République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2020/2021

Mesure de Haar

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par **L**arbi **T**ouil [1]

Sous la direction de

Zeglaoui Ahmed

Soutenue le 14/07/2021 devant le jury composé de

D. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : larbitouil97@gmail.com

REMERCIEMENT

Nous remercions Dieu Tout-Puissant qui nous a permis de mener à bien cette recherche scientifique, et qui nous a inspiré patience, sannté et détermination. Dieu merci merci beaucoup.

J'exprime mes sincères remerciements et ma gratitude au professeur superviseur, ***Ahmed Zeglaoui****, pour tout le soutien, les conseils et les conseils qu'il m'a fournis, et je lui exprime également ma gratitude pour son dévouement et le temps qu'il m'a consacré à compléter ce travail tel qu'il est il a les plus hautes expressions de louange et d'appréciation.*

Je remercie également les nembres du jury, chacun ***D. Djebbouri, K. Djerfi, G. Djellouli****, d'avoir accepté d'examiner notre modeste travail. Je remercie également tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.*

Enfin, j'adresse mes sincéres remerciements à l'université du Dr Moulay Taher pour avoir mis à disposition tous les moyens pédagogiques pour la réussite de cette recherche scientifique.

Merci

Dédicace

Si offrir fait partie de la fidélité, je dédie cette recherche :

A celui qui m'a ouvert le chemin de la connaissance et m'a donné, alors donne-moi le meilleur. A celui dont je porte le nom avec fierté ***mon cher pére.***

A qui sa supplication était le secret de ma réussite, et avec sa présence je connaissais le sens de la vie, au symbole de l'amour et de la mer de tendresse, ***ma mère bien-aimée.***

A mon refuge, ma force et mon soutien après Dieu tout puissant, et mes âmes soeurs avec qui j'ai vécu, les plus beaux souvenirs ***mes frères et soeurs****.*

A mes frères que ma mère n'a pas enfantés, et les compagnons du chemin de la vie, sa douceur et son amertume, et symbole d'altruisme et de fidélité, ***mes amis.***

À tous ceux qui m'ont vraiment aimé et qui ont prié pour moi succès et paiement.

Touil Larbi

Table des matières

Introduction

La Mesure de Haar du nom de mathématicien hongrois Alfred Haar, qui l'a introduite en 1933, Voir [12].
La découverte d'Alfred Haar de l'invaraint translationnelle d'une mesure sur tout groupe topologique localement compact, devrait être classée comme l'un des moments marquants de l'histoire des mathématiques dans le vingtieme siècle.

Bien que l'existence soit connue pour tous les groupes calssiques, un résultat d'une telle généralité a été jugé improbable par la plupart des experts. John Von Neumann raconta ensuite avec un sourire ironique, comment il avait essayé de dissuader Haar de considerér la mesure de Haar. Il a fait amende honorable en donnant une preuve facile dans [7] de l'existence de la mesure de Haar pour les groupes compacts.

Haar prouve l'existence d'une telle mesure en recourant à l'axiôme de choix. Étant donné que l'ensemble vérifie la deuxième axiome de dénombrabilité, cela peut être réalisé avec une opération diagonale de Cantor. Son argumentation peut-être adaptée au cas général, mais alors l'axiome du choix semble être nécessaire pour l'existirée. Cependant, en 1935 Von Neumann,[16] et Andre Weil,[21] (indépendenent) ont prouvé, que l'échelle était unique jusqu'à la constante de multiplication. L'argument de Weil pour l'existence est assez basique et peut être reproduit en utilisant seulement quelques faits sur le produit de convolution et la division unitaire. Une preuve plus courte mais plus avancée est obtenue en appliquant le théorème de Fubini (un que seulement dans la "version Fubinienne" des fonctions continues à support compact) au produit de deux intégrales de Haar sur $G \times G$, Voir [7][9], par lequel Von Neumann a prouvé l'unicité.

Cette mémoire est organisé en trois chapitres :
L'objectif du premier chapitre est de fournir quelques définitions et théorèmes de base qui seront utilisés tout au long de ce manuscrit. Il a également abordé la Théorème de représentation de Riesz, qui a un rôle important dans la construction de la mesure de Haar.

Dans le deuxième chapitre, les théories générales liées au groupes topologiques ont été rappelées en présentant les définitions les plus importantes et les propriétés de base, qui seront utile dans le traitement du thème de ce mémoire .

Le troisième chapitre comprend la partie importante de ce mémoire, à commencer par le concept général de la mesure de Haar ainsi que les preuves de son existence et de son unicité. Il comprend également des exemples de la mesure de Haar de quelques groupe topologique localement compact et leurs actions gauche et droite. Ceci afin que le lecteur puisse mieux comprendre la thématique exposée.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Topologie

Notre thème principal, la mesure de Haar est définie pour un groupe topologique localement compact. La propriété "localement Compact" est topologique, et nous devons savoir quelque chose sur la topologie. Dans cette section, nous fournirons quelques définitions et propriétés de base qui aident à construire la mesure de Haar. Pour plus d'informations voir [9][15][20].

Définition 1.1.1. *[3] Soit X un espace topologique*

• *L'espace X est dit être un espace T_0 si pour tout $x \neq y \in X$ il existe un sous-ensemble ouvert contenant uniquement l'un d'entre eux.*

• *L'espace X est dit T_1 si pour tout $x \neq y \in X$ il existe deux ouverts U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$.*

• *L'espace X est dit T_2 ou Hausdorff si pour tout $x \neq y \in X$ il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $y \in V$.*

• *L'espace X est dit T_3 s'il est T_1 et si pour tout fermé F et $x \notin F$ il existe deux ouverts disjoints U et V tel que $F \subset U$ et $x \in V$.*

Définition 1.1.2. *[15] Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est compact si, de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ *de* X *telle que* $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, *il existe un sous-ensemble fini* J *de* I *tel que* $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Proposition 1.1.1. *[15] Soient* X *un espace topologique séparé et* A, B *deux parties compactes de* X *telles que* $A \cap B = \emptyset$. *Alors il existe deux ouverts* U *et* V *dans* X *tels que* $A \subset U, B \subset V$, *et* $U \cap V = \emptyset$.

Corollaire 1.1.1. *[18]*

Tout espace séparé compact est normal.

Définition 1.1.3 (Espaces topologique localement compacts)**.** *[20]*

On dit qu'un espace topologique X *est localement compact s'il est séparé, et si tout point possède au moins un voisinage compact.*

Exemple :

• Tout espace compact X est localement compact, car X est un voisinage compact de chacun de ses points.

Proposition 1.1.2. *[9] Soit* X *est un espace localement compact, et soit* $U \subset X$ *est ouvert, et* $x \in U$, *il existe un voisinage compact* V *de* x *tel que* $V \subset U$.

Proposition 1.1.3. *[9] Un espace topologique* X *est compact si, et selement si pour toute famille* $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *d'ensembles fermés avec la propriété d'intersection finie,* $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$.

Théorème 1.1.1. *[15] Soit* X *un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X *est un espace normal.*

(ii) *Pour tous ensembles fermés, non vides et disjoints* A *et* B *dans* X, *il existe une fonction continue* $f : X \to [0, 1]$ *telle que* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in A$ *et* $f(y) = 1$ *pour tout* $y \in B$.

Théorème 1.1.2 (Tychonoff). *[15] Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} X_i$ est compact si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est compact.*

1.2 Mesures et intégration

Dans cette section, nous présenterons quelques définitions et théorèmes importantes sur la théorie de la mesure et intégration qui sont directement liées à notre sujet principal, qui est la mesure de Haar, voir [5][10][11][17].

Définition 1.2.1 (Tribu ou σ-Algbre). *[10]*
Soient X un ensemble et $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de $X, \mathcal{M}$ est une tribu sur X (σ-Algebre)si :

a) $\emptyset \in \mathcal{M}$.

b) $\forall A \subset X, A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}($ *stabilite par passage ou complémentaire*)

c) $\forall (A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{M}($ *stabilité par union dénombrable*).

Exemple :
• $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ (tribu triviale),
• $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ (tribu grossière),
sont des tribus sur X.

Définition 1.2.2 (espace mesurable). *Si X est un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu de parties de X, le couple $(X, \mathcal{M})$ s'appelle un espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{M}$ s'appellent les parties mesurables de X.*

Définition 1.2.3 (Tribu engendrée). *Soit F une famille de parties de X. On note*

$$\sigma(F) = \bigcap_{\mathcal{M}\, tribu\ sur\ X, F\subset\mathcal{M}} \mathcal{M}.$$

Alors, $\sigma(F)$ est une tribu sur X appelée ***tribu engendrée par*** *F. C'est la plus petite tribu sur X qui contient F.*

Définition 1.2.4 (Tribu borélienne). *[11]*

Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de X, cette tribu sera notée $\mathcal{B}(X)$. On appelle borélien de X un élément de sa tribu borélienne.

Définition 1.2.5 (Mesures positives). *[11]*

Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable. On appelle mesure positive sur X une application $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ vérifiant :

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) *Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ composeé d'une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, on a*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

*On dit que $(X,\mathcal{M},\mu)$ est **un espace mesuré**.*

Exemple :

1) **Mesure de Dirac** en $x \in X$.

Soit $(X,\mathcal{M})$ un ensemble mesurable. On définit $\delta_x : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ par

$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) **Mesure de comptage :** Sur $(X,\mathcal{P}(X))$, on définit la mesure de comptage $\mu(A)$, $A \in X$ par

$$\mu(A) = \begin{cases} Card(A) & \text{si } A\, est\ fini\,, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.2.1 (propriétés élémentaires d'une mesure positive).

1. *Si* $A, B \in \mathcal{M}$ *et* $A \subset B$, *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. *Si* $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

3. *Si* $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ *et si* $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \geq 0$, *alors*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

4. *Si* $A_n \in \mathcal{M}$, *et* $A_n \supset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, *avec* $\mu(A_0) < \infty$ *on a*

$$\mu(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Définition 1.2.6 (Mesures extérieures)**.** *[9]*

Soit X *un ensemble quelconque. Une application* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *est appelée mesure extérieure sur* X *si*

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii) μ^* *est croissante : si* $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

iii) μ^* *est* σ*-sous-additive : pour tout suite* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Une partie B *de* X *est dite* μ^**-mesurable si pout toute partie* A *de* X,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Remarque :

Il est facile de voir qu'un ensemble B est μ^*-mesurable si et seulment, si $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$ pour tous les $A \subset X$ tels que $\mu^*(A) < \infty$.

Exemple : Une mesure de Radon sur un espace topologique X est une mesure de Borel qui est finie sur les ensembles compacts, régulière externe sur tous les ensembles de Borel et régulière interne sur tous les ensembles ouverts.

Définition 1.2.7 (Applications mesurables)**.** *[17] Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(X', \mathcal{N})$ deux espaces mesurables non vide, et soit f une application de X dans X'. L'application f est dite mesurable si $f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$, i.e pour tout $B \in \mathcal{N}$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.*

Exemple :

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, et soit $A \subset X$. On définit la fonction indicatrice de A par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, (\mathbb{1}_A)^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a \geq 1, \\ A & \text{si } 0 \leq a < 1, \\ X & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ainsi, 1_A est mesurable si et seulement si A est mesurable ($A \in \mathcal{M}$).

Exemple :

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une fonction continue, alors f est mesurable.

Définition 1.2.8 (Mesure $\sigma-$finie)**.** *[10] Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est $\sigma-$finie (ou que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est $\sigma-$finie) si :*

$$\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}, \mu(A_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathit{et}\, X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Théorème 1.2.1 (Mesure produit)**.** *[5] Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés $\sigma-$finis. Alors*

a) *Il existe une unique mesure m sur $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ telle que*

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \forall A \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{N}.$$

b) *Pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, on a :*

$$m(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu_x = \int_Y \mu(E^y) d\nu_y.$$

Théorème 1.2.2 (Fubini-Tonelli)**.** *[5] Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés $\sigma-$finis, et soit $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ une fonction $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mesurable. Alors :* ***i****) Les fonctions*

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{M}) & \to & [0, +\infty] \\ x & \mapsto & \int_Y f(x, y) d\nu_y \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{N}) & \to & [0, +\infty] \\ y & \mapsto & \int_X f(x, y) d\mu_x \end{array}$$

sont mesurables.

ii*) On a les égalités suivantes :*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu_x \right) d\nu_y.$$

1.3 Théorème de représentation de Riesz (Riesz-Markov)

Le théorème de représentation de Riesz, appelé par fois le théorème de Riesz-Markov ; à ne pas confondre avec le célérbre théoréme de représentation de Riesz qui perment une udentification d'un espace de Hilbert avec une espace duel topologique. Le théorème de représentation de Riesz fournit une manière d'obtenir des mesures (positives) à partir de formes linéaires positives sur l'espace des fonctions continues à support compact.

On note $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que le support d'une fonction f est *supp*$(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$.

Définition 1.3.1. *[9] Soit X un espace topologique séparé localement compact. Une mesure de Radon μ sur X est une mesure de Borel avec les propriétés suivantes :*

1. *$\mu(K) < \infty$ pour tous les compacts $K \subset X$.*
2. *(Régularité extérieure) Pour chaque ensemble Borel E,*

$$\mu(E) = inf\{\mu(U) \mid E \subset U, U\,ouvert\}.$$

3. *(Régularité intérieure) Pour chaque ensemble ouvert U,*

$$\mu(U) = sup\{\mu(K) \mid K \subset U, K\,compact\}.$$

Lemme 1.3.1 (Lemme d'Urysohn)**.**

Soit X un espace topologique séparé localement compact, U un ouvert de X, K un compact de X inclus dans U. Alors il existe une fonction $f \in C_c(X)$ telle que $supp(f) \subset U$, $f = 1$ sur K et $0 \leq f \leq 1$.

Remarque : En termes de fonctions caractéristiques, la conclusion affirme l'existence d'une fonction continue f qui satisfait les inégalités $1_K \leq f \leq 1_U$.

Théorème 1.3.1 (Théorème de représentation de Riesz (Riesz-Markov))**.** *[10]*

Soit $I : C_c(X) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. Alors il existe une mesure unique de Radon $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ telle que $I(f) = \int_X f d\mu$. pour tout $f \in C_c(X)$. En outre

$$\mu(U) = sup\{I(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1,\ supp(f) \subset U\}\ pour\ tous\ ouvert\, U \subset X, \tag{1.1}$$

et

$$\mu(K) = inf\{I(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, f \geq 1_K\}\ pour\ tous\ les\ compacts\, K \subset X. \tag{1.2}$$

Chapitre 2

Groupes topologiques

Dans ce chapitre, nous discuterons des théorèmes généraux concernant les groupes topologiques. Axiomes de séparation dans un groupe topologique, sous-groupes, groupes quotients. En plus des fonctions continues sur les groupes topologiques. Pour plus d'information voir[3][13][14]

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1.1. *[3] Un groupe topologique est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une topologie tel que les deux applications :*

$$\begin{aligned} \psi : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

(où $G \times G$ est muni de la topologie produit), sont continues.

Notation : *Si A et B sont deux parties de G, on pose :*

$$\begin{aligned} AB &= \{xy, x \in A\, et\, y \in B\} = \psi(A \times B), \\ A^{-1} &= \{x^{-1}, x \in A\} = \varphi(A). \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1. *[13] Soient G un groupe topologique et $x, y \in G$. Les deux applications ψ et φ étant continues ; pour tout voisinage V de xy dans G, il existe deux voisinages U de x et W de y tels que $UW \subset V$. Aussi, pour tout voisinage U de x^{-1}, $U^{-1} = \varphi^{-1}(U)$ est un voisinage de x.*

Théorème 2.1.1. *[14] Soit G un groupe muni d'un topologie, si $G \times G$ est muni de la topologie produit, alors G est un groupe topologique si, et selment si, l'application*

$$\begin{aligned} \gamma : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

est continue.

Preuve :

Montrons que φ et ψ sont continues est équivant au fait que γ est continue.
($\Rightarrow$) supposons que φ et ψ sont continue. Soit V un voisinage de xy^{-1}, il existe donc un voisinage W de x et un voisinage U de y tels que $WU^{-1} \subset V$ alors γ est continue.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que γ est continue. Soit U un voisinage de y^{-1} comme $ey^{-1} = y^{-1}$, il existe un voiasinage V de y et un voisinage W de e tel que $WV^{-1} \subset U$. On a donc $V^{-1} \subset WV^{-1} \subset U$ (car $e \in W$) alors ψ est continue. Montrons que φ est continue. Soit V un voisinage de $xy = x(y^{-1})^{-1}$ il existe un vouisinage U de x et un voisinage W de y^{-1} tel que $UW^{-1} \subset V$, comme W^{-1} est un voisinage de y , ceci montre que ψ est continue.

□

Exemple 2.1.1.

1. *Le groupe multiplicatif ($\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[, \times$) muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ est un groupe topologique.*

2. *Le groupe additif* $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ *muni de la topologie définie par la distance euclidienne est un groupe topologique.*

3. *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On munit* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ *de la topologie usuelle. L'application* $A \mapsto detA$ *est continue, car c'est un polynôme en les coefficients* $a_{i,j}$ *de* A. *Donc le groupe*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : detA \neq 0\},$$

est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *L'application* $(A, B) \mapsto AB$ *est continue, puisque chaque coefficient*

$$(AB)_{ij} = \sum_{K=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j},$$

est une fonction continue (un polynôme quadratique) en les coefficients de A *et* B. *D'un autre côtê, soit* $C(A)$ *la matrice des cofacteurs de* A, *c'est-à-dire* $C(A)_{i,j}$ *est le déterminant de la matrice de taille* $n-1$ *obtenue à partir de* A *en supprimant la i-éme ligne et la j'éme colonne ; c'est polynôme homogène de degré* $n-1$ *en les coefficients de* A. *D'après la formule*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} {}^{t}C(A),$$

oû ^{t} *désigne la transposée , on voit que* $A \mapsto A^{-1}$ *est une application continue . Donc* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un groupe topologique , appelé le groupe linéaire de* $\mathbb{K}$ *d'ordre* n.

Théorème 2.1.2. *[14] Soient* G *un groupe topologique et* $a \in G$. *Alors :*

1. *La translation à gauche* $L_a : x \mapsto ax$ *et la translation à droite* $R_a : x \mapsto xa$ *sont des homéomorphismes de* G *dans* G.

2. *L'application* φ *et l'automorphisme intérieur* $F_a : x \mapsto axa^{-1}$ *sont des homéomorphismes.*

Preuve :

1) L'application L_a est homéomorphisme :

a) L_a est bijective :

Injective : Soit x et $x' \in G$, on a :

$$\begin{aligned} L_a(x) = L_a(x') &\Rightarrow ax = ax' \\ &\Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ax') \\ &\Rightarrow (a^{-1}a)x = (a^{-1}a)x' \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Surjective : Soit $y \in G$, existe-t-il un $x \in G$ tel que $L_a(x) = y$, on a

$$\begin{aligned} L_a(x) = y &\Leftrightarrow ax = y \\ &\Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}y \\ &\Rightarrow x = a^{-1}y \end{aligned}$$

Ce qui montre que L_a est surjective.

En remarquant que $y = L_a(x) \Leftrightarrow x = L_{a^{-1}}(y)$, ceci montre que $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$.

b) L_a est continue :

Soit V un voisinage de ax, il existe un voisinage U de a et un voisinage W de x tel que $UW \subset V$. Comme $aW \subset UW \subset V$ alors L_a est continue.

$L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ est aussi continue et par conséquent, L_a est un homéomorphisme, ainsi. D'une manière analogue, on montre aussi que R_a est un homéomorphisme.

2) L'application φ est une bijection continue égale à sa réciproque, donc c'est un homéomorphisme

L'automorphisme $F_a : x \mapsto axa^{-1}$ est un homéomorphisme comme composé de deux homéomorphismes, en effet $F_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$.

$\square$

Corollaire 2.1.1. *[4] Soit G un groupe topologique.*

Pour toute partie ouverte (resp fermée) O de G et tout point $a \in G$, les ensembles aO, Oa, O^{-1} sont ouverts (resp fermés).

Preuve :

Soit O est un ouvert de G, alors O^{-1} aussi ouvert car l'application φ est un homéomorphisme et $O^{-1} = \varphi(O)$. Les ensembles aO et Oa sont des ouverts puisque L_a et R_a sont des homéomorphismes et $aO = L_a(O)$ et $R_a(O) = Oa$.

□

Définition 2.1.2. *[13] Soit G un groupe topologique, un voisinage V de e est dit symétrique si $V = V^{-1}$.*

Lemme 2.1.1. *[14] Soit G un groupe topologique .*

Tout voisinage U de e contient un voisinage symétrique V de e.

Preuve : Soit U un voisinage de e, donc U^{-1} est aussi un voisinage de e, d'où $V = U \cap U^{-1}$ est aussi un voisinage de e qui est symétrique, ($car\, V^{-1} = (U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap (U^{-1})^{-1} = V$) et $V \subset U$.

□

Proposition 2.1.1. *[3] Soient G un groupe topologique et $\mathscr{U}$ l'ensemble des voisinages de e, alors $\mathscr{U}$ vérifie les propriétes suivante :*

1. $\forall U \in \mathscr{U}, \exists V \in \mathscr{U}$, *tel que* $VV \subset U$.
2. $\forall U \in \mathscr{U}, \forall a \in U, \exists V \in \mathscr{U}$, *tel que* $aV \subset U$.
3. $\forall U \in \mathscr{U}, \forall a \in U, \exists V \in \mathscr{U}$ *tel que* $aVa^{-1} \subset U$.

Preuve :

1. Soit $U \in \mathscr{U}$, comme ψ est continue donc $\psi^{-1}(U)$ est un voisinage de (e, e), et donc il existe un voisinage V_1 de $\mathscr{U}$ et un voisinage V_2 de $\mathscr{U}$ tel que $V_1 \times V_2 \subset \psi^{-1}(U)$, on pose $V = V_1 \cap V_2$, on a bien $\psi(V, V) = VV \subset \psi(\psi^{-1}(U)) \subset U$.

2. Soit $a \in G$. L'application L_a est continue donc si $U \in \mathscr{U}$, alors il existe $V \in \mathscr{U}$ tel que $V \subset L_a^{-1}(U)$. D'où

$$L_a(V) = aV \subset L_a(L_a^{-1}(U)) \subset U.$$

3. Soit $a \in G$. L'application F_a est continue comme c'est égale $L_a \circ R_{a^{-1}}$, donc si $U \in \mathscr{U}$, alors il existe $V \in \mathscr{U}$ tel que $V \subset F_a^{-1}(U)$. D'où

$$F_a(V) = aVa^{-1} \subset F_a(F_a^{-1}(U)) \subset U.$$

□

2.2 Sous-groupes, groupe quotient

2.2.1 Sous-groupes topologiques

Définition 2.2.1.1. *[4]*
Soient G un groupe topologique, et $H \subseteq G$. On dit que H est un sous-groupe topologique de G, si H est sous-groupe de G que l'on munit de la topologie induite par G.

Théorème 2.2.1.1. *Un sous-groupe H d'un groupe topologique G est ouvert si, et seulement si son intérieurs est non vide. Chaque sous groupe ouvert H de G est fermée.*

Preuve :
Supposon que H a un point intérieur x. Il existe un voisinage ouvert U de e tel que $xU \subset H$, pour $y \in H$ on a : $yU = (yx^{-1})xU \subset yx^{-1}H = H$. Donc H est ouvert. Si H est ouvert, alors par définition, tout point de H est un point intérieure. On suppose que H est un ouvert et soit $G - H = \bigcup_{x \in G} \{xH/x \notin H\}$. Chaque xH est un ouvert, et donc $G - H$ est un ouvert, ainsi H est fermée.

□

Théorème 2.2.1.2. *Soit U un voisinage symétrique de e dans un groupe topologique G. L'ensemble $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$ est un sous-groupe ouvert et fermé de G.*

Preuve :

Soient $x, y \in G$, il existe $m, n > 0$, tels que $x \in U^m$ et $y \in U^n$ donc $xy^{-1} \in U^m(U^n)^{-1} = U^m U^{-n} = U^m U^n = U^{m+n} \subset H$. Ainsi H est un sous-groupe de G.

Pour montrer que H est ouvert, il suffit de remarquer que $\forall y \in H, yU \subset yH = H$. Donc H est ouvert , et par conséquent, d'aprés le **théoreme 2.2.1.1** ci-dessus il est fermé.

□

Théorème 2.2.1.3. *Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe, alors $\overline{H}$ est un sous-groupe de G.*
Si de plus H est normal, alors $\overline{H}$ l'est aussi .

Preuve :

Il suffit de montrer que $\overline{H}$ est stable pour les lois de composition et d'inversion. Soit $a, b \in \overline{H}$, montrons que $ab^{-1} \in \overline{H}$: Soit V un vouisinage de ab^{-1}, alors il existe U un voisinage de a et W un voisinage de b tels que $UW^{-1} \subseteq V$. Comme $a, b \in \overline{H}$, on a $U \cap H \neq \varnothing$ et $W \cap H \neq \varnothing$,i.e.$\exists x \in U \cap H$ et $y \in W \cap H$ tels que $xy^{-1} \in UW^{-1} \cap H \subseteq V \cap H$, i.e $V \cap H \neq \varnothing$.
Supposons de plus que H normal et soit $a \in \overline{H}, x \in G$. Montrons que $x^{-1}ax \in \overline{H}$. Soit V un voisinage de $x^{-1}ax$, il existe U voisinage de a tel que $x^{-1}Ux \subset V$, or $a \in \overline{H}$,ainsi $U \cap H \neq \oslash$. Soit $b \in U \cap H$, ona donc $x^{-1}bx \in V$ et comme H est normal, on a également $x^{-1}bx \in H$, alors $x^{-1}bx \in V \cap H$.

□

2.2.2 Groupes topologiques quotients

Définition 2.2.2.1. *[4] Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe topologique de G, et $\pi : G \to G/H$ la projetion canonique.*

On définit une topologie sur G/H de la façon suivante : Une partie $A = H$ de G/H est un ouvert si $\pi^{-1}(A)$ est un ouvert de G.
Cette topologie sur G/H est appelée la topologie quotient.

Théorème 2.2.2.1. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe normal, alors le groupe quotient G/H est un groupe topologique.*

Preuve :

Il suffit de montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \pi : G/H \times G/H & \to & G/H \\ (\overline{x}, \overline{y}) & \mapsto & \overline{xy}^{-1} \end{array} \quad \text{est continue.}$$

Soit W un voisinage ouvert de $\overline{xy}^{-1}$, rappelons que $\overline{x} = xH$ et $\overline{y} = yH$ où $x, y \in G$. On a $\pi^{-1}(W)$ est un ouvert dans G (car π est continue) et $xy^{-1} \in \pi^{-1}(W)$, puisque G est un groupe topologique, il existe deux ouverts U et V tels que $x \in U, y^{-1} \in V^{-1}$ et $xy^{-1} \in UV^{-1} \subset \pi^{-1}(W)$. Puisque π est ouvert $\overline{xy}^{-1} \in \pi(U)\pi(V)^{-1} \subset \pi(\pi^{-1}(W)) = W$. et $\pi(U), (\pi(V))^{-1} = \pi(V^{-1})$ sont ouverts car U et V le sont.

□

Théorème 2.2.2.2. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe normal de G.*
a) *Pour que G/H soit séparé, il faut et il suffit que H soit fermé dans G.*
b) *Pour que G/H soit discret, il faut et il suffit que H soit ouverte dans G.*

Preuve :

a) ($\Rightarrow$) Supposons G/H séparé. Alors tout singleton de G/H est un sous-ensemble fermé et donc en particulier le point $\{H\}$ est fermé. Puisque π est continue, $H = \pi^{-1}(\{H\})$ est un fermé.
($\Leftarrow$) supposons H fermé. Soit $\forall x \in G$ on a xH est un fermé est donc $G \setminus xH$ est un ouvert dans G. Donc $\pi(G \setminus xH)$ est un ouvert dans G/H, or $(G/H) \setminus \{xH\} = \pi(G \setminus H)$ donc $\{xH\}$ est fermé et ainsi G/H est séparé.
b) ($\Rightarrow$) Si G/H est discret alors chaque singleton est ouvert donc en particulier $\{H\}$. Or $H = \pi^{-1}(\{H\})$ donc H est ouvert.

($\Leftarrow$) Si H est ouvert, alors xH l'est aussi pour tout $x \in G$ ce qui implique que $\{\overline{x}\}$, est ouvert dans G/H. D'où G/H est discret.

$\square$

2.3 Axiomes de séparation dans des groupes topologiques

Proposition 2.3.1. *Soit G un groupe topologique, et soit H un sous-groupe topologique de G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *G est T_0.*

b) *G est T_1.*

c) *G est T_2 ou Hausdorff.*

d) $\bigcap_{U \in \mathscr{U}} U = \{e\}$, *où $\mathscr{U}$ est un systéme fondamental de voisinages de e.*

Preuve : Nous montrerons que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.
(a) $\Rightarrow$ (b) : Soient $x \neq y$, et $x, y \in G$, il existe un voisinage U de x tel que $y \notin U$. Puisque $x^{-1}U = V$ est un voisinage de e alors $V \cap V^{-1} = W$ est un voisinage symétrique de e. Donc yW est un voisinage de y et $x \notin yW$. En effet, sinon $x^{-1} \in Wy^{-1}$, et donc $x^{-1} \in Wy^{-1} \subset Vy^{-1} \subset x^{-1}Uy^{-1}$, ce qui implique $e = xx^{-1} \in xx^{-1}Uy^{-1} = Uy^{-1}$ c'est-à-dire $y \in U$, ce qui est une contradiction.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Si G est T_1 et $x \neq y \in G$ il existe un voisinage symétrique V de e tel que $VV \subseteq U$ qui est $xy^{-1} \notin V.V$.
Alors V_x et V_y sont des voisinages disjoints de x et y. Pour cela $z = vx = wy$, pour certains $v, w \in V$. Alors $xy^{-1} = v^{-1}zz^{-1}w = v^{-1}w \in V^{-1}V = VV$. Comme cela ne

peut pas être le cas, V_x et V_y sont disjoints. Par conséquent, G est Hausdorff.

(c) ⇒ (d) : Soit $x \in \bigcap\limits_{U \in \mathscr{U}} U$ et supposons que $x \neq e$. Il existe un voisinage V de e tel que $x \notin V$. On a $\mathscr{U}$ est un systéme fondamental de voisinages alors il existe $U \in \mathscr{U}$ tel que $U \subset V$, contradiction $x \in V$. D'où $x = e$.

(d) ⇒ (a) : Soit $x \neq y \in G$; puisque $xy^{-1} \neq e$ il existe $U \in \mathscr{U}$ tel que $xy^{-1} \notin U$. Donc Uy est un voisinage de y tel que $x \notin Uy$.

□

Proposition 2.3.2. *[9] Soit G un groupe topologique.*

Si G n'est pas T_1, Soit $H = \overline{\{e\}}$. Alors H est un sous-groupe normal et G/H équipé du la topologie par quotient, est un groupe topologique de Hausdorff.

Preuve :

D'aprés **la théorème 2.2.1.3**, H est un sous-groupe normal. Il est bon de vérifier que la multiplication et l'inversion sont continues sur G/H. On voit que $\{e_{G/H}\}$ est fermé dans la topologie quotient puisque H est fermé. Par conséquente, tous les autres ensembles à un point sont également fermés, en utilisant que gH est fermé pour chaque $g \in G$, et donc G/H est T_1 et par la première partie de cette proposition, nous concluons que G/H est Hausdorff.

□

2.4 Fonctions continues sur les groupes topologiques

Définition 2.4.1. *[9] Soient G un groupe topologique et f une fonction réelle ou complexe sur G. On définit la translation gauche et à la translation droite de f comme suite :*

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x), \quad R_y f(x) = f(xy), \quad \textit{pour tout}\, x, y \in G.$$

Remarque : Pour tous $y, z \in G$, on a $L_{yz}f = L_y(L_z f)$ et $R_{yz}f = R_y(R_z f)$.

Définition 2.4.2. *Soit X un espace topologique, et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction. Le support de f, noté supp (f), est l'ensemble supp$(f) = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$.*
Si supp (f) est compact, on dit que f est à support compact, et nous définissons $C_c(X) = \{f \in C(X) : \, supp\, (f)\, est\ compact\,\}$, où $C(X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes sur X.
Par exemple, chaque fonction continue sur un compact l'espace topologique a un support compact puisque chaque sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact.
Nous utilisons également la notation suivante $C_c^+(X) = \{f \in C_c(X) : f(x) \geq 0\, et\, \|f\|_\infty > 0\}$, où $\|f\|_\infty = \, sup\, \{|f(x)| : x \in X\}$.

Définition 2.4.3. *[9]*
Soient G un groupe topologique, et $f \in C_c(G)$ on dit que f est continue uniformément à gauche (resp uniformément à droite). Si pour tous $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de e tel que $\|L_y(f) - f\|_\infty < \varepsilon$, (resp $\|R_y(f) - f\|_\infty < \varepsilon$), $\forall y \in U$.

Proposition 2.4.1. *Soit G un groupe topologique et $f \in C_c(G)$ alors f est uniformément continue à gauche et à droite.*

Preuve :
Soient $K = supp(f) = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$ et supposons $\varepsilon > 0$, puisque f est continue alors pour tout $x \in K$, il existe un voisinage U_x de e tel que pour tout $y \in U_x$,

$$|f(xy) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

est par **Proposition 2.1.1,(1)**. Il y a un voisinage symétrique V_x de e tel que $V_x V_x \subset U_x$. Puis $\{xV_x\}_{x\in K}$ couvre K donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$. On pose $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$.

Maintenant nous allons montrer que V est le voisinage souhaité. Il est clair que V est un voisinage symétrique de e. D'abord supposons $x \in K$ et $y \in V$. Puis $xx_{x_i}^{-1} \in V_{x_i} \subset U_{x_i}$ pour certains $1 \leq i \leq n$ et donc $y^{-1}xx_i^{-1} \in VV_{x_i} \subset V_{x_i}V_{x_i} \subset U_{x_i}$. Par conséquent, nous avons cela

$$\begin{aligned} |f(y^{-1}x) - f(x)| &= |f(y^{-1}xx_i^{-1}x_i) - f(xx_i^{-1}x_i)| \\ &\leq |f(y^{-1}xx_i^{-1}x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(xx_i^{-1}x_i)| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant supposons $x \notin K$. Si $y^{-1}x \notin K$ alors l'inégalité est trivial.
Sinon, si $y^{-1}x \in K$, alors $y^{-1}xx_i^{-1} \in V_x$, pour certains i. Donc $xx_i^{-1} = yy^{-1}xx_i^{-1} \in U_{x_i}$, alors

$$\begin{aligned} |f(y^{-1}x) - f(x)| &\leq |f(y^{-1}x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &= |f(y^{-1}xx_i^{-1}x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(xx_i^{-1}x_i)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.4.1. *[6] Soient $f \in C_c(G)$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de e tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ chaque fois que $y^{-1}x \in V$ ou $yx^{-1} \in V$.*

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue à gauche et à droite, il existe un voisinage W_1 de e tel que pour tout $x \in G$ et $z \in W_1$, $|L_zf(x) - f(x)| < \varepsilon$ et un voisinage W_2 de e tel que $z \in W_2$ implique $|R_zf(x) - f(x)| < \varepsilon$. Soit $W = W_1 \cap W_2$. Alors, si $y^{-1}x \in W$, c'est-à-dire, $x = yw$ pour certains$w \in W$, on en déduit que $|f(x) - f(y)| = |f(yw) - f(y)| = |R_wf(y) - f(y)| < \varepsilon$. De même, nous avons que si $yx^{-1} = w \in W$, alors $|f(x) - f(y)| = |L_wf(y) - f(y)| < \varepsilon$.

□

Chapitre 3

Mesure de Haar

La mesure de Haar a été découverte par Alfred Haar (un mathématicien hongrois) en 1933. Dans ce chapitre, nous introduisons le concept important de mesure invariante et d'intégration invariante sur un groupe topologique G, nous prouverons également l'existence et l'unicité de la mesure de Haar. Soit G un groupe localement compact et soit $C_c(G)$ et $C_c^+(G)$ l'espace des fonctions continues et l'espace des fonctions continue à support compact sur G avec un support compact respectivement, voir[6][7][9][16].

3.1 Définition et propriétés

Un groupe localement compact est un groupe topologique dont la topologie sous-jacents est localment compacte et séparé.

Définition 3.1.1. *[9] Soit μ une mesure de Radon sur un groupe topologique localement compact G.*
On dit que μ est invarinte à gauche (resp à droite), si $\mu(xA) = \mu(A)$ (respectivement si $\mu(Ax) = \mu(A)$). Pour tout borélien A et pour tout $x \in G$.

Définition 3.1.2 (Mesure de Haar)**.** *[9]*

Soit G est un groupe topologique localement compact. Une mesure de Haar à gauche *(resp à droite) sur G est une mesure de Radon invariante à gauche (resp invariante à droite) non nulle sur G.*

Proposition 3.1.1. *Soit G un groupe topologique localement compact.*

a) *Une mesure de Radon μ sur G est une mesure de Haar à gauche si, et seulement si, la mesure $\widetilde{\mu}$ défini par $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$, pour tout borélien $A \subseteq G$, est une mesure de Haar à droite sur G.*

b) *Une mesure de Radon non nulle sur G est une mesure de Haar à gauche si, et seulement, si $\int f d\mu = \int L_y f d\mu$ pour tout $f \in C_c^+(G)$ et pour tout $y \in G$.*

c) *Si μ est une mesure de Haar à gauche sur G alors $\mu(U) > 0$ pour tous les $U \subset G$ ouverts non vides. De plus, $\int f d\mu > 0$ pour tout $f \in C_c^+(G)$.*

d) *Si μ est une mesure de Haar à gauche sur G, alors $\mu(G) < +\infty$ si, et seulemment, si G est compact.*

Preuve :

a) Supposons que μ est une mesure de Haar à gauche. Il est facile de voir que c'est une mesure de Radon non nulle. Soit $A \subseteq G$ un ensemble de Borel. Que $\widetilde{\mu}$ est invariant à droite découle simplement du fait que $(Ax)^{-1} = x^{-1}A^{-1}$ pour tout $x \in G$. Par conséquent $\widetilde{\mu}(Ax) = \mu(x^{-1}A^{-1}) = \mu(A^{-1}) = \widetilde{\mu}(A)$. L'inverse peut être montré de la même manière.

b) Soit μ est une mesure de Haar à gauche et soit $y \in G$. Notez que $L_y 1_A = 1_{yA}$. Par conséquent, pour chaque fonction simple $h = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{Ai}$ avec $a_i \geq 0$ on obtient

$$\int h d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(yA_i) = \int L_y h d\mu.$$

De l'égalité $\int f d\mu = sup\{\int h d\mu \mid h\, simple\, f \geq h\}$ pour tous $f \in C_c^+(G)$, il s'ensuit que $\int f d\mu = \int L_y f d\mu$.

D'un autre côté, si $\int f d\mu = \int L_y f d\mu$ pour tous $f \in C_c^+(G)$ et pour tout $y \in G$ alors l'équation doit être vraie pour tous les $f \in C_c(G)$, car ces fonctions sont des combinaisons linéaires de fonctions dans $C_c^+(G)$. Puisque l'intégrale est une fonctionnelle linéaire positive sur $C_c(G)$, en appliquant le **théoréme de représentation de Riesz**, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\mu(U) &= sup\{\int f d\mu \mid 0 \leq f \leq 1,\, supp\,(f) \subset U\} \\
&= sup\{\int L_y f d\mu \mid 0 \leq f \leq 1,\, supp\,(f) \subset U\} \\
&= sup\{\int f d\mu \mid 0 \leq f \leq 1,\, supp\,(f) \subset yU\} \\
&= \mu(yU).
\end{aligned}$$

c) Si μ est une mesure de Radon non nulle, alors par régularité externe il y a un ensemble ouvert U pour lequel $\mu(U) \geq 0$, et par régularité interne sur ensemles ouverts il y a un ensemble compact K avec $\mu(K) > 0$. Soit U un ensemble ouvert et non vide arbitraire. Alors il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$, d'où $\mu(x_i U) = \mu(U)$, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U)$, nous concluons que $\mu(U) > 0$.
Pour $f \in C_c^+(G)$, soit $U := \{x \in G \mid f(x) > \frac{\|f\|}{2}\}$. Clairement, U est ouvert et non vide, puisque $\| f \| > 0$ donc $\int f d\mu \geq \frac{\|f\| \mu(U)}{2} > 0$.

d) Si G est compact alors $\mu(G) < +\infty$ puisque μ est une mesure de Radon. Si G n'est pas compact et que V est un voisinage compact de e, alors G ne peut pas être couvert par un nombre fini de translates à gauche de V. Donc, inductivement, nous pouvons choisir $x_1, x_2, \ldots,$ de sort que $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} x_i V$. En utilisant **la Proposition** 2.1.1 (1), choisissez un voisinage symétrique U de e tel que $U.U \subset V$. Nous affirmons que pour tout $m \neq n$, $x_m U \cap x_n U = \emptyset$. En effet, supposons $m < n$, et que $x_m u = x_n w$ pour certains $u, w \in U$, alors

$$x_n = x_m u w^{-1} \in x_m U.U = x_m V,$$

ce qui est en contradiction avec le choix de x_n.

Par (c), il s'ensuit que $\mu(U) > 0$,

$$\mu(G) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(x_n U) = N\mu(U).$$

Laissant $N \to \infty$, nous donne $\mu(G) = \infty$ ce qui est une contradiction. Alors G est compact.

□

Exemple 3.1.1.

1. *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure de Haar gauche et droite sur le groupe additif $G = \mathbb{R}^n$.*
2. *La mesure $f \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est une mesure de Haar sur $\mathbb{R}_+^*$.*

3.2 L'existence et l'unicité de la mesure de Haar

Dans cette section, nous démontrerons une partie importante de cette mémoire qui est l'existence et l'unicité de la mesure de Haar à gauche sur chaque groupe localement compact G. L'existence sera prouvée en construisant une fonctionnelle linéaire positive I sur $C_c(G)$, qui est également invariante par translation à gauche dans le sens où $I(L_y f) = I(f)$ pour chaque $f \in C_c(G)$ et pour tout $y \in G$. En utilisant le théorème de représentation de Riesz et la proposition $3.1.1, (b)$ nous pouvons prouver l'existence d'un mesure de Haar à gauche, et par la même proposition $3.1.1, (a)$ on obtient immédiatement l'existence d'une mesure de Haar.

3.2.1 L'existence

Définition 3.2.1.1 (Le numéro de couverture Haar). *[7] Soient G un groupe localement compact et $f, \varphi \in C_c^+(G)$, on définit*

$$(f : \varphi) = inf\, \{\sum_{j=1}^{n} c_j : f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi, \forall n \in \mathbb{N}, c_j > 0 \, et \, \forall x_1, \ldots, x_n \in G\}. \quad (3.1)$$

et $(f : \varphi)$ est le numéro de couverture fonctionnelle de f par rapport à φ.

Lemme 3.2.1.1. *[9] Pour tous $f, g, \varphi \in C_c^+(G)$, on a*

1. $(f : \varphi) = (L_x f : \varphi), \quad \forall x \in G$, (*invariance gauche*).
2. $(f + g : \varphi) \leq (f : \varphi) + (g : \varphi)$, (*sous-additivité*).
3. $(\lambda f : \varphi) = \lambda(f : \varphi), \quad \forall \lambda \geq 0$, (*sous-linéairité*).
4. *Si* $f \leq g$ *alors* $(f : \varphi) \leq (g : \varphi)$, (*monotonie*).
5. $(f : \varphi) \leq (f : g)(g : \varphi)$, (*comparabilité*).
6. $(f : g) \geq \|f\| \|g\|^{-1}$, (*non-trivialité*).

Preuve :

1. D'aprés l'equation 3.1, pour tout $n \in \mathbb{N}, c_j > 0, x_j \in G$ et $j \leq n$. On a

$$f \leq \sum_{j=1}^{n} c_i L_{x_j}\varphi \Longleftrightarrow L_x(f) \leq L_x\left(\sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j L_{xx_j}\varphi.$$

2. Découle du fait que si

$$f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \quad et \quad g \leq \sum_{j=1}^{m} a_j L_{z_j}\varphi,$$

alors

$$f + g \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi + \sum_{j=1}^{m} a_j L_{z_j}\varphi = \sum_{k=1}^{n+m} b_k L_{y_k}\varphi,$$

où

$$b_k = \begin{cases} c_k & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ a_{k-n} & \text{si } n-1 \leq k \leq m \end{cases}$$

et

$$y_k = \begin{cases} x_k & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ z_{k-n} & \text{si } n-1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

3. Ici nous avons cela $f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi$ si et seulement si $\lambda f \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda c_j L_{x_j}\varphi$, ce qui donne la conclusion.
4. Si $g \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi$, et $f \leq g$ alors $f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi$.
5. Découle du fait que si

$$f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}(g) \quad et \quad g \leq \sum_{i=1}^{m} a_i L_{z_i}\varphi,$$

alors

$$f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i L_{z_i}\varphi\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_j a_i L_{x_j z_i}\varphi.$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}, c_j > 0, x_j \in G$, pour $j \leq n$ avec $f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi$, il s'ensuit que $\|f\| \leq\| \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \|$ et par définition de la norme de la convergence uniforme, nous concluons que $\|f\| \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \|\varphi\|$. ce qui implique (6).

$\square$

Définition 3.2.1.2. *[7] soit la fonction $f_0 \in C_c^+(G)$ fixe, pour $\varphi \in C_c^+(G)$ on définit l'application $I_\varphi : C_c^+(G) \to [0, \infty]$ par*

$$I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)}.$$

Nous allons désormais regarder I_φ au lieu de $f \mapsto (f : \varphi)$. la raison en est les inégalités suivantes dont nous aurons besion.

Lemme 3.2.1.2. *Soient $f, \varphi \in C_c(G)$, nous avons l'inégalité*

$$(f_0 : f)^{-1} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0). \tag{3.2}$$

Preuve : Soient $f, \varphi \in C_c(G)$, nous avons $I_\varphi(f) = \frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}$,
alors

$$(f_0 : f)^{-1} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0),$$
$$(f_0 : f)^{-1} \leq \tfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \leq (f : f_0),$$

$$(f_0 : f)^{-1}(f_0 : \varphi) \leq (f : \varphi) \leq (f : f_0)(f_0 : \varphi).$$

D'apres **le lemme 3.2.1.1 (5)**, ce qui implique (3.2)

□

Lemme 3.2.1.3. *Soient $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ et $\varepsilon > 0$, il y a un voisinage V de e tel que $I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon$, pour tout $\varphi \in C_c^+(G)$, avec supp$(\varphi) \subset V$.*

Preuve :

On choisit d'abord une fonction $g \in C_c^+(G)$ avec $g \equiv 1$ sur l'ensemble $\mathrm{supp}(f_1 + f_2)$, et soit $\delta > 0$, à choisir plus tard. Nous définissons

$$h = f_1 + f_2 + \delta g, \text{ et } h_i = f_i/h, i = 1, 2$$

(où $h_i \equiv 0$ sur $G\backslash$ $\mathrm{supp}(f_i)$). Ainsi, $h_1, h_2 \in C_c^+(G)$, et par **le corollaire 2.4.1**, il existe un voisinage V de e tel que $\mid h_i(x) - h_i(y) \mid < \delta$, pour $i = 1, 2$ avec $y^{-1}x \in V$.

Soient $n \in \mathbb{N}, c_j \geq 0$ et $x_j \in G, j = 1, 2, \ldots, n$, de sort que $h \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi$. Il s'ensuit que chaque fois que $x_j^{-1}x \in \mathrm{supp}(\varphi) \subset V$

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi(x_j^{-1}x)[h_i(x_j) + \delta].$$

Cela signifie que

$$(f_i : \varphi) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j[h_i(x_j) + \delta],$$

et puisque $h_1 + h_2 \leq 1$ alors

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j[1 + 2\delta].$$

Puisque $\sum_{j=1}^{n} c_j$ est arbitraire, nous concluons que

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq (h : \varphi)(1 + 2\delta),$$

et d'apres **le lemme 3.2.1.1** alors

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq (1 + 2\delta)I_\varphi(h) \leq (1 + 2\delta)(I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta I_\varphi(g)).$$

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} 2\delta I_\varphi(f_1 + f_2) + (1 + 2\delta)\delta I_\varphi(g) &= 2\delta \tfrac{(f_1 + f_2 : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} + 2\delta^2 \tfrac{(g : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \\ &\leq 2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'aprés **le lemme 3.2.1.2** nous concluons que

$$\begin{aligned} I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) &\leq (1 + 2\delta)(I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta I_\varphi(g)) \leq (1 + 2\delta)(I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta(g : f_0) \\ &\leq I_\varphi(f_1 + f_2) + 2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) < I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.1.1. *Chaque groupe localement compact G, possède une mesure de Haar à gauche.*

Preuve : Pour chaque $f \in C_c^+(G)$, soit X_f l'intervalle $[(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$, et soit

$$X = \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f.$$

D'aprés **le lemme** 3.2.1.2, $I_\varphi \in X, \forall \varphi \in C_c^+(G)$ et d'aprés le **théorème de Tychonoff**, alors X est compact.

Pour chaque voisinage V de e, soit

$$K_V = \overline{\{I_\varphi \in X \mid \varphi \in C_c^+(G),\ supp\, \varphi \subset V\}}.$$

Soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les voisinage de e. Clairement $e \in \bigcap_{i=1}^n V_i$, donc l'ensemble ouvert $\bigcap_{i=1}^n V_i$, est non vide. Par conséquent, d'aprés le lemme d'Urysohn, il existe une fonction $\varphi \in C_c^+(G)$, telle que supp $\varphi \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$. On voit que $\varphi \in K_{\bigcap_{i=1}^n V_i}$. Clairement $K_{\bigcap_{i=1}^n V_i} \subset \bigcap_{i=1}^n K_{V_i}$, et cela implique que ce dernier ensemble est non vide.
Puisque $\{K_V\}_V$ est une famille de sous-ensembles fermés qui a la propriété d'intersection finie, on déduit que $\bigcap_V K_V$ est non vide. Choisissez un $I \in \bigcap_V K_V$.
Pour chaque voisinage V de e nous avons que $I \in K_V$. En utilisant la définition de K_V avec la définition de la topologie produit, nous en déduisons que, pour chaque $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C_c^+(G)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c^+(G)$ tel que supp $\varphi \in V$ et $|I(f_i) - I_\varphi(f_i)| < \varepsilon$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.
Donc d'aprés le lemme 3.2.1.1; (1)(2) et le lemme 3.2.1.3 I_φ est invariant à gauche et satisfait $I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2), \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, et il s'ensuit facilement que pour $f \in C_c(G)$ à valeur réelle on définit $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$, où $f^+(x) = max\,(f(x), 0)$ et $f^-(x) = max\,(-f(x), 0)$. Alors I est clairement une forme linéaire positive sur $C_c(G)$ et donc par le théoréme de représentation de Riesz, nous concluons qu'il existe une mesure de Radon unique μ telle que $I(f) = \int f d\mu$, $\forall f \in C_c(G)$. De plus $\int f d\mu = I(f) \geq (f_0 : f)^{-1} > 0$, pour tous $f \in C_c^+(G)$, et donc μ doit être non nul. Puisque $\int f d\mu = I(f) = I(L_x f) = \int L_x f d\mu$, pour tout $x \in G$ et $f \in C_c^+$, nous concluons par la proposition 3.1.1(b) que μ est une mesure de Haar à gauche.

□

3.2.2 L'unicité

Soient μ une mesure de Haar à gauche, $\check{\nu}$ une mesure de Haar à droite. Alors ν est une mesure de Haar à gauche. On va montrer que μ et ν sont proportionnelles. Ceci prouvera bien que deux mesures de Haar à gauche sont forcément proportionnelles.

Lemme 3.2.2.1. *[6] Soit ν une mesure de Haar à gauche sur G. Alors pour tout $f \in C_c(G)$, la fonction*

$$x \mapsto \int_G f(yx)d\nu(y)$$

est continue sur G.

Preuve : Il faut montrer que pour un $x_0 \in G$ donné et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout $x \in U$ on a $\left|\int_G f(yx) - f(yx_0)d\nu(y)\right| < \varepsilon$. En remplaçant f par $R_{x_0}f(y) = f(yx_0)$, on réduit le problème au cas $x_0 = e$. Soit K le support de f et soit V un voisinage symétrique compacte. Pour $x \in V$ on a $\operatorname{supp}(R_x f) \subset KV$. Soit $\varepsilon > 0$, et comme f est uniformément continue, il existe un voisinage symétrique W tel que pour $x \in W$ on a $|f(yx) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\nu(KV)}$. Pour $x \in U = W \cap V$ on obtient donc

$$\begin{aligned} \left|\int_G f(yx) - f(y)d\nu(y)\right| &\leq \int_{KV} |f(yx) - f(y)|d\nu(y) \\ &< \frac{\varepsilon}{\nu(KV)}\nu(KV) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.2.1.

Soient μ et ν deux mesures de Haar à gauche sur le groupe localement compact G. Alors il existe un nombre réel positif c tel que $\mu = c\nu$.

Preuve : L'assertion que $\mu = c\nu$ est équivalente à l'assertion que $\int_G f d\mu / \int_G f d\nu$ est indépendant de $f \in C_c^+(G)$. Pour expliquer cela davantage, lorsque $c = \frac{\mu}{\nu}$ et les mesures μ et ν sont écrites sous leurs formes intégrales de $\int_G f d\mu$ et $\int_G f d\nu$, alors le rapport de $\frac{\int_G f d\mu}{\int_G f d\nu}$ est le même pour tout f choisi dans $C_c^+(G)$. Supposons alors que

$f, g \in C_c^+(G)$; nous montrerons que $\frac{\int_G f d\mu}{\int_G f d\nu} = \frac{\int_G g d\mu}{\int_G g d\nu}$.
Soit V_0 un voisinage compact symétrique de e et soit

$$A = (\, supp\,(f))V_0 \cup V_0(\, supp\,(f)),$$

$$B = (\, supp\,(g))V_0 \cup V_0(\, supp\,(g)).$$

Pour $y \in V_0$ considérez les fonctions $x \mapsto f(xy) - f(yx)$ et $x \mapsto g(xy) - g(yx)$ sont pris en charge dans A et B respectivement. Ensuite, étant donné $\varepsilon > 0$, d'après **la proposition 2.4.1**, il existe un voisinage compact symétrique $V \subset V_0$ de e telle que $\,sup_x|f(xy) - f(yx)| < \varepsilon$ et $\,sup_x|g(xy) - g(yx)| < \varepsilon$, $\forall y \in V$.
Choisissons $h \in C_c^+(G)$ avec supp$(h) \subset V$ et $h(x) = h(x^{-1})$. Puisqu'un groupe est un sous-groupe d'un groupe de permutations, tout élément x peut être réécrit sous la forme yx. Ensuite nous avons,

$$\begin{aligned}\left(\int_G h d\nu\right)\left(\int_G f d\mu\right) &= \int_G \int_G h(y) f(x) d\mu(x) d\nu(y)\\ &= \int_G \int_G h(y) f(yx) d\mu(x) d\nu(y).\end{aligned}$$

Maintenant par substitution, application du théorème de Fubini, et $h(x) = h(x^{-1})$, on a

$$\begin{aligned}(\int_G h d\mu)(\int_G f d\nu) &= \int_G \int_G h(x) f(y) d\mu(x) d\nu(y)\\ &= \int_G \int_G h(y^{-1}x) f(y) d\mu(x) d\nu(y)\\ &= \int_G \int_G h(x^{-1}y) f(y) d\nu(y) d\mu(x)\\ &= \int_G \int_G h(y) f(xy) d\nu(y) d\mu(x)\\ &= \int_G \int_G h(y) f(xy) d\mu(x) d\nu(y).\end{aligned}$$

Puisque la fonction $x \to f(xy) - f(yx)$ est supportée dans A et $\sup_x|f(xy) - f(yx)| < \varepsilon$, on établit que

$$\begin{aligned}|(\int_G h d\mu)(\int_G f d\nu) - (\int_G h d\nu)(\int_G f d\mu)| &= |\int_G \int_G h(y) f(xy) d\mu(x) d\nu(y)\\ &- \int_G \int_G h(y) f(yx) d\mu(x) d\nu(y)|,\\ &= \left|\int_G \int_G h(y)[f(xy) - f(yx)] d\mu(x) d\nu(y)\right|,\\ &\leq \varepsilon\mu(A) \int h d\nu.\end{aligned}$$

Par la même approche,

$$\left|\left(\int_G hd\mu\right)\left(\int_G gd\nu\right)-\left(\int_G hd\nu\right)\left(\int_G gd\mu\right)\right|\leq\varepsilon\mu(B)\int_G hd\nu.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|\frac{\int_G fd\mu}{\int_G fd\nu}-\frac{\int_G gd\mu}{\int_G gd\nu}\right|\leq\left|\frac{\int_G fd\mu}{\int_G fd\nu}-\frac{\int_G hd\mu}{\int_G hd\nu}\right|+\left|\frac{\int_G hd\mu}{\int_G hd\nu}-\frac{\int_G gd\mu}{\int_G gd\nu}\right|.$$

En divisant les deux inégalités ci-dessus par $(\int_G hd\nu)(\int_G fd\nu)$ et $(\int_G hd\nu)(\int_G gd\nu)$ respectivement, on a

$$\left|\frac{(\int_G hd\mu)(\int_G fd\nu)}{(\int_G hd\nu)(\int_G fd\nu)}-\frac{(\int_G hd\nu)(\int_G fd\mu)}{(\int_G hd\nu)(\int_G fd\nu)}\right|\leq\frac{\varepsilon\mu(A)\int_G hd\nu}{(\int_G hd\nu)(\int_G fd\nu)},$$

et

$$\left|\frac{(\int_G hd\mu)(\int_G gd\nu)}{(\int_G hd\nu)(\int_G gd\nu)}-\frac{(\int_G hd\nu)(\int_G gd\mu)}{(\int_G hd\nu)(\int_G gd\nu)}\right|\leq\frac{\varepsilon\mu(B)\int_G hd\nu}{(\int_G hd\nu)(\int_G gd\nu)}.$$

Aprés la réduction, il nous reste ce qui suit

$$\left|\frac{(\int_G hd\mu)}{(\int_G hd\nu)}-\frac{(\int_G fd\mu)}{(\int_G fd\nu)}\right|\leq\frac{\varepsilon\mu(A)}{(\int_G fd\nu)},$$

et

$$\left|\frac{(\int_G hd\mu)}{(\int_G hd\nu)}-\frac{(\int_G gd\mu)}{(\int_G gd\nu)}\right|\leq\frac{\varepsilon\mu(B)}{(\int_G gd\nu)}.$$

Ensuite, en additionnant on trouve

$$\left|\frac{\int_G fd\mu}{\int_G fd\nu}-\frac{\int_G gd\mu}{\int_G gd\nu}\right|\leq\varepsilon\left(\frac{\mu(A)}{\int_G fd\nu}+\frac{\mu(B)}{\int_G gd\nu}\right).$$

Puisque ε est arbitraire, nous concluons que

$$\left|\frac{\int_G fd\mu}{\int_G fd\nu}\right|=\left|\frac{\int_G gd\mu}{\int_G gd\nu}\right|.$$

□

Corollaire 3.2.2.1. *[2] Toute mesure invariante à gauche (resp. à droite) sur G est proportionnelle à une mesure de Haar à gauche (resp. à droite).*

3.3 La fonction module

Soit G un groupe localement compact, et soit μ une mesure de Haar sur G. Pour $x \in G$ la mesure μ, définie par

$$\mu_x(A) = \mu(Ax),$$

est clairement aussi une mesure de Haar, comme pour $y \in G$ on a $\mu_x(yA) = \mu(yAx) = \mu(Ax) = \mu_x(A)$. Par conséquent, d'aprés l'unicité de la mesure de Haar, il existe un nombre $\Delta(x) > 0$ avec

$$\mu_x = \Delta(x)\mu$$

De cette façon, on obtient une application $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$, qui est appelée la fonction modulaire du groupe G. Si $\Delta \equiv 1$, alors le groupe G est dit unimodulaire.
Dans ce cas, chaque mesure de Haar gauche est également invariante à droite.

Proposition 3.3.1. *[6] La fonction modulaire $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ sur un groupe localement compact G est un homomorphisme de groupes continu.*
De plus, si μ est une mesure de Haar à gauche sur G pour tout $y \in G$ et $f \in C_c(G)$ on a

$$\int_G R_y f(x) d\mu(x) = \int_G f(xy) d\mu(x) = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x) d\mu(x). \tag{3.3}$$

Preuve : Pour tous $x, y \in G$ et le ensemble Borel $A \subset G$, on a

$$\begin{aligned} \Delta(xy)\mu(A) = \mu_{xy}(A) &= \mu(Axy) = \mu_y(Ax) \\ &= \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A). \end{aligned}$$

Choisissez A avec $0 < \mu(A) < \infty$ pour obtenir $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$. D'où Δ est un homomorphisme de groupes.

Montrons que Δ est continu :

Soit $f \in C_c(G)$ avec $c = \int_G f(x)dx \neq 0$. D'aprés l'equation 3.3, nous avons

$$\Delta(y) = \frac{1}{c}\int_G f(xy^{-1})dx = \frac{1}{c}\int_G R_{y^{-1}}f(x)dx.$$

Donc la fonction est continue d'après **le lemme 3.2.2.1**.

□

Proposition 3.3.2. *[1] Si G est abélien ou compact, alors G est unimodulaire*

Preuve : Si G est un groupe abélien alors toute translation à droite est une translation à gauche translation, et donc chaque mesure de Haar à gauche est invariante à droite.

Si G est compact, alors $\Delta(G)$ est un sous-groupe compact du groupe multiplicatif $]0, +\infty[$. Mais le seule sous-groupe compact de cette dernière est le groupe trivial $\{1\}$, ce qui signifie que $\Delta = 1$.

□

Remarque 3.3.1. *Un sous-groupe d'un groupe unimodulaire n'est pas nécessairement unimodulaire. Par exemple $G = GL(2, \mathbb{R})$ est unimodulaire mais le sous-groupe*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\} \quad \textit{de } G \textit{ ne l'est pas}.$$

Proposition 3.3.3. *[1] Soit G un groupe localement compact. Pour chaque $x \in G$ on a*

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$$

pour tout $f \in C_c(G)$.

Preuve : Soit $f \in C_c(G)$ et posons $I(f) = \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x)$. Ensuit par le

$$\begin{aligned} I(L_y f) &= \int_G f(y^{-1}x^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x) \\ &= \int_G f((xy)^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x) \\ &= \Delta(y^{-1}) \int_G f(x^{-1})\Delta((xy^{-1})^{-1})d\mu(x) \\ &= \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x) = I(f). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que I est une intégale invariante à gauche ; donc il existe un nombre $c > 0$ avec $I(f) = c\int_G f(x)d\mu(x)$. Pour montrer que $c = 1$, soit $\varepsilon > 0$ et choisi un voisinage symétrique V avec $|1 - \Delta(s)| < \varepsilon$, pour chaque $s \in V$. Soit $f \in C_c^+(V)$ une fonction symétrique. Puis

$$\begin{aligned} |1 - c| \int_G f(x)d\mu(x) &= \left|\int_G f(x)d\mu(x) - I(f)\right| \\ &\leq \int_G |f(x) - f(x^{-1})\Delta(x^{-1})|d\mu(x) \\ &= \int_V f(x)|1 - \Delta(x^{-1})|d\mu(x) \\ &< \varepsilon \int_G f(x)d\mu(x). \end{aligned}$$

On obtient donc $|1 - c| < \varepsilon$ et comme ε était arbitraire, nous concluons que $c = 1$.

□

3.4 Exemples

Avant de commencer à fournir nos exemples sur la mesure de Haar, nous allons d'abord passer sur quelques points importants qui aident le lecteur à comprendre.

i) Si G est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ pour un certain n, donc si $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in G$, on a

$$x.y = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in G,$$

où $F : G \times G \to G$, est une fonction continue vérifiant :

a) $\frac{dF_j}{dx_K}, \frac{dF_j}{dy_K}$ existent et sont continus tout au long de G.

b) Les jacobiens de L_a et R_a sont constants, c'est-à-dir qu'ils ne dépendent que de a.

ii) Pour toute fonction $f \in C_c(G)$, l'application

$$f \mapsto \mu(f) = \int_G f(x)(\,det\, J(L_x))^{-1} dx$$

est une mesure de Haar à gauche sur G. De même l'application

$$f \mapsto \nu(f) = \int_G f(x)(\,det\, J(R_x))^{-1} dx$$

est une mesure de Haar à droite sur G.

Preuve (ii) :

D'après **la propositions 3.1.1 (b)**, il est assez pour montrer que μ est invariante à gauche. Pour tout $y \in G$ et $f \in C_c^+(G)$,

$$\int_G f(y^{-1}x)(\,det\, J(L_x))^{-1} dx = \int_G f(x)(\,det\, J(L_x))^{-1} dx$$

Faisons le changement de variables $y^{-1}x = s$, d'où $x = ys$.

L_y étant un homéomorphisme de G, on a $L_y(G) = G$ et d'après la formule de changement de variables dans les intégrales multiples.

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_G f(y^{-1}x)(\,det\, J(L_x))^{-1} dx &= \textstyle\int_G f(s)(\,det\, J(L_{ys}))^{-1}(\,det\, J(L_y)) ds \\
&= \textstyle\int_G f(s)(\,det\, J(L_{ys}))^{-1}(\,det\, J(L_s))^{-1}(\,det\, J(L_y)) ds \\
&= \textstyle\int_G f(s)(\,det\, J(L_s))^{-1} ds = \mu(f).
\end{aligned}$$

Donc μ est une mesure de Haar à gauche. On montrerait de même que ν est une mesure de Haar à droite.

Nous pouvons maintenant commencer à traiter quelques exemples.

1. Soit G le groupe « ax+b »c'est-à-dire le groupe des transformations linéaires affines de la droite réelle. Il peut être identifié avec le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ constitué des matrices

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

G est une groupe localement compact isomorphe au demi-plan formé des $x \geq 0$. Un élément g de G s'écrira don (x, y) avec $(x, y)(u, v) = (xu, xv + y)$. Si

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, \; on \; a$$

$$L_h(g) = hg = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_h(g) = gh = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$det\, J(L_h) = a^2 \quad et \quad det\, J(R_h) = a.$$

Comme une fonction sur G s'identifie à une fonction des deux variables x et y, soit $f(g) = f(x, y)$, les mesures de Haar à gauche et à droite sur G s'écrivent respectivement, pour toute $f \in C_c(G)$:

$$\int_G f(g) d\mu(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(x, y)}{x^2} dx dy,$$

et

$$\int_G f(g) d\nu(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(x, y)}{x} dx dy.$$

On constate au passage que le groupe G n'est pas unimodulaire. La fonction module est donnée par $\Delta(g) = \frac{1}{x}$.

2. Prenous $G = GL(2, \mathbb{R})$, le groupe linéaire général sur $\mathbb{R}^2$.

   Si

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in G, \; on \; a$$

$$\begin{aligned} L_a(g) = ag &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{21}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Donc

$$J(L_a) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

   et

$$\begin{aligned} det\, J(L_a) &= a_{11}\, det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} + a_{12}\, det \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{11}a_{22}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{22}) + a_{12}(a_{12}a_{21}a_{21} - a_{11}a_{21}a_{22}) \\ &= a_{11}^2 a_{22}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + a_{12}^2 a_{21}^2 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 = (\, det\, a)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_a(g) = ga &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} & x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} \\ x_{21}a_{11} + x_{22}a_{21} & x_{21}a_{12} + x_{22}a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$J(R_a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{21} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} det\, J(R_a) &= a_{11}\, det \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - a_{21}\, det \begin{pmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{22}) - a_{21}(a_{12}a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}a_{12}) \\ &= (\, det\, a)^2. \end{aligned}$$

Donc les mesures de Haar à gauche et à droite sont identiques et données par

$$\int_G f(g)d\mu(g) = \int_{\mathbb{R}^4} = \frac{f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}} dx_{11}dx_{12}dx_{21}dx_{22}.$$

Ainsi $GL(2, \mathbb{R})$ est unimodulaire.

3. Soit G l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels de la forme

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Si

$$s = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid u, v, w \in G.$$

un calcul élémentaire montre que

$$det\, J(L_s) = \, det\, J(R_s) = 1.$$

Donc les mesures de Haar à gauche et à droite sont identiques et donnes par

$$\int_G f(g)d\mu(g) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz.$$

On particulaire G est unimodulaire.

4. Soit le groupe linéaire $G = GL(n,\mathbb{R})$. Par définition, c'est l'ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$ de matrices inversibles. Si $c_1,\ldots,c_n$ sont les vecteurs colonnes d'une matrice $x \in M_n(\mathbb{R})$, alors pour $g \in G, L_g(x) = gx = (gc_1,\ldots,gc_n)$ et donc

$$det\, J(L_g) = (\, det\, g)^n.$$

De même, en considérant des lignes au lieu de colonnes, on obtient

$$det\, J(R_g) = (\, det\, g)^n.$$

Il s'ensuit que la mesure

$$|\ det\, x\ |^{-n} \prod_{i,j=1}^{n} dx_{ij},$$

sur G est invariante à gauche et à droite . Le groupe $G = GL(n,\mathbb{R})$ est unimodulaire.

Bibliographie

[1] N. Bergeron, Groupes algébriques et groupes de Lie, Université Pierre - Marie Curie(Paris VI) ,2008-2009.

[2] N. Bourbaki, éléments de mathématique, Intégration : Chapitres 7 et 8, Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[3] N. Bourbaki, elements of mathematics, General topology : Chapters 1-4. Hermann 1966.

[4] K. Chandrasekharan, A Course on Topological Groups, Hindustan Book Agency (India) , 1996.

[5] D.L. Cohn , Measure Theory, Birkhäuser Boston, 1980.

[6] A. DEITMAR and S. ECHTERHOFF ,Principles of Harmonic Analysis, Springer-Verlag New York, 2009.

[7] J. Diestel , A. Spalsbury. The Joys of Haar Measures, vol. 150 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.

[8] J. Faraut. Analysis on Lie Groups : An introduction, Cambridge University Press, 2008.

[9] G.B. FOLLAND, Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[10] T. GALLAY , Théorie de la mesure et de l'intégration ,Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.

[11] T. Gallouët, Raphaèle Herbin, Mesure, intégration, probabilités. Ellipses, 2013.

[12] A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Annals of Math-ematics 34 (1933), 147-169.

[13] E. Hewitt, K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis : Volume I, Structure of Topological Groups Integration theory Group Representations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1963.

[14] T. Husain, introduction to topological groups, W.B Saubders company 1966.

[15] El Hage Hassan Nawfal, Topologie générale et espaces normés, DUNOD, 2011.

[16] John Von Neumann, The uniqueness of Haar's measure, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1936, Volume 1(43), Number 5, 721-734.

[17] Kréé Paul, Intégration et théorie de la mesure, une approche géométrique, Ellipses Marketing, 1997.

[18] H.L.Royden, P.M.Fitzpatrick, Real Analysis (Fourth Edition), Prentice Hall, 2010.

[19] W. Rudin, Real and complex analysis. McGraw-Hill, New York, 1987.

[20] Laurent Schwartz, Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle, Editions Hermann, 2008.

[21] A. Weil, L'Intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications, Hermann, Paris, 1940.