



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ.: 2020/2021

Courbes magnétiques de Killing sur le groupe $SL(2, \mathbb{R})$

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques

par

Haddane Nawel¹

Sous la direction de

Pr/Mr Hathout Fouzi

Soutenue le 00/07/2021 devant le jury composé de

A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
H. Hahout	Université Abou Bekr Belkaïd - Tlemcen	Encadreur
H.M. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

1. e-mail : haddanemail@gmail.com

Dédicace

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude :

À ma très chère mère, j'aimerai toujours te remercier pour tout ce que tu as fait jusqu'à nos jours-là pour assurer notre éducation.

Chère mère j'avoue vraiment que tu étais la lumière qui me guide et qui m'amène aux chemins de la réussite, c'est à toi que je dois toute ma réussite.

À mon cher père, pour sa patience, son amour, son soutien et ses encouragements.

À toute ma famille spécialement mon oncle Berrezoug pour l'amour et l'encouragement qu'il m'a toujours accordé.

À mes très chères sœurs et à mon seul frère, à qui je souhaite tout le succès et le bonheur.

À mes amis et mes camarades, pour une sincérité si merveilleuse, jamais oubliable, en les souhaitant tout le succès et le bonheur, sans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

À toute personne qui m'a aidé à franchir un horizon dans ma vie.

Remerciement

Avant tout, je remercie Dieu, le tout puissant, pour m'avoir donné la force et la patience pour faire aboutir ce travail.

*Mes remerciements les plus respectueux à Pr. **Hathout Fouzi** d'avoir accepté de m'encadrer et qui m'a permis de réaliser ce travail sous sa direction.*

Merci à tous les membres de jury qui ont accepté de juger ce modeste travail.

Un remerciement spécial à mon collègue Hamiti Mohamed Islam.

Je remercie mes collègues et mes amis pour les sympathiques moments qu'on a passé.

Table des matières

Introduction	3
1 Notions basiques sur les variétés	5
1.1 Variétés différentiables	5
1.1.1 Variétés Différentiables	5
1.1.2 Espace et fibré tangent	6
1.1.3 Espace et fibré cotangent	7
1.1.4 Connexions	8
1.1.5 Géodesiques	9
1.2 Variétés Riemanniennes	9
1.2.1 Métriques Riemmaniennes	9
1.2.2 Connexion de Levi-Civita	11
1.3 Vecteurs de Killing	11
1.4 Repère de Serret-Frenet	11
2 Géométrie du groupe $SL(2, \mathbb{R})$	14
2.1 Groupe $SL(2, \mathbb{R})$	14
2.2 Connexion de Levi-Civita	16
2.3 Vecteurs de Killing dans $SL(2, \mathbb{R})$	17
3 Courbes magnetiques de Killing sur $SL(2, \mathbb{R})$	19
3.1 Courbes magnetiques	19
3.2 Courbes magnetiques de Killing sur $SL(2, \mathbb{R})$	20
3.3 Courbes V_1 —magnetiques	20
3.4 Courbes V_2 —magnetiques	27

3.5	Courbes V_3 —magnetiques	30
3.6	Courbes V_4 —magnetiques	33

Introduction

La trajectoire d'une particule chargée se déplaçant sous l'action d'un champ magnétique constitue un sujet de recherche important. Cette trajectoire, en géométrie, sur une variété est connue sous le nom de courbe magnétique. Les courbes magnétiques font naître un vaste sujet de recherche dans diverses variétés Riemanniennes.

Une courbe $\gamma(t)$ sur une variété riemannienne (M, g) est appelée courbe magnétique si son champ de vecteur de vitesse $\gamma' = T$ satisfait l'équation de Lorentz

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma') \quad (1)$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de g et Φ est un champ de tenseur de type $(1, 1)$ sur M lié à la force de Lorentz. On définit la force de Lorentz par le champ magnétique F

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \quad \forall X, Y \in \chi(M) \quad (2)$$

Ainsi, l'équation de Lorentz (1) pour la courbe magnétique est une généralisation de l'équation des géodésiques, c'est-à-dire pour $\Phi \equiv 0$.

Rappelons que le produit vectoriel de deux champs de vecteurs X, Y sur la variété riemannienne M est défini par

$$g(X \times Y, Z) = dv_g(X, Y, Z), \quad \forall Z \in \chi(M) \quad (3)$$

où dv_g désigne une forme de volume sur M .

La force F peut être définie par

$$F_V = i_V dv_g$$

où i désigne le produit intérieur sur M .

Par conséquent, le tenseur Φ est lié à un vecteur V qu'on le note Φ_V , donné par

$$\Phi_V(X) = V \times X \quad (4)$$

puis l'équation de Lorentz Eq(1) peut s'écrire comme

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = V \times \gamma'$$

D'autre part, Wilhelm Karl Joseph Killing (10 mai 1847 – 11 février 1923) est un mathématicien allemand connu pour ses nombreuses contributions aux théories des algèbres de Lie, des groupes de Lie..., l'un de ces travaux qui prend son nom la notion de vecteurs de Killing. Un vecteur de Killing, ou champ de Killing, est un champ de vecteur sur une variété Riemannienne qui conserve la métrique de cette variété. Lorsque V est un vecteur de Killing, la courbe γ est appelée une courbe magnétique de Killing.

Le but de ce Mémoire est d'étudier et de déterminer les courbes magnétiques correspondantes aux vecteurs de Killing sur le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ (voir [4]) défini par

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - cb = 1 \right\},$$

qu'il se compose en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base sur les variétés (variété différentiable et variété Riemannienne), vecteurs de Killing et repère de Serret-Frenet.

Le deuxième chapitre se concentre sur la géométrie du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ et la connexion de Levi-civita ainsi que les vecteurs de Killing.

Finalement le troisième et le dernier chapitre, on détermine les courbes magnétiques associées aux vecteurs de Killing dans le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ et on donne leurs représentations graphiques en utilisant le logiciel 'Wolfram Mathematica' dans l'espace Euclidien de dimension 3.

Chapitre 1

Notions basiques sur les variétés

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés Différentiables

Soit M un espace topologique séparé non vide.

Définition 1.1 *On dit que M est une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point p de M possède un voisinage ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^n i.e: il existe une application bijective*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$$

tel que φ et son inverse φ^{-1} sont continue.

Un point p de U est repéré par les coordonnées (p_1, \dots, p_n) dans \mathbb{R}^n de son image réciproque $\varphi^{-1}(p)$. Alors, on dit que U est un ouvert de coordonnées locales de M au voisinage de p . La paire (U, φ) est appelée carte locale et $(p_1, \dots, p_n) = \varphi^{-1}(p)$ seront les coordonnées locales de p .

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telle que l'intersection U et V soit non vide alors un point $p \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées (p_1, \dots, p_n) dans U et ses coordonnées (p'_1, \dots, p'_n) dans V . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \psi^{-1}(U \cap V) & & \end{array}$$

est commutatif alors on a

$$(p'_1, \dots, p'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(p_1, \dots, p_n)$$

où l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée changement de coordonnées de la carte (U, φ) vers la carte (V, ψ) .

On appelle atlas définissant M la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et pour chaque $i \in I$, d'un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$; cet objet sera noté $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$.

Définition 1.2 *On dira que M est une variété différentiable si elle est une variété topologique et l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \varphi$ est de classe C^∞ .*

1.1.2 Espace et fibré tangent

Soit M une variété différentielle de dimension n . On note $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^1 sur M .

Définition 1.3 *L'ensemble $C^\infty(M)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} est une algèbre associative et commutative avec le produit usuel*

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

où $f, g \in C^\infty(M)$ et $x \in M$.

Définition 1.4 *Un vecteur tangent en un point $p \in M$ est l'application $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, pour tous $f, g \in C^\infty(M)$, on a*

- v est \mathbb{R} -linéaire : $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$,

- v satisfait la règle de Leibnitz : $v(f.g)(p) = v(f).g(p) + f(p).v(g)$.

L'ensemble de vecteurs tangents au point p de M est noté par $T_p M$, et on l'appelle l'espace tangent en $p \in M$, c'est un espace vectoriel de dimension n ($\dim M$).

On peut voir l'espace tangent par la définition suivante.

Définition 1.5 *On définit l'espace tangent à M en un de ses points comme l'ensemble des vecteurs tangents à une courbe tracée dans M . Un vecteur v de \mathbb{R}^n est dit tangent à M en un*

point x de M s'il existe une courbe paramétrée de classe C^1

$$\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

définie sur un voisinage de 0, telle que

$$\gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = v$$

L'espace tangent en tout point p d'un ouvert U de \mathbb{R}^n est $T_p U = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.6 On appelle *fibré tangent* à M , que l'on désigne par TM , l'ensemble de tous les vecteurs tangents de M en ses points, c'est donc la réunion de tous les espaces tangents $T_p M$ en ses divers points :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$$

C'est une famille d'espaces vectoriels paramétrisés par M . On peut le munir d'une projection $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, v) = p$.

Le fibré TM est une variété différentiable de dimension $2n$. L'application $\pi : (p, u) \in TM \rightarrow p \in M$ est différentiable.

On appelle *section* C^∞ de TM ou *champ de vecteurs* sur M toute application différentiable $X : TM \rightarrow M$ telle que $\pi \circ X = id_M$. Le champ de vecteurs X en tout point $p \in M$ est un vecteur $X(p)$ tangent à M en p de façon à ce que la variation de $X(p)$ (en fonction de p) soit différentiable.

L'ensemble $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M .

1.1.3 Espace et fibré cotangent

Comme $T_p M$ est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, que nous noterons $T_p^* M$. Cet espace est appelé *l'espace cotangent* à M en p . Il est un espace vectoriel de même dimension que $T_p M$.

Localement, au dessus d'un ouvert U , d'une carte locale (U, φ) , $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}$ est une base de $T_p M$ pour tout $p \in U$. Notons $\{dx_i|_p\}$ sa base duale, on a alors :

$$\langle dx_i|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_j^i$$

Définition 1.7 On définit le fibré cotangent par

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

C'est une variété différentiable de dimension $2n$. Une section de classe C^∞ $\alpha : M \rightarrow T^*M$ de ce fibré, est appelée une 1-forme différentielle sur M .

1.1.4 Connexions

Définition 1.8 Soit M une variété différentiable. Une connexion linéaire sur M est une application

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

telle que

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

vérifiant les propriétés :

1. $\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$ -linéaire par rapport à X :

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad f, g \in C^\infty(M)$$

2. $\nabla_X Y$ est \mathbb{R} -linéaire par rapport à Y :

$$\nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3. vérifie la règle de Leibniz :

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad f \in C^\infty(M)$$

$\nabla_X Y$ est appelée la dérivée covariante de Y dans la direction de X .
pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

Définition 1.9 Soient ∇ une connexion sur M et (U, ϕ) une carte sur M de coordonnées locales (x_1, x_2, \dots, x_n) . On définit les fonctions différentiables $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appelée les symboles de Christoffel. En générale,

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ est la dérivée covariante associé à la connexion linéaire ∇ .

Définition 1.10 Soit ∇ une connexion sur une variété différentiable M . Le tenseur de torsion de ∇ est une application

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

tel que

$$T : (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

1.1.5 Géodesiques

Définition 1.11 Une courbe γ dans une variété différentiable M muni d'une connexion linéaire ∇ est dite géodésique si

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

1.2 Variétés Riemanniennes

1.2.1 Métriques Riemanniennes

Soit M une variété différentiable de dimension n .

Définition 1.12 Une métrique Riemannienne notée g est une application définie par

$$\begin{aligned} g & : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M), \\ (X, Y) & \mapsto g(X, Y) \end{aligned}$$

telle que g est

1. Symétrique $g(X, Y) = g(Y, X)$,
 2. Non dégénérée $g(X, X) = 0 \implies X = 0$,
 3. Définie positive $g(X, X) \geq 0$,
- pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.13 Une variété différentiable M muni d'une métrique Riemannienne g est dite variété Riemannienne notée (M, g) .

Une métrique Riemannienne g sur M définit sur chaque espace tangent un produit scalaire donnée par

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_p = g(u, v) \mid u, v \in T_p M$$

La norme d'un vecteur v de $T_p M$ est

$$\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$$

L'angle entre deux vecteurs u et v de $T_p M$ est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ telle que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

La longueur d'une courbe C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est définie par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

La longueur d'une courbe est invariante par reparamétrage régulier. La distance entre $x, y \in M$ est définie par

$$d(x, y) = \inf L(\gamma)$$

Une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est paramétrée par la longueur d'arc ou unitaire si

$$\|\gamma'\| = 1$$

1.2.2 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.14 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Une connexion linéaire ∇ est dite de Levi-Civita si

1. ∇ est symétrique si le tenseur de torsion est nul i.e. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
2. ∇ est compatible avec g i.e. $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.

Théorème 1.15 Une variété Riemannienne (M, g) admet une et une seule connexion de Levi-Civita.

1.3 Vecteurs de Killing

Définition 1.16 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le champ de vecteur V sur M est appelé un champ de vecteur de Killing s'il satisfait l'équation de Killing

$$g(\nabla_Y V, Z) + g(\nabla_Z V, Y) = 0, \forall Y, Z \in \Gamma(TM) \quad (1.1)$$

En particulier, les champs vecteurs de Killing définissent une classe importante de champs magnétiques appelés champs magnétiques de Killing et de plus les trajectoires correspondant aux champs magnétiques de Killing sont appelées courbes magnétiques de Killing qu'on va voir au chapitre 3.

1.4 Repère de Serret-Frenet

Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc s . On supposera ici les courbes paramétrées bi-régulières, i.e. γ' et γ'' linéairement indépendants en tout point.

On a

$$\gamma'(s) = T(s), \quad \|T(s)\| = 1$$

qui donne

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1$$

et

$$\nabla_T \langle T(s), T(s) \rangle = 2 \langle \nabla_T T(s), T(s) \rangle = 0$$

d'où les vecteurs $\nabla_T T(s)$ et $T(s)$ sont orthogonaux et on a la définition.

Définition 1.17 *Le vecteur normal unitaire (appelé aussi vecteur normal principal) est donné par*

$$N(s) = \frac{\nabla_T T(s)}{\|\nabla_T T(s)\|}$$

et la fonction $\|\nabla_T T(s)\|$ est appelée la courbure de γ notée par κ .

Remarque 1.18 *On a donc, comme pour les courbes planes*

$$\nabla_T T(s) = \kappa(s)N(s), \quad (1.2)$$

mais ici la courbure est par définition, positive et le vecteur unitaire normal est orienté dans la même direction que $\nabla_T T(s)$.

Définition 1.19 *On définit ensuite le vecteur unitaire $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ qui complète la base orthonormée directe $\{T, N, B\}$ appelé repère de Serret-Frenet.*

On considère $\nabla_T B(s)$, c'est un vecteur orthogonal à $B(s)$ mais aussi à $T(s)$ car

$$\nabla_T B(s) = \nabla_T T(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge \nabla_T N(s) = T(s) \wedge \nabla_T N(s)$$

donc $\nabla_T B(s)$ est colinéaire avec $N(s)$ et on peut définir une fonction en s appelée la torsion notée par τ , définie par l'équation suivante

$$\nabla_T B(s) = -\tau(s)N(s).$$

Certain auteurs définissent la torsion par

$$\nabla_T B(s) = \tau(s)N(s).$$

Remarque 1.20 *La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit trois fois dérivable, ensuite que la courbe soit bi-régulière au point où l'on veut définir la torsion (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire, en un point non bi-régulier, on ne peut pas définir le vecteur normal unitaire car $T'(s) = 0$). On observera aussi que la condition de bi-régularité impose que la courbure ne s'annule pas.*

On calcule maintenant les coordonnées de $\nabla_T N$ dans la base $\{T, N, B\}$. On a

$$\nabla_T N = aT + bN + cB.$$

où a, b et c sont des fonctions en s . Utilisant Eq.(1.2), on obtient

$$a = \langle T, \nabla_T N \rangle = -\langle \nabla_T T, N \rangle = -\kappa,$$

et

$$b = \langle N, \nabla_T N \rangle = 0$$

de plus

$$c = \langle B, \nabla_T N \rangle = -\langle \nabla_T B, N \rangle = \tau,$$

La fonction τ est appelée la torsion. D'où

$$\nabla_T N = -\kappa(s)T + \tau(s)B.$$

Définition 1.21 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc s . Les formules de Serret-Frenet pour γ est données par la matrice suivante,*

$$\begin{pmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

où κ et τ sont la fonction courbure et la fonction torsion respectivement.

Chapitre 2

Géométrie du groupe $SL(2, \mathbb{R})$

2.1 Groupe $SL(2, \mathbb{R})$

Soit le groupe linéaire spécial réel défini par

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - cb = 1 \right\}$$

$SL(2, \mathbb{R})$ a les trois sous-groupes suivants :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{S}^1 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \mid y > 0 \right\} \\ \text{et } C &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Par Isawara dans REF ; on a la décomposition $SL(2, \mathbb{R}) = KAN$, c'est-à-dire que chaque élément de $SL(2, \mathbb{R})$ peut être décomposé de façon unique comme suit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour certains $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{S}^1$. (x, y, θ) peuvent être regroupés comme un système global de coordonnées du groupe $SL(2, \mathbb{R})$. L'Algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$ est

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) : \text{tr}(X) = 0\}$$

Le produit intérieur sur $SL(2, \mathbb{R})$ est défini par

$$\langle X, Y \rangle = \frac{\text{tr}(X^t Y)}{2}$$

induit une métrique invariante à gauche sur $SL(2, \mathbb{R})$ donnée par la définition suivante

Définition 2.1 *Sur le groupe de dimension 3 $SL(2, \mathbb{R})$, on définit la métrique invariante à gauche par*

$$g_{SL(2, \mathbb{R})} = \left(\frac{dx}{2y}\right)^2 + \left(\frac{dy}{2y}\right)^2 + \left(\frac{dx}{2y} + d\theta\right)^2$$

et de matrice représentative

$$g_{SL(2, \mathbb{R})} = \langle, \rangle : \begin{pmatrix} \frac{1}{2y^2} & 0 & \frac{1}{2y} \\ 0 & \frac{1}{4y^2} & 0 \\ \frac{1}{2y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ sont les coordonnées du plan de base hyperbolique $\theta \in \mathbb{S}^1$.

La norme d'un vecteur $X \in SL(2, \mathbb{R})$ est donnée par

$$\|X\| = \langle X, X \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.2 *La famille de vecteur $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ donnée par*

$$e_1 = 2y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_2 = 2y \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

forme une base orthonormée de $SL(2, \mathbb{R})$ et de base duale donnée par

$$\omega^1 = \frac{dx}{2y}, \quad \omega^2 = \frac{dy}{2y}, \quad \omega^3 = \left(\frac{dx}{2y} + d\theta\right)$$

Preuve. On montre que $\|e_1\| = 1$, alors

$$\begin{aligned}
\|e_1\|^2 &= g_{SL(2,\mathbb{R})} \left(\begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2y & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2y^2} & 0 & \frac{1}{2y} \\ 0 & \frac{1}{4y^2} & 0 \\ \frac{1}{2y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}$$

de la meme manière on montre que $\|e_2\| = \|e_3\| = 1$ et $g_{SL(2,\mathbb{R})}(e_i, e_j) = 0$ pour $i, j = 1, 2, 3$ et $i \neq j$. ■

2.2 Connexion de Levi-Civita

Pour définir la connexion de Levi_civita sur $SL(2, \mathbb{R})$ on aura besoin du lemme suivant

Lemme 2.3 *Le crochet de Lie de la base est donné par*

$$\begin{aligned}
[e_i, e_i] &= 0 \quad \forall i = \overline{1, 3} \\
[e_1, e_2] &= -2(e_1 + e_3), \quad [e_1, e_3] = 0 \quad \text{et} \quad [e_2, e_3] = 0
\end{aligned}$$

Preuve. Les crochets de lie se calcul directement on utilisons la Proposition 2.2. ■

D'où la proposition suivante.

Proposition 2.4 *La connétion Lévi-civita ∇ de $SL(2, \mathbb{R})$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= 2e_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -2e_1, \quad \nabla_{e_1} e_3 = e_2, \\
\nabla_{e_2} e_1 &= e_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_3 = -e_1, \\
\nabla_{e_3} e_1 &= e_2, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -e_1, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0.
\end{aligned}$$

Preuve. On utilisons la formule de Kosul suivante

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \},$$

On fait le calcul pour $\nabla_{e_1} e_3$.

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{e_1} e_3, e_1 \rangle &= \frac{1}{2} \{e_3 - \langle e_1, [e_3, e_1] \rangle\} &= 0 \quad , \\ \langle \nabla_{e_1} e_3, e_2 \rangle &= -\frac{1}{2} \langle e_3, [e_1, e_2] \rangle &= 1 \quad , \\ \langle \nabla_{e_1} e_3, e_3 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_3, [e_1, e_3] \rangle + \langle e_3, [e_1, e_3] \rangle + \langle e_1, [e_3, e_3] \rangle \} &= 0 \quad ,\end{aligned}$$

Alors

$$\nabla_{e_1} e_3 = e_2.$$

De la même manière on calcul les autres connexions. ■

2.3 Vecteurs de Killing dans $SL(2, \mathbb{R})$

Supposons que le champ vectoriel de Killing ait la forme

$$V = a(x, y, \theta)e_1 + b(x, y, \theta)e_2 + c(x, y, \theta)e_3$$

En substituant V dans la relation Eq.(1.1) et en prenant $Y = e_i, Z = e_j$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on aura 9 équations

$$g(\nabla_{e_i} V, e_j) + g(\nabla_{e_j} V, e_i) = 0 \quad (2.3)$$

et puisque la métrique est symétrique le nombre d'équations se réduit à 6 équations. Pour $i = j = 1$, on a d'après la Proposition 2.4

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} V &= \nabla_{e_1} a e_1 + \nabla_{e_1} b e_2 + \nabla_{e_1} c e_3 \\ &= e_1(a)e_1 + 2ae_2 + e_1(b)e_2 + b(-2e_1 - e_3) + e_1(c)e_3 + ce_2 \\ &= (e_1(a) - 2b)e_1 + (2a + e_1(b) + c)e_2 + (-b + e_1(c))e_3 \\ &= (2y \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial \theta} - 2b)e_1 + \left(2a + 2y \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} + c\right)e_2 + (2y \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial \theta} - b)e_3\end{aligned}$$

d'où

$$g(\nabla_{e_1} V, e_1) + g(\nabla_{e_1} V, e_1) = 2(2y \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial \theta} - 2b) = 0$$

Nous obtenons le système d'équations différentielles (S) suivant

$$S : \begin{cases} 2y \frac{\partial}{\partial x} a - \frac{\partial}{\partial \theta} a - 2b = 0 \\ 2y \frac{\partial}{\partial x} b - \frac{\partial}{\partial \theta} b + 2a = 0 \\ 2y \frac{\partial}{\partial y} b = 0 \\ 2y \frac{\partial}{\partial x} c - \frac{\partial}{\partial \theta} c + \frac{\partial}{\partial \theta} a - 2b = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} c = 0 \\ 2y \frac{\partial}{\partial y} c - \frac{\partial}{\partial \theta} b + 2a = 0 \end{cases}$$

le système (S) devient

$$S : \begin{cases} 2y \frac{\partial}{\partial x} a - \frac{\partial}{\partial \theta} a - 2b = 0 \\ 2y \frac{\partial}{\partial x} b - \frac{\partial}{\partial \theta} b + 2a = 0 \\ b = b(x, \theta) \\ 2y \frac{\partial}{\partial x} c + \frac{\partial}{\partial \theta} a - 2b = 0 \\ c = c(x, y) \\ 2y \frac{\partial}{\partial y} c - \frac{\partial}{\partial \theta} b + 2a = 0 \end{cases}$$

On remarque que les solutions de (S) sont les champs de vecteurs donnés dans la base (e_1, e_2, e_3) par

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2y} e_1 + \frac{1}{2y} e_3, \quad V_2 = e_3, \quad V_3 = \frac{x}{2y} e_1 + \frac{1}{2} e_2 + \frac{x}{2y} e_3, \\ V_4 &= \frac{x^2 - y^2}{4y} e_1 + \frac{x}{2} e_2 + \frac{x^2 - y^2}{4y} e_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les champs de vecteurs de Killing dans $SL(2, \mathbb{R})$ sont donnés en base canonique par

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad V_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_4 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.5)$$

Chapitre 3

Courbes magnetiques de Killing sur $SL(2, \mathbb{R})$

3.1 Courbes magnetiques

Soit F une 2-forme sur une variété riemannienne (M, g) de dimension 3, appelée champ magnétique. Une courbe $\gamma(t)$ sur une variété riemannienne (M, g) est appelée courbe magnétique si son champ de vecteurs de vitesse satisfait l'équation de Lorentz

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma') \quad (3.1)$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de g et Φ est un champ de tenseur de type $(1, 1)$ sur M .

On définit la force de Lorentz, lié au champ magnétique F par

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \quad \forall X, Y \in \chi(M) \quad (3.2)$$

L'équation de Lorentz pour la courbe magnétique est une généralisation de l'équation géodésique, c'est-à-dire que pour $\Phi = 0$, l'équation différentielle Eq(3.1) coïncide avec l'équation géodésique.

Rappelons que le produit croisé de deux champs de vecteurs $X, Y \in \chi(M)$ sur la variété

riemannienne M est défini par

$$g(X \times Y, Z) = dv_g(X, Y, Z), \quad \forall Z \in \chi(M) \quad (3.3)$$

où dv_g désigne une forme de volume sur M .

Si V est un champ de vecteur de Killing sur M , soit $F_V = i_V dv_g$ le champ magnétique de Killing correspondant, où i désigne le produit intérieure sur M .

Par conséquent, la force de Lorentz Φ_V correspondant au champ magnétique de Killing F_V est

$$\Phi_V(X) = V \times X \quad (3.4)$$

puis l'équation de Lorentz Eq(3.1) peut s'écrire comme

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = V \times \gamma'$$

3.2 Courbes magnetiques de Killing sur $SL(2, \mathbb{R})$

Le but de cette section est de trouver des courbes magnétiques correspondantes aux champs de vecteurs de Killing définis dans la section 2.3 en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$.

Pour simplifier, on note les courbes magnétiques correspondantes aux champs de vecteurs de Killing V par courbes V -magnetiques

3.3 Courbes V_1 -magnetiques

Dans cette sous-section, nous considérons les courbes magnétiques de Killing qui correspondent au champ de vecteur de Killing $V_1 = \partial_x$.

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ une courbe régulière définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$ dans les coordonnées (x, y, θ) .

La première tâche est de déduire l'équation de la courbe magnétique γ dans $SL(2, \mathbb{R})$. On a

$$\gamma'(t) = x'(t) \frac{\partial}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} + \theta'(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.5)$$

De l'équation Eq.(2.2), Eq.(3.5) s'écrit en base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ par

$$\gamma' = \frac{x'}{2y}e_1 + \frac{y'}{2y}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3 \quad (3.6)$$

Ensuite, on calcul la dérivée covariante $\nabla_{\gamma'}\gamma'$. En tenant compte des formules de connexion données par la Proposition 2.4, on a

Proposition 3.1 *La dérivée covariante du vecteur vitesse γ' suivant la base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ est*

$$\begin{cases} \nabla_{e_1}\gamma' = \left(x'' - \frac{y'}{y}\right)e_1 + \left(\frac{x'}{y} + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)\right)e_2 + \left(x'' - \theta'' - \frac{y'}{2y}\right)e_3 \\ \nabla_{e_2}\gamma' = -\frac{x'}{y}e_1 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta' + \frac{yy'' - y'^2}{y}\right)e_2 - \frac{x'}{2y}e_3 \\ \nabla_{e_3}\gamma' = -\frac{y'}{2y}e_1 + \frac{x'}{2y}e_2 + \theta''e_3 \end{cases}$$

Preuve. En utilisons la Proposition 2.4 et L'Eqs.(2.2 et 3.6), on aura

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}\gamma' &= \nabla_{e_1}\left(\frac{x'}{2y}e_1 + \frac{y'}{2y}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3\right) \\ &= \left(\frac{x'}{2y}\nabla_{e_1}e_1 + \frac{y'}{2y}\nabla_{e_1}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)\nabla_{e_1}e_3\right) + \left(e_1\left(\frac{x'}{2y}\right)e_1 + e_1\left(\frac{y'}{2y}\right)e_2 + e_1\left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3\right) \\ &= \left(\frac{x'}{y}e_2 + \frac{y'}{2y}(-2e_1 - e_3) + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_2\right) + (x''e_1 + (x'' - \theta'')e_3) \\ &= \left(x'' - \frac{y'}{y}\right)e_1 + \left(\frac{x'}{y} + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)\right)e_2 + \left(x'' - \theta'' - \frac{y'}{2y}\right)e_3 \end{aligned}$$

de la même manière on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}\gamma' &= \nabla_{e_2}\left(\frac{x'}{2y}e_1 + \frac{y'}{2y}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3\right) \\ &= \left(\frac{x'}{2y}\nabla_{e_2}e_1 + \frac{y'}{2y}\nabla_{e_2}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)\nabla_{e_2}e_3\right) + \left(e_2\left(\frac{x'}{2y}\right)e_1 + e_2\left(\frac{y'}{2y}\right)e_2 + e_2\left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3\right) \\ &= \left(\frac{x'}{2y}e_3 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_2\right) + \left(-\frac{x'}{y}e_1 + \left(\frac{yy'' - y'^2}{y}\right)e_2 - \frac{x'}{y}e_3\right) \\ &= -\frac{x'}{y}e_1 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta' + \frac{yy'' - y'^2}{y}\right)e_2 - \frac{x'}{2y}e_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_3} \gamma' &= \nabla_{e_3} \left(\frac{x'}{2y} e_1 + \frac{y'}{2y} e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta' \right) e_3 \right) \\
&= \left(\frac{x'}{2y} \nabla_{e_3} e_1 + \frac{y'}{2y} \nabla_{e_3} e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta' \right) \nabla_{e_3} e_3 \right) + \left(e_3 \left(\frac{x'}{2y} \right) e_1 + e_3 \left(\frac{y'}{2y} \right) e_2 + e_3 \left(\frac{x'}{2y} + \theta' \right) e_3 \right) \\
&= -\frac{y'}{2y} e_1 + \frac{x'}{2y} e_2 + \theta'' e_3
\end{aligned}$$

■

Par la suite, de l'Eq.(3.6) et la Proposition 3.1, on trouve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'} \gamma' &= \frac{x'}{2y} \nabla_{e_1} \gamma' + \frac{y'}{2y} \nabla_{e_2} \gamma' + \left(\frac{x'}{2y} + \theta' \right) \nabla_{e_3} \gamma' \\
&= \left(\frac{x''}{2y} + \frac{y' \theta'}{y} + \frac{3x' y'}{2y^2} \right) e_1 + \left(\frac{y''}{2y} + \frac{x' \theta'}{y} + \frac{x'^2}{y^2} - \frac{y'^2}{2y^2} \right) e_2 + \left(\theta'' + \frac{x''}{2y} - \frac{x' y'}{2y^2} \right) e_3
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En utilisant l'Eqs.(3.6 et 3), on a

$$V_1 \times \gamma' = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2y} & 0 & \frac{1}{2y} \\ \frac{x'}{2y} & \frac{y'}{2y} & \frac{x'}{2y} + \theta' \end{pmatrix} = -\frac{y'}{4y^2} e_1 - \frac{\theta'}{2y} e_2 + \frac{y'}{4y^2} e_3 \tag{3.8}$$

Remarque 3.2 La relation Eqs.(2.4) peut être obtenue d'une autre manière.

Soit $dv_g = \frac{1}{4y^2}(dx \wedge dy \wedge d\theta)$ l'élément de volume de $SL(2, \mathbb{R})$. Le champ magnétique F_{V_1} correspond à V_1 est

$$F_{V_1} = i_{V_1} dv_g = \frac{1}{4y^2}(dy \wedge d\theta) \text{ et}$$

$$F_{V_1}(X, Y) = i_{V_1} dv_g(X, Y) = \frac{1}{4y^2}(dy \wedge d\theta)(X, Y)$$

De l'équation Eq(3.2), on a

$$\Phi_{V_1}(\partial_x) = 0, \quad \Phi_{V_1}(\partial_y) = -\frac{1}{2y} \partial_y + \frac{1}{2y^2} \partial_\theta, \quad \Phi_{V_1}(\partial_\theta) = -\partial_y.$$

Par conséquent, la force de Lorentz Φ_{V_1} est donnée en base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ par

$$\Phi_{V_1}(e_1) = \frac{1}{2y} e_2, \quad \Phi_{V_1}(e_2) = \frac{1}{2y} e_1 + \frac{1}{2y} e_3, \quad \Phi_{V_1}(e_3) = -\frac{1}{2y} e_2.$$

Enfin, On obtient le membre droit de la relation Eq.(3.8)

$$\begin{aligned}
\Phi_{V_1}(\gamma') &= \Phi_{V_1}\left(\frac{x'}{2y}e_1 + \frac{y'}{2y}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3\right) \\
&= -\frac{y'}{4y^2}e_1 + \frac{\theta'}{2y}e_2 + \frac{y'}{4y^2}e_3 \\
&= V_1 \times \gamma'
\end{aligned}$$

Maintenant, On cherche la courbe V_1 —magnetique en résolvant L'equation (6)

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = V_1 \times \gamma'$$

En utilisons les Eqs(3.7 et 3.8), on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x''}{2y} + \frac{y'\theta'}{y} + \frac{3x'y'}{2y^2}\right)e_1 + \left(\frac{y''}{2y} + \frac{x'\theta'}{y} + \frac{x'^2}{y^2} - \frac{y'^2}{2y^2}\right)e_2 + \left(\theta'' + \frac{x''}{2y} - \frac{x'y'}{2y^2}\right)e_3 \\
&= -\frac{y'}{4y^2}e_1 + \frac{\theta'}{2y}e_2 + \frac{y'}{4y^2}e_3
\end{aligned}$$

qui donne le système d'équations différentielle (S_1) suivant

$$S_1 : \begin{cases} \frac{x''}{2y} - \frac{y'\theta'}{y} - \frac{3x'y'}{2y^2} + \frac{y'}{4y^2} = 0 \\ \frac{y''}{2y} + \frac{x'\theta'}{y} + \frac{x'^2}{y^2} - \frac{y'^2}{2y^2} + \frac{\theta'}{2y} = 0 \\ \theta'' + \frac{x''}{2y} - \frac{x'y'}{2y^2} - \frac{y'}{4y^2} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

La troisième équation (S_1)₃ peut s'écrire

$$\theta'' + \left(\frac{x'}{2y}\right)' - \frac{y'}{4y^2} = 0$$

En supposant que $y' \neq 0$ (le cas $y' = 0$ on le voi plus tard), après intégration on a

$$\theta' = c - \frac{x'}{2y} - \frac{1}{4y}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

En remplaçant Eq.(3.10) dans la première équation du système (S_1)₁, on a

$$\frac{x''}{2y} - \frac{x'y'}{y^2} + \frac{y'}{2y^2}(1 - 2cy) = 0$$

En résolvant cette équation par rapport à x , on trouve

$$x'(t) = \frac{1}{2} - 2cy(t) + \lambda y^2(t), \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

D'où

$$x(t) = \int_t \left(\frac{1}{2} - 2cy(\tau) + \lambda y^2(\tau) \right) d\tau \quad (3.12)$$

En remplaçant Eq.(3.10) et Eq.(3.11) dans la deuxième équation du système $(S_1)_2$, on a

$$\frac{y''}{2y} - \frac{y'^2}{2y^2} + \frac{c}{y} - \frac{1}{4y^2} - c\lambda y + \frac{\lambda}{2}y^2 = 0 \quad (3.13)$$

Pour $\lambda \neq 0$ les solutions sont les fonctions elliptiques obtenues par des logiciels de calcul.

Cependant, pour $\lambda = 0$ Eq. (3.13) a deux solutions

$$y(t) = \frac{1}{8a} \exp(\pm \sqrt{a}(t+b)) + \left(1 + \frac{8c^2}{a}\right) \exp(\pm \sqrt{a}(t+b)) - \frac{2c}{a}. \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (3.14)$$

en substitutions l'Eq.(3.14) dans Eq.(3.10) et Eq.(3.11) et par intégration on trouve

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c}{4a\sqrt{a}} \exp(-\sqrt{a}(t+b)) - \frac{2c}{\sqrt{a}} \left(1 + \frac{8c^2}{a}\right) \exp(\sqrt{a}(t+b)) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{8c^2}{a}\right)t + c_1, \\ \theta(t) = 2c.t - \sqrt{2} \arctan(2\sqrt{2a} \left(1 + \frac{8c^2}{a}\right) - \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a}}) + c_2 \end{cases}$$

Considérons maintenant le cas spécial $y' = 0$. Soit $y = y_0 \in \mathbb{R}^*$, alors (S_1) devient

$$S_1 : \begin{cases} x'' = 0 \\ \frac{x'\theta'}{y_0} + \frac{x'^2}{y_0^2} + \frac{\theta'}{2y_0} = 0 \\ \theta'' + \frac{x''}{2y_0} = 0 \end{cases}$$

A partir de la première équation de $(S_1)_1$, on a

$$x(t) = x_1 t + x_0, \quad x_1, x_0 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la courbe magnétique de Killing est une ligne

$$\gamma(t) = (x_1 t + x_0, y_0, -\frac{2x_1^2}{y_0(2x_1 + 1)}t + \theta_0), \quad x_1 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Nous avons prouvé le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Les équations paramétriques des courbes V_1 -magnétiques en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$ correspondantes aux solutions du système d'équations différentielles (S_1) sont :*

a.

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{c}{4a\sqrt{a}} \exp(-\sqrt{a}(t+b)) - \frac{2c}{\sqrt{a}}(1 + \frac{8c^2}{a}) \exp(\sqrt{a}(t+b)) + \frac{1}{2}(1 + \frac{8c^2}{a})t + c_1, \\ \frac{1}{8a} \exp(-\sqrt{a}(t+b)) + (1 + \frac{8c^2}{a}) \exp(\sqrt{a}(t+b)) - \frac{2c}{a} \\ 2c.t - \sqrt{2} \arctan \left(2\sqrt{2a}(1 + \frac{8c^2}{a}) \exp(\sqrt{a}(t+b) - \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a}}) + c_2 \right) \end{pmatrix}$$

b. où

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{c}{4a\sqrt{a}} \exp(\sqrt{a}(t+b)) + \frac{2c}{\sqrt{a}}(1 + \frac{8c^2}{a}) \exp(-\sqrt{a}(t+b)) + \frac{1}{2}(1 + \frac{8c^2}{a})t + c_3, \\ \frac{1}{8a} \exp(\sqrt{a}(t+b)) + (1 + \frac{8c^2}{a}) \exp(-\sqrt{a}(t+b)) - \frac{2c}{a}, \\ 2ct - \sqrt{2} \arctan \left(\frac{\exp(\sqrt{a}(t+b)) - 8c}{2\sqrt{2a}} \right) + c_4 \end{pmatrix}$$

c. La ligne dans le plan $y = y_0$ donné par

$$\gamma(t) = (x_1 t + x_0, y_0, -\frac{2x_1^2}{y_0(2x_1 + 1)}.t + \theta_0)$$

où $a, y_0 \in R^+, b, c, x_0, \theta_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ et $x_1 \in R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

Les figures 1 et 2 présentent les courbes magnétiques de killing dans les cas (a) et (b) du Théorème 3.3 pour $a = 1, b = 0, c = 1, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ et $t \in [-4, 0], t \in [0, 5]$, respectivement. Notez que les courbes présentées ne sont pas une visualisation des courbes de $SL(2, \mathbb{R})$ dans l'espace Euclidien 3D plutôt qu'une simple visualisation des solutions du système Eq.(3.9) dans l'espace Euclidien 3D. Ici, dans l'intention d'obtenir tout type de visualisation de courbe, nous égalisons une coordonnée θ avec la coordonnée Euclidienne z .

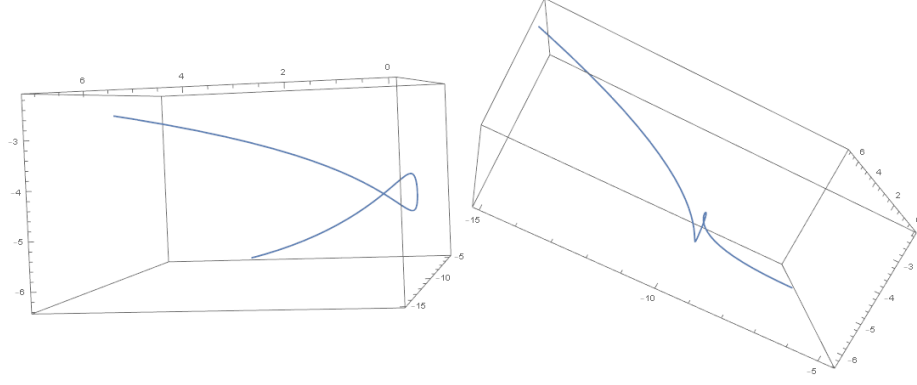


Figure 1 : Courbes V_1 -magnétiques 'a' dans $SL(2, \mathbb{R})$ tracer dans (\mathbb{R}^3, g_{euc})

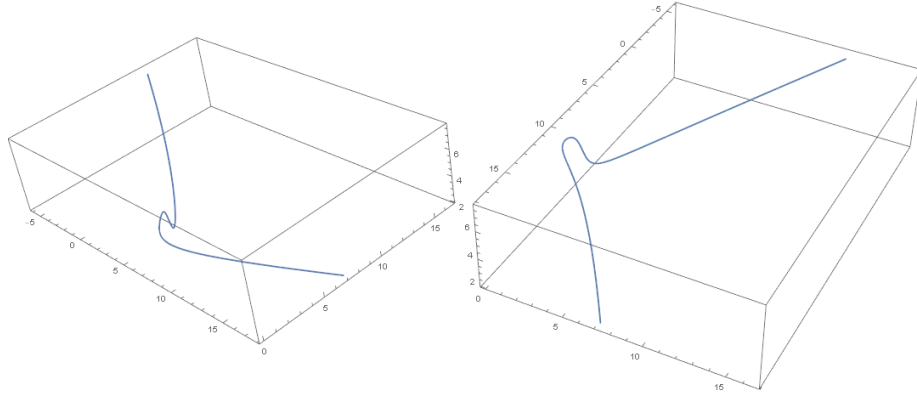


Figure 2 : Courbes V_1 -magnétiques 'b' dans $SL(2, \mathbb{R})$ tracer dans (\mathbb{R}^3, g_{euc})

Remarque 3.4 *Comme nous l'avons mentionné précédemment, si la force de Lorentz est nulle, alors la courbe magnétique coïncide avec la géodésique. En particulier, les courbes magnétiques de Killing, qui correspondent au champ magnétique de Killing ∂_x , sont des géodésiques si le côté droit de l'Eq. (3.8) disparaît, c'est-à-dire $y = \text{const}$ et $\theta = \text{const}$*

Corollaire 3.5 *Il n'y a pas de courbe magnétique de Killing qui correspond au champ de vecteur de Killing ∂_x qui est une géodésique en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$.*

3.4 Courbes V_2 —magnétiques

Dans cette partie, par analogie avec la précédente, on considère les courbes magnétiques de Killing qui correspondent au champ de vecteur de Killing $V_2 = \partial_\theta$.

Dans ce cas, on a

$$V_2 \times \gamma' = -\frac{y'}{2y}e_1 + \frac{x'}{2y}e_2. \quad (3.15)$$

La relation Eq.(3.15) peut être obtenue d'une autre manière,.Le champ de vecteur Killing $V_2 = \partial_\theta$ définit le champ magnétique $F_{V_2} = \frac{1}{4y^2} (dx \wedge dy)$.

Ainsi, l'action de la force de Lorentz Φ_V est donnée par

$$\Phi_{V_2}(e_1) = e_2, \quad \Phi_{V_2}(e_2) = -e_1, \quad \Phi_{V_2}(e_3) = 0$$

Par conséquent, nous obtenons le côté droit de l'équation Eq (3.15),

$$\begin{aligned} \Phi_{V_2}(\gamma') &= \Phi_{V_2}\left(\frac{x'}{2y}e_1 + \frac{y'}{2y}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3\right) \\ &= -\frac{y'}{2y}e_1 + \frac{x'}{2y}e_2 \\ &= V_2 \times \gamma' \end{aligned}$$

Prenons les côtés droits de l'Eqs. (3.7) et(3.15),on obtient le système d'équations différentielles suivant

$$S_2 : \begin{cases} \frac{x''}{2y} - \frac{y'}{2y}(2\theta' - 1) - \frac{3x'y'}{2y^2} = 0 \\ \frac{y''}{2y} + \frac{x'}{2y}(2\theta' - 1) + \frac{x'^2}{y^2} - \frac{y'^2}{2y^2} = 0 \\ \theta'' + \frac{x''}{2y} + \frac{x'y'}{2y^2} = 0 \end{cases}$$

on cherche des solutions du système S_2 , La troisième équation(S_2)₃ peut s'écrire

$$\theta'' + \left(\frac{x'}{2y}\right)' = 0$$

Après l'intégration, on trouve

$$\theta' = c - \frac{x'}{2y}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

En remplaçant (3.16) dans la première équation du système $(S_2)_1$, on a

$$\frac{x''}{2y} - \frac{x'y'}{y^2} + \frac{(1-2c)y'}{2y} = 0$$

En résolvant cette équation par rapport à x , on trouve alors,

$$x'(t) = (1-2c)y(t) + \lambda y^2(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.17)$$

ainsi

$$x(t) = \int_t ((1-2c)y(\tau) + \lambda y^2(\tau)) d\tau \quad (3.18)$$

En remplaçant l'Eqs (3.16) et (3.16) dans la deuxième équation du système $(S_2)_2$, on a

$$\frac{y''}{2y} - \frac{y'^2}{2y^2} - \frac{(2c-1)\lambda}{2}y - \frac{\lambda^2}{2}y^2 = 0 \quad (3.19)$$

l'eq.(3.16) n'a une solution exacte (analytique) que pour $\lambda = 0$. Dans ce cas, on obtient la fonction

$$y(t) = y_0 \exp(a-t), \quad y_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } a \in \mathbb{R} \quad (3.20)$$

Ensuite, nous étudions deux cas par rapport à la constante a ,

A. Si $a \neq 0$. En substituant l'eq (3.20) dans (3.17) et (3.16), après intégration on obtient

$$x(t) = \frac{(1-2c)y_0}{a} \exp(at) + c_1 \quad (3.21)$$

et

$$\theta(t) = (2c - \frac{1}{2})t + \theta_0 \quad (3.22)$$

B. Si $a = 0$. l'équation (3.20) devient $y = y_0 \in \mathbb{R}^+$, de l'équation (3.18) on a,

$$x(t) = (1-2c)y_0 t + x_0$$

Puis Eq. (3.16) donne

$$\theta(t) = (2c - \frac{1}{2})t + \theta_0 \quad (3.23)$$

Ainsi, la courbe magnétique de Killing est une ligne

$$\gamma(t) = ((1 - 2c)y_0t + x_0, \quad y_0, \quad (2c - \frac{1}{2})t + \theta_0) \quad (3.24)$$

Par conséquent, nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.6 *Les équations paramétriques des courbes V_2 -magnétiques en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$ correspondantes aux solutions du système d'équations différentielles (S_2) sont :*

A. des courbes spatiales données par

$$\gamma(t) = \left(\frac{(1 - 2c)y_0}{a} \exp(at) + c_1, y_0 \exp(at), (2c - \frac{1}{2})t + \theta_0 \right)$$

B. lignes dans le plan $y = y_0$ donné par

$$\gamma(t) = ((1 - 2c)y_0t + x_0, \quad y_0, \quad (2c - \frac{1}{2})t + \theta_0)$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c, c_1, x_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^+$.

La figure 3 présente la courbe magnétique de Killing dans le cas (a) du Théorème 3.6 pour $a = c = c_1 = y_0 = 1$, $\theta_0 = 0$ et $t \in [-6, 3]$.

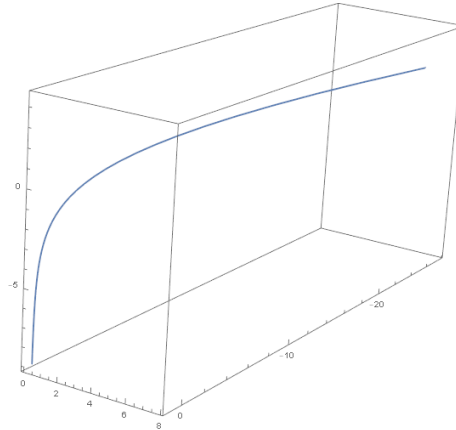


Figure 3 : Courbes V_2 -magnétiques 'a' dans $SL(2, \mathbb{R})$ tracer dans (\mathbb{R}^3, g_{euc})

Remarque 3.7 *Les courbes magnétiques de Killing, qui correspondent au champ magnétique de Killing ∂_θ , sont des géodésiques si le côté droit de l'Eq. (3.15) disparaît, c'est-à-dire $x = \text{const}$*

et $y = \text{const.}$

La droite donnée par l'Eq.(3.15) pour $c = \frac{1}{2}$ est une courbe magnétique de Killing géodésique en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$.

3.5 Courbes V_3 –magnétiques

Dans cette section, par analogie avec les deux précédentes, nous considérons les courbes magnétiques de Killing qui correspondent au champ de vecteur de Killing $V_3 = x\partial x + y\partial y$.

Dans ce cas, on a

$$V_3 \times \gamma' = \left(\frac{\theta'}{2} - \frac{xy' - x'y}{4y^2}\right)e_1 - \frac{x\theta'}{2y}e_2 + \frac{xy' - x'y}{4y^2}e_3 \quad (3.25)$$

Remarque 3.8 La relation Eq.(3.25) peut être obtenue d'une autre manière. Le champ de vecteur de Killing $V_3 = x\partial x + y\partial y$ définit le champ magnétique

$$F_{V_3} = \frac{1}{4y^2}(xdy \wedge d\theta + yd\theta \wedge dx)$$

Ainsi, la force de Lorentz Φ_V est donnée par

$$\Phi_{V_3}(e_1) = \frac{x}{2y}e_1 - \frac{1}{2}e_3, \quad \Phi_{V_3}(e_2) = -\frac{x}{2y}e_1 + \frac{x}{2y}e_3, \quad \Phi_{V_3}(e_3) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{x}{2y}e_2,$$

Par conséquent, on obtient le côté droit de la relation Eq.(3.25)

$$\begin{aligned} \Phi_{V_3}(\gamma') &= \Phi_{V_3}\left(\frac{x'}{2y}e_1 + \frac{y'}{2y}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta\right)e_3\right) \\ &= \left(\frac{\theta'}{2} - \frac{xy' - x'y}{2y^2}\right)e_1 - \frac{x\theta'}{2y}e_2 + \frac{xy' - x'y}{4y^2}e_3 \\ &= V_3 \times \gamma' \end{aligned}$$

En utilisant les côtés droits des Eqs. (3.7) et (3.25) on obtient le système d'équations différentielles suivant

$$S_3 : \begin{cases} \frac{x''}{2y} - \frac{y'\theta'}{y} - \frac{3x'y'}{2y^2} - \frac{\theta'}{2} + \frac{xy' - x'y}{4y^2} = 0 \\ \frac{y''}{2y} + \frac{x'\theta'}{y} + \frac{x'y^2}{y^2} - \frac{y'^2}{2y^2} + \frac{x\theta'}{2y} = 0 \\ \theta'' + \frac{x''}{2y} - \frac{x'y'}{2y^2} - \frac{xy' - x'y}{4y^2} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

on cherche des solutions du système (S_3) , La troisième équation du système $(S_3)_3$ peut s'écrire

$$\theta'' + \left(\frac{x'}{2y}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2y}\right)' = 0$$

Après l'intégration, on a

$$\theta' = c - \frac{x'}{2y} - \frac{x}{4y}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.27)$$

En remplaçant l'Eq.(3.27) dans la première équation du système $(S_3)_1$, on trouve

$$\frac{x''}{2y} - \frac{x'y'}{y^2} + \frac{xy'}{2y^2} + \frac{x}{8y} - \frac{cy'}{y} - \frac{c}{2} = 0 \quad (3.28)$$

De manière analogue, en remplaçant l'Eq.(3.28) dans la deuxième équation du système (3.26), nous avons

$$\frac{y''}{2y} - \frac{y'^2}{2y^2} + \frac{x'^2}{2y^2} + \frac{cx'}{y} + \frac{cx}{2y} - \frac{x^2}{8y^2} - \frac{xx'}{2y^2} = 0 \quad (3.29)$$

pour résoudre l'Eqs.(3.28) et (3.29), nous pouvons considérer un cas particulier lorsque $x = ay$.

Dans ce cas, on peut trouver des solutions au système (S_3) .

Soit $x = ay$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, en remplaçant cela dans l'Eqs. (3.28) et (3.29), on obtient l'équation

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \left(\frac{2c}{a} - 1\right)\left(\frac{y'}{y}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4c}{a} - 1\right) = 0$$

Cette équation a des solutions réelles uniquement pour $\frac{c}{a} \in \mathbb{R} \setminus \langle 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$. Dans ce cas, après avoir introduit des nouvelles constantes $c_1 = \frac{y'}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b = ac_1$, il suit $x' = by$.

De plus, de $x = ay$ et $x' = by$ il suit $x' = \frac{b}{a}x$. La solution de cette équation est

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{b}{a}t\right), \quad a \neq 0 \quad (3.30)$$

Ça suit

$$y(t) = \frac{x_0}{a} \exp\left(\frac{b}{a}t\right), \quad a = 0 \quad (3.31)$$

L'Eq. (3.27) implique $\theta' = k \in \mathbb{R}$, donc

$$\theta(t) = k.t + \theta_0 \quad (3.32)$$

En remplaçant l'Eqs.(3.30), (3.31) et (3.32) dans les première et deuxième équations de (S_3) , on a

$$k = \frac{-2b^2}{a + 2b}$$

donc

$$\frac{b}{a} = \frac{-k}{2(k + b)}$$

Ainsi, la courbe magnétique de Killing est donnée par

$$\gamma(t) = (x_0 \exp(-\frac{k}{2(k+b)}t), -x_0 \frac{k}{2b(k+b)} \exp(-\frac{k}{2(k+b)}t), kt + \theta_0) \quad (3.33)$$

Notez que l'Eq.(3.33) pour $k = -b$ implique $a = 0$, ce qui n'est pas possible ici. Ensuite, nous considérons le cas $a = 0$. De $x = a \cdot y$ suit $x = 0$. Si nous substituons $x = 0$ dans la deuxième équation de $(S_3)_2$, nous obtenons $y(t) = y_0 \cdot e^{m \cdot t}$. Bien que la troisième équation de $(S_3)_3$ suive $\theta(t) = k \cdot t + \theta_0$, la première équation de $(S_3)_1$ implique $\theta(t) = \theta_0$.

Nous avons prouvé le théorème suivant

Théorème 3.9 *Les équations paramétriques des courbes V_3 -magnétiques en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$ correspondantes aux solutions du système d'équations différentielles (S_3) sont :*

a. *Courbes données par $\gamma(t) = (x_0 \exp(-\frac{k}{2(k+b)}t), -x_0 \frac{k}{2b(k+b)} \exp(-\frac{k}{2(k+b)}t), kt + \theta_0)$.*

b. *Lignes données par $\gamma(t) = (0, y_0 \exp(mt), \theta_0)$.*

où $b, k, m, x_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^+$.

La figure 4 présente la courbe magnétique de Killing dans le cas (a) du Théorème 3.9 pour

$k = 1, b = 1, x_0 = 1, \theta_0 = 0$ et $t \in [-15, 5]$.

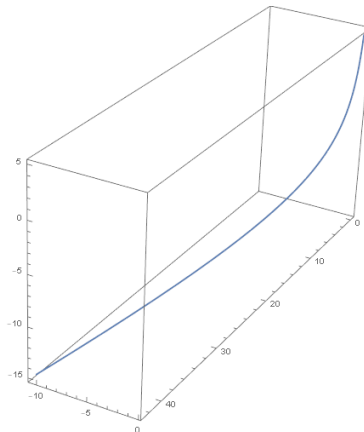


Figure 4 : Courbes V_3 -magnétiques 'a' dans $SL(2, \mathbb{R})$ tracer dans (\mathbb{R}^3, g_{euc})

Remarque 3.10 *Les courbes magnétiques de Killing qui correspondent au champ magnétique de Killing $V_3 = x\partial_x + y\partial_y$, sont des géodésiques si le côté droit de l'Eq. (3.25) disparaît, c'est-à-dire $\theta = \text{const}$ et $y = bx$.*

Corollaire 3.11 *Corollaire 3.12 Il n'y a pas de courbe magnétique géodésique de Killing dans la géométrie $SL(2, \mathbb{R})$ qui correspond au champ de vecteurs Killing $V_3 = x\partial_x + y\partial_y$*

3.6 Courbes V_4 -magnétiques

Dans cette sous-section, nous considérons les courbes magnétiques Killing qui correspondent au champ de vecteurs Killing $V_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y$

$$V_4 \times \gamma' = \left(\frac{xx'}{4y} - \frac{y'}{8y^2}(x^2 - y^2) + \frac{x\theta'}{2}\right)e_1 - \frac{\theta'}{4y}(x^2 - y^2)e_2 + \left(-\frac{xx'}{4y} + \frac{y'}{8y^2}(x^2 - y^2)\right)e_3 \quad (3.34)$$

Remarque 3.13 *La relation (3.34) peut être obtenue d'une autre manière. Le champ du vecteur Killing $V_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y$ définit le champ magnétique*

$$F_{V_4} = \frac{1}{8y^2}((x^2 - y^2)dy \wedge d\theta + 2xyd\theta \wedge dx)$$

et de la force de Lorentz Φ_V est donnée par

$$\begin{aligned} \Phi_{V_4}(e_1) &= \frac{(x^2 - y^2)}{4y}e_2 - \frac{x}{2}e_3, & \Phi_{V_4}(e_2) &= \frac{(x^2 - y^2)}{4y}e_1 - \frac{(x^2 - y^2)}{2}e_3, \\ \Phi_{V_4}(e_3) &= \frac{x}{2}e_1 - \frac{(x^2 - y^2)}{4y}e_2 - \frac{x}{2}e_3. \end{aligned}$$

Ainsi; on obtient le côté droit de l'Eq.(3.34)

$$\begin{aligned} \Phi_{V_4}(\gamma') &= \Phi_{V_4}\left(\frac{x'}{2y}e_1 + \frac{y'}{2y}e_2 + \left(\frac{x'}{2y} + \theta'\right)e_3\right) \\ &= \left(\frac{xx'}{4y} - \frac{y'}{8y^2}(x^2 - y^2) + \frac{\theta'}{2}\right)e_1 - \frac{\theta'}{4y}(x^2 - y^2)e_2 + \left(\frac{xx'}{4y} - \frac{y'}{8y^2}(x^2 - y^2)\right)e_3 \end{aligned}$$

Prenons les côtés droits des Eqs.(3.7) et (3.34), on obtient le système d'équation différentiel suivant

$$S_4 : \begin{cases} \frac{x''}{2y} - \frac{y'\theta'}{y} - \frac{3x'y'}{2y^2} - \frac{xx'}{4y} + \frac{y'}{8y^2}(x^2 - y^2) - \frac{x\theta'}{2} = 0 \\ \frac{y''}{2y} + \frac{x'\theta'}{y} + \frac{x'^2}{y^2} - \frac{y'^2}{2y^2} + \frac{\theta'}{4y}(x^2 - y^2) = 0 \\ \theta'' + \frac{x''}{2y} - \frac{x'y'}{2y^2} + \frac{xx'}{4y} - \frac{y'}{8y^2}(x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Il semble que le système (S_4) ne soit pas exactement résoluble dans le cas général. Cependant, nous essayons de trouver des solutions qui ont au moins une fonction composante linéaire ou constante.

Si nous ajoutons la première équation $(S_4)_1$ à la troisième équation de $(S_4)_3$, on obtient la condition nécessaire pour la solution potentielle

$$\theta'' + \frac{x''}{y} - \frac{y'\theta'}{y} - \frac{2x'y'}{y^2} - \frac{x\theta'}{2} = 0 \quad (3.35)$$

Examinons maintenant les solutions potentielles qui ont une fonction de composant constante ou linéaire.

i) Si nous supposons $x = x_0$, alors la condition Eq.(3.35) implique

$$\theta' = ye^{\frac{1}{2}x_0 t}$$

En substituant dans la deuxième équation du système $(S_4)_2$ il donne une équation différentielle qui ne peut être résolue que de manière essentiellement non algébrique.

ii) L'hypothèse $y = y_0$, ne simplifie pas le système (S_4) , donc nous cherchons une solution en supposant qu'au moins une solution de composant est une fonction linéaire.

L'hypothèse $x(t) = ms + x_0$ conduit à la contradiction. Par contre, l'hypothèse $\theta(t) = kt + \theta_0$ avec la condition Eq.(3.35) donne

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{ky_0}{2}}t\right)$$

qui substitué dans la deuxième équation de $(S_4)_2$ donne une contradiction.

iii) Si nous supposons $\theta = \theta_0$, alors la condition Eq.(3.35) implique $x' = ay^2$. En substituant dans la deuxième équation du système $(S_4)_2$ l'équation

$$yy'' + 2b^2y^4 - (y')^2 = 0$$

qui ne peut être résolue que de manière essentiellement non algébrique. De plus, toute combinaison de deux composantes linéaires de solution potentielle, substituées en Eq.(3.35) donne la troisième composante non linéaire qui après vérification des équations du système (S_4) conduit à la contradiction.

D'où la proposition suivante.

Proposition 3.14 *Les courbes magnétiques de Killing en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$, correspondant au champ de vecteur de Killing $V_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y$ sont des solutions du système d'équations différentielles (S_4) . En particulier, il n'y a pas de courbe magnétique de Killing en géométrie $SL(2, \mathbb{R})$ avec au moins une fonction de composante linéaire qui correspond au champ de vecteur de Killing $V_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y$.*

Remarque 3.15 *Les courbes magnétiques de Killing qui correspondent au champ magnétique de Killing $V_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y$ sont des géodésiques si le membre de droite de l'Eq.(3.35) s'annule, c'est-à-dire $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ et $\theta = \text{const}$*

Corollaire 3.16 *Il n'y a pas de courbe magnétique de Killing géodésique dans la géométrie $SL(2, \mathbb{R})$ qui correspond au champ de vecteur de Killing $V_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y$.*

Bibliographie

- [1] M. Barros and A. Romero : Magnetic vortices, EPL 77 (2007), 34002.
- [2] M.P. DoCarmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1976).
- [3] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 10.0, Champaign, IL (2014).
- [4] Zlatko Erjavec, On Killing magnetic curves in $SL(2, \mathbb{R})$ geometry, Rrports on mathematical physics journal, Vol. 84 (2019).