le mot variété analytique complexe et la condition $\mathcal{C}^\infty$ par analytique complexe.

Exemple 2.1.1. *1. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition vectorielle et l'ensemble des nombres complexes non nul $\mathbb{C}^*$ muni de la loi de multiplication sont des groupes de Lie.*
2. Le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ est un groupe de Lie avec la multiplication induite de $\mathbb{C}^*$.
3. Le n-tore T^n qui est une variété peut être vu comme un ensemble constitué de tous les $n \times n$ matrices diagonales à entrées complexes de module 1, c'est-à-dire pour tout

$M \in T^n$

$$M = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{2\pi i\theta_n} \end{pmatrix}, \ \theta_i \in \mathbb{R}.$$

Ainsi T^n est un groupe et les opérations de groupe, multiplication et inversion matricielles sont clairement $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent, le n-tore est un groupe de Lie.
4. Le groupe linéaire général réel $GL(n,\mathbb{R})$, est l'ensemble de toutes les n×n-matrices réelles inversibles muni de la loi de composition définie par la multiplication usuelle des matrices. Il est aussi une variété différentiable. Il est facile de voir que les applications $(a,b) \mapsto ab$ et $a \mapsto a^{-1}$ sont $\mathcal{C}^\infty$. Donc c'est un groupe de Lie.
De même $GL(n,\mathbb{C})$, l'ensemble de toutes les n×n-matrices complexes inversibles, est naturellement un groupe de Lie.
5. Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit la multiplication sur G par

$$(a_1, x_1) \cdot (a_2, x_2) = (a_1 a_2, a_1 x_2 + x_1).$$

Pour cette opération, $(1,0)$ est l'élément neutre de G et $(a^{-1}, -a^{-1}x)$ est un élément inverse pour chaque $(a,x) \in G$. L'associativité est facile à vérifier et il est clair que la multiplication et l'inverse sont $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent, G est le groupe de Lie et est appelé le groupe des déplacements affines de $\mathbb{R}$. Si l'on identifie l'élément (a,x) de G avec le déplacement affine $t \mapsto at+x$, alors la multiplication dans G est la composition des déplacements affines.

2.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Rappelons qu'un champ de vecteurs X sur une variété différentiable M est une application qui à tout point p de M fait correspondre un vecteur tangent X_p appartenant à $T_p(M)$.
Si le champ de vecteurs X est défini dans un ouvert U, soit p un point de U et soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des coordonnées locales dans V, voisinage de p contenu dans U. Pour tout $q \in V$, le vecteur X_q s'exprime par rapport à la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$ de $T_q(M)$ par

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q .$$

Les a_i sont les composantes du champ de vecteur relativement aux coordonnées $x_1, x_2, ..., x_n$.
Le champ de vecteurs X est différentiable dans un voisinage de p, si dans ce voisinage $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des fonctions différentiables.
Un tel champ de vecteurs X définit par la formule $X(f) = (x \mapsto X_p(f))$ un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire X de $\mathcal{C}^\infty(U)$ dans lui-même qui vérifie la relation $X(fg) = gX(f) + fX(g)$. Inversement une telle application définit un unique champ de vecteurs.
Soit X et Y deux champs de vecteurs sur un ouvert U d'une variété M. Soit

$$[X,Y] : f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$

l'endomorphisme $X \circ Y - Y \circ X$ de $\mathcal{C}^\infty(U)$. C'est encore un champ de vecteurs. En effet, si f et g sont deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on a

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\
&= (X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f))) \\
&\quad -(Y(f)X(g) + fY(X(g)) + Y(g)X(f) + gY(X(f))) \\
&= f(X(Y(g)) - Y(X(g))) + g(X(Y(f)) - Y(X(f))) \\
&= f[X,Y](g) + g[X,Y](f),
\end{aligned}$$

si bien que $[X,Y]$ est un champ de vecteurs sur U. On l'appelle le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y.

Definition 2.2.1. *Étant donné un groupe de Lie G, pour tout $g \in G$ on définit la translation à gauche comme l'application, $l_g : G \to G$, telle que $l_g x = gx$, pour tout $x \in G$, et la translation à droite comme l'application, $r_g : G \to G$, tel que $r_g x = xg^{-1}$, pour tout $x \in G$.*
Un champs de vecteur X sur G est dite invariant à gauche *si pour tout $g \in G$ on a $dl_g \circ X = X \circ l_g$. ($dl_g$ est la différentielle de l_g en un point de G).*

Remarque 2.2.1. *Puisque l'application (2.1) est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les applications l_g et r_g sont des difféomorphismes, et leurs dérivées jouent un rôle important.*

Proposition 2.2.1. *[24] Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs invariant à gauche sur G.*

1. $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel, et l'application

$$\begin{aligned} \beta \ &: \ \mathfrak{g} \to T_eG \\ & \quad X \mapsto \beta(X) = X(e) \end{aligned} \tag{2.2}$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur T_eG l'espace tangent de G en l'élément neutre e. Par conséquence, $dim\mathfrak{g} = dimT_eG = dimG$.

2. Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariant à gauche est un champs de vecteurs invariant à gauche.

3. $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie muni du crochet de Lie sur les champs de vecteurs.

Démonstration. 1. Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} dl_g \circ (X+Y) &= dl_g \circ X + dl_g \circ Y \qquad (dl_g \text{ est linèaire} \\ &= X \circ l_g + Y \circ l_g \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}) \\ &= (X+Y) \circ l_g. \\ dl_g(kX) = kdl_g(X) &= k(X(l_g)) = (kX)(l_g). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel réel. D'une autre part, β est clairement linéaire par définition.

β est injective : Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ avec $\beta(X) = \beta(Y)$ alors $X(e) = Y(e)$. Donc pour $g \in G$, on a

$$X(g) = X(ge) = X(l_g(e)) = dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e)) = Y(l_g(e)) = Y(ge) = Y(g).$$

ce qui implique que $X = Y$.

β est surjective : Soit $u \in T_eG$ et pour $g \in G$ définissons $X(g) = dl_g(u)$ alors $\beta(X) = X(e) = dl_e(u) = u$. X est invariant à gauche puisque pour $h \in G$:

$$X(l_h(g)) = X(hg) = dl_{hg}(u) = dl_h(dl_g(u)) = dl_h(X(g)).$$

Ce qui montre que β est surjective.

2. Soient $g \in G$ et f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de $l_g(x)$ où $x \in G$ alors

$$\begin{aligned} dl_g[X,Y](f) &= [X,Y](f \circ l_g) \\ &= X[Y(f \circ l_g)] - Y[X(f \circ l_g)] \\ &= X[dl_g(Y)(f)] - Y[dl_g(X)(f)] \\ &= X[Y(l_g)(f)] - Y[X(l_g)(f)] \\ &= (XY)(l_g)(f) - (YX)(l_g)(f) \\ &= [X,Y](l_g)(f). \end{aligned}$$

Ainsi $[X, Y]$ est invariant à gauche.
3. Elle est immédiate à partir des propriétés du crochet des champs de vecteurs. $\square$

Definition 2.2.2. *L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs invariants à gauche sur G.*

On peut aussi définir l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie par l'espace tangent en l'élément neutre T_eG de G muni de la structure d'algèbre de Lie induite par l'isomorphisme (2.2).

Proposition 2.2.2. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$ *est l'algèbre de Lie de* $GL(n, \mathbb{K})$.

Démonstration. Nous allons démontrer le premier cas pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puisque le second cas i.e., pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ peut être considéré de manière analogue à partir du premier cas. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Il suffit de prouver qu'il existe un isomorphisme d'algèbre de Lie entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Pour le voir, soit x_{ij} les fonctions de coordonnées naturelles sur $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ qui assignent à chaque matrice sa ij-ième entrée et soit : $T_e(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est l'identification canonique, c'est-à-dire si $u \in T_e(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$,

$$\alpha\left(u = \sum_{i,j=1}^{n} u(x_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} u(x_{ij}) e_{ij}$$

où e_{ij} est la base standard pour l'espace des matrices.
Alors

$$\alpha(u)_{ij} = u(x_{ij}).$$

Mais $T_e(GL(n, \mathbb{R})) = T_e(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ puisque $GL(n, \mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Ainsi, on peut définir l'application $\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ par

$$\beta(X) = \alpha(X(e)).$$

β est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels puisque les applications $X \to X(e)$ et α sont des isomorphismes. Donc, nous n'avons besoin que prouver pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\beta([X, Y]) = [\beta(X), \beta(Y)].$$

On a

$$(x_{ij} \circ l_A)(B) = x_{ij}(AB) = \sum_k x_{ij}(A) x_{kj}(B)$$

où

$$A = (x_{ij}(A))_{ij},\ B = (x_{ij}(B))_{ij} \in G$$

et puisque Y est un champ de vecteur invariant à gauche alors

$$\begin{aligned}
(Y(x_{ij}))(A) &= Y_A(x_{ij}) \\
&= dl_A(Y_e)(x_{ij}) = Y_e(x_{ij} \circ l_A) \\
&= Y_e\left(\sum_k x_{ik}(A)x_{kj}\right) = \sum_k x_{ik}(A)Y_e(x_{kj}) \\
&= \sum_k x_{ik}(A)\alpha(Y_e)_{kj} = \sum_k x_{ik}(A)\beta(Y)_{kj}.
\end{aligned}$$

A partir de ce résultat on peut calculer la ij-ième composante de $\beta([X, Y])$:

$$\begin{aligned}
\beta([X,Y])_{ij} &= \alpha([X,Y]_e)_{ij} \\
&= [X,Y]_e(x_{ij}) \\
&= X_e(Y(x_{ij})) - Y_e(X(x_{ij})) \\
&= X_e\left(\sum_k x_{ik}\beta(Y)_{kj}\right) - Y_e\left(\sum_k x_{ik}\beta(X)_{kj}\right) \\
&= \sum_k X(x_{ik})\beta(Y)_{kj} - \sum_k Y(x_{ik})\beta(X)_{kj} \\
&= \sum_k \alpha(X_e)_{ik})\beta(Y)_{kj} - \sum_k \alpha(Y_{ik})\beta(X)_{kj} \\
&= (\beta(X)\beta(Y))_{ij} - (\beta(Y)\beta(X))_{ij} \\
&= [\beta(X), \beta(Y))]_{ij}.
\end{aligned}$$

Ainsi β est un isomorphisme d'algèbres de Lie. □

2.3 Groupes de Lie des matrices

Definition 2.3.1. *Soient $M(n, \mathbb{C})$ l'espace de toutes les $n \times n$-matrices complexes et (A_m) une suite d'éléments de $M(n, \mathbb{C})$. On dit que (A_m) converge vers une matrice A si chaque élément matriciel de (A_m) converge (quand $m \to \infty$) vers l'élément matriciel correspondant de A (c'est-à-dire si $(A_m)_{kl}$ converge vers A_{kl} pour tout $1 \leq k, l \leq n$).*

Definition 2.3.2. *Un groupe de Lie matriciel est tout sous-groupe G de $GL(n,\mathbb{C})$ avec la propriété que, si (A_m) est une suite quelconque de matrices dans G, et (A_m) converge vers une matrice A alors soit $A \in G$, soit A n'est pas inversible. Il est équivalent de dire qu'un groupe de Lie matriciel est un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{C})$ (Ceci n'est pas nécessairement fermé dans $M(n,\mathbb{C})$).*

Exemple 2.3.1. *1. Le groupe linéaire spécial sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), noté $SL(n,\mathbb{K})$, est le groupe de $n\times n$-matrices inversibles (avec entrées dans $\mathbb{K}$) ayant le déterminant égal à 1,*

$$SL(n,\mathbb{K}) = \{A \in GL(n,\mathbb{K}) |\det(A) = 1\}.$$

Il est clair que c'est un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{C})$. En effet, $\forall A, B \in SL(n,\mathbb{K})$, on a

$$\det(AB^{-1}) = \det A \det(B^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$$

ce qui implique que $AB^{-1} \in SL(n,\mathbb{K})$. De plus, si (A_m) est une suite dans $SL(n,\mathbb{K})$ qui converge vers une matrice A, alors tous les A_m ont le déterminant 1 et A aussi puisque le déterminant est un fonction continue. Ainsi, $SL(n,\mathbb{R})$ et $SL(n,\mathbb{C})$ sont des groupes de Lie matriciels.
2. On définit le groupe orthogonal $O(n)$ par

$$O(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | A^T A = AA^T = I_n\}$$

où A^T désigne la matrice transposée de A et I_n est la matrice identité de taille n. Il est clair que $O(n)$ est un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ puisque pour toute matrice $A \in O(n)$, A a comme inverse A^T dans $O(n)$ et pour toutes matrices $A, B \in O(n)$, on a $AB \in O(n)$ puisque

$$\begin{aligned}(AB)^T(AB) &= B^TA^TAB = B^TI_nB = B^TB = I_n,\\ (AB)(AB)^T &= ABB^TA^T = AI_nA^T = AA^T = I_n.\end{aligned}$$

Pour voir que $O(n)$ est fermé dans $GL(n,\mathbb{R})$, notons que le singleton qui contient la matrice identité $\{In\}$ est fermé dans $GL(n,\mathbb{R})$ et chaque fois que nous avons $A^TA = I_n$ dans $GL(n,\mathbb{R})$ alors $AA^T = I_n$ et vice-versa. De sorte que $O(n)$ peut être exprimé comme

$$\{A \in GL(n,\mathbb{R}) | A^TA = I_n\}$$

ou

$$\{A \in GL(n,\mathbb{R}) | AA^T = I_n\}.$$

Considérons l'application $T : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ *définie par* $A \mapsto A^TA$. T *est continue puisque les éléments de* A^TA *sont des polynômes d'éléments de* A *; à savoir,* $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$ *où* $A = [a_{ij}]$. *Alors* $O(n) = T^{-1}(\{I_n\})$ *est fermé dans* $M(n,\mathbb{R})$ *et donc fermé dans* $GL(n,\mathbb{C})$. *Ainsi* $O(n)$ *est un groupe de Lie matriciel.*
Considérons maintenant la restriction de l'application déterminant à $O(n)$, $\det_{O(n)} : O(n) \to \mathbb{R}$ *et notons que pour toute matrice* $A \in O(n)$,

$$[\det(A)]^2 = \det A \det A = \det(A^T)\det A = \det(A^TA) = \det(I_n) = 1.$$

Cela implique $detA = \pm 1$ *donc on obtient que* $O(n) = O^+(n) \cup O^-(n)$ *où*

$$O^+(n) = \{A \in O(n) |\ \det A = 1\},$$

$$O^-(n) = \{A \in O(n) |\ \det A = -1\}$$

avec $O^+(n) \cap O^-(n) = \emptyset$.
On définit le groupe orthogonal spécial par :

$$SO(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) |\ A^TA = I_n \ et\ \det A = 1\} = O^+(n)$$

Il est claire que $SO(n)$ *est un sous-groupe de* $GL(n,\mathbb{R})$ *et est fermé puisque* $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$ *est l'intersection de deux sous-groupes fermés de* $GL(n,\mathbb{R})$ *(également de* $M(n,\mathbb{R})$*). Par conséquent,* $SO(n)$ *est un groupe de Lie matriciel.*
Géométriquement, les éléments de $O(n)$ *sont soit des rotations, soit des combinaisons de rotations et de réflexions. Par contre, les éléments de* $SO(n)$ *ne sont que des rotations. Ainsi, occasionnellement, nous appelons* $SO(n)$ *le groupe des rotations.*
3. On définit le groupe unitaire $U(n)$ *et le groupe unitaire spécial* $SU(n)$ *par :*

$$\begin{aligned} U(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) |\ A^*A = AA^* = I_n\}, \\ &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) |\ A^*A = I_n\}, \\ &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) |\ AA^* = I_n\} \\ SU(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) |\ A^*A = I_n \ \ et\ \det A = 1\}, \\ &= U(n) \cap SL(n,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

où A^* *désigne l'adjoint de* A $((A^*)_{ji} = \overline{A_{ij}}$ *).* $U(n)$ *est un sous-groupe de* $GL(n,\mathbb{C})$ *puisque pour tout* $A, B \in U(n)$,

$$(AB^{-1})^*(AB^{-1}) = (AB^*)^*(AB^*) = BA^*AB^* = BI_nB^* = BB^* = I_n.$$

Aussi $SU(n)$ est clairement un sous-groupe de $U(n)$. Comme dans le cas de $O(n)$, $U(n)$ est fermé dans $M(n,\mathbb{C})$ et donc fermé dans $GL(n,\mathbb{C})$ puisqu'il s'agit d'une image inverse de la fonction continue $A \mapsto A^*A$ d'un ensemble fermé $\{I_n\}$. $SU(n)$, qui est l'intersection de deux ensembles fermés, est fermé. Par conséquent, $U(n)$ et $SU(n)$ sont des groupes de Lie matriciels.

4. Le groupe de Heisenberg H_3 est l'ensemble des matrices réelles 3×3 de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & t \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Il est facile de voir que H_3 est un sous-ensemble de $GL(n,\mathbb{R})$ et est fermé par multiplication usuelle de matrices. La matrice identité I_3 est clairement dans H_3 et l'inverse de toute matrice de la forme (2.3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & ab-t \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

De plus, la limite de suite de matrices de la forme (2.3) est encore de cette forme. par conséquent H_3 est un groupe de Lie matriciel. Notons qu'on peut regarder le groupe de Heisenberg H_3 comme l'ensemble des triplets de nombres réels (a,b,t) muni de la loi

$$(a,b,t).(a',b',t') = (a+a', b+b', t+t'+ab').$$

L'élément neutre est $(0,0,0)$ et $(a,b,t)^{-1} = (-a,-b,-t+ab)$.

5. Le groupe $SO(n,m)$: le sous-groupe de $GL(n+m,\mathbb{R})$ des $(n+m)\times(n+m)$-matrices g telles que $\det g = 1$ et qui préservent la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^{n+m}$ donnée par

$$< x, y >_{n,m} = -x_1y_1 - \cdots - x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1} + \cdots + x_{n+m}y_{n+m}$$

(i.e., tel que $< gx, gy >_{n,m} = < x, y >_{n,m}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{n+m}$).

6. Le groupe des déplacements de l'espace euclidien à n-dimensions $M(n)$: est l'ensemble $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ des couples (k,v) muni de la loi

$$(k,v).(k',v') = (kk', v+k.v').$$

L'élément neutre est $(e,0)$ *(e est la rotation unité) et* $(k,v)^{-1} = (k^{-1}, -k^{-1}v)$*. C'est un groupe qu'on peut réaliser comme groupe de matrices sous la forme suivante :*

$$g = \begin{pmatrix} k & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $k \in SO(n)$ *et* $v \in \mathbb{R}^n$*.*

Definition 2.3.3. *Soient G et H deux groupes de Lie.*

1. Un homomorphisme de groupes de Lie *est une application* $\phi : G \to H$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *qui est un homomorphisme de groupes abstraits.*

2. Un isomorphisme de groupes de Lie *est un homomorphisme de groupes de Lie* $\phi : G \to H$ *bijectif.*

3. Un automorphisme *de G est un isomorphisme de G dans lui même.*

Exemple 2.3.2. *1. L'application* det : $GL(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ *est un homomorphisme de groupes de Lie puisque* det *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *pour toutes les matrices A et* $B \in GL(n,\mathbb{C})$*.*

2. L'application $f : \mathbb{R} \to SO(2)$ *donnée par* $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ *est un homomorphisme de groupe de Lie puisque f est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et*

$$\begin{aligned}
f(s+t) &= \begin{pmatrix} \cos(s+t) & -\sin(s+t) \\ \sin(s+t) & \cos(s+t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos s\cos t - \sin s \sin t & -\sin s \cos t - \cos s \sin t \\ \sin s \cos t + \cos s \sin t & \cos s \cos t - \sin s \sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\
&= f(s)f(t).
\end{aligned}$$

2.4 Algèbre de Lie du groupe de Lie des matrices

Rappelons que si X est une $n \times n$-matrice alors l'exponentielle de X est donnée par la série entière convergente

$$e^X = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}. \tag{2.5}$$

Remarque 2.4.1. *Rappelons que la norme de Hilbert-Schmidt de toute matrice $X \in M(n, \mathbb{C})$ est définie par :*

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

cette norme satisfait les inégalités suivantes

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

La série (2.5) converge uniformément et l'application exponentielle

$$\begin{array}{rcl} exp : M(n, \mathbb{C}) & \rightarrow & M(n, \mathbb{C}) \\ X & \mapsto & e^X \end{array}$$

est continue. En effet, Soit $R > 0$ alors pour tout X tel que $\|X\| \leq R$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} = e^R < \infty$$

ceci implique que la série converge absolument et uniformément sur l'ensemble $\{\|X\| \leq R\}$. Puisque R est arbitraire, la série converge uniformément. Pour la continuité, remarquons que X^k est une fonction continue de X alors les sommes partielles de la série sont continues. Puisque la série converge uniformément, alors l'application exp est continue.

Proposition 2.4.1. *[7] Soient X et Y $n \times n$-matrices arbitraires. Alors on*

1. $e^0 = I_n$.

2. $\left(e^X\right)^* = e^{X^*}$.

3. e^X *est inversible et* $\left(e^X\right)^{-1} = e^{-X}$.

4. $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$ *pour tous* α *et* $\beta \in \mathbb{C}$.

5. Si $XY = YX$ *alors* $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$.

6. Si C *est inversible, alors* $e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}$.

Proposition 2.4.2. *Pour tout* $X \in M(n, \mathbb{C})$*, on a*

$$\det(e^X) = e^{Tr(X)}.$$

Démonstration. Si X est diagonalisable avec valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, alors e^X est diagonalisable avec valeurs propres e^{λ_1}, e^{λ_2},...,e^{λ_n}. Ainsi, $Tr(X) = \sum_j \lambda_j$ et

$$\det(e^X) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} = e^{Tr(X)}.$$

Si X n'est pas diagonalisable, on peut l'approximer par des matrices diagonalisables. □

Definition 2.4.1. *[7] Une fonction* $A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$ *est dite sous-groupe à un paramètre de* $GL(n, \mathbb{C})$ *si*

1. A *est continue.*

2. $A(0) = I_n$,

3. $A(t + s) = A(t)A(s) \, \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.4.1. *[7] Si* $A(.)$ *est un sous-groupe à un paramètre de* $GL(n, \mathbb{C})$*, alors il existe une unique* $n \times n$*-matrice* X *telle que*

$$A(t) = e^{tX}.$$

Lemme 2.4.1. *[24] Si* G *est un sous-groupe de Lie de* $GL(n, \mathbb{C})$ *(non nécessairement fermé) et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie alors l'application exponentielle*

$$exp : \mathfrak{g} \to G.$$

envoie l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *de* G *dans* G

Proposition 2.4.3. *Soit* G *un sous-groupe de Lie de* $GL(n, \mathbb{C})$ *et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie alors*

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \; e^{tX} \in G, \; \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tel que $e^{tX} \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $X \in T_e G = \mathfrak{g}$ puisque $\alpha(t) = e^{tX}$ est une courbe sur G et $\alpha(0) = e$; $\alpha'(0) = X$. Inversement, si $X \in \mathfrak{g}$ alors d'après le lemme 2.4.1, $e^{tX} \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

La proposition 2.4.3 est utile pour calculer les algèbres de Lie des sous-groupes de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$ (y compris les groupes de Lie matriciels). Nous pouvons donner la définition des algèbres de Lie des groupes de Lie matriciels comme suit

Definition 2.4.2. *[7] Soit G un groupe de Lie matriciel, c'est à dire un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{C})$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est l'ensemble de toutes les matrices X telles que $e^{tX} \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

De manière équivalente, X est dans $\mathfrak{g}$ si et seulement si le sous-groupe à un paramètre (Définition 2.4.1) engendré par X est dans G. Notons que le simple fait d'avoir e^X dans G ne garantit pas que X est dans $\mathfrak{g}$. Même si G est un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{C})$ (et pas nécessairement de $GL(n,\mathbb{R})$), nous n'exigeons pas que e^{tX} soit dans G pour tous les nombres complexes t, mais seulement pour tous les nombres réels t.

Théorème 2.4.2. *[7] Soit G un groupe de Lie matriciel, avec $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, alors on a*

1. $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ pour tout $A \in G$.

2. $sX \in \mathfrak{g}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

3. $X + Y \in \mathfrak{g}$.

4. $XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Il résulte de ce théorème que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel est une algèbre de Lie, avec crochet de Lie donné par $[X,Y] = XY - YX$.

Proposition 2.4.4. *$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$) est l'algèbre de Lie de $SL(n,\mathbb{C})$ (resp. $SL(n,\mathbb{R})$).*

Démonstration. Rappelons que

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ Tr(X) = 0\}.$$

Si $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ alors $Tr(X) = 0$, d'après la proposition 2.4.2 on a

$$\det(e^{tX}) = e^{Tr(tX)} = e^{tTr(X)} = 1,$$

Ainsi $e^{tX} \in SL(n,\mathbb{C})$. Inversement, Si

$$\det(e^{tX}) = e^{Tr(tX)} = e^{tTr(X)} = 1,$$

$$Tr(X) = \frac{d}{dt} e^{tTr(X)}|_{t=0} = 0.$$

□

Proposition 2.4.5. *$\mathfrak{u}(n)$ (resp. $\mathfrak{su}(n)$) est l'algèbre de Lie de $U(n)$ (resp. $SU(n)$).*

Démonstration. Rappelons que

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),\ X^* = -X\} \tag{2.7}$$

Si $X \in \mathfrak{u}(n)$ alors $X^* = -X$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left(e^{tX}\right)^{-1} = e^{-tX} = e^{tX^*} = \left(e^{tX}\right)^* \tag{2.8}$$

ce qui implique que $e^{tX} \in U(n)$. Inversement, Si (2.8) est vérifié alors par différentiation par rapport à t en $t = 0$ on obtient $X^* = -X$. Ainsi, $\mathfrak{u}(n)$ est l'algèbre de Lie de $U(n)$.
Par analogie pour $SU(n)$ en ajoutant la condition « déterminant 1 » au niveau du groupe et la condition « trace 0 » au niveau de l'algèbre de Lie. □

Proposition 2.4.6. *$\mathfrak{so}(n)$ est en même temps l'algèbre de Lie de $O(n)$ et $SO(n)$.*

Démonstration. Rappelons que

$$\mathfrak{so}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}),\ X^T + X = 0\}.$$

Un argument exactement similaire à la preuve de la Proposition 2.4.5 montre qu'une matrice réelle X appartient à l'algèbre de Lie de $O(n)$ si et seulement si $X^T = -X$. Puisqu'une telle matrice a $Tr(X) = 0$ (car les éléments diagonaux de X sont tous nuls), on voit que tout élément de l'algèbre de Lie de $O(n)$ est aussi dans l'algèbre de Lie de $SO(n)$. □

Proposition 2.4.7. *L'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg H_3 est $\mathfrak{h}_3$, l'espace de toutes les matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

où x, y, z dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si X est triangulaire strictement supérieure, il est facile de vérifier que X^m est aussi triangulaire strictement supérieur pour tous les entiers positifs m. Ainsi, pour $X \in \mathfrak{h}_3$, on a $e^{tX} = I + B$ avec B est triangulaire strictement supérieure, ceci montre que $e^{tX} \in H_3$. Inversement, si e^{tX} appartient à H_3 pour tout réel t, alors tous les éléments extradiagonaux de e^{tX} sont indépendants de t. Ainsi

$$X = \frac{d}{dt} e^{tX}|_{t=0}$$

sera de la forme en (2.9). $\square$

2.5 Groupe de transformations

Definition 2.5.1. *Un* groupe de transformations *est un triplet $(G, \mathcal{X}, .)$, où G est un groupe, $\mathcal{X}$ est un espace et "." est une action de G sur $\mathcal{X}$, i.e., une application $G \times \mathcal{X} \ni (g, x) \mapsto g.x \in \mathcal{X}$ satisfaisant :*
1. A l'élément neutre e du groupe G correspond la transformation identique $e.x = x$.
2. Pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a $(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x)$.

Exemple 2.5.1. *1. Soient l er r les translations à gauche et à droite par un élément de G, on peut vérifier que (G, G, l), (G, G, r) sont des groupes de transformations.*
2. Soit l'automorphisme intérieur α_g qui est une transformation $\alpha_g : G \to G$ définie par $\alpha_g(x) = gxg^{-1}$ (l'action adjointe), alors (G, G, α) est aussi un groupe de transformations.

Soit $(G, \mathcal{X}, .)$ un groupe de transformations et $x \in \mathcal{X}$, l'ensemble G_x de tout les éléments $g \in G$ tel que $g.x = x$ est appelé *(sous) groupe stabilisateur* de x. L'ensemble $O_x := \{g.x, \ g \in G\}$ est appelé *orbite* de x sous l'action de G.
Fixons un ensemble $A \subset \mathcal{X}$. L'ensemble $O_A := \cup_{x \in A} O_x$ est appelé orbite de A sous l'action de G.

Definition 2.5.2. *Si pour tout $x, y \in \mathcal{X}$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$, alors on dit que G est un* groupe transitif de transformations *de $\mathcal{X}$.*
Autrement dit, si l'orbite de chaque point de $\mathcal{X}$ coïncide avec $\mathcal{X}$. Dans ce cas $\mathcal{X}$ est appelé espace homogène.

Théorème 2.5.1. *Soit $(G, \mathcal{X})$ un groupe transitif de transformations de $\mathcal{X}$. Soit G_{x_0} le (sous) groupe stabilisateur du point $x_0 \in \mathcal{X}$. Alors $(G, \mathcal{X})$ est isomorphe à $(G, G/G_{x_0})$.*

Démonstration. Soit l'application $\tilde{\phi}$ de G dans $\mathcal{X}$ donnée par

$$\tilde{\phi} : G \in g \to g.x_0 \in \mathcal{X}.$$

$\tilde{\phi}$ est surjective puisque $(G, \mathcal{X})$ est transitif.
Définissons maintenant l'application

$$\phi(gG_{x_0}) = \tilde{\phi}(g).$$

Elle est bien définie puisque $G_{x_0}.x_0 = x_0$. Ainsi on a

$$g.\phi(hG_{x_0}) = gh.x_0 = \phi(ghG_{x_0}).$$

Il suffit de démontrer que ϕ est injective. Supposons que $\phi(hG_{x_0}) = \phi(gG_{x_0})$; donc $h.x_0 = g.x_0$ et par suite $h^{-1}g \in G_{x_0}$ et finalement $hG_{x_0} = gG_{x_0}$. $\square$

Exemple 2.5.2. *Soit $G = SO(n)$ le groupe des rotations autour de l'origine de l'espace euclidien à n dimensions. Ce groupe agit naturellement sur la sphère unité S^{n-1} par*

$$SO(n) \times S^{n-1} \ni (g, x) \mapsto g.x \in S^{n-1}.$$

Cette action est transitive puisque un point arbitraire de la sphère peut être obtenu en faisant opérer une matrice orthogonale sur le pôle nord de la sphère S^{n-1}, i.e. sur le point $p = e_n = (0, ..., 0, 1)$. Le stabilisateur du point p

$$G_p = \begin{pmatrix} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ 0\ldots0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in SO(n-1),$$

est isomorphe à $SO(n-1)$. Alors on conclut que les espaces homogènes $(SO(n), S^{n-1})$ et $(SO(n), SO(n)/SO(n-1))$ sont isomorphes.

2.6 Représentations adjointe et coadjointe d'un groupe de Lie

Nous avons vu dans l'exemple 2.5.1 qu'un groupe de Lie agit sur lui-même par l'action définie par l'automorphisme intérieur $\alpha_g : G \to G$ donné par $\alpha_g(x) = gxg^{-1}$ (l'action adjointe). L'élément neutre est un point fixe par cette action.

Definition 2.6.1 (Représentation adjointe)**.** *La différentielle de α_g, notée $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, définie un automorphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application*

$$\begin{aligned} Ad \ : \ & G \to Aut(\mathfrak{g}) \\ & g \mapsto Ad(g) = Ad_g \end{aligned}$$

est appelée la représentation adjointe de G.

Le noyau de la représentation adjointe, $Ker(\mathrm{Ad})$, contient le centre Z_G de G et coïncide avec Z_G si G est connexe.
La différentielle de la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est la représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, donnée par $X \mapsto [X, .]$.

Remarque 2.6.1. *Si $G \subset GL(V)$ est un groupe linéaire agîssant sur un espace vectoriel V, alors la représentation adjoint peut s'écrire :*

$$Ad_g Y = gYg^{-1}, \ \ ad_X Y = [X, Y] = XY - YX, \ \ g \in G, \ X, Y \in \mathfrak{g}$$

Definition 2.6.2 (Représentation coadjointe)**.** *Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. La repésentation contragrediente $Ad^* : G \to Aut(\mathfrak{g}^*)$ de la représentation $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ est appelée la représenation coadjointe de G. i.e.,*

$$\langle Ad^*(g)F, Z\rangle = \langle F, Ad(g^{-1})Z\rangle, \ \forall F \in \mathfrak{g}^*, g \in G, Z \in \mathfrak{g}.$$

Exemple 2.6.1. *Soit l'algèbre de Lie des déplacements euclidiens du plan $\mathfrak{m}(2)$ engendrée par les trois générateurs P, Q, E tels que $[P, Q] = E$, $[P, E] = -Q$, $[E, Q] = 0$. Dans cette base la matrice de la représentation adjointe de $M(2)$ dans $\mathfrak{m}(2)$, Ad_g pour $g = (\theta, v_1, v_2) \in M(2)$ est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_2 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -v_1 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de la représentation coadjointe Ad^*g dans $\mathfrak{m}(2)^*$ dans la base duale P^*, Q^*, E^* est

$$\begin{pmatrix} 1 & v_1\sin\theta - v_2\cos\theta & v_1\cos\theta + v_2\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Contractions d'algèbres et de groupes de Lie

3.1 Contractions d'algèbres de Lie

Étant donné un espace vectoriel de dimension finie V Sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Definition 3.1.1. *Soit $U :]0,\ 1] \to GL(V)$, une application continue ($GL(V)$ est le groupe linéaire de V). On définit une famille de nouveaux crochets sur V en terme du crochet $[.,.]$ par :*

$$\forall \varepsilon \in]0,\ 1],\ \forall x, y \in V : \quad [x,\ y]_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x,\ U_\varepsilon y].$$

Pour tout $\varepsilon \in]0,\ 1]$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\varepsilon = (V, [.,.]_\varepsilon)$ est isomorphe à $\mathfrak{g} = (V, [.,.])$.
Si la limite

$$\lim_{\varepsilon \to +0} [x,\ y]_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to +0} U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x,\ U_\varepsilon y] := [x,\ y]_0$$

existe pour tout $x, y \in V$ alors $[x,\ y]_0$ définit bien un crochet de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 = (V, [.,.]_0)$ est appelée contraction *de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*
Le paramètre ε est appelé paramètre de contraction*.*
Le procédé d'obtenir l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ à partir de l'algèbre $\mathfrak{g}$ est aussi appelée contraction*.*

Si une base de V est fixée, l'opérateur U_ε est défini par la matrice correspondante. La définition 3.1.1 peut être reformulée en termes de constantes de structure

Definition 3.1.2. *Soient $C_{i,j}^k$ les constantes de structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $(U_\varepsilon)_i^j$ les coefficients de la matrice de l'opérateur U_ε dans la base fixée $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Si la limite*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{i,j,k=1}^{n} (U_\varepsilon)_{i'}^i (U_\varepsilon)_{j'}^j (U_\varepsilon^{-1})_k^{k'} C_{i,j}^k := \tilde{C}_{i',j'}^{k'}$$

existe pour tout i', j' et k' alors les $\tilde{C}_{i',j'}^{k'}$ sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$.
La fonction matricielle $U = U(\varepsilon)$ est appelée matrice de contraction

Les définitions 3.1.1 et 3.1.2 sont équivalentes. La première définition est pratique pour une considération théorique. La seconde est plus utilisable pour le calcul des contractions concrètes.

Definition 3.1.3. *On dit qu'une contraction de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ vers l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est :*
- triviale *si $\mathfrak{g}_0$ est abélienne.*
- impropre *si $\mathfrak{g}_0$ est isomorphe à $\mathfrak{g}$.*

Remarque 3.1.1. *Si on a $\lim_{\varepsilon \to +0}(U_\varepsilon) := U_0$ et $U_0 \in GL(V)$ alors il est evident que la contraction est impropre. De plus, pour engendrer une contraction* propre, *la fonction matricielle doit satisfaire à une des deux conditions :*
1. La limite $\lim_{\varepsilon \to +0}(U_\varepsilon)$ n'existe pas, i.e. au moins un des éléments de la matrice U est singulier quand $\varepsilon \to 0$.
2. La limite $\lim_{\varepsilon \to +0}(U_\varepsilon) := U_0$ existe mais la matrice U_0 est singulière, i.e., $\det(U_0) = 0$.
Ces deux conditions ne sont pas suffisantes pour avoir une contraction propre.

Remarque 3.1.2. *Les contractions triviale et impropre existent pour n'importe quelle algèbre de Lie. La contraction triviale est facile à obtenir, par exemple, par la matrice $U_\varepsilon = diag(\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon)$.*
La matrice identité $U_\varepsilon = diag(1, 1, ..., 1)$ peut être toujours utilisée comme matrice de contraction pour la contraction impropre.
L'algèbre abélienne se contracte seulement vers elle même, c'est un cas spécial où la contraction est à la fois triviale et impropre.

Exemple 3.1.1. *Soit l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \oplus A_1$*, de dimension 4, où* $\mathfrak{so}(3)$ *est engendeée par les* 3 *générateurs* e_1, e_2, e_3 *et* A_1 *est l'algèbre de dimension* 1 *engendrée par le générateur* e_4 *avec les relations de commutation*

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_3, e_1] = e_2, \\ &[e_i, e_4] = 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Considérons la contraction d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \oplus A_1$*, donnée par la matrice suivante*

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad U_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-4} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-2} \\ 0 & -\varepsilon^{-3} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcul la transformée des commutateurs :

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2]_\varepsilon &= U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon e_1,\ U_\varepsilon e_2] = U_\varepsilon^{-1}([-\varepsilon^2 e_4, -\varepsilon^3 e_2]) \\
&= U_\varepsilon^{-1}(\varepsilon^5[e_4, e_2]) = U_\varepsilon^{-1}(0) = 0, \\
[e_1, e_3]_\varepsilon &= U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon e_1,\ U_\varepsilon e_3] = U_\varepsilon^{-1}([-\varepsilon^2 e_4, \varepsilon^2 e_1 - e_4]) \\
&= U_\varepsilon^{-1}(-\varepsilon^4[e_4, e_1] + \varepsilon^2[e_4, e_4]) = U_\varepsilon^{-1}(0) = 0, \\
[e_1, e_4]_\varepsilon &= U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon e_1,\ U_\varepsilon e_4] = U_\varepsilon^{-1}([-\varepsilon^2 e_4, \varepsilon e_3]) \\
&= U_\varepsilon^{-1}(-\varepsilon^3[e_4, e_3]) = U_\varepsilon^{-1}(0) = 0, \\
[e_2, e_3]_\varepsilon &= U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon e_2,\ U_\varepsilon e_3] = U_\varepsilon^{-1}([-\varepsilon^3 e_2, \varepsilon^2 e_1 - e_4]) \\
&= U_\varepsilon^{-1}(-\varepsilon^5[e_2, e_1] + \varepsilon^3[e_2, e_4]) = U_\varepsilon^{-1}(\varepsilon^5 e_3) = \varepsilon^4 e_4, \\
[e_2, e_4]_\varepsilon &= U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon e_2,\ U_\varepsilon e_4] = U_\varepsilon^{-1}([-\varepsilon^3 e_2, \varepsilon^{e}_{3}]) = U_\varepsilon^{-1}(-\varepsilon^4[e_2, e_3]) \\
&= U_\varepsilon^{-1}(-\varepsilon^4 e_3) = e_1 - \varepsilon^2 e_3, \\
[e_3, e_4]_\varepsilon &= U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon e_3,\ U_\varepsilon e_4] = U_\varepsilon^{-1}([\varepsilon^2 e_1 - e_4, \varepsilon e_3]) \\
&= U_\varepsilon^{-1}(\varepsilon^3[e_1, e_3] - \varepsilon[e_4, e_3]) = U_\varepsilon^{-1}(-\varepsilon^3 e_2) = e_2.
\end{aligned}$$

Ainsi quand $\varepsilon \to +0$ *on obtient les relations de commutations de l'algèbre de Lie* $A_{4.1}$ *notamment*

$[e_2, e_4]_0 = e_1,\ [e_3, e_4]_0 = e_3,\ [e_1, e_2]_0 = 0,\ [e_1, e_3]_0 = 0,\ [e_1, e_4]_0 = 0,\ [e_2, e_3]_0 = 0.$

3.2 Types simples de contractions

3.2.1 Contractions d'Inönü-Wigner

Les contractions d'inönü-Wigner présentent un processus de limite entre algèbres de Lie avec des matrices de contraction de type le plus simple. La plupart des contractions d'algèbres de Lie de basse dimension sont équivalentes à ces contractions. Nous discuterons de leurs propriétés qui sont essentielles pour une étude plus approfondie. Des contractions simples d'Inönü-Wigner ou brièvement IW-contractions ont été proposées pour la première fois dans [9] sont générées par des matrices de la forme $U_\varepsilon = U_0 + \varepsilon U_0'$ où U_0 et U_0' sont des matrices constantes de taille $n \times n$. On suppose en outre que la matrice U_ε peut être transformée en une forme diagonale spéciale $\hat{W} U_\varepsilon \check{W}^{-1} = diag(1+\varepsilon v, \ldots, 1+\varepsilon v, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) =: D_\varepsilon$ au moyen des matrices constantes régulières $\hat{W}$ and $\check{W}$. L'hypothèse a été étudiée par Inönü et Wigner eux-mêmes. Sans perte de généralité on peut mettre $v = 0$. La matrice D_ε fournit des contractions de $\tilde{\mathfrak{g}}$ vers $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, où $\tilde{\mathfrak{g}}$ and $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ sont des algèbres de Lie avec les crochets de Lie $[x, y]^{\tilde{}} = \hat{W}[\hat{W}^{-1}x, \hat{W}^{-1}y]$ et $[x, y]_0^{\tilde{}} = \check{W}[\check{W}^{-1}x, \check{W}^{-1}y]_0$, qui sont évidemment isomorphes à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0$. Par conséquent, on a la définition suivante :

Definition 3.2.1. *([9, 22])*

Une contraction est dite de type Inönü-Wigner*, notée IW-contraction, s'il existe une base $\{e_i\}$ telle que*

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n-m} \end{pmatrix} \quad \forall \varepsilon \in [0, 1] \tag{3.2}$$

où I_k est la matrice identité de dimension k .

Une telle contraction consiste à partager l'ensemble $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ en deux ensembles $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ et $\{e_{m+1}, e_{m+2}, ..., e_n\}$. Donc pour $i_1, j_1 = 1, ..., m,\ i_2, j_2 = m+1, ..., n$

on a

$$
\begin{aligned}
[e_{i_1}, e_{j_1}]_\varepsilon &= \sum_{k_1=1}^{m} C_{i_1,j_1}^{k_1} e_{k_1} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k_2=m+1}^{n} C_{i_1,j_1}^{k_2} e_{k_2} \\
[e_{i_1}, e_{j_2}]_\varepsilon &= \varepsilon \sum_{k_1=1}^{m} C_{i_1,j_2}^{k_1} e_{k_1} + \sum_{k_2=m+1}^{n} C_{i_1,j_2}^{k_2} e_{k_2} \\
[e_{i_2}, e_{j_2}]_\varepsilon &= \varepsilon^2 \sum_{k_1=1}^{m} C_{i_2,j_2}^{k_1} e_{k_1} + \varepsilon \sum_{k_2=m+1}^{n} C_{i_2,j_2}^{k_2} e_{k_2}
\end{aligned}
$$

Ces relations sont convergentes ssi $C_{i_1,j_1}^{k_2} = 0$. Par conséquent, les éléments de base $e_1, e_2, ..., e_m$ engendrent une sous algèbre $\mathfrak{h}$ de l'algèbre initiale $\mathfrak{g}$, c'est l'unique condition pour que la contraction existe. Toutes les constantes de structure $\tilde{C}_{i,j}^{k}$ de l'algèbre resultante $\mathfrak{g}_0$ sont faciles à calculer :

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}_{i_1,j_1}^{k_1} = C_{i_1,j_1}^{k_1}, \quad \tilde{C}_{i_1,j_1}^{k_2} = C_{i_1,j_1}^{k_2} = 0, \quad \tilde{C}_{i_1,j_2}^{k_1} = 0, \\
&\tilde{C}_{i_1,j_2}^{k_2} = C_{i_1,j_2}^{k_2}, \quad \tilde{C}_{i_2,j_2}^{k_1} = \tilde{C}_{i_2,j_2}^{k_2} = 0, \\
&i_1, j_1, k_1 = 1, ..., m, \ \ i_2, j_2, k_2 = m+1, ..., n
\end{aligned}
$$

Ainsi on a

Proposition 3.2.1. *Si $\mathfrak{g}_0$ est une IW-contraction de $\mathfrak{g}$ qui laisse invariant la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}_0$ a la structure de somme semi-directe $\mathfrak{h} \oplus_s \mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est un ideal abélien engendré par la base complémentaire choisie de $\mathfrak{h}$. La sous algèbre $\mathfrak{h}$ est isomorphe à l'algèbre quotient $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{a}$.*

Propriétés des IW-contractions ([6, 22, 12]) :

1. Chaque sous algèbre $\mathfrak{h}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut être utilisée pour obtenir une IW-contraction de $\mathfrak{g}$. Les sous algèbres triviales correspondent aux IW-contractions impropres ($\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$) ou triviales ($\mathfrak{h} = \{0\}$).
2. Différents choix de la base complémentaire de la base de $\mathfrak{h}$ ou le remplacement de $\mathfrak{h}$ par une sous algèbre équivalente de $\mathfrak{g}$ donnent la même algèbre contractée à un isomorphisme près.
3. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ avec $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] = 0$.
3. La répétition de la IW-contraction suivant la même sous algèbre $\mathfrak{h}$ donne aussi l'algèbre $\mathfrak{g}_0$.

Exemple 3.2.1. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{m}(2)$ des déplacements euclidiens du plan est une IW-contraction de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$.*
Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}(2)$ des déplacements euclidiens du plan, engendrée par les 3 générateurs e_1, e_2 et e_3 avec les relations de commutation avec

$$[e_3, e_1] = e_2,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_2] = 0,$$

et l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$, l'algèbre du groupe des rotations de dimension 3, engendrée par les 3 générateurs e_1, e_2 et e_3 avec les relations de commutation

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_3, e_1] = e_2.$$

Si on considère

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

alors

$$[e_1, e_2]_\varepsilon = e_3 \longrightarrow [e_1, e_2]_0 = e_3$$

$$[e_3, e_1]_\varepsilon = e_2 \longrightarrow [e_3, e_1]_0 = e_2$$

$$[e_2, e_3]_\varepsilon = \varepsilon^2 e_1 \longrightarrow [e_2, e_3]_0 = 0.$$

Ici $\mathfrak{h} = \mathbb{R}\{e_1\}$ et $\mathfrak{a} = \mathbb{R}\{e_2, e_3\}$.

Remarque 3.2.1. *Il est connu que les IW-contractions n'épuisent pas toutes les contractions possibles même dans le cas des algèbres de Lie de dimension 3.*
Les IW-contractions de l'algèbre de Lie de dimension 3 des rotations $\mathfrak{so}(3)$ donnent seulement une contraction propre et non triviale vers l'algèbre $\mathfrak{m}(2)$. En même temps, il existe une contraction propre de $\mathfrak{so}(3)$ vers l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ et elle n'est pas obtenue par une IW-contraction.

3.2.2 Contractions selon Saletan

Saletan [22] a entamer une étude plus générale en considérant la classe de toutes les contractions linéaires par rapport au paramètre de contraction.

Definition 3.2.2. *[22] Une réalisation d'une contraction avec une fonction matricielle qui est linéaire par rapport au paramètre de contraction est appelée contraction (linéaire) de Saletan. Une telle contraction est notée S-contraction.*

Les S-contractions sont obtenues par les matrices de la forme

$$U(\varepsilon) = u + \varepsilon w,$$

où w est une matrice régulière constante et pour avoir une contraction propre u est nécessairement une matrice singulière constante ainsi, sans perdre de généralité, on peut supposer que w est égale à la matrice identité.
La méthode de Saletan consiste à utiliser une décomposition convenable de V (l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) de la forme

$$V = V_R \oplus V_N,$$

où V_R et V_N sont des sous-espaces u-invariants définis d'une manière naturelle de telle façon que u soit surjective sur V_R et nilpotente sur V_N [1].
La condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ soit contractée par la fonction matricielle linéaire U_ε est [22]

$$u\left([ux, y]_N + [x, uy]_N - u[x, y]_N\right) = [ux, uy]_N. \tag{3.4}$$

Alors le crochet de Lie de l'algèbre contractée $\mathfrak{g}_0$ est donnée par

$$[x, y]_0 = u^{-1}[ux, uy]_R + [ux, y]_N + [x, uy]_N - u[x, y]_N. \tag{3.5}$$

Ici $[,\ ]_R$ et $[,\ ]_N$ désignent les projections du crochet de Lie $[,\ ]$ sur les sous-espaces V_R et V_N, respectivement, qui ne sont pas, en général, des crochets de Lie.

Remarque 3.2.2. *1. La matrice de toute contraction linéaire a une limite bien définie en $\varepsilon = 0$. C'est pourquoi au contraire à la définition générale des contractions, dans le cas d'une S-contraction sa fonction matricielle U_ε peut être supposé définie sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Il convient alors de représenter la matrice U_ε sous la forme $U_\varepsilon = (1-\varepsilon)U_0 + \varepsilon U_1$, où U_0 et U_1 sont les valeurs de U_ε en $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$, respectivement. Par définition de matrice de contraction, la matrice U_1 est non singulière, et, pour des contractions propres, la matrice U_0 est nécessairement singulière.*

1. Pour tout endomorphisme u de V, il existe un entier naturel non nul q, appelé indice de Riesz, tel que

$$V \supset Im(u) \supset Im(u^2) \supset ... \supset Im(u^q) = Im(u^{q+1}) = ...$$
$$0 \subset Ker(u) \subset Ker(u^2) \subset ... \subset Ker(u^q) = Ker(u^{q+1}) = ...$$

On pose alors $Im(u^q) = V_R$, $Ker(u^q) = V_N$ et l'on a la décomposition de Fitting [20], $V = V_R \oplus V_N$.

Il existe des reparamétrages spécifiques qui préservent la classe des contractions de Saletan [22]. Soit $U_\varepsilon = B + \varepsilon A$ *la matrice d'une contraction de Saletan. On fixe* $\lambda > 1$ *et on considère la fonction matricielle* U_ε *sur l'intervalle* $[0, (1+\lambda)^{-1}]$ *au lieu de* $[0, 1]$. *Puis*

$$B + \varepsilon A = (1 - \lambda\varepsilon)B + \varepsilon(A + \lambda B) = (1 - \lambda\varepsilon)\left(B + \frac{\varepsilon}{1 - \lambda\varepsilon}(A + \lambda B)\right).$$

Le facteur $(1 - \lambda\varepsilon)$ *n'est pas indispensable puisque sa limite en* $\varepsilon = 0$ *vaut* 1. *En supprimant ce facteur et en notant* $\frac{\varepsilon}{1-\lambda\varepsilon}$ *par* ε', *on obtient la fonction matricielle linéaire bien définie*

$$U'_{\varepsilon'} = B + \varepsilon'(A + \lambda B), \varepsilon' \in [0, 1],$$

qui réalise la même contraction de Saletan que U_ε.

2. Levi-Nahas [11] étend la notion de contractions de Saletan en considérant les contractions singulières. Dans ce cas, l'isomorphisme U_ε *a la forme suivante*

$$U_\varepsilon = \varepsilon u + \varepsilon^2 w,$$

avec u *et* w *satisfaisant les hypothèses de Saletan.*

3. Toute IW-contraction est évidemment une S-contraction et il existe des S-contractions qui ne sont pas équivalentes aux IW-contractions, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.2.2. *Considérons l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \oplus A_1$ *où* $\mathfrak{so}(3)$ *est engendeée par les* 3 *générateurs* e_1, e_2, e_3 *et* A_1 *est l'algèbre de dimension* 1 *engendrée par le générateur* e_4 *avec les relations de commutation*

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = e_3, \ [e_2, e_3] = e_1, \ [e_3, e_1] = e_2, \\ &[e_i, e_4] = 0, \ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Soit la matrice de contraction $U(\varepsilon) = \varepsilon I + (1 - \varepsilon)u$ *où* u *est telle que*

$$ue_1 = ue_2 = 0, \ ue_3 = f := e_4 + e_3, \ uf = 0.$$

Remarquons que $u^2\xi = 0 \ \forall \xi \in \mathfrak{g}$, *donc on peut prendre* $V_R = \{0\}$ *et* $V_N = \mathfrak{g}$ *et on a* $u^2[x, y]_N = 0$. *Maintenant* $u\mathfrak{g}$ *est un espace de dimension* 1 *donc* $[ux, uy]_N = 0$. *De plus,* $u\mathfrak{g}$ *est engendré par* f, *et* $[f, \xi]$ *s'écrit comme combinaison linéaire de* e_1 *et* e_2 *pour tout* $\xi \in \mathfrak{g}$. *Puisque* $ue_1 = ue_2 = 0$ *alors* $u\left([ux, y]_N + [x, uy]_N\right) = 0$ *et par suite*

la condition (3.4) *est bien vérifiée.*
Puisque $V_R = \{0\}$ *alors l'équation* (3.5) *devient*

$$[x, y]_0 = [ux, y]_N + [x, uy]_N - [ux, uy]_N, \tag{3.7}$$

donc en utilisant les relations en (3.6) *on trouve le crochet de Lie*

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2]_0 = -f,\ \ [e_2, e_3]_0 = e_1,\ \ [e_3, e_1]_0 = e_2, \\ &[e_i, f]_0 = 0,\ \ i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

qui définit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$.

Remarque 3.2.3. *E. J. Saletan a montré dans [22] que cette algèbre de Lie ne peut jamais être obtenue par une IW-contraction de* $\mathfrak{so}(3) \oplus A_1$.

3.2.3 Contractions d'Inönü-Wigner généralisées

Une autre généralisation de la classe des IW-contractions est donnée par *generalized IW-contractions* (ou *Doebner–Melsheimer contractions*) [5, 8, 12] pour laquelle la condition de la linéarité est remplacée par la condition que les éléments de la matrice de contraction diagonalisée soient des puissances (entières) du paramètre de contraction. À savoir, la matrice de contraction d'une contraction IW généralisée a la forme $U_\varepsilon = \hat{W}^{-1}\mathrm{diag}(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n})\check{W}$, où $\hat{W}$ et $\check{W}$ sont des matrices constantes non singulière et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Comme dans le cas des contractions IW simples, en raison de la possibilité de remplacement des algèbres de Lie par des algèbres isomorphes on peut supposer que $\hat{W} = \check{W} = I$, et on a la définition suivante :

Definition 3.2.3. *Une contraction est dite* contraction d'Inönü-Wigner généralisée *où* contraction de Doebner-Melsheimer *[5, 8] si la matrice de contraction est donnée par*

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{Z}$.

Les constantes de structure de l'algèbre contractée $\mathfrak{g}_0$ sont données par la formule

$$\tilde{C}^k_{i,j} \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k} C^k_{i,j}$$

de plus les contraintes

$$\alpha_i + \alpha_j \geq \alpha_k, \quad i,j,k = 1,2,...,n \quad \text{si} \quad C^k_{i,j} \neq 0$$

sont nécessaires et suffisantes pour l'existence de la IW-contraction généralisée par la matrice de contraction U_ε et

$$\tilde{C}^k_{i,j} = C^k_{i,j} \quad \text{si} \quad \alpha_i + \alpha_j = \alpha_k \quad \text{et} \quad \tilde{C}^k_{i,j} = 0 \quad \text{sinon.}$$

Remarque 3.2.4. *Il est clair que les IW-contractions sont des cas particuliers des IW-contractions généralisées avec* $\alpha_i \in \{0,1\}$.

Exemple 3.2.3. *L'algèbre de Lie de Heisenberg* $\mathfrak{h}_3$ *de dimension* 3 *définie par les relations de commutation* $[e_1,e_2]_0 = e_3$, $[e_3,e_1]_0 = 0$ *et* $[e_2,e_3]_0 = 0$ *peut être obtenue par une IW-contraction généralisée de* $\mathfrak{so}(3)$ *en prenant*

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

3.3 Critères nécessaires de contraction

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques critères nécessaires de contractions d'algèbres de Lie. Nous allons utiliser les notations suivantes (cf. Chapitre 1) :
- $Der(\mathfrak{g})$ est l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$
- $Z(\mathfrak{g})$ est le centre de $\mathfrak{g}$,
- $Rad(\mathfrak{g})$ est le radical de $\mathfrak{g}$,
- $N(\mathfrak{g})$ est le nilradical de $\mathfrak{g}$ (i.e., l'idéal nilpotent qui contienne tout idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$),
- n_A la dimension maximale des sous algèbres abéliennes de $\mathfrak{g}$,
- n_{Ai} la dimension maximale des idéaux abéliens de $\mathfrak{g}$,
- $\kappa_\mathfrak{g}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$,
- $r_\mathfrak{g}$ la dimension de la sous algèbre de Cartan,

- ad$\mathfrak{g}$ et ad$^*\mathfrak{g}$ les représentations adjointe et coadjointe de $\mathfrak{g}$,

- $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^l = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{l-1}]$ et $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(l)} = [\mathfrak{g}^{(l-1)}), \mathfrak{g}^{(l-1)}]$,

- $\mathfrak{g}_{(0)} = \{0\}$, $\mathfrak{g}_{(l)}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$ est le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$, $l \in \mathbb{N}$.

- Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble (resp. nilpotente), $r_s(\mathfrak{g})$ ($r_n(\mathfrak{g})$) désigne le rang de résolubilité (nilpotence) de $\mathfrak{g}$, i.e., le nombre minimal l tel que $\mathfrak{g}^{(l)} = \{0\}$ ($\mathfrak{g}^l = \{0\}$).

Théorème 3.3.1. *[16] Si $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ est une contraction propre, alors on a*

1) dim Der$\mathfrak{g}_0$ > dim Der$\mathfrak{g}$;

2) $n_A(\mathfrak{g}_0) \geq n_A(\mathfrak{g})$;

3) dim $Z(\mathfrak{g}_0) \geq$ dim $Z(\mathfrak{g})$; de plus dim $\mathfrak{g}_{0(l)} \geq$ dim $\mathfrak{g}_{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$;

4) dim $\mathfrak{g}_0^{(l)} \leq$ dim $\mathfrak{g}^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$;

5) dim $\mathfrak{g}^l \leq$ dim $\mathfrak{g}^l$, $l \in \mathbb{N}$;

6) dim $Rad(\mathfrak{g}_0) \geq$ dim $Rad(\mathfrak{g})$;

7) dim $N(\mathfrak{g}_0) \geq$ dim $N(\mathfrak{g})$;

8) $n_{Ai}(\mathfrak{g}_0) \geq n_{Ai}(\mathfrak{g})$;

9) $r_{\mathfrak{g}_0} \geq r_{\mathfrak{g}}$;

10) rang ad $\mathfrak{g}_0 \leq$ rang ad $\mathfrak{g}$, rang ad* $\mathfrak{g}_0 \leq$ rang ad* $\mathfrak{g}$;

11) rang $\kappa_{\mathfrak{g}_0} \leq$ rang $\kappa_{\mathfrak{g}}$;

12) $\mathfrak{g}_0$ est unimodulaire si $\mathfrak{g}$ l'est aussi ;

13) Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble alors $\mathfrak{g}_0$ est aussi résoluble et $r_s(\mathfrak{g}_0) \leq r_s(\mathfrak{g})$;

14) Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente alors $\mathfrak{g}_0$ est aussi nilpotente et $r_n(\mathfrak{g}_0) \leq r_n(\mathfrak{g})$.

3.4 Contraction des algèbres de Lie réelles de dimension 3

Nous utilisons la liste complète des classes non isomorphes d'algèbres de Lie réelles de dimension 3, qui a été construit par Mubarakzyanov [15] et légèrement améliorés dans [18, 19].

1) $\boldsymbol{3A_1} \simeq \mathbb{R}^3$:	$[e_1,e_2]=[e_2,e_3]=[e_3,e_1]=0$ Abélienne, unimodulaire. $n_D=9,\ n_Z=3,\ n_A=3,\ \kappa=0,$ $r_{\mathfrak{g}}=3,\ r_n=r_s=1,\ tr(ad_v)=0.$
2) $\boldsymbol{A_{2.1}\oplus A_1}$:	$[e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=[e_3,e_1]=0$ décomposable, résoluble. $n_D=4,\ n_Z=1,\ n_A=2,\ \kappa=x_2y_2,$ $r_{\mathfrak{g}}=2,\ r_s=2,\ tr(ad_v)=-v_2.$
3) $\boldsymbol{A_{3.1}=\mathfrak{h}_3}$:	$[e_2,e_3]=e_1,\ [e_3,e_1]=[e_1,e_2]=0$ Heisenberg, indécomposable, nilpotente, unimodulaire. $n_D=6,\ n_Z=1,\ n_A=2,\ \kappa=0,$ $r_{\mathfrak{g}}=3,\ r_n=r_s=2,\ tr(ad_v)=0.$
4) $\boldsymbol{A_{3.2}}$:	$[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_1+e_2,\ [e_1,e_2]=0$ indécomposable, résoluble. $n_D=4,\ n_Z=0,\ n_A=2,\ \kappa=2x_3y_3,$ $r_{\mathfrak{g}}=1,\ r_s=2,\ tr(ad_v)=-2v_3.$
5) $\boldsymbol{A_{3.3}}$:	$[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2,\ [e_1,e_2]=0$ indécomposable, résoluble. $n_D=6,\ n_Z=0,\ n_A=2,\ \kappa=2x_3y_3,$ $r_{\mathfrak{g}}=1,\ r_s=2,\ tr(ad_v)=-2v_3.$
6) $\boldsymbol{A_{3.4}^{-1}}$:	$[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=-e_2,\ [e_1,e_2]=0$ indécomposable, résoluble, unimodulaire. $n_D=4,\ n_Z=0,\ n_A=2,\ \kappa=2x_3y_3,$ $r_{\mathfrak{g}}=1,\ r_s=2,\ tr(ad_v)=0.$
7) $\boldsymbol{A_{3.4}^{a}}$:	$[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=ae_2,\ \ [e_1,e_2]=0,\ 0<\lvert a\rvert<1$ indécomposable, résoluble. $n_D=4,\ n_Z=0,\ n_A=2,\ \kappa=(1+a^2)x_3y_3,$ $r_{\mathfrak{g}}=1,\ r_s=2,\ tr(ad_v)=-(1+a)v_3.$
8) $\boldsymbol{A_{3.5}^{0}\simeq\mathfrak{m}(2)}$:	$[e_3,e_1]=e_2,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_2]=0$ indécomposable, résoluble, unimodulaire. $n_D=4,\ n_Z=0,\ n_A=2,\ \kappa=-2x_3y_3,$ $r_{\mathfrak{g}}=1,\ r_s=2,\ tr(ad_v)=0.$

9) $\boldsymbol{A^b_{3.5}}$ **:** $[e_1, e_3] = be_1 - e_2,\ [e_2, e_3] = e_1 + be_2,\ [e_1, e_2] = 0,\ b > 0$
indécomposable, résoluble.
$n_D = 4,\ \ n_Z = 0,\ \ n_A = 2,\ \ \kappa = 2(b^2 - 1)x_3y_3,$
$r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ r_s = 2,\ \ tr(ad_v) = -2bv_3.$

---

10) $\boldsymbol{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}$ **:** $[e_1, e_2] = e_1,\ \ [e_2, e_3] = e_3,\ \ [e_1, e_3] = 2e_2$
indécomposable, simple, unimodulaire.
$n_D = 3,\ \ n_Z = 0,\ \ n_A = 1,\ \ \kappa = -2(2x_3y_1 - x_2y_2 + 2x_1y_3),$
$r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ tr(ad_v) = 0.$

---

11) $\boldsymbol{\mathfrak{so}(3)}$ **:** $[e_1, e_2] = e_3,\ \ [e_2, e_3] = e_1,\ \ [e_3, e_1] = e_2$
indécomposable, simple, unimodulaire.
$n_D = 3,\ \ n_Z = 0,\ \ n_A = 1,\ \ \kappa = -2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3),$
$r_{\mathfrak{g}} = 1,\ \ tr(ad_v) = 0.$

Contractions

Toutes les contractions (propres et non triviales) possibles d'algèbres de Lie réelles de dimension 3 sont données par la liste suivante [16] :

1) $\boxed{\boldsymbol{A_{2.1} \oplus A_1 \longrightarrow A_{3.1}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

2) $\boxed{\boldsymbol{A_{3.2} \longrightarrow A_{3.1}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

ou bien en utilisant la matrice de contraction

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

3) $\boxed{\boldsymbol{A_{3.1} \longrightarrow A_{3.3}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou bien par la matrice de contraction

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus

4) $\boxed{\boldsymbol{A^a_{3.4} \longrightarrow A_{3.1}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

5) $\boxed{\boldsymbol{A^b_{3.5} \longrightarrow A_{3.1}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

6) $\boxed{\boldsymbol{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow A_{3.1}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

7) $\boxed{\boldsymbol{A_{3.1} \longrightarrow A_{3.4}^{-1}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

8) $\boxed{\boldsymbol{A_{3.4}^{-1} \longrightarrow A_{3.5}^{0}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

9) $\boxed{\boldsymbol{\mathfrak{so}(3) \longrightarrow A_{3.1}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

10) $\boxed{\boldsymbol{A_{3.1} \longrightarrow A_{3.5}^{0}}}$

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

par rapport aux relations de commutation ci-dessus.

Remarque 3.4.1. *1. Seules les contractions propres directes sont présentées ici. Rappelons qu'une contraction de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_0$ s'appelle* directe *s'il n'y a pas d'algèbre $\mathfrak{g}_1$ telle que $\mathfrak{g}_1 \not\sim \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 \not\sim \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$ est contractée à $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_1$ est contractée à $\mathfrak{g}_0$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est nécessairement contractée en $\mathfrak{g}_0$ si $\mathfrak{g}$ est contractée en $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_1$ est contractée en $\mathfrak{g}_0$.*
2. Toute contraction continue d'une algèbre de Lie réelle de dimension 3 est équivalente à une contraction IW généralisée avec des puissances positives du paramètre de contraction. De plus, seule la contraction $\mathfrak{so}(3) \to A_{3.1}$ est non équivalente à une contraction d'Inönü-Wigner simple.

3.5 Contractions de groupes de Lie

Definition 3.5.1 ([17], page 137)**.** *Un groupe local est un espace topologique dans lequel les axiomes de groupe ne sont satisfaites que pour des éléments suffisamment proches de l'élément neutre.*

Definition 3.5.2. *[14] Soit G un groupe local et G^0 un groupe topologique. On dit que G^0 est une* contraction *de G s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de l'élément neutre e de G tel que $\mathcal{V}^2 = \{gh|\ g, h \in \mathcal{V}\}$ est bien défini, et une famille d'applications différentiables*

$$F_\varepsilon : \mathcal{V}^2 \to G^0;\ \varepsilon \in]0,1]$$

tels que
i. F_ε est un difféomorphisme de $\mathcal{V}^2$ sur $F_\varepsilon(\mathcal{V}^2)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1]$.
ii. Pour tout $g_0 \in G^0$ alors $\exists \varepsilon_0 \in]0,1]$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $g_0 \in F_\varepsilon(\mathcal{V})$, i.e. $F_\varepsilon^{-1}(g_0)$ est bien défini et appartient à $\mathcal{V}$ lorsque $\varepsilon < \varepsilon_0$.
iii. $F_\varepsilon(e)$ est l'élément neutre de G^0 pour $\varepsilon \in]0,1]$,
iv. Si $g, h \in G^0$ alors $gh = \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(g)F_\varepsilon^{-1}(h))$.

Remarque 3.5.1. *La contraction d'algèbres de Lie associée à la contraction du groupe de Lie est :*

$$U_\varepsilon = (dF_\varepsilon)_{e_G} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$$

U_ε est une application linéaire et inversible pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon[U_\varepsilon^{-1}x, U_\varepsilon^{-1}y] = [x,y]_0$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}_0$.

Proposition 3.5.1. *Le groupe de Heisenberg $G^0 = H_3$ est une contraction du groupe des déplacements euclidiens du plan $G = M(2)$.*

Démonstration. Considérons le groupe $\tilde{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ muni de la loi

$$(\theta, v).(\theta', v') = (\theta + \theta', v + k(\theta)v') \tag{3.9}$$

où

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ce groupe est le revêtement simplement connexe du groupe $M(2) = SO(2) \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ muni de la loi ($\dot{\theta}$ désigne la classe de θ) :

$$(\dot{\theta}, v).(\dot{\theta}', v') = (\theta \dot{+} \theta', v + k(\theta)v')$$

où $k(\dot{\theta}) = k(\theta)$.
On peut écrire le produit (3.9) sous la forme

$$(\theta, v_1, v_2).(\theta', v_1', v_2') = (\theta + \theta', v_1 + v_1' \cos(\theta) - v_2' \sin(\theta), v_2 + v_1' \sin(\theta) + v_2' \cos(\theta))$$

Soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}^2 = \tilde{G}$ et $F_\varepsilon((\theta, v)) = F_\varepsilon((\theta, v_1, v_2)) = (\frac{1}{\varepsilon}\ \theta, \frac{1}{\varepsilon}\ v_1, \frac{1}{\varepsilon^2}\ v_2)$
Les conditions i., ii. et iii. de la définition sont évidemment vérifiées.
Maintenant la condition iv. est

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}((\theta, v_1, v_2)).F_\varepsilon^{-1}((\theta', v_1', v_2'))) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon((\varepsilon\theta, \varepsilon v_1, \varepsilon^2 v_2).(\varepsilon\theta', \varepsilon v_1', \varepsilon^2 v_2')) \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(\varepsilon(\theta + \theta'), \varepsilon v_1 + \varepsilon v_1' \cos(\varepsilon\theta) - \varepsilon^2 v_2' \sin(\varepsilon\theta), \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon v_1' \sin(\varepsilon\theta) + \varepsilon^2 v_2' \cos(\varepsilon\theta)) \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0}(\theta + \theta', v_1 + v_1' \cos(\varepsilon\theta) - \varepsilon v_2' \sin(\varepsilon\theta), v_2 + \varepsilon^{-1} v_1' \sin(\varepsilon\theta) + v_2' \cos(\varepsilon\theta)) \\
= & (\theta + \theta', v_1 + v_1', v_2 + v_2' + v_1'\theta) = (\theta, v_1, v_2).(\theta', v_1', v_2') \text{ (le produit sur } G^0 = H_3).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5.2. *Le groupe $G^0 = M(n)$ est une contraction du groupe $G = SO_0(n, 1)$ (la composante connexe de l'identité du groupe $SO(n, 1)$).*

Démonstration. D'après la décomposition de Cartan chaque élément $g \in G$ peut s'écrire sous la forme $g = k.p(t_1, ..., t_n)$ avec $k \in K \simeq SO(n)$ et $p(t_1, ..., t_n) =$

$\exp\{\sum_{j=1}^{n} t_j M_{j,n+1}\}$ où $M_{j,n+1}$ est le générateur non-compact d'une rotation hyperbolique dans le $(j, n{+}1)$-plan.
Tout élément de G^0 peut s'écrire sous la forme $k.r(t_1, ..., t_n)$, $k \in SO(n)$ et $r(t_1, ..., n)$ est une translation par le vecteur $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$.
soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}^2 = G$ et $F_\varepsilon(k.p(t)) = k.r(\frac{1}{\varepsilon}\ t)$. Les conditions i.,ii. et iii. de la définition sont vérifiées.
Maintenant la condition iv. s'écrit

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(k^{(1)}.r(t^{(1)})).F_\varepsilon^{-1}(k^{(2)}.r(t^{(2)}))) \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(k^{(1)}.p(\varepsilon t^{(1)}).k^{(2)}.p(\varepsilon t^{(2)})) \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(k^{(1)}.k^{(2)}(k^{(2)})^{-1}p(\varepsilon t^{(1)}).k^{(2)}.p(\varepsilon t^{(2)}))
\end{aligned}$$

D'autre part, si on note par $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{p} = Span\{M_{j,n+1}, j = 1, ..., n\}$ (qui n'est pas une sous-algèbre de $\mathfrak{so}(n, 1)$ l'algèbre de Lie de G) alors $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.
On a

$$(k^{(2)})^{-1}p(\varepsilon t^{(1)})).k^{(2)}.p(\varepsilon t^{(2)}) \quad = \quad \exp\left(\varepsilon \sum_{j=1}^{n} t_j^{(1)}(k^{(2)})^{-1}M_{j,n+1}k^{(2)}\right)p(\varepsilon t^{(2)})$$

or

$$(k^{(2)})^{-1}M_{j,n+1}k^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} k_{ji}M_{i,n+1}$$

et par suite

$$(k^{(2)})^{-1}p(\varepsilon t^{(1)}).k^{(2)} \quad = \quad p(\varepsilon(k^{(2)})^\top t^{(1)}).$$

De plus, l'approximation à l'ordre 1 en ε donne

$$p(\varepsilon(k^{(2)})^\top t^{(1)}).p(\varepsilon t^{(2)}) \simeq p(\varepsilon(k^{(2)})^\top t^{(1)} + \varepsilon t^{(2)})$$

on obtient donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(k^{(1)}.r(t^{(1)})).F_\varepsilon^{-1}k^{(2)}.r(t^{(2)}))) = k^{(1)}k^{(2)}.r((k^{(2)})^\top t^{(1)} + t^{(2)})$$

qui est égal à $k^{(1)}.r(t^{(1)}).k^{(2)}.r(t^{(2)})$. Ce qui confirme la condition iv. et donc $M(n)$ est une contraction de $SO_0(n, 1)$. $\square$

Bibliographie

[1] D. Burde, *Contractions of Lie algebras and algebraic groups.* Archivum Mathematicum **43**, No. 5, 321-332 (2007). arXiv :math/0703701v1 [math.AG] 23 Mar 2007

[2] D. Burde and C. Steinhoff, *Classification of orbit closures of 4 dimensional complex Lie algebras.* J. Algebra **214**, 729-739 (1999).

[3] D. Burde, *Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie Algebras.* Commun. Algebra **33**, no. 4, 1259-1277 (2005).

[4] D. Burde, *Degenerations of nilpotent Lie algebras.* Journal of Lie Theory **9**, No. 1, 193-202 (1999).

[5] H. D. Doebner and O. Melsheimer, *On a class of generalized group contractions*, Nuovo Cimento A(10) **49**, 306-311 (1967).

[6] R. Gilmore, *Lie groups ; Lie algebras ; and some of their applications*, John Wiley & Sons, New York, Interscience, (1974).

[7] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations : An Elementary Introduction*, Springer New York, (2010).

[8] G. C. Hegerfeldt, *Some properties of a class of generalized Inönü-Wigner contractions*, Nuovo Cimento A (10), **51**, 439-447, (1967).

[9] E. Inönü and E. P. Wigner, *On the contraction of groups and their representations.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39**, 510-524 (1953) ; *On a particular type of convergence to a singular matrix.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40**, 119-121 (1954).

[10] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction.* Progress in Mathematics, Vol. 140. Birkhäuser, second edition (2002).

[11] M. Levy-Nahas, *Deformation and contraction of Lie algebras*, J. Math. Phys. **8**, 1211-1222 (1967)

[12] Ja. H. Lõhmus, *Limit (contracted) Lie groups*, Proceedings of the Second Summer School on the Problems of the Theory of Elementary Particles (Otepää, 1967), Part IV, Inst. Fiz. i Astronom. Akad. Nauk Eston. SSR, Tartu 3-132 (Russian) (1969)

[13] S. Mehdi, Une introduction relativement compacte aux algèbres de Lie, Université Paris X et Institut de Mathématiques de Jussieu (Mars 2008).

[14] J. Mickelsson and J. Niederle, *Contractions of Representations of de Sitter Groups*, Commun. math. Phys. **27**, (1972), 167-180.

[15] G. M. Mubarakzyanov, *On solvable Lie algebras Izv. Vys. Ucheb. Zaved. Matematika* no. 1 (32) 114–123 (1963) (Russian)

[16] M. Nesterenko and R. Popovych, *Contraction of low dimensional Lie algebras.* arXiv :math-ph/0608018v4 11 Jan 2007.

[17] L.S. Pontryagin, *Topological groups*, Princeton Univ. Press, (1958)

[18] R. Popovych, V. Boyko, M. Nesterenko and M. Lutfullin, *Realizations of real low-dimensional Lie algebras* math-ph/0301029 (2003) 39 pages

[19] R. Popovych, V. Boyko, M. Nesterenko and M. Lutfullin *Realizations of real low-dimensional Lie algebras J. Phys. A : Math. Gen.* **36** 7337–7360 (2003)

[20] M. Postnikov, *Leçons de géométrie. Groupes et algèbres de Lie,* Editions Mir. Moscou, (1985).

[21] M. Rainer, *Topological classifying spaces of Lie algebras and the natural completion of contractions.* Algebras, Groups and Geometries, **12** (1995) n^o 4 ; 353-401.

[22] E. I. Saletan, *Contraction of Lie groups.* J.Math. Phys. **2**, 1-21 (1961).

[23] I. E. Segal, *A class of operator algebras determined by groups.* Duke Math. J. 18 (1951). 221-265.

[24] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.*, Springer (1983).