République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherchescientifique

N° Attribué par la bibliothèque

____

Année univ.: 2019/2020

Méthodes variationnelles pour problèmes périodiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Maamar FELLAH[1]

Sous la direction de

Dr Fatima DIB

Soutenu le 14/09/2020 devant le jury composé de

Dr N. BEKKOUCHE	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr F. DIB	E.S.S.A - Tlemcen	Encadreur
Dr H.ABESS	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr S. BENMANOUSR	E.S.M - Tlemcen	Examinateur

[1] . E-mail : csta44402@gmail.com

A mes chers parents.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu tout puissant qui m'a donné la volonté et la force afin de parfaire ce travail et le mener à terme

Mes remerciements vont particulièrement aussi à :

Mon encadreur Mme F. DIB pour son aide morale et ses précieux conseils qui m'ont aidé à déterminer ce travail.

Mme N. BEKKOUCHE d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury.

Mme H. ABESS,

Mme S. BENMANSOUR, qui ont accepté de se pencher sur l'évaluation de mon travail.

Mr le chef de département de mathématiques DJABBOURI, et à tous les enseignants qui ont participé à ma formation.

La famille FELLAH et mes amis.

A tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leur soutien.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$:	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^n$:	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ n fois.
$\mathbb{R}^+$:	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{Z}$:	Ensemble des nombres relatifs
$\mathbb{N}$:	Ensemble des nombres naturels
Ω :	Ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$x' = \frac{dx}{dt}$:	La dérivée de la variable x par rapport au temps t.
$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$:	La dérivée seconde de la variable x par rapport au temps t.
inf	La borne inférieure
$\liminf$	La limite inférieure

Introduction Générale

0.1 Introduction

Les équations différentielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, elles apparaissent souvent dans la modélisation de processus de phénomènes naturels. Elles sont omniprésentes dans les différentes sciences, Physique, Chimie, Biologie (voir [13, 17]).

Un problème très important pour certaines applications est la recherche de solutions périodiques du système du type

$$x' = f(x, t),$$

où $f(x, t)$, est une application continue dans $\mathbb{R}^n$, supposée périodique par rapport à la variable réelle t de période T (cas non autonome), ou encore du type

$$x' = f(x),$$

(cas autonome).

On ne dispose d'aucune méthode d'investigation assez puissante pour répondre à ces questions de manière générale. Les méthodes existantes sont de deux catégories. Les unes, méthode de perturbation, méthode de centrage, permettant l'étude de systèmes quasi linéaires, c'est-à-dire de systèmes dans lesquels la partie non linéaire apparaît multipliée par un paramètre qu'on suppose petit, le calcul de représentations asymptotiques des solutions périodiques est généralement possible, ainsi que l'étude de la stabilité de ces solutions. Les autres sont des méthodes topologiques ou variationnelles [2, 14, 6] qui fournissent pour certains systèmes fortement non linéaires des résultats d'existence de solutions périodiques.

Les méthodes variationnelles ont une longue histoire qui remonte à Pierre Fermat (1657) et Christian Huygens (1690) pour l'étude de la propagation de la lumière (principe de Fermat et principe de Huygens-Fresnel). Néanmoins, le calcul des variations est né publiquement en 1696, avec le problème de la courbe brachistochrone, posé par Jean Bernoulli (à la suite de Galilée dans son dialogue sur les deux grands systèmes du monde paru en 1632), et résolu par Newton, Leibniz, Jakob et Johann Bernoulli [3]. Le développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé au cours du XXe siècle (avec l'étude précise des propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels de dimensions infinies, la théorie de l'intégration de Lebesgue et beaucoup d'autres techniques) a permis de développer la théorie du calcul variationnel [2].

Dans ce mémoire, nous discutons l'existence de solutions 2π-périodiques non constantes pour une classe d'équations différentielles du second ordre du type;

$$x''(t) + f(t, x(t)) = 0. \tag{1}$$

Notre approche est variationnelle basée sur une minimisation directe sous la contrainte

$$\int_0^{2\pi} x(t)dt = 0. \tag{2}$$

Ce travail est constituée de trois chapitres principaux répartis comme suit:
Chapitre 1: intitulé **"Notions préliminaires"**, comprend un rappel de quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle,
Chapitre 2: intitulé **"Méthodes variationnelles"** dans lequel nous donnons un aperçu sur les méthodes variationnelles et leurs applications.
Chapitre 3: intitulé **"Approche variationnelle pour un problème périodique",** où nous étudions l'existence de solutions 2π-périodiques de notre problème. Nou ennonçons deux théorèmes ainsi qu'un corollaire illustrés par des exemples.
Chapitre 4: intitulé **"Application"** dans lequel nous appliquons l'un de nos résultats principaux à un problème d'oscillation.
Nous achevons par une **conclusion** où nous présentons une synthèse du travail effectué.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques outils de l'analyse fonctionnelle, qui sont nécessaires pour le développement de notre travail.

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Pour plus de détails sur les notions rappelées dans ce paragraphe voir [5, 9].

1.1.1 Quelques notions de convergence

Soient X et Y deux espaces de Banach.

Définition 1.1.1 ***Définition 1.1.2 (Convergence d'une suite)*** *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* X *et* $x_0 \in X$ *.*

On dit que $(x_n)_n$ *converge vers* x_0 *(en norme) si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x_0\|_x = 0$*, et on ecrit* $x_n \to x_0$ *dans* X*.*

Définition 1.1.3 (Opératuer borné) *On dit qu'un opératuer* $T : X \to Y$ *est borné si l'image de tout borné dans* X *par* T *est un borné de* Y*. i.e : pour tout ensemble* D *borné dans* X*,* $T(D)$ *est borné dans* Y*.*
On note $B(X,Y)$ *l'ensemble des applications linéaires et bornées de* X *dans* Y*.*
Le cas $Y = \mathbb{R}$ *est très important par la suite.*

Définition 1.1.4 (Espace dual) *La classe des fonctionnelles linéaires et bornés définies sur* X *est appelé espace dual de* X*, et sera notée par* X'*.*
On munit X' *de la norme*

$$\|J\|_{X'} = \sup_{x\in X, \|x\|_x \le 1} |\langle J, x\rangle|\,, \ pour\ J \in X'.$$

X' *muni de cette norme est un espace de Banach et nous avons l'inégalité*

$$|\langle J, x\rangle| \le \|J\|_{X'} \|x\|_X\,, \ \forall J \in X',\ \forall x \in X.$$

Exemple 1.1.1 (Duals de certains espaces) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$*.*
1) *Soit* p *avec* $1 \le p \le +\infty$*; on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f\ mesurable\ et\ \left(\int_\Omega |f(x)dx|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

On note

$$|f|_{L^p(\Omega)} = |f|_p = \left(\int_\Omega |f(x)dx|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $1 \le p \le +\infty$ *on a:*

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)\ tel\ que\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

2) *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f\ mesurable\ et \exists M > 0\ \ |f(x)| \le M\ \ p.p\ sur\ \Omega\}$$

On note

$$L^\infty(\Omega) = |f|_\infty = \inf\{M;\ \ |f(x)| \le M\ \ p.p\ sur\ \Omega\}.$$

On a

$$(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega).$$

Pour plus détails voir [5].

Remarque 1.1.1 *Nous remarquons que si* $(x_n) \subset X$ *est une suite telle que:* $x_n \to x_0$ *dans* X *alors*
$$\forall J \in X', \langle J, x\rangle \to \langle J, x\rangle.$$

L'implication inverse n'est pas en général vraie.

Définition 1.1.5 (Convergence faible) *On dit qu'une suite* $(x_n) \subset X$ *converge faiblement vers* x*, si*

$$\forall J \in X', \langle J, x_n\rangle \to \langle J, x\rangle,$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$

Proposition 1.1.1 *Soit* (x_n) *une suite de* X*. On a:*
1. *Si* $x_n \to x_0$*, alors* $x_n \rightharpoonup x_0$.
2. *Si* $x_n \rightharpoonup x_0$*, alors* (x_n) *est bornée et* $\|x\|_X \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_X$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x_0$*, et* $J_n \to J$ *dans* X'*, alors* $\langle J, x_n\rangle \to \langle J, x\rangle$.

Proposition 1.1.2 *Lorsque* X *est de dimension finie, une suite* (x_n) *converge faiblement si et seulement si elle converge faiblement.*

Définition 1.1.6 *Un ensemble* $A \subset X$ *est dit faiblement pré-compact si toute suite de* A *contient une sous suite faiblement convergente.*
Si toutes les limites faibles sont dans A*, alors* A *est dit faiblemenet compact.*

1.1.2 Espaces réfléxifs

Comme nous allons voir par la suite, on ne peut pas appliquer les méthodes variationnelles que lorsque'on travaille dans des espaces de Banach qui ont cette propriété que toute boule fermée est faiblemenet compact. Les espaces de Banach qui ont cette propriété sont appelés réflexifs.

Soit X un espace de Banach, X' son dual et X'' son bidual. On a une injection canonique $i : X \to X''$ définie comme suit:

$$\langle i(x), J\rangle_{X'',X'} = \langle J, x\rangle_{X',X} \ \forall x \in X, \ \forall J \in X'$$

i est linéaire et c'est une isométrie.

Proposition 1.1.3 ***Définition 1.1.7*** ***Remarque 1.1.2*** ***Définition 1.1.8*** *On dit que* X *est réflexf si* $i(X) = X''$ *(*i *est surjective de* X *sur* X''*.)*

Exemple 1.1.2 *soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$*.*
1. *Un espace de Hilbert est réflexif.*
2. *Les espaces fonctionnels* $L^p(\Omega)$ *sont réflexifs pour* $1 \leq p \leq +\infty$.
3. $L^1(\Omega)$ *n'est pas réflexif.*

Pour plus de détails voir [5].

Théorème 1.1.1 *Un espace de Banach* X *est réflexif si et seulmenet si toute boule fermée est faiblement compacte.*

Corollaire *Si X est un espace de Banach réflexif alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\|_X \leq M$, contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \leq M$.*

Corollaire *Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si X' est réfléxif.*

1.2 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev jouent un rôle fondamental dans le calcul variationnel. Nous commençons par donner quelques définitions et notations nécessaires pour l'introduction de ces espaces. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev se référer à [1].

1.2.1 Espaces C^k

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
$C^k(I)$ est l'espace des fonctions x de classe C^k sur I, muni de la norme suivante

$$\|x\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{t \in I} \left| x^{(i)}(t) \right|.$$

Si $k = 0$, $C^0(I) = C(I)$, l'espace des fonctions continues sur I. La norme est définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|.$$

$C_c^\infty(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I, infiniment dérivables à support compact.

1.2.2 Espaces de Lebesgue

$L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables x définies sur I telles que la norme

$$\|x\|_{L^p} = \left(\int_I |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

est finie.

Pour $p = \infty$, $L^\infty(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables x bornées sur I. La norme est définie par

$$\|x\|_{L^\infty} = ess \sup_{t \in I} |x(t)|.$$

$L^p(I)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder) *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et p' le conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, si $f \in L^p(I)$ et $g \in L^{p'}(I)$, alors $f.g \in L^1$ et*

$$\int_I |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} . \tag{1.1}$$

1.2.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.2.1 *$W^{k,p}(I)$, $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{Z}^+$ est l'espace de toutes les fonctions $x \in L^p(I)$ telles que $x^{(i)} \in L^p(I)$ pour $i = 1, ..., k$; où les dérivées $x^{(i)}$ sont au sens des distributions.*

$W^{k,p}(I)$ est muni de la norme

$$\|x\|_{W^{k,p}(I)} = \left(\int_I \sum_{i=0}^{k} \left| x^{(i)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{1.2}$$

Remarque 1.2.1 *1)- La norme $\sum_{i=0}^k \left\| x^{(i)} \right\|_{L^p}$ est équivalente à $\|x\|_{W^{k,p}(I)}$ pour tout $x \in W^{k,p}(I)$.*
2)- $W^{0,p}(I) = L^p(I)$.

Proposition 1.2.1 *$W^{k,p}(I)$ est un espace de Banach.*

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(I)$ est souvent noté $H^k(I)$.

Proposition 1.2.2 *$H^k(I)$ muni du produit scalaire réel*

$$(x, y)_{W^{k,2}} = \int_I \sum_{i=0}^{k} x^{(i)}(t) y^{(i)}(t) dt,$$

est un espace de Hilbert.

1.3 Théorèmes d'injection

Les thèorèmes d'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

Définition 1.3.1 *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach. On dit que E_1 est injecté dans E_2 et on écrit $E_1 \hookrightarrow E_2$, si pour tout $x \in E_1$ on a $x \in E_2$ et $\|x\|_{E_2} \leq c\|x\|_{E_1}$, où la constante c ne dépend pas de $x \in E_1$. On définit l'opérateur d'injection $J : E_1 \to E_2$, qui nous permet de considérer le même élément $x \in E_1$*

comme un élément de E_2.
$E_1 \hookrightarrow E_2$ *est équivalent à dire que l'opérateur d'injection* $J : E_1 \to E_2$ *est un opérateur linéaire continu.*
Si $\|x\|_{E_2} \leq c\,\|x\|_{E_1}$, *pour tout* $x \in E_1$, *alors* $\|J\|_{E_1 \to E_2} \leq c$.

Définition 1.3.2 *Si* $E_1 \hookrightarrow E_2$ *et l'opérateur d'injection* $J : E_1 \to E_2$ *est un opérateur compact, alors on dit que* E_1 *est injecté de manière compacte dans* E_2, *et on écrit:* $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$.
La compacité de l'opérateur $J : E_1 \to E_2$ *est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de* E_1 *est un sous-ensemble compact de* E_2.

Théorème 1.3.1 *Il existe une constante* C *(dépendante seulement de* $|I| \leq \infty$*) telle que*

$$|u|_{L^\infty} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}}, 1 \leq p \leq \infty,$$

autrement dit $W^{1,p}(p) \subset L^\infty(I)$ *avec injection continue pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.
De plus, lorsque I *est borné, on a*

$$W^{1,p}(p) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{I}) \text{ pour } 1 \leq p \leq \infty.$$

$$W^{1,1}(I) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\overline{I}) \text{ pour } 1 \leq q \leq \infty.$$

Théorème 1.3.2 (Rellich-Kondrachov) *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *et* Ω *un domaine ouvert borné de classe* C^1 *dans* $\mathbb{R}^N$. *On a :*
si $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [1, p^*[$, *où* $p^* = \frac{N.p}{N-p}$,
si $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [1, +\infty[$.
si $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$.
En particulier, on a toujours :$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Remarque 1.3.1 *La condition sur le domaine* Ω *est nécessaire, si* Ω *n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général.*

1.3.1 Inégalitè de Poincaré

L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.

Soient p, tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction x de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|x\|_p \leq C\,\|\nabla x\|_p\,.$$

Remarque 1.3.2 *L'inégalité de Poincaré permet d'établir l'équivalence sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *entre la norme* (1.2) *et celle définie par*

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \left\|\nabla^k x\right\|_p . \tag{1.3}$$

1.3.2 Espaces de Sobolev avec conditions aux limites périodiques

Prenons $I = [0, T]$, pour $1 < p < \infty$, l'espace de Sobolev $W_T^{1,p}$ est l'espace des fonctions $x \in L^p(I, \mathbb{R})$ ayant une dérivée faible $x' \in L^p(I, \mathbb{R})$ avec $x(0) = x(T)$.

$W_T^{1,p}$ muni de la norme

$$\|x\|_{W_T^{1,p}} = \left(\int_0^T \left[|x(t)|^p + |x'(t)|^p\right] dt\right)^{\frac{1}{P}}, \tag{1.4}$$

est un espace de Banach réflexif.

Proposition 1.3.1 *Si* $x \in W_T^{1,p}$, *alors il existe une constante c telle que*

$$\|x\|_\infty \leq c\,\|x\|_{W_T^{1,p}}, \tag{1.5}$$

de plus si $\int_0^T x(t)dt = 0$, *alors*

$$\|x\|_\infty \leq c\,\|x'\|_{L^p} .$$

H_T^1 est l'espace de Hilbert $W_T^{1,2}$muni du produit scalaire

$$(x, y) = \int_0^T [x(t)y(t) + x'(t)y'(t)]\, dt$$

et de la norme correspondante $\|x\| = \|x\|_{W_T^{1,2}}$.

Décomposition orthogonale de H_T^1

H_T^1 se décompose en somme directe $H_T^1 = H^+ \oplus H^-$, où H^+ dénote le sous-espace de H_T^1 de fonctions à valeur moyenne nulle et H^- le sous-espace de H_T^1 de fonctions constantes. H^+ et H^-sont orthogonaux.

Dans ce cas, nous obtenons les estimations suivantes.

Proposition 1.3.2 *Si* $x \in H^+$, *alors*

$$\int_0^T |x(t)|^2\, dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |x'(t)|^2\, dt, \tag{1.6}$$

(Inégalité de Wirtinger) et

$$\|x\|_\infty^2 \leq \frac{T}{12} \int_0^T |x'(t)|^2\, dt,$$

(Inégalité de Sobolev).

Chapitre 2

Méthodes variationnelles

Sommaire

Les méthodes variationnelles constituent une technique puissante dans l'analyse non linéaire. Elles sont utilisées dans différentes disciplines des mathématiques pures et appliquées, faisant intervenir les problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles.

2.1 Approche variationnelle d'un problème

Un certain nombre de problèmes dans la théorie des équations différentielles peuvent être exprimés sous la forme d'une équation

$$Ax = 0, \tag{2.1}$$

où $A : X \to Y$, X et Y sont des espaces de Banach. Cette équation a une structure variationnelle, s'il existe une fonctionnelle $\varphi : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$(A(x), y) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t},$$

où $Y = X'$, le dual de X, $(.,.)$ est le couple de dualité entre X et X'. Dans ce cas, nous pouvons écrire $A = \varphi'$ et l'équation (2.1) devient

$$(\varphi'(x), y) = 0, \text{ pour tout } y \in X. \tag{2.2}$$

En écrivant l'équation (2.2), nous avons exprimé l'équation (2.1) sous une forme faible. Le problème se transforme alors, en la recherche des points critiques de la fonctionnelle φ qui représentent les solutions de (2.1). Si $X = \mathbb{R}^N$, les candidats évidents pour les points critiques sont les maximums et minimums locaux de φ. La situation est plus compliquée si φ est une fonction définie sur un espace de dimension infinie.

Dans la suite, nous présenterons des arguments pour prouver l'existence de points critiques d'une fonctionnelle réelle φ définie sur un espace de Banach X.

2.2 Rappels

Nous rappelons les définitions nécessaires pour l'énoncé des théorèmes d'existence de ces points critiques. pour plus de détails voir les références [5, 9, 12, 16, 14].

2.2.1 Points êxtremes

Définition 2.2.1 *Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Un point $x_0 \in X$ est appelé extrémum de φ s'il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que :ou bien*

$$\varphi(x) \leq \varphi(x_0), \ \forall x \in U(x_0), \ (\varphi \textit{ est maximal en } x_0),$$

ou bien

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0), \ \forall x \in U(x_0), \ (\varphi \textit{ est minimal en } x_0).$$

Définition 2.2.2 (Point critique d'une fonction) *Un "point critique" de $\varphi \in C^1\ (X, \mathbb{R})$ est un point $x \in X$ pour lequel $\varphi'(x) = 0$.*

Définition 2.2.3 (valeur critique d'une fontion) *Une "valeur critique" de φ est un nombre c tel que $\varphi'(x) = c$ où x est un point critique de φ.*

L'exemple le plus simple de point critique d'une fonctionnelle $\varphi \in C^1\ (X, \mathbb{R})$ est le point extrémal c'est-à-dire un point où φ atteint un minimum ou un maximum, local ou global.

Théorème 2.2.1 *Soit φ une fonctionnelle définie sur un domaine (ouvert et borné) $E \subset X$ et x_0 un point intérieur de E.*
Supposons que φ est Gâteaux-différentiable en x_0. Alors si x_0 est un extrémum de φ, il est donc un point critique de X.

Remarque 2.2.1 *Comme on peut voir par la suite, si $x_0 \in \partial E$ alors on n'a pas nécessairement $D\varphi(x_0) = 0$.*

Définition 2.2.4 (Semi-continuité inférieure) *Soit un espace normé .Une suite minimisante pour une fonction* $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$ *est une suite* (x_k) *telle que*

$$\varphi(x_k) \to \inf \varphi \text{ quand } k \to \infty.$$

Une fonction $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$ *est semi-continue inférieurement (respectivement faiblement semi-continue inférieurement) si*

$$\begin{array}{rcl} x_k & \to & x \Rightarrow \liminf \varphi(x_k) \geq \varphi(x) \\ (\text{resp. } x_k & \rightharpoonup & x \Rightarrow \liminf \varphi(x_k) \geq \varphi(x)). \end{array}$$

2.2.2 Fonctions convexes

Définition 2.2.5 (Ensemble convexe) *On dit qu'une partie* E *de* X *est convexe si :*

$$\forall x, y \in E, \forall t \in [0,1], \quad (tx + (1-t)y) \in E.$$

Définition 2.2.6 (Fonction convexe) *Soit* X *un espace de Banach, soit* $E \subset X$ *un sous-ensemble convexe, une fonctionelle* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *est dite convexe sur* E *si pour tous* $u, v \in E$ *et* $t \in [0,1]$ *on a:*

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v).$$

La fonctionelle φ *est dite strictement convexe sur* E *si pour tous* $u, v \in E$*;* $u \neq v$ *et* $t \in (0,1)$ *on a:*

$$\varphi(tu + (1-t)v) < t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v).$$

Théorème 2.2.2 *Soit* X *un espace de Banach et* $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *convexe. Alors* $x_0 \in X$ *est un minimum de* φ *si et seulement si* x_0 *est un point critique de* φ*; c'est à dire:*

$$\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} \varphi(x) \Leftrightarrow D\varphi(x_0) = 0.$$

Théorème 2.2.3 *Soit* $\varphi : X \to]-\infty, +\infty]$ *une fonctionnelle convexe. Alors* φ *est faiblement semi-continue inférieurement si seulement si elle est semi-continue inférieurement.*

2.3 Résultats de minimisation

Théorème 2.3.1 *(voir [Th. 1.1 dans [12]]) Soit* X *un espace de Banach refléxif,* E *un sous enemble faiblement fermé de* X*, et* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *est faiblement semi-continue inférieurement, alors* φ *a un minimun sur* E *si et seulement si elle admet une suite minimisante bornée sur* E*.*

Remarque 2.3.1 *L'existence d'une suite minimisante bornée est assurée quand φ est coercive, i.e., φ est telle que*

$$\varphi(x) \to +\infty \ si \ \|x\|_X \to +\infty.$$

Dans le cas où la fonction φ est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.
Pour les fonctionnelles convexes, un résultat classique est donné par le théorème suivant:

Théorème 2.3.2 *(voir [5] page 46) Soit une fonctionnelle réelle F définie sur un espace de Banach réfléxif X. Supposons que:*
i) F est semi-continue inférieurement,
ii) F est convexe,
iii) F est coercive, i.e.

$$\lim_{\|x\|_X \to +\infty} F(x) = \infty.$$

Alors F atteint son minimum, i.e. il existe $x_0 \in X$ tel que :

$$F(x_0) = \min_{x \in X} F(x).$$

2.4 Théorie des points critiques

Si φ n'est pas convexe, elle n'a pas besoin d'atteindre son infimum. Toute fois, le résultat d'Ekeland montre l'existence de points qui sont presque des minimum.

Théorème 2.4.1 *(voir [16] page 51) Soit X un espace métrique complet et F semi-continue inférieurement sur X et minorée. Alors il existe $x_0 \in X$ tel que:*

$$F(x) > F(x_0) - dist(x, x_0); \ pour \ tout \ x \in X; \ x \neq x_0.$$

Une condition de compacité qui est habituellement employée pour prouver l'existence de points stationnaires est la condition de Palais-Smale (P-S), pour une fonction $\varphi \in C^1$:

Définition 2.4.1 (Condition (P-S)) *Toute suite $\{x_j\} \in X$ telle que: $|\varphi(x_j)| < M$ et $\varphi'(x_j) \to 0$ en norme dans X' (l'espace dual de X) admet une sous-suite fortement convergence, où $\varphi'(x)$ représente la dérivée de φ en x, et est un élément du dual X'l'espace des fonctions linéaires continues sur X. Une telle fonction atteint toujours son infimum.*

Lemme 2.4.1 *Soit φ une fonction réelle de classe C^1 définie sur un espace de Banach X satisfaisant la condition (P-S) et bornée inférieurement. Alors φ atteint un minimum en un certain point x_0 de X.*

Pour une fonction qui n'est pas bornée, chercher ses points critiques revient à chercher des points selles de la fonctionnelle associée au problème étudié. Ces points sont déterminés par des arguments de type minimax. Ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col et ses variantes:

Théorème 2.4.2 (Theorème du col) *[Th. 4.10 dans [12]] Soit X un espace de Banach et $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $u_0 \in X, u_1 \in X$, et un voisinage ouvert borné I de u_0 tel que $u_1 \in X/I$ et*

$$\inf_{\partial I} \varphi > \max\left(\varphi\left(u_0\right), \varphi\left(u_1\right)\right).$$

Soit

$$\Gamma = \left\{g \in C\left([0,1]\,; X\right);\ g(0) = u_0,\ g(1) = u_0\right\},$$

et

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq s\leq 1} \varphi(g(s)).$$

Si φ satisfait la condition de Palais-Smale, alors c est une valeure critique de φ et

$$c > \max\left(\varphi\left(u_0\right), \varphi\left(u_1\right)\right).$$

Théorème 2.4.3 *([Th. 9.1 dans [14]]) Soit E un espace de Banach réel, $\varphi \in C^1(E,\mathbb{R})$ est une fonctionnelle paire qui satisfait la condition de Palais-Smale, φ est bornée inférieurement et $\varphi(0) = 0$; supposons qu'il existe un ensemble $K \subset E$ tel que K est homéomorphe à S^{n-1} (la sphère unité $(n-1)$-dimensionnelle) par une application impaire et $\sup_{x\in K} \varphi(x) < 0$, alors φ a au moins n paires de points critiques non triviaux distincts .*

Chapitre 3

Approche variationnelle pour un problème périodique

Sommaire

Cette partie est largement inspirée par le travail de X. L. Liu et X. Y. Shi [11].

3.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'équation différentielle non autonome du second ordre suivante

$$x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad t \in I, \tag{3.1}$$

avec les conditions aux limites intégrales:

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0, \tag{3.2}$$

où $I = [0, 2\pi]$ et $f \in C(\mathbb{R}^2)$ est $2\pi-$périodique en t.

Les problèmes aux limites avec les conditions intégrales ont fait l'objet de plusieurs travaux ces dernières années [4, 10, 19, 20]. En particulier, pour les problèmes aux limites de second ordre avec les conditions périodique-intégrales (voir [7, 8]).

Dans la littérature, certains outils classiques ont été utilisés pour étudier ces problèmes: les théorèmes du point fixe [4], la méthode des sur et sous solutions [19], la théorie des opérateurs monotones mixtes [10], la méthode d'estimation à priori avec le théorème du point fixe de Leray-Schauder [21].

En particulier, dans l'article [8], les auteurs ont étudié le problème $(3.1)-(3.2)$ par une forme bilinéaire en utilisant le théorème du point fixe de Leray-Schauder, dans le cas de non résonance. Leur résultat principal est le suivant:

Théorème 3.1.1 *Supposons que:*
C1) $f \in C(I, \mathbb{R})$ est $2\pi-$périodique en t,
C2) Il existe $N \in \mathbb{Z}^+$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$N^2 + \varepsilon \leq f_x(t,x) \leq (N+1)^2 - \varepsilon, \; \textit{pour tout } (t,x) \in I \times \mathbb{R}.$$

Alors le problème $(3.1) - (3.2)$ admet une solution unique.

Nous savons que dans le cas de résonance, i.e.

$$f_x(t,x) = N^2, \; N \in \mathbb{Z},$$

le problème $(3.1) - (3.2)$ peut avoir une infinité de solutions.
Par exemple, si

$$f(t,x) = N^2 x, \; \textit{pour } (t,x) \in I \times \mathbb{R}.$$

admet des solutions de la forme

$$x(t) = c_1 \cos(Nt) + c_2 \sin(Nt), \; \text{où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sont des constantes arbitraires.

Nous remarquons que dans le résultat de [8], les conditions imposées à $f(t,x)$ sont très restreintes.
Si ces conditions ne sont pas vérifiées, l'existence de solutions pour le problème $(3.1) - (3.2)$ n'est pas garantie, en effet:

Considérons un cas particulier du problème $(3.1) - (3.2)$ où

$$f(t,x) = a \sin x(t) - e(t), \quad \textit{pour } (t,x) \in I \times \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

où a est une constante donnée et $e \in C([0,2\pi])$ est une fonction $2\pi-$périodique vérifiant $\int_0^{2\pi} e(t)dt = 0$.

Il est clair que dans (3.3), on a

$$f_x(t,x) = a \cos x(t),$$

si $a < 1$, la condition (C2) du théorème 3.1.1 n'est pas satisfaite et donc le problème $(3.1) - (3.2)$ n'a pas de solutions par conséquent la méthode utilisée dans [8] n'est pas applicable.

D'un autre côté, une théorie de base des méthodes variationnelles a été introduite dans [22] pour étudier ce cas particulier du problème (3.1) − (3.2) .

Motivés par tous ces travaux et en se basant sur l'article [11], notre but dans ce mémoire est d'étudier l'existence des solutions pour le problème (3.1) − (3.2) sous des hypothèses suffisantes, en utilisant une approche variationnelle basée sur une minimisation directe sous contrainte.

3.2 Préliminaires

Nous nous intéressons à l'existence des solutions $2\pi-$périodiques avec valeur moyenne nulle, nous considérons donc le sous-espace faiblement fermé E de $H^1_{2\pi}$ défini par:

$$E = H^+ = \left\{ x \in H^1_{2\pi}, \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0 \right\},$$

équipé de la norme

$$\|x\| = \left(\int_0^{2\pi} |x'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

équivalente à la norme $\|.\|_{H^1_{2\pi}}$ (1.4) , à l'aide de l'inégalité de Wirtinger (1.6).

Soit $y \in E$, multiplions les deux membres de l'égalité (3.1) par y et intégrons entre 0 et 2π, nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} \left[x''(t) + f(t, x(t))\right] y(t)dt = 0.$$

De plus, puisque $y(0) = y(2\pi)$, nous avons

$$\int_0^{2\pi} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2\pi} f(t, x(t))y(t)dt = 0.$$

Définition 3.2.1 *Une solution faible du problème* (3.1) − (3.2) *est une fonction* $x \in E$ *telle que*

$$\int_0^{2\pi} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2\pi} f(t, x(t))y(t)dt = 0,$$

pour tout $y \in E$.

Soit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1)−(3.2) , $\phi : H^1_{2\pi} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |x'(t)|^2 \, dt - \int_0^{2\pi} F(t, x(t))dt, \tag{3.4}$$

où

$$F(t, x) = \int_0^x f(t, s)ds,$$

et

$$N(x) = \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0.$$

Sous la contrainte $N(x)$, le point minimum $x_0 \in C^2(I) \cap H^1_{2\pi}$ de la fonctionnelle $\phi(x)$ est la solution du problème $(3.1) - (3.2)$, autrement dit

$$\phi(x_0) = \min_{x \in H^1_{2\pi} \cap N^{-1}(0)} \phi(x).$$

Remarque 3.2.1 *1- Sous la contrainte $N(x) = 0$, les multiplicateurs de Lagrange sont nuls par conséquent les solutions du problème $(3.1) - (3.2)$ sont les minimums de la fonctionnelle $\phi(x)$.*
2- La fonctionnelle $\phi(x)$ n'est pas coercive sur $H^1_{2\pi}$, nous nous intéressons donc aux minimums de la fonctionnelle $\phi(x)$ sur le sous-espace faiblement fermé E de $H^1_{2\pi}$ défini ci- dessus.

Dans la suite nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 3.2.1 *(voir [22]) Soit $x^* \in W^{1,r}(J, \mathbb{R}^n)$ un point minimum de la fonctionnelle*

$$\varphi(x) = \int_J L(t, x, y)dt,$$

où $J = [a, b]$ est un intervale fini de $\mathbb{R}$, $1 < r < \infty$.
Supposons que:
(i) $|L(t, x, y| + |L_x(t, x, y)| + |L_y(t, x, y)| \leq C(1 + |y|^2)$.
(ii) La matrice $L_{y_i y_j}(t, x, y)$ est positive *pour tout $(t, x, y) \in \overline{J} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*
Alors $u^* \in C^2(I)$ dans le sens où u^* change de valeur sur un ensemble de mesure nulle.

Proposition 3.2.1 *La fonctionnelle $\phi(x)$ est continue, différentiable et faiblement semi-continue inférieurement. De plus, les points critiques de $\phi(x)$ sont les solutions faibles du problème $(3.1) - (3.2)$.*

Preuve: La continuité de f nous donne la continuité de ϕ.
ϕ est différentiable en effet:
Pour tout $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\phi(x + \varepsilon y) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left|(x + \varepsilon y)'(t)\right|^2 dt - \int_0^{2\pi} F(t, (x + \varepsilon y)(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} [\frac{1}{2} x'(t)^2 dt + \varepsilon x'(t) y'(t) dt + \frac{\varepsilon^2}{2} (y'(t))^2] dt - \int_0^{2\pi} F(t, x(t))dt \\
&\quad - \left(\int_0^{2\pi} F(t, x(t) + \varepsilon y(t))dt - \int_0^{2\pi} F(t, x(t))dt \right),
\end{aligned}$$

et en utilisant la formule des accroissements finis on obtient

$$\begin{aligned}\phi(x+\varepsilon y) &= \phi(x)+\varepsilon[\int_0^{2\pi} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2\pi} f(t,x(t)+\varepsilon\theta(t)y(t))y(t)dt] \\ &+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^{2r}\left(y'(t)\right)^2 dt,\end{aligned}$$

où $0<\theta(t)<1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(x+\varepsilon y)-\phi(x)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2\pi} f(t,x(t)+\varepsilon\theta(t)y(t))y(t)dt \\ &+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2r}\left(y'(t)\right)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2\pi} f(t,x(t))y(t)dt.\end{aligned}$$

Ainsi, $\phi\in C^1(E,\mathbb{R})$ et il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\phi'(x)y &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\phi(x+\varepsilon y)-\phi(x)\right) \\ &= \int_0^{2\pi} x'(t)y'(t)dt - \int_0^{2\pi} f(t,x(t))y(t)dt.\end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions faibles du problème $(3.1)-(3.2)$ correspondent aux points critiques de ϕ.

Montrons maintenant que ϕ est faiblement semi continue inférieurement. Soient $(x_n)\subset E$, $x\in E$, tels que $x_n\rightharpoonup x$, alors (x_n) converge uniformément vers x sur I et $x_n\to x$ dans $L^2(I)$, et en combinant le fait que $\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|\geq\|x\|$, nous avons,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\phi(x_n) &= \liminf_{n\to\infty}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|x_n'(t)\right|^2 dt-\int_0^{2\pi}F(t,x_n(t))dt\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|x_n\|^2-\int_0^{2\pi}F(t,x_n(t))dt\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|x\|^2-\int_0^{2\pi}F(t,x(t))dt \\ &= \phi(x).\end{aligned}$$

■

3.3 Résultats d'existence

Dans cette partie nous ennonçons quelques résultats d'existence. Leurs preuves se basent essentiellement sur le théorème 2.3.1.
Nous commençons par le thèorème suivant:

Théorème 3.3.1 *Supposons que:*
$(H1)$ $f(t,x) \in C(\mathbb{R}^2)$ *et* $2\pi-$*périodique en* t,
$(H2)$ $f(t,x)$ *et* $F(t,x)$ *sont toutes les deux bornées,* $c'est - à - dire$: *ils existent* $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{c} |f(t,x)| \leq M_1 \\ et \\ |F(t,x)| \leq M_2 \end{array} \right. , pour\ (t,x) \in I \times \mathbb{R}.$$

Alors le problème $(3.1) - (3.2)$ *admet au moins une solution.*

Preuve: D'après la proposition 3.2.1, la fonctionnelle $\phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ et est faiblement semicontinue inférieurement.

Il reste à prouver qu'elle admet une suite minimisante bornée sur E.

D'après $(H2)$, nous avons

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left|x'(t)\right|^2 dt - \int_0^{2\pi} F(t,x(t))dt \\ &\geq \frac{1}{2} \left\|x\right\|^2 - 2\pi M_2, \end{aligned}$$

d'où,

$$\phi(x) \to +\infty \text{ quand } \|x\|_E \to +\infty.$$

Alors, ϕ est coercive sur E, ce qui garantie l'existence d'un suite minimisante bornée sur E, un sous-espace faiblement fermé de $H^1_{2\pi}$. En appliquant le théorème 2.3.1, la fonctionnelle ϕ admet un minimum $x_0 \in E$, et par conséquent le problème $(3.1) - (3.2)$ admet au moins une solution faible.

Pour montrer que cette solution est classique, posons

$$L(t,x(t),x'(t)) := \frac{1}{2} \left|x'(t)\right|^2 - F(t,x(t)),$$

et vérifions les conditions du lemme 3.2.1.

1- D'après $(H2)$, nous avons

$$\begin{aligned}
|L(t,x(t),x'(t))| + |L_x(t,x(t),x'(t))| + |L_{x'}(t,x(t),x'(t))| &= \left|\frac{1}{2}|x'(t)|^2 - F(t,x(t))\right| \\
&\quad + |f(t,x(t))| + |x'(t)| \\
&\leq \left|\frac{1}{2}|x'(t)|^2\right| \\
&\quad + |F(t,x(t))| + |f(t,x(t))| + |x'(t)| \\
&\leq \left|\frac{1}{2}|x'(t)|^2\right| + M_1 + M_2 + |x'(t)| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|x'(t)|^2 + 2|x'(t)| + 1\right) + M \\
&= \frac{1}{2}(1 + |x'(t)|^2) + M \\
&\leq \left(M + \frac{1}{2}\right)(1 + |x'(t)|^2),
\end{aligned}$$

où $M := M_1 + M_2$, une constante positive.
Ainsi,

$$|L(t,x(t),x'(t))| + |L_x(t,x(t),x'(t))| + |L_{x'}(t,x(t),x'(t))| \leq C(1 + |x'(t)|^2).$$

où $C := \left(M + \frac{1}{2}\right)$, une constante positive.
2- Nous avons

$$L_{x'}(t,x(t),x'(t)) = |x'(t)| \geq 0, \text{ pour tout } (t,x(t),x'(t)) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Les conditions du lemme 3.2.1 étant vérifiées, le problème (3.1) − (3.2) admet une solution. ■

Exemple 3.3.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$x''(t) + x(t)e^{-x^2(t)} \sin t = 0, \tag{3.5}$$

sous les conditions aux limites suivantes

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0,$$

où

$$f(t,x(t)) = x(t)e^{-x^2(t)} \sin t,$$

alors,

$$F(t,x(t)) = -\frac{1}{2}e^{-x^2(t)} \sin t.$$

ce qui montre que $f(t, x(t))$ *et* $F(t, x(t))$ *sont bornées sur* $I \times \mathbb{R}$ *en effet:*

$$|f(t, x(t))| = \left| x(t) e^{-x^2(t)} \sin t \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$|F(t, x(t))| = \left| \frac{1}{2} e^{-x^2(t)} \sin t \right| \leq \frac{1}{2}.$$

D'où le problème $(3.1) - (3.2)$ *admet au moins une solution.*

Remarque 3.3.1 *Si nous nous prenons:*

$$f(t, x(t)) = \sin t,$$

alors,

$$F(t, x(t)) = x(t) \sin t.$$

Nous avons $f(t, x(t))$ *bornée et* $F(t, x(t))$ *non bornée sur* $I \times \mathbb{R}$*.*
Cependant, le problème $(3.1) - (3.2)$ *admet une solution unique* $x(t) = \sin t$*.*

Cette remarque nous inspire à considérer le cas faible du problème $(3.1)-(3.2)$ et donc chercher ses solutions faibles comme points minimums de la fonctionnelle ϕ.
Nous ennonçons dans la suite un second théorème ainsi qu'un corollaire.

Théorème 3.3.2 *Supposons que l' hypothèse* $(H1)$ *est satisfaite. Si de plus on a:*
$(H2)'$ $\lim_{x \to \infty} \frac{F(t,x)}{x^2} = l < \frac{1}{2}$, *pour* $(t, x) \in I \times \mathbb{R}$*.*
Alors le problème $(3.1) - (3.2)$ *admet au moins une solution faible.*

Preuve: D'après la proposition 3.2.1, la fonctionnelle $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ est faiblement semi continue inférieurement.

Il reste à prouver qu'elle admet une suite minimisante bornée sur E.
D'après $(H2)'$, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{F(t,x(t))}{(x(t))^2} - l \right| < \varepsilon$, i.e.

$$F(t, x(t)) < (\varepsilon + l) (x(t))^2 .$$

Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} - l$, en utilisant l'inégalité de Wirtinger (1.6), nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |x'(t)|^2 \, dt - \int_0^{2\pi} F(t, x(t))dt \\
&\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - (l + \varepsilon) \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \\
&\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - (l + \varepsilon) \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \\
&\geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - (l + \varepsilon) \int_0^{2\pi} x^2(t)dt \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - (l + \varepsilon)\right) \|x\|^2,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\phi(x) \to +\infty \text{ quand } \|x\|_E \to +\infty.$$

Alors, ϕ est coercive sur E, ce qui garantie l'existence d'un suite minimisante bornée sur E, un sous-espace faiblement fermé de $H^1_{2\pi}$. En appliquant le théorème 2.3.1, la fonctionnelle ϕ admet un minimum $x_0 \in E$, et par conséquent le problème (3.1) – (3.2) admet au moins une solution faible. ■

Exemple 3.3.2 *Considérons l'équation différentielle*

$$x''(t) + \frac{x(t)}{2} + \sin t = 0, \tag{3.6}$$

sous les conditions aux limites suivantes

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0,$$

où

$$f(t, x) = \sin t + \frac{x}{2}$$

et

$$F(t, x) = x \sin t + \frac{x^2}{4}.$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(t, x)}{x^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

En appliquant le théorème 3.3.2, le problème (3.6) – (3.2) admet au moins une solution faible.

Remarque 3.3.2 *Si F satisfait la condition suivante à la place de $(H2)'$:*
$(H2)''$ $F(t, x) \leq ax^2 + bx + c$ pour tout $(t, x) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, où $a < \frac{1}{2}$; b et c sont des constantes réelles, alors ϕ est coercive sur E.

Par suite, nous pouvons énnoncer le corollaire suivant.

Corollaire Supposons (H1) et (H2)" sont satisfaites, alors le problème (3.1) – (3.2) admet au moins une solution faible.

Preuve: D'après $(H2)''$, nous avons:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left|x'(t)\right|^2 dt - \int_0^{2\pi} F(t,x(t))dt \\ &\geq \frac{1}{2}\left\|x\right\|^2 - \int_0^{2\pi} ax^2(t)dt - \int_0^{2\pi} bx(t)dt - 2\pi c.\end{aligned}$$

Et en utilisant l'inégalité de Wirtinger et la condition $\int_0^{2\pi} x(t)dt = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\phi(x) &\geq \frac{1}{2}\left\|x\right\|^2 - a\left\|x\right\|^2 - 2\pi c \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - a\right)\left\|x\right\|^2 - 2\pi c.\end{aligned}$$

d'où,

$$\phi(x) \to +\infty \text{ quand } \left\|x\right\|_E \to +\infty.$$

Alors, $\phi(x)$ est coercive sur E, un sous-espace faiblement fermé de $H^1_{2\pi}$, et puisque, ϕ est semi continue inférieurement, alors, d'après le théorème 2.3.1, la fonctionnelle ϕ admet un minimum $x_1 \in E$, et le problème $(3.1) - (3.2)$ admet au moins une solution faible. Ce qui achève la preuve. ∎

Exemple 3.3.3 *Considérons l'équation*

$$x''(t) + \frac{x(t)}{2}\sin^2(t) + 1 = 0, \tag{3.7}$$

sous les conditions aux limites suivantes

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0,$$

où

$$f(t,x) = \frac{x}{2}\sin^2(t) + 1,$$

et

$$F(t,x) = \frac{1}{4}x^2\sin^2(t) + x.$$

Il est clair que F vérifie $(H2)''$, en effet

$$F(t,x) \leq \frac{1}{4}x^2 + x \text{ pour tout } t \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}.$$

En appliquant le corollaire 3.3, le problème $(3.7) - (3.2)$ admet au moins une solution faible.

Chapitre 4

Application

Sommaire

Dans ce chapitre, nous appliquons le théorème 3.3.2 à un problème d'oscillation. Nous montrons l'existence d'au moins une solution au sens faible, puis en utilisant le lemme 3.2.1, nous prouvons que c'est une solution classique.

4.1 Présentation du Problème

Dans cette section, nous étudions l'existence solutions $2\pi-$périodiques non constantes pour l'équation d'oscillation non linéaire

$$x''(t) + a\sin x(t) = e(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

où a est une constante donnée et le terme forçant $e \in C([0, 2\pi])$ est une fonction $2\pi-$périodique vérifiant $\int_0^{2\pi} e(t)dt = 0$.
Nous considérons donc le problème:

$$\begin{cases} x''(t) + a\sin x(t) = e(t), \quad t \in [0, 2\pi], \\ x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \\ \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

qui est un cas particulier de $(3.1) - (3.2)$ avec

$$f(t, x) = a\sin x - e(t).$$

4.2 Résultat d'existence

Nous ennonçons alors le théorème suivant:

Théorème 4.2.1 *Si $e \in C([0,2\pi])$ est une fonction $2\pi-$périodique telle que $\int_0^{2\pi} e(t)dt = 0$, alors le problème (4.1) admet au moins une solution.*

Preuve: La preuve se base sur l'application du théorème 3.3.2 et le lemme 3.2.1.
Nous définissons la fonctionnelle $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} |x'(t)|^2 + a \cos x(t) - e(t)x(t) \right) dt. \tag{4.2}$$

Soit la fonction

$$F(t,x) = \int_0^x f(t,s)ds = a \cos x - e(t)x,$$

primitive de $f(t,x)$.

Nous vérifions que les fonctions f et F satisfont bien les conditions du théorème 3.3.2, en effet:
-$(H1)$ Sachant que $e \in C([0,2\pi])$ est une fonction $2\pi-$périodique, nous déduisons que $f \in C(\mathbb{R}^2)$ et $2\pi-$périodique en t comme somme algébrique de deux fonctions continues et $2\pi-$périodiques.

-$(H2)'$ $\lim_{x\to\infty} \frac{F(t,x)}{x^2} = l < \frac{1}{2}$, pour $(t,x) \in [0,2\pi]\times \mathbb{R}$, en effet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(t,x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{a\cos x - e(t)x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{a \cos x}{x^2} - \frac{e(t)}{x} = 0 < \frac{1}{2}.$$

Par conséquent la fonctionnelle φ admet un minimum et donc le problème (4.1) admet au moins une solution faible.

Montrons maintenant que cette solution est classique.
Soit

$$E(t) := \int_0^t e(s)ds,$$

En utilisant le fait que $\int_0^{2\pi} e(s)ds = 0$, nous avons

$$E(2\pi) = E(0) = 0.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e(t)x(t)dt &= E(t)x(t)\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} E(t)x(t)dt \\
&= E(2\pi)x(2\pi) - E(0)x(0) - \int_0^{2\pi} E(t)x(t)dt \\
&= -\int_0^{2\pi} E(t)x(t)dt.
\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$L(t,x(t),x'(t)) := \frac{1}{2}\left|x'(t)\right|^2 + a\cos x(t) - e(t)x(t),$$

D'où

$$L(t,x(t),x'(t)) = \frac{1}{2}\left|x'(t)\right|^2 + a\cos x(t) + E(t)x'(t).$$

1- Vérifions que pour tout $(t,x(t),x'(t)) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|L(t,x(t),x'(t))| + |L_x(t,x(t),x'(t))| + |L_{x'}(t,x(t),x'(t))| \leq C(1 + |x'(t)|^2).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
|L(t,x(t),x'(t))| + |L_x(t,x(t),x'(t))| + |L_{x'}(t,x(t),x'(t))| &= \left|\frac{1}{2}\left|x'(t)\right|^2 + a\cos x(t) + E(t)x'(t)\right| \\
&\quad + |a\sin x(t)| + |E(t) + |x'(t)|| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|x'(t)\right|^2 + |x'(t)| + 2|a| + |E(t)| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|x'(t)\right|^2 + 2|x'(t)| + 2|a| + K \\
&\leq \frac{1}{2}(1 + |x'(t)|^2) + K' \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + K'\right)(1 + |x'(t)|^2)
\end{aligned}$$

où $K' := 2|a| + K$, une constante positive.
Ainsi,

$$|L(t,x(t),x'(t))| + |L_x(t,x(t),x'(t))| + |L_{x'}(t,x(t),x'(t))| \leq C(1 + |x'(t)|^2).$$

où $C := \left(K' + \frac{1}{2}\right)$, une constante positive.

2- Nous avons

$$L_{x'}(t,x(t),x'(t)) = |x'(t)| \geq 0, \text{ pour tout } (t,x(t),x'(t)) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Les conditions du lemme 3.2.1 étant vérifiées, le problème (4.1) admet une solution. ■

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la recherche de solutions périodiques pour des problèmes associés à des équations différentielles non linéaires et non autonomes du second ordre.

Nous avons utilisé un outil trés puissant dans l'analyse nonlinéaire qui est les méthodes variationnelles.
Appliquer ces methodes revient à transformer le problème initial en la minimisation d'une certaine fonctionnelle d'énergie définie sur un espace de Banach. Les points critiques de cette fonctionnelle représentent les solutions faibles du problème initial.

L'approche variationnelle utilisée dans cette étude, est basée sur une minimisation directe sous l'effet d'une contrainte.
Nous avons montré l'existence d'au moins une solution de notre problème périodique.

Bibliographie

[1] R. Adams and J. Fournier, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Volume 140, 2nd Edition, Academic Press, (2003).

[2] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *Journal of Functional Analysis*, 14 (1973), 349-381.

[3] G. A. Bliss, Lectures on the Calculus of Variations, The Mathematical Association of America, 1944.

[4] A. Boucherif, Second-order boundary value problems with integral boundary conditions, *Nonlinear Analysis*, 70, (2009), 364-371.

[5] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983. 200, (2006), 1-27.

[6] M. E. Gurtin, Variational Principles for Linear Initial-Value Problems, *Quarterly of Applied Mathematics*, 22(3), (1964) 252-256.

[7] H. Hua, F. Cong and Yi. Cheng, Notes on existence and uniqueness of solutions for second order periodic-integrable boundary value problems, *Applied Mathematics Letters*, 25, (2012), 2423-2428.

[8] H. Hua, F. Cong and Y. Cheng, Existence and uniqueness of solutions for periodic-integrable boundary value problem of second order differential equation, *Boundary Value Problems* (2012), 2012, 89.

[9] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[10] L. Kong, Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(5), (2010), 2628-2638.

[11] X. L. Liu and X. Y. Shi, Existence of solutions for second-order periodic-integrable boundary value problems, *Applied Mathematics Letters*, (37), (2014), 91-94.

[12] J. Mawhin and M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, vol.74, Springer, NewYork, NY, USA, 1989.

[13] A. D. Pierce, Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications, Acoustical Society of America, 1989.

[14] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Application to Differential Equations; conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics number 65.

[15] S. L. Sobolev, Some applications of functional analysis in mathematical physics, *American Mathematical Society,* (1963).

[16] M. Struwe, Variational Methods: Application to nonlinear partial Differential Equations and Hamiltonian systems, 3. ed., Berlin, Spinger, 2000.

[17] G. Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, Providence: American Mathematical Society, 2012.

[18] C. C. Tisdell, Existence of solutions to first-order periodic boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323(2), (2006), 1325-1332.

[19] Y. Wang, G. Liu and Y. Hu, Existence and uniqueness ofsolutions for a second order differential equation with integral boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 216(9), (2010), 2718-2727.

[20] J. R. L Webb and G. Infante, Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions, *Nonlinear Differential Equations and Applications,* 15, (2008), 45-67.*near Science and Numerical Simulation*, 17(1), (2012), 426-432.

[21] Z. Yang, Existence and uniquess of positive solutions for an integral boundary value problem, *Nonlinear Analysis,* 69, (2008), 3910-3918.

[22] G. Zhang, Variational Calculus Notes, Higher Education Press, Beijing, 2011.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la recherche de solutions périodiques pour des problèmes associés à des équations différentielles non linéaires du second ordre.
L'approche utilisée, est variationnelle basée sur une minimisation directe sous l'effet d'une contrainte.

Mots clés : Equation différentielle du second ordre, solution périodique, méthode variationnelle.

Abstract

In this thesis, we study the existence of solutions for periodic boundary problems associated to nonlinear second-order differential equations.
We use variational approach, with constraints.

Key words: second order differential equation, periodic solution, variational method.

ملخص

ناقشنا في هذه المذكرة اشكالية وجود الحلول لصنف من المسائل الحدية الدورية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية٠ وقد تم وذلك باستخدام أساليب التغيرات مع قيود٠

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، حل دوري، أساليب التغيرات٠

.