



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ.: 2019/2020

Processus Markoviens en temps continu et applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique
des Processus et Applications

par

Khaoula MOUMENE¹

Sous la direction de

Pr/A. KANDOUCI

Soutenu le 14/09/2020 devant le jury composé de

Dr.M Kadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Pr.A Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr/Mlle.F Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice1
Dr/Mlle.N Hachemi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice2

1. e-mail : khaoulamoumene77@gmail.com

Dédicace

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour finir ce modeste travail, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je dédie ce mémoire :

À ma chère mère qui a toujours aimé me voir arriver à cette étape de ma vie .

À mon cher père qui a toujours voulu assister à mon succès,

À mes frères et mes sœurs.

À mon encadreur monsieur A.Kandouci qui m'a beaucoup aidé à surmonter les obstacles que j'ai rencontrés pendant les moments difficiles ,ses encouragements et ses recommandations m'ont permis de tenir debout afin de réaliser ce modeste travail

*À Tous les professeurs de l'université -Dr Moulay Tahar.
Département math et Informatique*

À tous mes amies.

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la foi, pour pouvoir d'accomplir ce travail sérieux et de m'avoir permis d'en arriver là.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreur le professeur A.Kandouci, qui s'est montré toujours disponible, avec ses conseils précieux, son aide inestimable, son soutien régulier et surtout avec ses mots d'encouragement positif et optimiste, il n'a pas hésité un jour de me soutenir tout au long de l'année.

Je remercie les membres de jury de m'avoir consacré des moments de leurs temps pour consulter ce mémoire et me guider par leurs pertinentes observations.

Un grand merci à tous mes enseignants du département de mathématiques de saïda pour leur aide et pour leur encourage.

J'exprime toute ma reconnaissance à ma famille, mes amies et ma reconnaissance qui avaient un rôle psychologique considérable dans l'accomplissement de cette recherche. Bref, mes doigts ne veulent pas s'arrêter de décrire ma reconnaissance.

Merci mille fois....

Table des matières

Introduction générale	6
1 Quelques généralités sur les processus aléatoires	8
1.1 Filtration et processus	8
1.2 Processus aléatoires	9
1.3 Temps d'arrêt	9
1.4 Espérance conditionnelle	10
1.5 Martingales	11
1.6 Le mouvement Brownien	11
1.7 Processus de Poisson	12
1.7.1 Trois propriétés de la loi exponentielle	12
1.8 Présentation du processus de Poisson	13
2 Processus stochastiques Markoviens en temps continu	16
2.1 Les processus de Markov à temps continu	17
2.1.1 Noyaux de transition et propriété de Markov	18
2.2 Processus markovien de sauts	19
2.2.1 Définition et exemples	20
2.3 Processus de naissance et de mort	21
2.3.1 Un exemple typique	21
2.3.2 Processus de naissance	22
2.3.3 Processus de mort	23
2.4 Temps de séjour dans les états de processus	24
2.5 Probabilités de transition et générateur de Markov	26
2.5.1 Générateur de Markov	28
2.5.1.1 Intensités de transitions	28
2.6 Théorème limite	32
2.6.1 Exemples	32
2.7 Probabilités de transition du mouvement brownien	34
2.7.1 Le semi-groupe du mouvement brownien	34
2.7.2 La propriété de Markov forte	35
2.8 Quelques notions fondamentales sur les processus de Markov	36

2.8.1	Lois de dimension finie d'un processus de Markov	36
2.9	Propriétés analytiques du semi-groupe brownien	38
2.9.1	Générateurs infinitésimal d'un semi-groupe de Feller	38
2.9.2	La résolvante du mouvement brownien	42
3	Quelques applications des processus Markoviens en temps continu	47
3.1	Le résultat classique d'Ito	47
3.1.1	Existence et unicité de solution	47
3.1.2	Définition	47
3.1.3	Théorème (Fonctionnelle sur l'espace de Wiener)	49
3.2	La propriété de Markov fort pour une EDS homogène	50
3.3	La propriétés Markovienne des solutions	53
3.4	Explosions	60
3.5	Convergence d'une chaîne de Markov vers une diffusion	61
3.6	Quelques exemples d'application des processus Markoviens en pratique	62
3.6.1	File d'attente en temps continu et processus d'Ornstein-Uhlenbeck	62
3.6.2	Modèles de croissance de populations	63
3.6.3	Les ARNm molécules(acide ribonucléique nucléaire messenger)	64
	Bibliographie	66

Introduction générale

Une chaîne de Markov à paramètre de temps discret est une séquence de variables aléatoires $X_0, X_1, X_2 \dots$ tous prenant des valeurs dans un ensemble dénombrable E les éléments qui sont appelés états, tels que pour tout n , la distribution de X_n dépend des X_m précédents uniquement via X_{n-1} . C'est probablement la forme de dépendance la plus simple que l'on puisse imposer à une séquence de variables aléatoires, une seule étape supprimée d'indépendance totale. Pourtant, la théorie qui a été développée au cours de ce siècle pour les chaînes de Markov est incroyablement riche. S'il y a une zone de processus stochastiques dont on pourrait dire qu'ils forment le cœur de cette discipline, sentimentalement et historiquement, ce sont les chaînes de Markov.

De plus, la littérature scientifique et d'ingénierie, et même financière et humaine, regorge d'exemples de processus aléatoires qui ont été modélisés, à des degrés divers du succès, par les chaînes de Markov.

Afin d'apporter un plus grand réalisme à une chaîne de Markov, nous incorporer un paramètre de temps continu t comme suit : on permet à la chaîne de s'attarder un laps de temps aléatoire T_i dans chaque état i qu'il visite. les variables aléatoires T_i sont distribuées de manière exponentielle et sont indépendantes les unes des autres. L'état de la chaîne de Markov au temps t est alors noté $X_{(t)}$.

La collection $\{X_{(t)}, t \geq 0\}$ est appelé une chaîne de Markov stable en temps continu, le sujet de ce mémoire. Cette définition simple est en fait d'une simplicité trompeuse ; il y a complications, et même ainsi, les matières les plus satisfaisantes et les plus élégantes des mathématiques proviennent généralement de débuts aussi simples que celui-ci.

La première étude systématique des chaînes de Markov en temps continu a été réalisée par A. N. Kolmogorov (1931)[19], qui a constaté que la loi de probabilité régissant l'évolution du processus se produit comme la solution de l'un ou l'autre de deux systèmes des équations différentielles, maintenant appelées équations de Kolmogorov rétrogrades. Ces études ont été poursuivies dans les années 1940 par J. L. Doob et W.Feller. En particulier, Feller (1940) a montré comment construire des solutions des Équations de Kolmogorov au moyen de l'intégrale rétrogrades de

récursions, et a montré l'existence de la solution minimale, qui porte son nom aujourd'hui. Doob (1945) a poursuivi l'étude de la régularité de la fonction de transition, et observé les propriétés d'asymétrie et de non-unicité des équations de rétrogrades. Les années cinquante ont vu un grand accord d'activité en Grande-Bretagne et aux États-Unis, avec D. G. Kendall et G.E. H. Reuter jouant un rôle de premier plan en Grande-Bretagne, et Doob, Feller, Samuel Karlin, et K. L. Chung aux États-Unis. Les types de problèmes qui se sont posés pendant ce temps concernant le comportement aux limites et la régularité des trajectoires des chaînes de Markov en temps continu ont grandement influencé la direction que tout le domaine des processus stochastiques a pris au cours des trente dernières années.

La fin des années 50 a marqué un peu un tournant pour les Chaînes de Markov en temps continu, avec deux branches émergentes : une école théorique Doob et Chung, s'attaquant aux problèmes des chaînes de temps continu leurs trajectoires d'échantillonnage et en utilisant la théorie des mesures, les martingales et les temps d'arrêt comme leurs principaux outils ; et une école orientée vers l'application suivant Kendall, Reuter [21] et Karlin [20], étudiant les chaînes continues à travers la fonction de transition, enrichissant le domaine depuis trente ans avec des concepts tels que réversibilité, ergodicité et monotonie stochastique inspirées d'applications réelles des chaînes de temps continu à la théorie des files d'attente, la démographie et l'épidémiologie. Les deux écoles se sont répandues et ont prospéré au cours des trente dernières années.

Le mémoire est structuré comme suit :

En premier chapitre, je présente une synthèse des processus aléatoires (processus, filtration, martingale, mouvement Brownien, l'espérance conditionnelle, le processus de Poisson...).

En deuxième chapitre, je discute sur les processus stochastiques Markoviens en temps continu dans les deux états discret et continu : leurs probabilités de transitions, générateur de Markov et la loi de processus de Markov.

Dans le chapitre trois , j'étudie la propriété Markovienne des solutions des équations différentielles stochastiques et je cite quelques exemples d'application des processus Markoviens en pratique.

Et je termine par une conclusion.

Chapitre 1

Quelques généralités sur les processus aléatoires

Dans ce chapitre j'énonce quelques termes sur les processus aléatoires.

1.1 Filtration et processus

Définition 1.1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité. Une filtration sur cet espace est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ de sous-tribus de \mathcal{F} telle que pour $s \leq t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Proposition 1.1.1. 1. \mathcal{F}_t représente la quantité d'information disponible à l'instant t : il est logique que cette quantité augmente avec le temps.

2. L'ensemble \mathbb{T} appelé ensemble de temps (exemple, $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ou $[0, t]$ ou $\mathbb{N} \dots$)
3. On dira qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ satisfait les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète. i.e.
 - a) La filtration (\mathcal{F}_t) est complète lorsque tout \mathcal{F}_t contient l'ensemble des négligeables \mathcal{N} ce qui équivaut à \mathcal{F}_0 contient tous les \mathcal{P} -négligeables de \mathcal{F} .
 - b) (\mathcal{F}_t) est continue à droite ; c'est-à-dire $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. $\forall t \geq 0$
4. Si \mathcal{F}_t est complète à t fixé, on a

$$X_t = Y_t \text{ p.s.} \Rightarrow \{X_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \Leftrightarrow Y_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \}$$

$$\{X_t \xrightarrow{\text{p.s.}} X_t \text{ et } \forall n, X_t^n \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \} \Rightarrow \{X_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \}$$

Le résultat reste vrai pour une convergence dans $L^p(\Omega)$ avec $p \geq 1$, car on peut alors extraire un sous suite qui converge p.s. vers la même limite et donc la limite reste une mesure [6].

5. Pour compléter une filtration (\mathcal{F}_t) , il suffit de remplacer \mathcal{F}_t par

$$\sigma(A \cup N, (N, A) \subset \mathcal{N} \times \mathcal{F}_t)$$

1.2 Processus aléatoires

Un processus stochastique est une famille $\{X_t\}_{t \in T}$ de variables aléatoires indexées par le temps t .

Les mots processus stochastique signifient fonction aléatoire. Alors qu'une variable aléatoire X associe à chaque $\omega \in \Omega$ une réalisation $X(\omega)$, un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$ associe à chaque ω une fonction (ou trajectoire) $\{X_t(\omega)\}_{t \in T}$:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow E \\ t &\mapsto X_t(\omega), \end{aligned}$$

E est l'espace d'arrivée des variables aléatoires X_t . A titre d'exemple, la trajectoire d'une mouche en fonction du temps peut être modélisée par un processus stochastique à valeurs dans $E = \mathbb{R}^3$. Lorsque l'ensemble des temps T est au plus dénombrable (par exemple $T = \mathbb{N}$), on parle de processus stochastiques à temps discret. Lorsqu'il est continu (i.e. $T = [0; t_0]$ ou $T = \mathbb{R}_+$), on parle de processus stochastiques à temps continu (permanent).

Définition 1.2.1. *On dit qu'un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.*

1.3 Temps d'arrêt

Définition 1.3.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t)$ sa tribu terminale. Une variable aléatoire τ définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ est appelée $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ -temps d'arrêt si pour tout $t \in \mathbb{T}$: $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On pose alors ,*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$$

On vérifie immédiatement que \mathcal{F}_τ est une tribu. C'est la tribu des événements antérieurs au temps τ .

Proposition 1.3.1. [7] *Soient v et τ deux temps d'arrêt. Alors*

1. τ est une variable aléatoire \mathcal{F}_τ mesurable.
2. Si $\tau = K$ (constant) alors τ est un temps d'arrêt.
3. $v \wedge \tau$, $v \vee \tau$, $\tau \wedge t$ sont des temps d'arrêt.
4. Si $v \leq \tau$ alors $\mathcal{F}_v \subset \mathcal{F}_\tau$.
5. $\mathcal{F}_{v \wedge \tau} = \mathcal{F}_v \cap \mathcal{F}_\tau$
6. $\mathcal{F}_{v \vee \tau} = \sigma\{\mathcal{F}_v, \mathcal{F}_\tau\}$
7. Si S_n est une suite croissante de temps d'arrêt $\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ est aussi un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{S-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n-}$

8. Si S_n est une suite décroissante de temps d'arrêt $\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ est aussi un temps d'arrêt de la filtration (\mathcal{F}_{t+}) et $\mathcal{F}_{S+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n+}$
9. Si S_n est une suite décroissante stationnaire de temps d'arrêt (ie. $\forall \omega, \exists N(\omega), \forall n \geq N(\omega), S_n(\omega) = S(\omega)$) $\Rightarrow S = \lim_n S_n$ est aussi un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $\mathcal{F}_S = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$

1.4 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . L'espérance conditionnelle est définie pour deux types de variables aléatoires : d'une part les variables aléatoires non-négatives (sans condition d'intégrabilité) et d'autre part les variables aléatoires intégrables [1].

Définition 1.4.1. L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X positive (resp. dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) relativement à \mathcal{G} est l'unique variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable positive (resp. dans $L^1(\Omega)$), notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, telle que pour tout $D \in \mathcal{G}$, on a

$$\int_D \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_D X d\mathbb{P} \quad (1.1)$$

Cette relation 1.1 s'appelle la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle. On notera que si $X \geq 0$,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow X \in L^1(\Omega)$$

.

Probabilité conditionnelle : Pour un événement $A \in \mathcal{F}$, la probabilité conditionnelle de A sachant \mathcal{G} est la variable aléatoire

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})$$

Propriétés de l'espérance conditionnelle : Si X, X_1, X_2 sont des variables aléatoires avec un moment d'ordre un et si a et b sont des constantes réelles, on a

1. $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ (linéarité).
2. Si $X_1 \leq X_2$ p.s $\Rightarrow \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ (croissance). En particulier

$$X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0 \text{ (positivité)}$$

.

3. $\sigma(X)$ et \mathcal{G} indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ p.s.
4. Pour toute sous tribu $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{D}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{D})$ p.s.
5. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires positives, on a

$$\mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf X_n|\mathcal{G}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{ (lemme de Fatou) .}$$

1.5 Martingales

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent. En probabilités, on appelle donc martingale un processus stochastique $(M_s)_{s \geq 0}$ tel que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s)$ est égale à M_s pour tout $t > s$. Les martingales, ainsi que leurs variantes les sous-martingales et les sur-martingales, jouissent de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles dans l'étude de processus stochastiques plus généraux.[6]

Définition 1.5.1. (Martingale, sous-martingale et sur-martingale)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus stochastique $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que

1. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;
2. $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$;
3. $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ pour tout $s \leq t$.

Si la dernière condition est remplacée par $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$ on dit que $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une sur-martingale, et si elle est remplacée par $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$ on dit que $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale.

Remarque 1.5.1. Une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale est un jeu perdant, et une sous-martingale est un jeu gagnant.

Exemple 1.1. On dit qu'un processus $(Z_t, t \geq 0)$ est un processus à accroissement indépendants (PAI) par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t) si Z est (\mathcal{F}_t) -adapté et si, pour $s < t$, $Z_t - Z_s$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_s (par exemple un mouvement brownien est un PAI par rapport à sa filtration canonique, complétée ou non). Si Z est un PAI par rapport à (\mathcal{F}_t) alors[6]

- (i) Si $Z_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$, $\tilde{Z}_t = Z_t - \mathbb{E}[Z_t]$ est une martingale ;
- (ii) Si $Z_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$, $X_t = \tilde{Z}_t^2 - \mathbb{E}[\tilde{Z}_t^2]$ est une martingale ;
- (iii) Si pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{\theta Z_t}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \frac{e^{\theta Z_t}}{\mathbb{E}[e^{\theta Z_t}]}$$

est une martingale.

1.6 Le mouvement Brownien

Définition 1.6.1. Un mouvement Brownien (ou processus de Wiener) est un processus $B = (B_t)_{t \geq 0}$ tel que :

1. $B_0 = 0$ p.s ;

2. $(B_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants pour tout $t > s$, $B_t - B_s$ est indépendant de $(B_u)_{u \leq s}$;
3. Les accroissements sont stationnaires (pour tout $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ ne dépend que de la valeur de $t - s$), Gaussiens ; tel que pour $t > s$, $B_t - B_s$ suit une loi normale $N(0, t - s)$.
4. B_t est continue, c'est à dire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour presque tout ω . Autrement dit, le processus B continu, part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Remarque 1.6.1. Le point 2 (dans la définition ci-dessus) implique que $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ les variables aléatoires $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes [1].

Exemple 1.2. Si B est un mouvement brownien. on peut prendre $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t), \mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s, s \geq 0)$. Plus généralement, si $X = (X_t, t \geq 0)$ est un processus indexé par \mathbb{R}_+ , la filtration canonique de X est $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ (l'augmentation habituelle de \mathcal{F}_t) [6].

Propriétés 1.6.0.1. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle, Alors :

– **Processus gaussien :**

Le processus B est un processus gaussien réel, centré et de fonction de covariance $\text{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$. La réciproque est vraie.

– **Propriété de Markov :**

La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisée sous la forme (un peu plus forte que la propriété de Markov) : pour tout s , le processus $(W_t)_{t \geq 0}$ défini par $W_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_s .

Proposition 1.6.0.1. Pour f borélienne bornée,

$$\mathbb{E}(f(B_u) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(B_u) | \sigma(B_t)) \quad \text{pour } u > t$$

.

1.7 Processus de Poisson

1.7.1 Trois propriétés de la loi exponentielle

La loi exponentielle est l'ingrédient de base pour modéliser des temps d'attente d'évènements "imprévisibles". Cette partie contient quelques-unes de ses propriétés élémentaires. Soit X une v.a suivant la loi exponentielle de paramètre λ , notée

$\exp(\lambda)$. Sa densité est :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

Elle est sans atome, ie. $\forall x, \mathbb{P}(X = x) = 0$. Sa fonction de répartition vaut

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{x \geq 0}, \quad (1.2)$$

En pratique, une v.a. de loi exponentielle représente une durée, typiquement le temps d'attente d'un évènement ou une durée de vie. La propriété importante des lois exponentielles est d'être "**sans mémoire**". Dans le cas particulier d'un composant électronique dont la durée de vie serait modélisée par une loi exponentielle, cela signifie que la probabilité pour que le composant vive un temps t est la même, qu'il soit neuf ou qu'il ait déjà vécu un temps s . Cette absence de mémoire est caractéristique des lois exponentielles.

Proposition 1.7.1. *Une v.a. X à valeurs dans \mathbb{R}_+ et de fonction de répartition continue suit une loi exponentielle si et seulement si pour tous réels $s, t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Démonstration : Si X suit la loi $\exp(\lambda)$ alors, d'après 1.2,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t). \end{aligned}$$

Proposition 1.7.2. [2] *Considérons n v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n de lois respectives $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)$. Posons $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Alors Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et pour tout indice $i = 1, \dots, n$,*

$$\mathbb{P}(Y = X_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

Proposition 1.7.3. [2] *La somme de n v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ suit une loi Gamma de paramètres n et λ et notée $\Gamma(n, \lambda)$, dont la densité est donnée par :*

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

1.8 Présentation du processus de Poisson

Définition 1.8.1. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a indépendantes et de même loi, exponentielle de paramètre λ . Posons $S_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, $S_n =$*

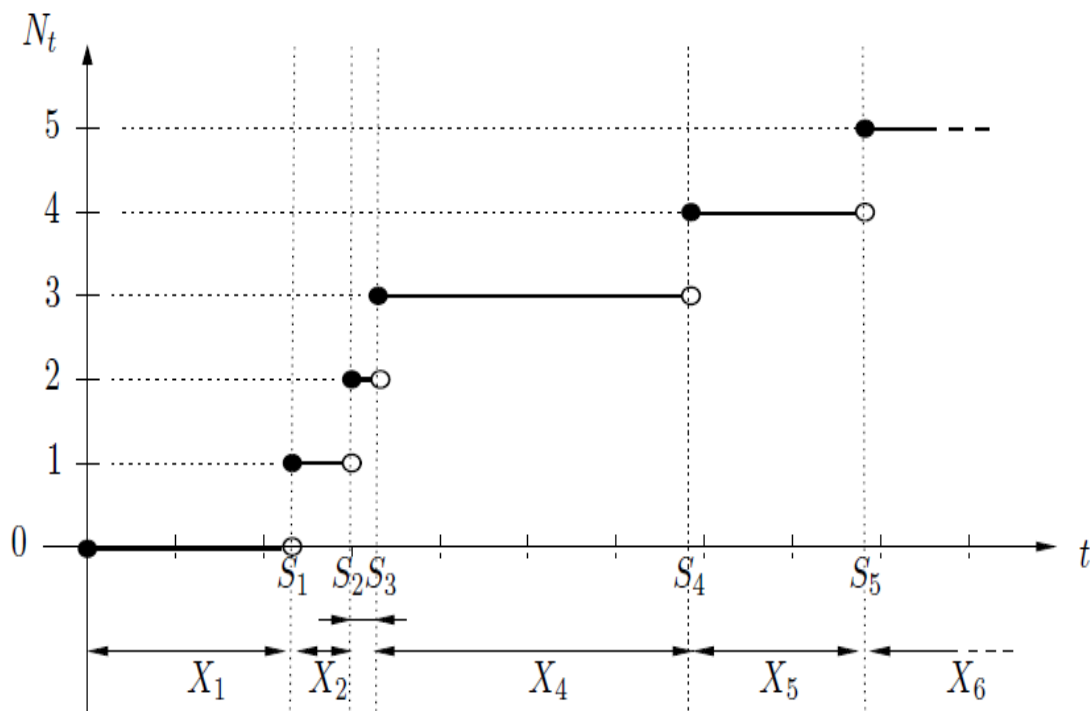
$X_1 + \dots + X_n$. Pour tout réel $t \geq 0$, définissons la v.a N_t , à valeurs entières, par :

$$N_t = n \Leftrightarrow S_n \leq t \leq S_{n+1}.$$

Le processus stochastique $(N_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus de Poisson d'intensité λ . Le processus de Poisson est un modèle de comptage d'évènements aléatoires isolés dans le temps, comme des "tops" d'horloge séparés par des durées aléatoires. Dans ce modèle :

- X_n est la durée séparant le $(n-1)^e$ top du n^e ;
- S_n est la date à laquelle survient le n^e top. D'après la Proposition 1.7.3 la v.a. S_n suit la loi Gamma de paramètre n et λ ;
- N_t est le nombre de tops comptés entre l'instant 0 et l'instant t :

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \leq t}$$



Théorème 1.8.1. [2] Le processus de Poisson $\{N_t\}$ d'intensité λ vérifie les propriétés suivantes :

- (P1) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de comptage ; il est à valeurs entières, vérifie $N_0 = 0$ p.s et pour tous réels $0 \leq s \leq t$, $N_s \leq N_t$
- (P2) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants ; pour tout entier k et pour toute suites d'instants $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$, les accroissements $N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sont des v.a indépendantes.

- (P3) Les accroissements du processus $\{N_t\}_{t \geq 0}$ sont Poissonniens ; pour tous réels $0 \leq s < t$, la v.a $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson de paramètres $\lambda(t - s)$;
- (P4) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ est un processus homogène ou à accroissements stationnaires ; pour tous instants $0 \leq t_1 < t_2$ et $s \geq 0$, la v.a $N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$ suit la même loi que $N_{t_2} - N_{t_1}$;
- (P5) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ est un processus d'évènements rares ; $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$.

Chapitre 2

Processus stochastiques Markoviens en temps continu

Dans ce chapitre, nous abordons une notion importante dans la théorie des processus stochastiques : les processus de Markov (sans mémoire) cela signifie que l'évolution future du processus ne dépend de son passé que par l'intermédiaire du présent. L'intérêt du choix Markovien réside dans la simplicité et la puissance des techniques mathématiques disponibles pour ce type de processus. C'est pour cela les processus de Markov trouvent des applications dans beaucoup de domaines par exemple, la biologie, la physique, la recherche opérationnelle et l'économie,...

Les processus de Markov portent le nom de leur inventeur mathématicien russe, Andreï Andreïevitch Markov(1856-1922). Après 1920, il a cherché à généraliser le théorème central limite de variables aléatoires indépendantes aux variables aléatoires dépendantes, il a amené à considérer la notion importante d'événements en chaînes, appelées depuis chaînes de Markov, et il établit une série de lois, fondement de la théorie des processus de Markov.

Dans ce qu'on a vu sur les chaînes de Markov, les moments (temps) t étaient discrets ($0,1,\dots$). Maintenant, nous allons analyser des situations où les observations se font de façon continue plutôt qu'à des moments discret.

$M + 1$ états mutuellement exclusifs : $0, 1, 2, \dots, M$

L'analyse débute au temps 0 et le temps t s'écoule de façon continue

$X_{(t)}$ = état du système au temps t : $X_{(t)} \in \{0, 1, \dots, M\}$

les points de changements d'états t_1, t_2, \dots sont des points aléatoires dans le temps (pas nécessairement entier).

Considérons trois points consécutifs dans le temps où il y a eu changement d'états :

r ($r \geq 0$) temps passé

s ($s > r$) temps courant (actuel)

$s + t$ ($t \geq 0$) t unité de temps dans le futur.

Supposons que $X_{(s)} = i$ et que $X_{(r)} = l$, avec $i, l \in \{0, \dots, M\}$

L'évaluation de

$$\mathbb{P}(X_{(s+t)} = j | X_{(s)} = i, X_{(r)} = l) \quad j = 0, \dots, M$$

est facilité par la propriété de Markov (i.e., sans mémoire).

Définition 2.1. *Un processus stochastique en temps continu $\{X_{(t)}\}_{t \geq 0}$ a la propriété de Markov si :*

$$\mathbb{P}(X_{(s+t)} = j | X_{(s)} = i, X_{(r)} = l) = \mathbb{P}(X_{(s+t)} = j | X_{(s)} = i)$$

$$\forall i, j, l \in \{0, \dots, M\}; \forall r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$$

Le processus stochastique est alors une chaîne de Markov en temps continu.

Les probabilités $\mathbb{P}(X_{(s+t)} = j | X_{(s)} = i)$ sont des probabilités de transition similaires à celles que nous avons en temps discret.

Les probabilités de transition sont stationnaires puisqu'elles sont indépendantes de s :

$$\mathbb{P}(X_{(s+t)} = j | X_{(s)} = i) = \mathbb{P}(X_{(t)} = j | X_{(0)} = i) \quad \forall s > 0$$

2.1 Les processus de Markov à temps continu

Un modèle d'évolution dynamique en temps continu dans lequel on fait dépendre l'évolution future de l'état présent et du hasard est un processus de Markov. On en rencontre dans de nombreux domaines d'applications, comme par exemple l'étude des files d'attente.

Un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace d'états (E, \mathcal{B}_E) est de Markov si pour tous $s < t (\in T)$ la loi de X_t sachant le passé jusqu'à l'instant s ne dépend que de X_s (i.e du passé le plus récent).

Dans le cas d'un processus de Markov à temps discret $T = \mathbb{N}$ et à espace d'états discret, ceci se traduit par la condition que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i, j, i_{n-1}, \dots, i_0 \in E$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

La quantité $P_{n,n+1}(i, j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$ est la probabilité de transition partant de i à l'instant n d'aller en j à l'instant $n + 1$.

Dans le cas où le temps est continu et(ou) l'espace des états est quelconque, la modélisation d'un processus de Markov est : si pour tous $s < t (\in T)$ et tout $A \in \mathcal{B}_E$ on a :

$$\mathbb{P}(X_t \in A / \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A / X_s)$$

Pour abréger on pose :

$$\mathbb{P}(X_t \in A / \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A / X_s) = P_{s,t}(x, A)$$

et on dit que c'est la probabilité de transition partant de x à l'instant s d'atteindre l'ensemble d'états A à l'instant t .

2.1.1 Noyaux de transition et propriété de Markov

Soit $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{R}_+ ou $[0, a](a > 0)$ et (E, \mathcal{B}_E) un espace polonais.

Définition 2.1.1. Une collection $\{P_{s,t}; s, t \in T \text{ et } s < t\}$ d'applications de $(E \times \mathcal{B}_E)$ dans $[0, 1]$ est appelée famille de noyaux de transition si :

1. $\forall A \in \mathcal{B}_E, \forall s < t$, l'application $x \rightarrow P_{s,t}(x, A)$ est mesurable.
2. $\forall x \in E, \forall s < t$, $A \rightarrow P_{s,t}(x, A)$ est une mesure de probabilité sur \mathcal{B}_E .
3. $\forall A \in \mathcal{B}_E, \forall s < t < u$, on a l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P_{s,u}(x, A) = \int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, A) \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.1. Les noyaux de transition $P_{s,t}$ agissent comme des opérateurs qui transforment une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée (ou positive) en une fonction $P_{s,t}f$ donné par :

$$P_{s,t}f(x) = \int_E f(y) P_{s,t}(x, dy) \quad (2.2)$$

$P_{s,t}f$ représente l'espérance de $f(X_t)$ sachant que $X_s = x$. De plus elle est aussi une fonction borélienne bornée.

Remarque 2.1.2. L'équation de Chapman-Kolmogorov 2.1 se traduit en termes d'opérateurs sous la forme :

$$P_{s,u} = P_{s,t} P_{t,u} \quad (2.3)$$

Définition 2.1.2. Un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ est un processus de Markov à valeurs dans E et de famille de noyaux de transition $\{P_{s,t}; s, t \in T \text{ et } s < t\}$ si pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée et tout $s < t$ dans T , on a :

$$\mathbb{E}(f(X_t)/\mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \quad \mathbb{P} - p.s \quad (2.4)$$

Les noyaux de transition $P_{s,t}$ sont aussi appelés probabilités de transition.

La loi de X_0 i.e. la mesure de probabilité ν sur \mathcal{B}_E définie par :

$$\nu(A) = \mathbb{P}(X_0 \in A),$$

est appelée loi initiale du processus X .

Remarque 2.1.3. Lorsque $P_{s,t} = P_{0,s-t}$ ne dépend que de la différence $t - s$, on dit que X est un processus de Markov homogène.

Proposition 2.1.1. [1]

a) L'équation (2.4) s'appelle la propriété de Markov si : $f = 1_A$ où $A \in \mathcal{B}_E$, elle signifie que

$$\mathbb{P}(X_t \in A/\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A/X_s)$$

b) Lorsque le processus de markov X est homogène, la famille des noyaux de transition ne dépend plus que d'un paramètre car pour tous s et u dans T , $P_{s,s+u} = P_{0,u}$. Pour simplifier les notations on pose $P_{0,u} = P_u$. On a alors :

$$\forall s \in T, \quad P_u(x, A) = \mathbb{P}(X_{s+u} \in A/X_s = x),$$

c) La propriété de Markov (2.4) prend la forme

$$\mathbb{E}(f(X_t)/\mathcal{F}_s) = P_{t-s}f(X_s), \quad \mathbb{P} - p.s \quad (2.5)$$

La propriété de Chapman-Kolmogorov (2.3), s'écrit alors :

$$\forall t, t' \in T, \quad P_t P_{t'} = P_{t+t'}.$$

La famille d'opérateurs $(P_t)_{t \in T}$ est le semi-groupe du processus de Markov homogène X .

2.2 Processus markovien de sauts

Les processus markoviens de sauts sont la généralisation des chaînes de markov au temps continu. Le passage du temps discret au temps continu se fait en remplaçant le pas de temps fixe d'une chaîne de Markov par des intervalles de temps aléatoires indépendants de loi exponentielle. Le processus de Poisson sera notre exemple de processus markovien de sauts.

2.2.1 Définition et exemples

Considérons un ensemble E fini ou dénombrable et une suite croissante de v.a. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Dans la suite $S_0 = 0$. Un processus de sauts $\{X_t\}_{t \geq 0}$ à espace d'états E et d'instants de sauts $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus stochastique dont la valeur ne peut changer qu'en ses instants de sauts :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! x \in E \text{ tel que } \forall t \in [S_n, S_{n+1}[, X_t = x.$$

Nous nous intéressons exclusivement à une classe particulière de processus de sauts, appelés processus markoviens de sauts. Ces processus évoluent de la manière suivante. Supposons que le processus se trouve à l'état x à l'issu du saut intervenant à l'instant S_n .

1. Le temps de séjour dans l'état x , à savoir la v.a. $S_{n+1} - S_n$, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(x)$. Le paramètre de cette loi peut dépendre de l'état x où le processus se trouve. mais à part cette dépendance en l'état x , la v.a. $S_{n+1} - S_n$ est indépendante du passé du processus.
2. À l'instant S_{n+1} , le processus saute de l'état x vers l'état y (avec $y \neq x$) avec une probabilité $q_{x,y}$, cette quantité indépendante de $S_{n+1} - S_n$ et du passé.

L'évolution du processus est donc déterminée par la suite $(\lambda(x))_{x \in E}$ et par la matrice $Q = (q_{x,y})_{x,y \in E}$.

Définition 2.2.1. *Un processus de sauts $\{X_t\}_{t \geq 0}$ à espace d'états E et d'instant de sauts $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est markovien s'il existe :*

- une suite bornée $(\lambda(x))_{x \in E}$ de réels strictement positifs.
- une matrice $Q = (q_{x,y})_{x,y \in E}$ de réels positifs vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in E, q_{x,x} = 0 & \text{et} \\ \sum_{y \in E} q_{x,y} = 1. \end{cases}$$

telles que, pour tout entier n , pour tous états $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ et pour tous réels positifs $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$:

$$\mathbb{P}(X_{S_{n+1}} = x_{n+1}, S_{n+1} - S_n > t_{n+1} | X_{S_n} = x_n, S_n - S_{n-1} > t_n, \dots, X_{S_1} = x_1, S_1 > t_1, X_0 = x_0)$$

$$= \mathbb{P}(X_{S_{n+1}} = x_{n+1}, S_{n+1} - S_n > t_{n+1} | X_{S_n} = x_n) \quad (2.6)$$

$$= e^{-\lambda(x_n)t_{n+1}} q_{x_n, x_{n+1}}. \quad (2.7)$$

Exemple 2.1. (Processus de Poisson) :

Le processus de Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ (d'intensité λ) est un processus de sauts à espace d'états $E = \mathbb{N}$: il vaut n sur tout l'intervalle de temps $[S_n, S_{n+1}[$. De plus, tous les temps de séjour suivent la loi exponentielle de paramètre λ et depuis l'état n (qu'il atteint à l'issue du n^e saut), il saute en $n + 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda(n) = \lambda \text{ et } q_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le processus de Poisson remplit aisément la définition d'un processus markovien de sauts. L'équation 2.6 repose sur l'indépendance des temps de séjour $S_1, S_2 - S_1, \dots, S_{n+1} - S_n$ et sur le fait que N_{S_n} soit toujours à égale à n . Ce n'est pas plus difficile pour 2.7 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{S_{n+1}} = n+1, S_{n+1} - S_n > t_{n+1} | N_{S_n=n}) &= \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n > t_{n+1}) \\ &= e^{-\lambda t_{n+1}} \\ &= e^{-\lambda t_{n+1}} q_{n,n+1}. \end{aligned}$$

Exemple 2.2. Automate binaire :

Considérons une machine qui peut être soit en état de marche, soit en panne. Notons X_t la v.a. égale à 0 si la machine est en panne à l'instant t et égale à 1 si elle est en état de marche à l'instant t . Nous faisons l'hypothèse que les temps de fonctionnement de cette machine sont des v.a. de loi exponentielle de paramètre λ et que les temps de réparation sont des v.a. de loi exponentielle de paramètre μ . Nous supposons également toutes ces v.a. indépendantes.

Alors, le processus $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est un processus markovien de sauts à valeurs dans $E = \{0, 1\}$. Les paramètres qui interviennent sont

$$\lambda(0) = \mu, \lambda(1) = \lambda \text{ et } q_{0,1} = q_{1,0} = 1.$$

2.3 Processus de naissance et de mort

Processus de Poisson dans ce qui est précédant est un exemple de processus stochastique à temps continu d'espace d'états discrets a la propriété de Markov. Maintenant, nous discutons de la structure probabiliste et certains aspects informatiques de ces processus en mettant l'accent sur Chaînes de naissance et de mort.

2.3.1 Un exemple typique

[3] Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité λ . la propriété de ses incréments indépendants implique ce qui suit : Pour tous points de temps $0 \leq s_1 < \dots < s_n < s < t$ et i_1, \dots, i_n, i, j dans un espace d'état $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ comme

$i_1 \leq \dots \leq i_n \leq i \leq j$, on a :

$$\mathbb{P}(N_t = j | N_{s_1} = i_1, \dots, N_{s_n} = i_n, N_s = i) = \mathbb{P}(N_t = j | N_s = i).$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N_t = j | N_{s_1} = i_1, \dots, N_{s_n} = i_n, N_s = i) \\ &= \mathbb{P}(N_{s_1} = i_1, \dots, N_{s_n} = i_n, N_s = i, N_t = j) / \mathbb{P}(N_{s_1} = i_1, \dots, N_s = i) \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_{s_1} = i_1, N_{s_2} - N_{s_1} = i_2 - i_1, \dots, N_t - N_s = j - i)}{\mathbb{P}(N_{s_1} = i_1, N_{s_2} - N_{s_1} = i_2 - i_1, \dots, N_s - N_{s_n} = i - i_n)} \\ &= \mathbb{P}(N_t - N_s = j - i) = \mathbb{P}(N_t = j | N_s = i) \end{aligned}$$

En outre,

$$\mathbb{P}(N_t = j | N_s = i) = \begin{cases} e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } i \leq j; \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

De sorte que, pour i, j fixée, la quantité

$$P_{ij}(s, t) = \mathbb{P}(N_t = j | N_s = i)$$

ne dépend que de $t - s$. Il suffit de laisser

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(N_{s+t} = j | N_s = i), \text{ pour } s, t \geq 0, i < j.$$

On remarque que le processus de Poisson d'intensité λ est non décroissante, car $s < t \Rightarrow N_s \leq N_t$.

Si nous interprétons une occurrence de l'évènement de intérêt comme une "naissance", puis un processus de Poisson est appelé un processus de naissance. La naissance augmente la taille de la population d'une unité. Nous voyons que les probabilités de transition infinitésimales sont

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1 | N_t = i) = \lambda h + o(h), \text{ comme } h \searrow 0.$$

Le point est le suivant. L'intensité λ ne dépend pas de i . Cependant, l'étude de la croissance démographique, le taux de natalité pourrait dépendre de la population i au temps t . Les modèles stochastiques pour de telles situations sont donnés comme suit.

2.3.2 Processus de naissance

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus stochastique avec espace d'états $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. (X_t) est appelé processus de naissance s'il s'agit d'un processus non décroissant chaîne de Markov telle que :

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0 | X_t = i) = 1 - \lambda_i h + o(h) \quad (2.8)$$

et

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1 | X_t = i) = \lambda_i h + o(h). \quad (2.9)$$

Les nombres positifs $\lambda_i, i \in S$ sont appelés taux de natalité du processus.[3]

Remarque 2.3.1. (i) λ_i est interprété comme le taux de natalité dans un instant auquel la taille de la population est i .

(ii) Un processus de Poisson est un processus de naissance avec $\lambda_i = \lambda$, pour tout $i \in S$.

(iii) 2.8 et 2.9 implique que

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 2 | X_t = i) = o(h) \text{ comme } h \searrow 0.$$

Ainsi, dans un court intervalle de temps, au plus une naissance peut survenir.

(iv) la connaissance du λ_i est suffisante pour la spécification des $\mathbb{P}(t)$, qui à leur tour, ensemble avec une distribution initiale π_0 , elle détermine la distribution de la chaîne.

Exemple 2.3. [3] Considérons une population, disant en biologie ou en physique, dans laquelle aucun individu ne peut mourir et chaque individu agit indépendamment lors de l'accouchement à un nouvel individu avec une probabilité $\lambda h + o(h)$ pendant $(t, t+h)$. Soit X_t agissait la taille de la population au temps t . Étant donné que $X_t = i$, le nombre de naissances pendant $(t, t+h)$, pour les petits h , suit une distribution binomiale $B(i, \lambda h)$, de sorte que

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = k | X_t = i) = \binom{i}{k} (\lambda h)^k (1 - \lambda h)^{i-k} + o(h).$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0 | X_t = i) = 1 - (i\lambda)h + o(h)$$

et

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1 | X_t = i) = (i\lambda)h + o(h).$$

Ainsi $\lambda_i = i\lambda$. Cette chaîne de Markov est appelée un processus de naissance linéaire (processus de Yule).

2.3.3 Processus de mort

Définition 2.3.1. Soit $(X_t, t \geq 0)$ une chaîne de Markov. (X_t) est appelée un processus de naissance et de mort si, comme $h \searrow 0$,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = k | X_t = i) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h), & \text{si } k = 1; \\ \mu_i h + o(h), & \text{si } k = -1; \\ o(h), & \text{si } |k| > 1. \end{cases}$$

$$(\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0 | X_t = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h).)$$

Les λ_i et μ_i sont appelés respectivement les taux de natalité et de mortalité.

Remarque 2.3.2. On suppose que les naissances et les décès surviennent indépendamment les uns des autres. Bien sûr, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$ avec $\mu_0 = 0$. Nous allons discuter du problème de modéliser un processus de naissance et de mort avec λ_i et μ_i donnés plus tard. Si $\mu_0 = 0$.

Pour tout $i \geq 0$, alors la chaîne est appelée chaîne de naissance ;

Si λ_i pour tout $i \geq 0$, alors la chaîne est appelée chaîne de la mort. [3]

Exemple 2.4. Considérons la population dans laquelle les individus ne se reproduisent pas. Le taux de mortalité par individu est de μ . De plus, supposons que de nouveaux individus immigreront dans la population selon un processus de Poisson avec intensité λ . Soit X_t la taille de la population au temps t . Puis comme $h \searrow 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1 | X_t = i) = \mathbb{P}(\text{une arrivée, pas de décès}) + o(h)$$

$$\lambda h (1 - \mu h)^i + o(h) = \lambda h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = -1 | X_t = i) = \mathbb{P}(\text{pas d'arrivée, une décès}) + o(h)$$

$$(1 - \lambda h) i (\mu h) (1 - \mu h)^{i-1} + o(h) = (i\mu)h + o(h).$$

$$(\mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq 2 | X_t = i) = o(h)). \text{ Ainsi } \lambda_i = \lambda \text{ et } \mu_i = i\mu.$$

2.4 Temps de séjour dans les états de processus

Jusqu'à présent, le fait a été utilisé que des temps indépendants, répartis de façon exponentielle entre les changements d'état du système permettent de modéliser le comportement du système par Chaînes de Markov. Inversement, on peut montrer que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ le séjour de temps Y_i d'une chaîne de Markov homogène $X_{(t)}$, $t \geq 0$ dans l'état i a également une exponentielle distribution : Par les propriétés d'une chaîne de Markov homogène,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_i > t | X_0 = i) &= \mathbb{P}(X_{(s)} = i, 0 < s \leq t | X_0 = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(X\left(\frac{k}{n}t\right) = i; k = 1, 2, \dots, n \mid X_0 = i\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_{ii}\left(\frac{1}{n}t\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - q_i \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y_i > t | X_0 = i) = e^{-q_i t}, t \geq 0, \quad (2.10)$$

puisque e peut être représenté par la limite

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (2.11)$$

Ainsi, Y_i a la distribution exponentielle avec le paramètre q_i .

Étant donné que $X_0 = i$, $X(Y_i) = X(Y_i + 0)$ est l'état auquel la chaîne de Markov fait une transition à la sortie de l'état i . Soit $m(nt)$ le plus grand entier m satisfaisant à l'inégalité $m/n \leq t$ ou, de manière équivalente.

$$nt - 1 < m(nt) \leq nt$$

En utilisant la série géométrique, la distribution de probabilité conjointe de le vecteur aléatoire $(Y_i, X_{(Y_i)}), i \neq j$, peut être obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X(Y_i) = j, Y_i > t | X(0) = i) \\ &= \mathbb{P}(X(Y_i) = j, X(s) = i, 0 < s \leq t | X(0) = i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=m(nt)}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left(X\left(\frac{m+1}{n}\right) = j, Y_i \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]\right) \middle| X(0) = i\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=m(nt)}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left(X\left(\frac{m+1}{n}\right) = j, X\left(\frac{k}{n}\right) = i, 1 \leq k \leq m\right) \middle| X(0) = i\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=m(nt)}^{\infty} \left[q_{ij} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \left[1 - q_i \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[q_{ij} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{q_i \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \left[1 - q_i \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{m(nt)} \end{aligned}$$

avec 2.11 ,

$$\mathbb{P}(X(Y_i) = j, Y_i > t | X(0) = i) = \frac{q_{ij}}{q_i} e^{-q_i t}; i \neq j; i, j \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

En passant à la distribution marginale de Y_i (c'est-à-dire sommer les équations 2.12 avec $j \in \mathbb{Z}$) vérifie 2.10. Deux autres conclusions importantes sont :

1. La formule 2.12 donne la probabilité de transition $t = 0$ en une étape de l'état i vers état j :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X(Y_i + 0) = j | X(0) = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

2. L'état suivant l'état i est indépendant de Y_i (et, bien sûr, indépendant du histoire de la chaîne de Markov avant d'arriver à l'état i). La connaissance des probabilités de transition p_{ij} suggère d'observer un temps continu Chaîne de Markov $\{X(t), t \geq 0\}$ uniquement aux moments discrets où les changements d'état prend place. Soit X_n l'état de la chaîne de Markov immédiatement après le n ème changement d'état et $X_0 = X(0)$. Alors $\{X_0, X_1, \dots\}$ est un chaîne de Markov homogène en temps discret avec probabilités de transition données par 2.13 :

$$p_{ij} = P(X(Y_i + 0) = j | X(0) = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad i, j \in \mathbb{Z}; n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

En ce sens, la chaîne de Markov à temps discret $\{X_0, X_1, \dots\}$ est intégrée dans la chaîne de Markov à temps continu $\{X(t), t \geq 0\}$. Les chaînes de Markov intégrées peuvent également être trouvés dans les processus non-Markov. Dans ces cas, ils peuvent faciliter l'enquête des processus non-Markoviens. En fait, les chaînes de Markov à temps discret, qui sont intégrées dans les processus stochastiques arbitraires à temps continu, sont souvent un moyen efficace (si pas le seul) outil d'analyse de ces processus.

Exemples d'applications de la La méthode des chaînes de Markov intégrées pour analyser les systèmes de files d'attente.[4]

2.5 Probabilités de transition et générateur de Markov

Le résultat suivant est l'analogue de la propriété de Markov et de l'homogénéité en temps qui définissent habituellement les chaînes de Markov. Comme dans le cas discret, cela conduit à une caractérisation simple de la loi du processus.

Proposition 2.5.1. *Un processus markovien de sauts $\{X_t\}_{t \geq 0}$ à espace d'états E satisfait les deux égalités suivantes : pour tout entier n , pour tous états $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ et pour toute suite croissante de réels positifs $0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$*

$$\begin{aligned} P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1, X_0 = x_0) &= P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n) \\ &= P(X_{t_{n+1}-t_n} = x_{n+1} | X_0 = x_n). \end{aligned}$$

Dés lors, la probabilité conditionnelle $P(X_t = y | X_s = x)$ ne dépend que des états x, y et de l'accroissement $t - s$, ce qui justifie la notation suivante.

Pour tout réel positif t et pour tous états x, y , la probabilité de transition de x vers y sur un intervalle (de temps) de longueur t est définie par :

$$p_{x,y}^{(t)} = P(X_t = y | X_0 = x)$$

La matrice $P^{(t)} = (p_{x,y}^{(t)})_{x,y \in E}$ est appelée matrice de transition sur un intervalle (de temps) de longueur t et ne précise pas le nombre de sauts pour aller de l'état x à l'instant 0 à l'état y à l'instant t . Comme dans le cas discret, la taille de la matrice $P^{(t)}$ dépend du cardinal de E (éventuellement infini), ses coefficients sont des réels positifs et la somme de ces coefficients sur toute une ligne vaut 1.

Comme dans le cas discret, la loi μ_t de la v.a. X_t est obtenue par produit matriciel entre la loi initiale μ_0 (i.e. celle de X_0) et la matrice de transition $P^{(t)}$:

$$\mu_t = \mu_0 P^{(t)}$$

Proposition 2.5.2. Les deux propositions suivantes fournissent deux autres points communs entre processus markoviens à temps discret et à temps continue. Par la donnée de la famille de matrices $\{P^{(t)}\}_{t \geq 0}$ et de loi de X_0 suffit à caractériser la loi d'un processus markovien de sauts :

- i) Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus markovien de sauts de matrices de transitions $\{P^{(t)}\}_{t \geq 0}$. Pour tout entier n , pour tous états x_0, x_1, \dots, x_n et pour toute suite croissante de réels positifs $0 < t_1 < \dots < t_n$ on a :

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) p_{x_0, x_1}^{(t_1)} p_{x_1, x_2}^{(t_2 - t_1)} \dots p_{x_{n-1}, x_n}^{(t_n - t_{n-1})}$$

- ii) Soient $s, t \geq 0$. Alors

$$(\text{relation de Chapman-Kolmogorov}) \quad P^{(t+s)} = P^{(t)} P^{(s)}.$$

Ou encore,

$$p_{x,y}^{(t+s)} = \sum_{z \in E} p_{x,z}^{(t)} p_{z,y}^{(s)}.$$

Démonstration. Écrivons pour commencer

$$\begin{aligned} p_{x,y}^{(t+s)} &= \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y, X_t = z | X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y, X_t = z | X_0 = x) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_t = z | X_0 = x) \end{aligned}$$

en multipliant au numérateur et au dénominateur par la facteur $\mathbb{P}(X_t = z | X_0 = x)$. La démonstration s'achève en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_t = z, X_0 = x) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_t = z) \\ &= \mathbb{P}(X_s = y | X_0 = z) \\ &= p_{z,y}^{(s)} \end{aligned}$$

□

Les similitudes entre les cas discret et continu s'arrêtent ici. En effet, les probabilités de transition $p_{x,y}^{(t)}$ sont en général très difficile à calculer, du fait de leur dépendance en le temps. Cependant, la relation $P^{(t+s)} = P^{(t)}P^{(s)}$ implique que toute la dynamique de la chaîne est contenue dans $P^{(\epsilon)}$ avec $\epsilon > 0$ petit. En effet, pour tout n , il vient $P^{(n\epsilon)} = (P^{(\epsilon)})^n$. Sont alors connues les matrices de transition $P^{(t)}$ pour $t = \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \dots$. Autrement dit, il s'agit de comprendre comment varie l'application $t \mapsto P^{(t)}$ sur l'intervalle de temps infinitésimal $[0; \epsilon]$. Cette idée motive l'introduction du générateur du processus.

Auparavant remarquons que, puisque le processus markovien de sauts $\{X_t\}_{t \geq 0}$ issu de l'état x, y demeure jusqu'au premier saut S_1 , il vient

$$p_{x,y}^{(0)} := \lim_{t \rightarrow 0^+} p_{x,y}^{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

2.5.1 Générateur de Markov

2.5.1.1 Intensités de transitions

Les intensités de transitions q_x jouent un rôle pour les chaînes de Markov en temps continue analogue aux probabilité de transition dans le cas des chaînes de Markov discrète :

$$q_x = -\frac{d}{dt}p_{x,x}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-p_{x,x}(t)}{t} \quad \forall x \in \{0, \dots, M\}$$

$$q_{x,y} = \frac{d}{dt}p_{x,y}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{x,y}(t)}{t} = q_x p_{x,y} \quad \forall x, y \in \{0, \dots, M\}; x \neq y$$

Où $p_{x,y}(t)$ est la fonction de la probabilité de transition en temps continu et $p_{x,y}$ est décrit à sous forme :

Par symétrie avec le cas discret

$$p_{x,y}(t) = P(X(t) = y | X(0) = x)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{x,y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quand le processus quitte l'état x , il passe à l'état y avec une probabilité de $p_{x,y}$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$p_{x,x} = 0 \quad \forall x \in \{0, \dots, M\}, \sum_{y=0}^M p_{x,y} = 1 \quad \forall x \in \{0, \dots, M\}$$

En particulier :

- a) q_x = taux de transition à partir de $x = \frac{1}{E[T_x]}$
 où $E[T_x]$ est la moyenne du temps passé à chaque visite dans l'état x .

b) $q_{x,y}$ = taux de transition de x vers y

c'est le nombre moyen de fois que le processus passe de x à y par unité de temps passé dans l'état x .

Il s'ensuit que

$$q_x = \sum_{\substack{y=0 \\ x \neq y}}^M q_{x,y}$$

Par analogie avec q_x , $q_{x,y}$ est le paramètre de la distribution exponentielle de la variable aléatoire définie comme suit :

Chaque fois que le processus atteint x , le temps passé dans x avant une transition vers y (cette transition étant la première) est une variable aléatoire

$$T_{x,y} \quad \forall x, y \in \{0, \dots, M\}; x \neq y$$

Les variables $T_{x,y}$ sont indépendantes, exponentielle avec paramètres $q_{x,y}$ dont les moyennes

$$E[T_{x,y}] = \frac{1}{q_{x,y}}$$

Théorème 2.5.1. Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus markovien de sauts associé à la suite $(\lambda(x))_{x \in E}$ et à la matrice $Q = (q_{x,y})_{x,y \in E}$ soient $x, y \in E$, l'application $t \mapsto P_{x,y}^{(t)}$ est dérivable à droite en $t = 0$ et cette dérivée vaut :

$$a_{x,y} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_{x,y}^{(t)} - P_{x,y}^{(0)}}{t} = \begin{cases} \lambda(x)q_{x,y} & \text{si } x \neq y \\ -\lambda(x) & \text{si } x = y \end{cases}. \quad (2.15)$$

Lorsque les états x et y sont distincts, cette dérivée est appelée taux de transition de x vers y . La matrice $A = (a_{x,y})_{x,y \in E}$ est appelée générateur de Markov du processus $\{X_t\}_{t \geq 0}$

Soient x et y des états distincts. La probabilité $q_{x,y}$ d'aller en y lorsqu'on quitte x doit être pondérée par l'intensité $\lambda(x)$ avec laquelle on quitte x , pour obtenir le taux de transition $a_{x,y}$; $a_{x,y} = \lambda(x)q_{x,y}$.

Par exemple, si le temps passé en x est en moyenne plutôt long (disons $\lambda(x)^{-1} = 100$) alors le taux de transition de x vers y sera faible, i.e. $a_{x,y} \leq 0.01$, et ce même si lorsqu'on quitte x c'est pour aller systématiquement en y ($q_{x,y} = 1$).

Démonstration. Seul le cas où $x = y$ est traité : cela suffit à comprendre la trame du Théorème (2.5.1) Étant en x au temps 0, supposons que le processus y soit de nouveau au temps t . Il y a deux possibilités.

Soit le processus n'a pas quitté l'état x , ce qui signifie que le premier instant de saut S_1 survient après t .

Soit le processus a quitté l'état x et y est revenu, ce qui implique au moins deux sauts avant l'instant t .

$$\mathbb{P}(X_t = x | X_0 = x) = \mathbb{P}(S_1 > t = x | X_0 = x) + \mathbb{P}(S_1 \leq t, S_2 \leq t, X_t = x | X_0 = x) \quad (2.16)$$

Sachant $X_0 = x$, l'instant du premier saut S_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(x)$. Le premier terme du membre de droite de (2.16) devient

$$\mathbb{P}(S_1 > t = x | X_0 = x) = e^{-\lambda(x)t} = 1 - \lambda(x)t + o(t)$$

lorsque t tend vers 0. Si le second terme du membre de droite de (2.16) est un $o(t)$ alors $\mathbb{P}(S_1 > t = x | X_0 = x)$ vaut également $1 - \lambda(x)t + o(t)$. D'où la limite recherchée :

$$\frac{\mathbb{P}(X_t = x | X_0 = x) - 1}{t} = -\lambda(x) + o(1)$$

Nous savons ce qu'il reste à faire. Le fait que les deux premiers sauts du processus $\{X_t\}_{t \geq 0}$ surviennent à des instants très proches de 0 est improbable. C'est la raison pour laquelle $\mathbb{P}(S_1 \leq t, S_2 \leq t, X_t = x | X_0 = x)$ est un $o(t)$. Formellement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 \leq t, S_2 \leq t, X_t = x | X_0 = x) &\leq \mathbb{P}(S_1 \leq t, S_2 \leq t | X_0 = x) \\ &\leq \mathbb{P}(S_1 \leq t, S_2 - S_1 \leq t | X_0 = x) \\ &\leq \sum_{z \in E} \mathbb{P}(S_1 \leq t, X_{S_1} = z, S_2 - S_1 \leq t | X_0 = x) \end{aligned}$$

Soit $z \in E$. Par définition du processus markovien de sauts, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 \leq t, X_{S_1} = z, S_2 - S_1 \leq t | X_0 = x) &= \mathbb{P}(X_{S_1} = z, S_2 - S_1 \leq t | S_1 \leq t, X_0 = x) \\ &\quad \times \mathbb{P}(S_1 \leq t | X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(X_{S_1} = z, S_2 - S_1 \leq t | S_1 \leq t)(1 - e^{-\lambda(x)t}) \\ &= (1 - e^{-\lambda(z)t})_{q_{x,z}}(1 - e^{-\lambda(x)t}) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $e^{-u} \geq 1 - u$ et le fait que la suite $(\lambda(z))_{z \in E}$ soit bornée, disons par une constante $M > 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 \leq t, S_2 \leq t, X_t = x | X_0 = x) &\leq \sum_{z \in E} \mathbb{P}(S_1 \leq t, X_{S_1} = z, S_2 - S_1 \leq t | X_0 = x) \\ &\leq \sum_{z \in E} (1 - e^{-\lambda(z)t})_{q_{x,z}}(1 - e^{-\lambda(x)t}) \\ &\leq \sum_{z \in E} \lambda(z)q_{x,z}\lambda(x)t^2 \\ &\leq M\lambda(x)t^2 \sum_{z \in E} q_{x,z} \\ &\leq M\lambda(x)t^2 = o(t) \end{aligned}$$

□

Le générateur de Markov $A = (a_{x,y})_{x,y \in E}$ est entièrement déterminé par la suite $(\lambda(x))_{x \in E}$ et la matrice $Q = (q_{x,y})_{x,y \in E}$ définissant le processus markovien de sauts.

C'est une matrice carrée à coefficients réels positifs excepté sur la diagonale. Le terme d'ordre x de la diagonale vérifie

$$a_{x,x} = -\lambda(x) = -\lambda(x) \sum_{y, y \neq x} q_{x,y} = - \sum_{y, y \neq x} a_{x,y}.$$

La somme des coefficients d'une même ligne de la matrice A vaut donc 0.

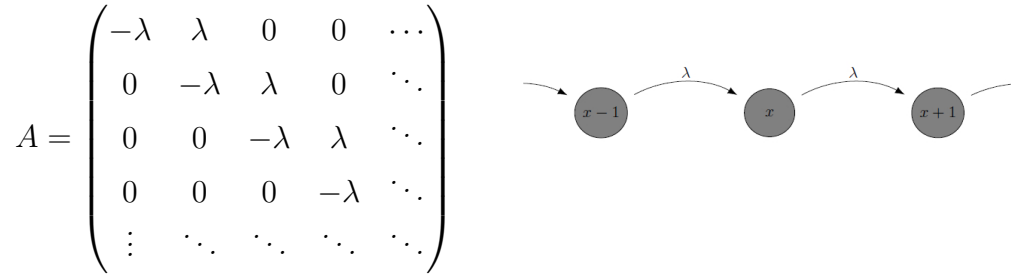
Dans les applications, un modèle markovien continu est défini par ses taux de transition $a_{x,y}$ qui ont en général une signification concrète (nombres moyens d'arrivées, de services, de pannes ou de réparations par unité de temps). De plus, l'intérêt du générateur par rapport aux matrices de transition $\{P^{(t)}\}_{t \geq 0}$ est que celui-ci ne dépend plus du temps : c'est une dérivée (à droite) en $t = 0$. Ainsi, on résume souvent l'information qu'il contient par un graphe de transition. C'est un graphe orienté et pondéré dont l'ensemble des sommets est E . Une arête de poids $a_{x,y}$ va de x vers $y \neq x$ si $a_{x,y} > 0$.

Exemple 2.5. :

• **Processus de Poisson.** Pour tout entier x , $\lambda(x)$ est égal à λ et $q_{x,x+1}$ égal à 1. Dès lors, le taux de transition de x vers $x+1$ vaut

$$a_{x,x+1} = \lambda(x)q_{x,x+1} = \lambda.$$

Il est nul vers tout autre entier y : pour tout $y \in \mathbb{N} \setminus \{x, x+1\}$, $a_{x,y} = 0$. Enfin, le coefficient $a_{x,x}$ vaut $-\lambda$.



• **Automate binaire.** La v.a. X_t est égale à 0 ou 1 selon que la machine soit en état de panne ou de marche à l'instant t . Rappelons que les temps de fonctionnement de cette machine sont des v.a. de loi exponentielle de paramètre λ et que les temps de réparation sont des v.a. de loi exponentielle de paramètre μ , toutes ces v.a. étant indépendantes. D'après la Proposition (2.5.1), le taux de transition de l'état de panne vers l'état de fonctionnement est

$$a_{0,1} = \lambda(0)q_{0,1} = \mu$$

tandis le taux de transition de l'état de fonctionnement vers l'état de panne est

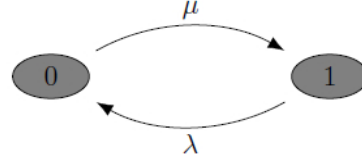
$$a_{1,0} = \lambda(1)q_{1,0} = \lambda.$$

Enfin, les coefficients $a_{0,0}$ et $a_{1,1}$ valent respectivement $-\mu$ et $-\lambda$.

2.6 Théorème limite

Comme dans le cas discret, l'étude du comportement asymptotique d'un processus markovien de sauts passe par l'identification d'une mesure stationnaire sur l'espace d'états E .

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$



Définition 2.6.1. Une mesure stationnaire (ou invariante) d'un processus markovien de sauts de matrices de transition $\{P^{(t)}\}_{t \leq 0}$ est une loi de probabilité sur E , disons $\pi = (\pi(x))_{x \in E}$ vérifiant pour tout t la relation $\pi = \pi P^{(t)}$.

Rappelons que la loi μ_t de la v.a. X_t vérifie $\mu_t = \mu_0 P^{(t)}$. Dès lors, la relation $\pi = \pi P^{(t)}$ s'interprète comme suit : si la v.a. initiale X_0 a pour loi la mesure stationnaire π alors, pour tout temps t , la loi de X_t est encore π .

La relation matricielle $\pi = \pi P^{(t)}$ est équivalente au système linéaire

$$\forall y \in E, \sum_{x \in E} \pi(x) P_{x,y}^{(t)} = \pi(y)$$

(de taille égale au cardinal de E).

Les matrices de transition $\{P^{(t)}\}_{t \leq 0}$ étant en général inaccessibles, nous privilégierons la caractérisation des mesures stationnaires en termes de générateur.

Proposition 2.6.1. [2] Une loi de probabilité π sur E est une mesure stationnaire d'un processus markovien de sauts de générateur A si et seulement si $\pi A = 0$, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in E, \sum_{x \in E} \pi(x) a_{x,y} = 0 \quad (2.17)$$

2.6.1 Exemples

:

• **Processus de Poisson.** Pour tout entier x , le taux de transition $a_{x,y}$ vaut λ si et seulement si $y = x + 1$. Il est nul vers tout autre entier y . Les équations de stationnarité (2.17) donnent :

$$\begin{cases} -\lambda \pi(x) = 0 \\ \lambda \pi(x) - \lambda \pi(x+1) = 0, \forall x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ou encore $\pi(x) = 0$ pour tout x . Le processus de Poisson en tant que processus markovien de sauts n'admet donc pas de mesure stationnaire. C'est relativement intuitif ; il ne peut pas exister d'équilibre en loi pour un processus qui tend p.s. vers

l'infini.

• **Automate binaire.** Avec le générateur

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

les équations de stationnarité donnent $\mu\pi(0) = \lambda\pi(1)$. Puisque $\pi(0) + \pi(1) = 1$, on trouve comme unique mesure stationnaire

$$\pi = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)$$

La notion de mesure réversible existe aussi pour les processus markoviens de sauts, exactement comme pour les chaînes de Markov

Définition 2.6.2. *Une mesure réversible d'un processus markovien de sauts de générateur A est une loi de probabilité sur E , disons $\pi = (\pi(x))_{x \in E}$ vérifiant*

$$\forall x, y \in E, \pi(x)a_{x,y} = \pi(y)a_{y,x}. \quad (2.18)$$

Proposition 2.6.2. [2] *Toute mesure réversible pour un processus est stationnaire pour ce processus.*

En pratique (et notamment pour les projets), pour obtenir une mesure stationnaire, il est recommandé de commencer par chercher une mesure réversible, plus facile à identifier quand elle existe. D'ailleurs, la mesure stationnaire

$$\pi = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)$$

de l'automate binaire est également réversible. En effet, elle satisfait l'équation

$$\pi(0)a_{0,1} = \pi(1)a_{1,0}.$$

Définition 2.6.3. *Un processus markovien de sauts de générateur A est dit irréductible sur E si pour tous états $x, y \in E$ distincts il existe des états $x_1, \dots, x_n \in E$ tous différents tels que :*

$$a_{x,x_1}a_{x_1,x_2} \cdots a_{x_{n-1},x_n}a_{x_n,x_{n+1}} > 0.$$

Comme dans le cas discret, être irréductible signifie que l'on peut passer (en plusieurs étapes si nécessaire) de n'importe quel état x à n'importe quel état y avec une probabilité strictement positive. Le processus markovien de sauts correspondant à l'automate binaire est irréductible. Ce n'est pas le cas du processus de Poisson.

Nous admettons le théorème limite suivant

Théorème 2.6.1. [2] *Considérons un processus markovien de sauts $\{X_t\}_{t \geq 0}$ de matrices de transition $\{P(t)\}_{t \geq 0}$, irréductible sur E et admettant une mesure stationnaire π . Alors :*

- (1) π est l'unique mesure stationnaire du processus $\{X_t\}_{t \geq 0}$;
 (2) la matrice $P^{(t)}$ converge quand t tend vers l'infini vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π :

$$\forall x, y \in E, \lim_{t \rightarrow \infty} P_{x,y}^{(t)} = \pi(y);$$

- (3) quelle que soit la loi de X_0 , la loi de X_t converge quand t tend vers l'infini vers π :

$$\forall x \in E, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = x) = \pi(x);$$

Le comportement asymptotique d'un processus markovien de sauts irréductible est donc décrit par l'unique mesure stationnaire quand elle existe. Dans ce cas, le Théorème (2.6.1) exprime qu'au bout d'un certain temps, le système se stabilise dans un régime d'équilibre appelé régime stationnaire. Une fois ce régime atteint, la probabilité d'être dans l'état x est donnée par $\pi(x)$. Remarquons enfin que la notion de périodicité n'a pas de sens en temps continu, ce qui simplifie d'autant la discussion. Par contre, celles de récurrence et de transience sont conservées : ce sont toujours des propriétés de classes irréductibles.

Dans la section suivante, on va considérer les processus en temps continu avec un espace d'états continu.

2.7 Probabilités de transition du mouvement brownien

2.7.1 Le semi-groupe du mouvement brownien

Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien sur \mathbb{R} .

Théorème 2.7.1. [1] B est un processus de Markov homogène sur \mathbb{R} , de loi initiale ν et dont le semi-groupe est de la forme

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{t}\right) f(y) dy, \quad (2.19)$$

pour tout $t > 0$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée. Autrement dit pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$,

$$P_t(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{t}\right) dy,$$

i.e. $P_t(x, dy)$ est la mesure gaussienne de moyenne x et de variance t .

Pour la démonstration on aura besoin d'un résultat bien connu sur l'espérance conditionnelle :

Lemme 2.7.1.1. [5] Soient $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, X et Y des variables aléatoires avec X mesurable par rapport à une tribu \mathcal{G} et Y indépendante de la tribu \mathcal{G} . Alors si $\tilde{g}(x) = \mathbb{E}(g(x, Y))$, on a :

$$\mathbb{E}(g(X, Y)/\mathcal{G}) = \tilde{g}(X).$$

Démonstration du théorème 2.7.1 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée et $0 < s < t$.

Alors en considérant la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \mathbb{E}(f(x + B_t - B_s)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{t-s}\right) f(y) dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

et en appliquant le Lemme avec :

$X = B_s, Y = B_t - B_s, g(x, y) = f(x + y), \mathcal{G} = \mathcal{F}_s$,

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(B_t)/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(f(B_t - B_s + B_s)/\mathcal{F}_s) = \tilde{f}(B_s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(B_s - y)^2}{t-s}\right) f(y) dy \\ &= P_{t-s} f(B_s) \end{aligned} \quad (2.21)$$

ce qui prouve d'après 2.5 que B est un processus de Markov homogène dont le semi groupe P_t est bien de la forme annoncée en (2.19).

2.7.2 La propriété de Markov forte

Nous avons défini le mouvement brownien

$$B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$$

comme un processus partant de 0 i.e ($B_0 = 0$). Le processus $B^{(x)}$ défini pour tout $t \geq 0$ par :

$$B_t^{(x)} = x + B_t$$

est aussi un processus de Markov homogène de même semi-groupe B que donné par la formule (2.19). On l'appelle le mouvement brownien partant de x .

Plus généralement, si on considère une variable aléatoire X_0 indépendante de B , le processus $(X_0 + B_t)_{t \geq 0}$ est encore un processus de Markov de semi groupe (2.19).

Définition 2.7.1. (Temps d'arrêt) Une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si :

$$\forall t \geq 0 \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Théorème 2.7.2. (Propriété de Markov forte)

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, pour tout $h \geq 0$ et tout temps d'arrêt presque sûrement fini τ de la filtration de B , on a

$$\mathbb{E}(f(B_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau) = P_h f(B_\tau)$$

Démonstration. (Démonstration du Théorème)

On écrit $\mathbb{E}(f(B_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(f(B_{\tau+h} - B_\tau + B_\tau)/\mathcal{F}_\tau)$ et on utilise le lemme avec $X = B_\tau, Y = B_{\tau+h} - B_\tau$ et $g(x, y) = f(x + y)$, la démonstration est alors identique à celle du Théorème, puisqu'on sait par le théorème que la variable aléatoire $B_{\tau+h} - B_\tau$ est de même loi que B_h et qu'elle est indépendante de B_τ . \square

Remarque 2.7.1. On peut conclure que :

- Le mouvement brownien est la brique fondamentale pour construire des processus de Markov continue sur $(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^n)$.
- Le mouvement brownien joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques d'une part parce que dans de nombreux problèmes appliqués, le M.B sert à modéliser les erreurs ou les perturbations aléatoires, et d'autre part parce que le mouvement brownien ou les processus de diffusion qui en découlent permettent de construire des modèles simples sur lesquels des calculs peuvent être faits.

2.8 Quelques notions fondamentales sur les processus de Markov

2.8.1 Lois de dimension finie d'un processus de Markov

Proposition 2.8.1. [1] Soit X un processus de Markov de loi initiale ν et de probabilités de transition $P_{s,t}$. Pour tout suite finie d'instants $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ et tout choix de fonctions Boréliennes bornées $f_i : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, ($0 \leq i \leq k$) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_0(X_0)f_1(X_{t_1}) \cdots f_k(X_{t_k})) \\ = \int_E \nu dx_0 f(x_0) \int_E P_{0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \\ = \langle \nu f_0 P_{t_0,t_1} f_1 P_{t_1,t_2} f_2 \cdots f_{k-1} P_{t_{k-1},t_k} f_k \rangle, \end{aligned}$$

où dans la formule précédente, on utilise la notation (3.3) et où chaque opérateur P_{t_{i-1},t_i} s'applique à toute l'expression située à sa droite alors que chaque fonction f_i est multipliée par toute l'expression située à sa droite.

Démonstration. En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle et la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i})\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) \mathbb{E}(f_k(X_{t_k}) \middle| \mathcal{F}_{t_{k-1}})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) P_{t_{k-1}, t_k} f_k(X_{t_{k-1}})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i(X_{t_i})\right),\end{aligned}$$

où $g_i = f_i$ si $i \leq k-2$ et $g_{k-1} = f_{k-1} P_{t_{k-1}, t_k} f_k$. On arrive alors au résultat par récurrence descendante sur k . \square

Corollaire 2.1. *sous les hypothèses de la proposition précédente, pour tout $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}_E$, on a*

$$\begin{aligned}P(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, X_{t_k} \in A_k) \\ = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{0, t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_1, t_2}(x_1, dx_2) \cdots \\ \cdots \int_{A_k} P_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k). \quad (2.22)\end{aligned}$$

Si le processus de Markov X est homogène de semi-groupe $(P_u)_{u \geq 0}$ la formule précédente se récrit sous la forme

$$\begin{aligned}P(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, X_{t_k} \in A_k) \\ = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \cdots \\ \cdots \int_{A_k} P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k). \quad (2.23)\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition avec $f_i = 1_{A_i}$. \square

Remarque 2.8.1. *Supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ soit la filtration naturelle du processus de Markov X . La restriction de la probabilité \mathbb{P} à la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \in T} \mathcal{F}_t)$ terminale de X est parfaitement déterminée par les valeurs $\mathbb{P}(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k)$ prises par \mathbb{P} sur les ensembles cylindriques*

$$[X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k] \quad (2.24)$$

($k \in \mathbb{N}, (t_i) \in T^k, (A_i) \in (\mathcal{B}_E)^{k+1}$). On voit grâce à (2.22) et (2.23) que cette probabilité notée parfois \mathbb{P}_ν est entièrement caractérisés par la loi initiale ν et le

noyaux de transition (resp. le semi-groupe) de X . En générale, lorsque X est un Markov homogène, on définit sur \mathcal{F}_∞ une famille $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ de mesures de probabilité en posant

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k) \\ = \int_{A_0} \delta_x(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots \\ \cdots \int_{A_k} P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k), \end{aligned}$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x . Cette mesure \mathbb{P}_x qui s'identifie à la probabilité conditionnelle "sachant $[X_0 = x]$ " permet des interprétations très intéressantes dans l'étude des processus de Markov et permet de simplifier beaucoup d'énoncés.

$$\mathbb{P}_\nu = \int_E \mathbb{P}_x d\nu(x)$$

2.9 Propriétés analytiques du semi-groupe brownien

2.9.1 Générateurs infinitésimal d'un semi-groupe de Feller

Les processus de Feller constituent une classe particulièrement intéressante de processus de Markov homogène. Leurs opérateurs de transition forment un semi-groupe dont la structure analytique est assez riche pour fournir des précieuses propriétés probabilistes du processus. Nous illustrons ces idées sur l'exemple du mouvement brownien. Ceci permet d'introduire les outils fondamentaux qui sont la résolvante et le générateur infinitésimal d'un processus de Feller.

Considérons l'espace de Banach $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continues et tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ de la convergence uniforme et soit $(P_t)_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs positifs¹ de $C_0(E)$ de lui-même.

Définition 2.9.1. On dit que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de Feller si :

1. $P_0 = 1$ et $\|P_t\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.
2. $\forall t, t' \geq 0, P_t P_{t'} = P_{t+t'}$
3. $\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0$

Un processus de Markov homogène sur E dont le semi-groupe (au sens de (3.7)) est de Feller, est appelé processus de Feller²

Ainsi un processus de Markov homogène sur E est de Feller si ses opérateurs de transition envoient $C_0(E)$ dans lui-même et si pour toute fonction

$$f \in C_0(E) \lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0.$$

1. i.e. $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$.

2. Pour un tel semi-groupe, les opérateurs sont de plus Markoviens i.e. $\forall t \geq 0, P_t 1 = 1$.

Remarque 2.9.1. On déduit immédiatement de 2) et 3) , la continuité à droite du semi-groupe en tout point $t > 0$.i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_{t+h}f = P_t f \quad \text{dans} \quad C_0(E) \quad (2.25)$$

Définition 2.9.2. [1] Si $f \in C_0(E)$ est telle que la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) = Af \quad (2.26)$$

existe dans $C_0(E)$ ³ , on dit que f est dans le domaine D_A de l'opérateur A ainsi défini par (2.26) et appelé *générateur infinitésimal* du semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$.

Remarque 2.9.2. 1) La notion de *générateur infinitésimal* pour un processus X de Markov-Feller permet de préciser l'accroissement du processus en temps petit . En effet avec la notation de (3.6) pour tout instant $s > 0$, si $H > 0$ pour tout $f \in D_A$, on a

$$\mathbb{E}(f(X_{s+h})|\mathcal{F}_s) = P_h f(X_s) = f(X_s) + hAf(X_s) + o(h),$$

où $o(h)$ ne dépend que de f .

2) L'importance du *générateur infinitésimal* dans la théorie moderne des processus de Markov est due au fait que pour tout fonction $f \in D_A$, le processus

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(X_s)ds \quad (t \geq 0),$$

est une martingale par rapport à la filtration de X Nous donnerons un aperçu de ces liens entre *générateur infinitésimal* et propriétés de martin gale dans l'annexe de ce chapitre.

Les propriétés analytiques générales liant le semi-groupe et son *générateur infinitésimal* sont contenues dans le résultat suivant

Proposition 2.9.1. Soit $f \in D_A$ On a :

- i) $\forall t \geq 0, P_t f \in D_A$
- ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto P_t f(x)$ est dérivable, la fonction $\frac{d}{dt}P_t f : x \mapsto \frac{d}{dt}P_t f(x)$ est dans $C_0(E)$ et on a

$$\frac{d}{dt}P_t f = AP_t f = P_t Af, \quad (2.27)$$

de plus on a

$$P_t f - f = \int_0^t AP_s f ds = \int_0^t P_s Af ds. \quad (2.28)$$

3. .i.e. $Af \in C_0(E)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \|\frac{1}{t}(P_t f - f) - Af\|_\infty = 0$.

Démonstration. Soit $t \geq 0$. La propriété de semi-groupe et la continuité de l'opérateur P_t impliquent

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{P_u(P_t f) - P_t f}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} P_t \left(\frac{P_u f - f}{u} \right) \\ &= P_t A f \\ &= A P_t f \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion i). Le même calcul montre que $t \mapsto P_t f$ est dérivable en tout $t > 0$ et dérivable à droite en $t = 0$ et qu'on a (2.27). De plus la fonction $\int_0^t A P_s f ds$ est dérivable et sa dérivée $t \mapsto A P_t f$ coïncide avec la dérivée de la fonction $t \mapsto P_t f - f$. Ces deux fonctions égales à 0 en $t = 0$ sont donc égales partout et on a (2.28). \square

Remarque 2.9.3. L'équation (2.27) montre que la fonction

$$(t, x) \mapsto u(t, x) = P_t f(x); (t > 0, x \in \mathbb{R}),$$

, est solution de "l'équation de la chaleur"

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) u = 0$$

avec la condition initiale $u(0, x) \equiv f(x)$. Cette dénomination trouve son origine dans le cas du semi-groupe du mouvement brownien dont le générateur infinitésimal est l'opérateur $\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$ comme on va le voir ci-dessous.

Théorème 2.9.1. [1] Le mouvement brownien est un processus de Feller. De plus toute fonction $f \in C_0(\mathbb{R})$, de classe C^2 avec une dérivée seconde $f'' \in C_0(\mathbb{R})$, est dans le domaine D_A du générateur infinitésimal A et pour une telle fonction, on a

$$A f(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Démonstration. 1) Montrons d'abord que B est un processus de Feller. pour $f \in C_0(\mathbb{R})$ la fonction $P_t f$ définie par la formule (3.11), est continue d'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. En effet pour tout y fixé, la fonction sous le signe intégrale est clairement continue en x et on peut la dominer, si x est dans un intervalle compact, par une fonction intégrable de la forme $\|f\|_\infty \exp(-\frac{1}{2}y^2 + Cy)$, où $C > 0$ est une constante. Montrons ensuite que $P_t f(x) \mapsto 0$ quand $|x| \mapsto +\infty$:

Soit $\epsilon > 0$ et $M = M(\epsilon) > 0$ tel que $|y| > M$ implique $|f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Comme le noyau intégral de (3.11) est une densité de probabilité, on a

$$|P_t f(x)| \leq \int_{-M}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{t}\right) |f(y)| dy + \frac{\epsilon}{2} \quad (2.29)$$

Mais en passant à la limite sous le signe somme, l'intégrale du second membre de (2.29) tend vers zéro quand $|x| \mapsto \infty$ puisque la convergence est dominée par la fonction continue $|f|$ qui est intégrable sur $[-M, M]$. On a ainsi $|P_t f(x)| \leq \epsilon$ pour x assez grand, ce qui prouve que $P_t f \in C_0(\mathbb{R})$. Il reste à prouver le point 3) de la définition (2.9.1) :

On a

$$\begin{aligned} P_t f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{t}\right) (f(y) - f(x)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{t}\right) (f(x+z) - f(x)) dz \end{aligned} \quad (2.30)$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $f \in C_0(\mathbb{R})$, f est uniformément continue sur \mathbb{R} et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|z| < \alpha$ implique qu'on ait la relation $|f(x+z) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. En décomposant l'intégrale du second membre de (2.30) en une intégrale sur $[-\alpha, \alpha]$ et sur $[-\alpha, \alpha]^c$, on déduit aussitôt que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_t f(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty} \int_{[-\alpha, \alpha]^c} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{t}\right) dz. \quad (2.31)$$

Mais l'intégrale dans le second membre de (2.31) tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. Le premier membre de (2.31) peut donc être rendu inférieur à ϵ pour t assez grand, d'où l'assertion 3).

2) Considérons maintenant $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ avec $f'' \in C_0(\mathbb{R})$. Si on fait le changement de variable $y = x + z\sqrt{t}$ dans la formule (3.11), on a

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) f(x + z\sqrt{t}) dz.$$

La formule de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 2 au point x avec l'accroissement $h = z\sqrt{t}$, montre qu'on peut écrire

$$f(x + z\sqrt{t}) = f(x) + z\sqrt{t}f'(x) + \frac{1}{2}z^2t f''(x) + \frac{1}{2}z^2t(f''(x + \theta z\sqrt{t}) - f''(x)) \quad (2.32)$$

où $\theta = \theta(x, z\sqrt{t}) \in [0, 1]$. Ainsi lorsqu'on intègre la relation (2.32) par rapport à la mesure $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$, en tenant compte du fait que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = 1$$

on voit que

$$\frac{1}{t}(P_t f(x) - f(x)) - \frac{1}{2}f''(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) (f''(x + \theta z\sqrt{t}) - f''(x)) dz \quad (2.33)$$

Il nous reste à prouver que le second membre de (2.33), tend vers 0 uniformément en $x \in \mathbb{R}$ quand $t \rightarrow 0$. On doit procéder délicatement. D'abord, on fait le changement

de variable $u = z\sqrt{t}$ et l'intégrale de (2.33), s'écrit

$$r(t, x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) (f''(x + \theta u) - f''(x)) du$$

Comme f'' est uniformément continue sur \mathbb{R} , à tout $\epsilon > 0$, on peut associer $\alpha > 0$ tel que $|h| \leq \alpha$ implique $|f''(x+h) - f''(x)| < \epsilon$. Si on décompose l'intégrale précédente, en une intégrale sur $[-\alpha, \alpha]$ et sur $[-\alpha, \alpha]^c$, on obtient

$$\begin{aligned} |r(t, x)| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|f''\|_{\infty} \int_{[-\alpha, \alpha]^c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du \\ |r(t, x)| &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2\|f''\|_{\infty} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comme l'intégrale du second membre de (2.34) tend vers 0 quand $t \rightarrow 0$, ceci montre que $|r(t, x)| < \epsilon$ uniformément en x , pour t assez petit. La deuxième assertion du théorème en résulte aussitôt. \square

2.9.2 La résolvante du mouvement brownien

Pour déterminer complètement le domaine D_A du générateur infinitésimal du mouvement brownien, on a besoin de la notion de résolvante :

Définition 2.9.3. On appelle résolvante⁴ d'un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t \geq 0}$, la famille $(R_{\lambda})_{\lambda > 0}$ des opérateurs définis sur $C_0(E)$ par :

$$R_{\lambda}f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt \quad (x \in E) \quad (2.35)$$

On notera que la fonction $t \rightarrow P_t f(x)$ est borélienne (puisque continue à droite d'après (2.25)) et qu'elle est bornée (par $\|f\|_{\infty}$) donc elle est intégrable pour la mesure $e^{-\lambda t} dt$. L'expression $R_{\lambda}f(x)$ est donc bien définie. De plus, par continuité sous le signe somme et par convergence dominée, on voit clairement que $R_{\lambda}f \in C_0(E)$.

Proposition 2.9.2. [1] La résolvante $(R_{\lambda})_{\lambda > 0}$ d'un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t \geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes :

- 1) $\forall \lambda > 0, \forall t \geq 0, P_t R_{\lambda} = R_{\lambda} P_t$.
- 2) $\forall \lambda, \mu > 0, R_{\lambda} R_{\mu} = R_{\mu} R_{\lambda}$
- 3) $\forall \lambda, \mu > 0, R_{\lambda} - R_{\mu} = (\mu - \lambda) R_{\lambda} R_{\mu}$ (équation résolvante)⁵
- 4) $\forall \lambda > 0, \forall f \in C_0(E), \|\lambda R_{\lambda} f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$

Démonstration. Les propriétés de commutation 1) et 2) sont faciles à établir et sont laissées en exercice.

4. ou transformée de Laplace.

5. On notera que l'équation résolvante implique la propriété de commutation 2).

La propriété 4) est immédiate puisque pour tout x , $|P_t f(x)| \leq \|f\|_\infty$. Établissons l'équation résolvante. Pour $f \in C_0(E)$, on a

$$R_\lambda R_\mu f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \left(\int_0^\infty e^{\mu s} P_s f(x) ds \right) dt \quad (2.36)$$

et comme P_t est un opérateur continu, on voit facilement qu'on peut le passer à l'intérieur de la deuxième intégrale du membre de droite de (2.36), ce qui compte tenu de la propriété de semi-groupe donne :

$$R_\lambda R_\mu f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty e^{\mu s} P_{t+s} f(x) ds \right) dt \quad (2.37)$$

Le changement de variable $s = u - t$ dans l'intégrale centrale de (2.37) puis une interversion des intégrations donne alors

$$\begin{aligned} R_\lambda R_\mu f(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_t^\infty e^{\mu(u-t)} P_u f(x) ds \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu u} P_u f(x) \left(\int_0^u e^{-(\lambda-\mu)t} dt \right) du \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} \int_0^\infty e^{-\mu u} P_u f(x) (1 - e^{-(\lambda-\mu)u}) du \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} (R_\mu f(x) - R_\lambda f(x)) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} (R_\lambda - R_\mu) f(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Une conséquence cruciale de l'équation résolvante, concerne la constance de l'image de $C_0(E)$ par les opérateurs R_λ :

Corollaire 2.2. *L'espace $\mathcal{D} = R_\lambda(C_0(E))$ ne dépend pas de $\lambda > 0$.*

Démonstration. Grâce à l'équation résolvante, pour $f \in C_0(E)$ on a

$$\begin{aligned} R_\lambda f &= R_\mu f + (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda f \\ &= R_\mu (f + (\mu - \lambda) R_\lambda f), \end{aligned}$$

ce qui signifie que $R_\lambda(C_0(E)) \subset R_\mu(C_0(E))$; mais comme $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont quelconques, on a aussi $R_\mu(C_0(E)) \subset R_\lambda(C_0(E))$, d'où l'égalité $R_\lambda(C_0(E)) = R_\mu(C_0(E))$. □

Cet espace \mathcal{D} , image commune de $C_0(E)$ par les opérateurs résolvants R_λ , coïncide en fait avec le domaine D_A du générateur infinitésimal A du semi-groupe ! Plus précisément on a le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.9.2.

[1] Soient $\lambda > 0$ et $f, g \in C_0(E)$. Alors $g = R_\lambda f$ si et seulement si $g \in D_A$ et

$$\lambda g = Ag = f.$$

Autrement dit $\mathcal{D} = D_A$ et $(\lambda I - A)R_\lambda = I$, où I est l'opérateur identité de $C_0(E)$ ⁶

Démonstration.

i) (condition nécessaire) Supposons que $g = R_\lambda f$. Alors pour tout $h > 0$, on a

$$\frac{1}{h}(P_h - I)g(x) = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{t+h} f(x) dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) dt \quad (2.38)$$

Le changement de variable $s = t + h$ dans la première intégrale de (2.38) conduit à .

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(P_h - I)g(x) &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s f(x) ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} P_s f(x) ds \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \left(g(x) - \frac{1}{\lambda} f(x) \right) - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} (P_s f(x) - f(x)) ds \end{aligned} \quad (2.39)$$

Comme $P_t f(x) - f(x) \rightarrow 0$ uniformément en x , quand $t \rightarrow 0$, l'intégrale du second membre de (2.39) tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ (uniformément en x), ce qui implique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(P_h - I)g = \lambda \left(g - \frac{1}{\lambda} f \right) \quad \text{dans } C_0(E).$$

Donc $g \in D_A$ et $Ag = \lambda g - f$ i.e. $f = (\lambda I - A)g$. D'où la condition nécessaire.

ii) (condition suffisante) Soit $v \in D_A$. On a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(P_h - I)v = Av$ dans $C_0(E)$ et comme l'opérateur R_λ est continu et commute avec P_h , ceci implique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(P_h - I)R_\lambda v = R_\lambda Av \quad (2.40)$$

Mais, dans la condition nécessaire, on a vu que la limite du membre de gauche de (2.40) est égale à $\lambda R_\lambda v - v$. On a donc $R_\lambda Av = \lambda R_\lambda v - v$, ce qui montre que $v \in R_\lambda(C_\lambda(E))$ et comme R_λ et A commutent, on obtient aussi $v = (\lambda I - A)R_\lambda v$. D'où le théorème. □

Théorème 2.9.3.

i) La résolvante du mouvement brownien est la famille des opérateurs intégraux $(R_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ de la forme :

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp\left(-\sqrt{2\lambda}|x - y|\right) f(y) dy \quad (f \in C_0(\mathbb{R})) \quad (2.41)$$

6. On notera qu'on a alors aussi $R_\lambda(\lambda I - A) = I_{D_A}$, où I_{D_A} est l'opérateur identité de D_A car R_λ et A commutent sur D_A .

ii) Le domaine D_A du générateur infinitésimal du mouvement brownien est constitué des $f \in C_0(\mathbb{R})$ de classe C^2 et telles que f'' appartienne aussi à $C_0(\mathbb{R})$. Pour $f \in D_A$, on a alors

$$Af = \frac{1}{2}f''$$

Démonstration.

1) Pour une fonction $f \in C_0(\mathbb{R})$ positive, le théorème de Fubini-Tonelli permet d'écrire :

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) dt \right) f(y) dy.$$

Pour prouver (2.41), il suffit donc de montrer que

$$\phi(z) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|z|}. \quad (2.42)$$

Pour $z > 0$, on peut dériver $\phi(z)$ sous le signe intégrale, ce qui donne

$$\phi'(z) = - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{z}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right) dt. \quad (2.43)$$

Si on fait le changement de variable $s = \frac{z^2}{2\lambda t}$ dans l'intégrale (2.43), on obtient aussitôt

$$\phi'(z) = -\sqrt{2\lambda}\phi(z),$$

ce qui implique que $\phi(z) = Ce^{-\sqrt{2\lambda}z}$, ($z > 0$) : mais $C = \phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ comme on peut le voir aussitôt par un changement de variable évident⁷.

On en déduit (2.42) puisque $\phi(z)$ est une fonction paire.

2) Si on récrit la formule (2.41) sous la forme

$$R_\lambda f(x) = e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{\sqrt{2\lambda}y} f(y) dy + e^{\sqrt{2\lambda}x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}y} f(y) dy.$$

on voit facilement que la fonction $g(x) := R_\lambda f(x)$ a des dérivées première et seconde données par

$$g'(x) = -e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_{-\infty}^x e^{\sqrt{2\lambda}y} f(y) dy + e^{\sqrt{2\lambda}x} \int_x^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} f(y) dy \quad (2.44)$$

et

$$g''(x) = 2\lambda g(x) - 2f(x). \quad (2.45)$$

La relation (2.45) montre que $g'' \in C_0(\mathbb{R})$. L'image de $C_0(\mathbb{R})$ par R_λ égale à D_A (d'après le Théorème (2.9.2)) est donc contenue dans l'ensemble $C_0^2(\mathbb{R})$ des fonctions $g \in C_0(\mathbb{R})$ de classe C^2 telles que $g'' \in C_0(\mathbb{R})$ qui est lui même inclus dans D_A d'après le Théorème (2.9.1). Donc $D_A = C_0^2(\mathbb{R})$ et le théorème en découle.

7. dans l'intégrale donnant $f(0)$ faire le changement de variable $\lambda t \frac{s^2}{2}$ pour se ramener à une intégrale de Gauss

□

Remarque 2.9.4. La formule (2.44) montre que l'on a

$$|g'(x)| \leq e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_{-\infty}^x e^{\sqrt{2\lambda}y} |f(y)| dy + e^{\sqrt{2\lambda}x} \int_x^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} |f(y)| dy = \sqrt{2\lambda} R_\lambda |f|(x),$$

donc $g'(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Ainsi les fonctions $f \in D_A$ sont aussi telles que $f' \in C_0(\mathbb{R})$, ce qui n'était pas clair a priori (on essayera de montrer directement qu'une fonction $f \in C_0(\mathbb{R})$ de classe C^2 et telle que $f'' \in C_0(\mathbb{R})$, vérifie aussi $f' \in C_0(\mathbb{R})$).

Chapitre 3

Quelques applications des processus Markoviens en temps continu

Dans ce chapitre, je rappelle tout d'abord le théorème d'existence et d'unicité sur les équations différentielles stochastiques - EDS en abrégé dans la suite - puis je m'intéresse à la propriété de Markov de la solution de l'EDS.

3.1 Le résultat classique d'Ito

Les équations différentielles ont été d'abord étudiées par Itô, dans le but de construire les diffusions (c'est-à-dire, processus continus et fortement markoviens dont les générateurs sont des opérateurs différentiels du second ordre). c'est d'ailleurs dans ce but qu'il avait introduit le calcul stochastique.

3.1.1 Existence et unicité de solution

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et soit B un $(\mathcal{F})_t$ -mouvement brownien. Soient $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables [8]. On considère l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \quad (3.1)$$

3.1.2 Définition

Une solution pour l'EDS 3.1 est un processus $(X_t, t \geq 0)$ continu adapté tel que $\forall t, \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty, \int_0^t |b(s, X_s)| ds < \infty$, p.s, et que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Remarque 3.1.1. (i) Si σ et b sont localement bornées (c'est-à-dire, bornées sur tout compact), alors pour tout processus continu adapté (X_t) , on a automatiquement

$$\forall t, \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty, \int_0^t |b(s, X_s)| ds < \infty,$$

(ii) On écrit souvent la forme différentielle de l'équation :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t.$$

Plus généralement, on peut considérer les EDS en dimension quelconque. Soit $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(m)})$ un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^m (avec $m \geq 1$), et soient $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ des fonctions mesurables.

On écrit $\sigma = (\sigma_{ik})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq k \leq m}$ et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$. On considère l'(EDS) suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Une solution pour cette EDS est un processus $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$, où pour tout $1 \leq i \leq d$, $(X_t^i, t \geq 0)$ est un processus continu adapté, tel que $\forall t, \forall 1 \leq k \leq m, \int_0^t \sigma_{ik}(s, X_s)^2 ds < \infty, \int_0^t |b_i(s, X_s)| ds < \infty$, p.s, et que

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{ik}(s, X_s)dB_s^{(k)}. \quad 1 \leq i \leq d$$

Théorème 3.1.1. [8] Supposons que σ et b sont des fonctions continues telles que pour une certaine constante $K > 0$, et pour tout $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$.

1. condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|,$$

2. croissance linéaire : $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$,

3. supposons que $\mathbb{E}(|\xi|^2) < \infty$.

Alors il existe une unique solution $(X_t, t \geq 0)$ telle que $X_0 = \xi$. De plus, pour tout t , $\mathbb{E}(\sup_{s \in [0, t]} |X_s|^2) < \infty$.

Remarque 3.1.2. Dans l'énoncé du théorème 3.1.1 $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. En plus, pour tout réel $T > 0$, il y a unicité de solution pour l'EDS sur $[0, T]$.

Exemple 3.1. [9] On donne un exemple classique d'EDS est emprunté au monde de la finance. Le prix d'une action est généralement modélisé par l'EDS :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 \text{ donné};$$

le paramètre σ s'appelle la volatilité et est très important. On montre facilement à l'aide de la formule d'Itô que

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$$

Ce processus est appelé le "mouvement brownien géométrique".

Commentaire

S_0 est le cours observé à la date 0. Cela signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t \geq 0}$ tels que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ et $\int_0^t S_s dB_s$ aient un sens, et qui vérifie :

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s \quad \forall t.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel : Posons $Y_t = \log(S_t)$ où S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$.

Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log x$ on obtient, en supposant que S_t est positif :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} dS_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} d\langle S, S \rangle_s$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle S, S \rangle_s &= \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s, \int_0^t \sigma S_s dB_s \rangle = \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s \rangle \\ &= \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds = \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds \end{aligned}$$

et $dS_s = S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \frac{S_s(\mu ds + \sigma dB_s)}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} d\langle S, S \rangle_s \\ &= \log(S_0) + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma dB_s \end{aligned}$$

En utilisant 3.1 :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} Y_t = \log(S_t) &= \log(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \\ \exp(\log(S_t)) &= \exp(\log(S_0)) \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t) \end{aligned}$$

Il semble donc que :

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\} \text{ avec : } S_0 = x_0$$

soit une solution de l'équation de 3.1

3.1.3 Théorème (Fonctionnelle sur l'espace de Wiener)

Sous les hypothèses lipschitziennes, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe

$$F_x : \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \\ \omega \mapsto F_x(\omega). \end{cases} .$$

mesurable et satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) pour tout $t \geq 0$, $F_x(\omega)_t$ coïncide $\mathbb{W}(d\omega)$ -ps avec une fonction mesurable de $[\omega]_t = (\omega(r) : 0 \leq r \leq t)$; avec un abus de notation, on écrira $F_x(t, [B]_t)$;
- ii) pour tout $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, l'application $\begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \\ x \mapsto F_x(\omega). \end{cases}$ est continue;
- iii) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout choix d'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien B en dimension m , le processus X définie par $X_t = F_x(B)_t$ est l'unique solution de $E(b, \sigma)$ avec valeur initiale x ; de plus, si Z est une variable aléatoire F_0 -mesurable, le processus $F_Z(B)_t$ est l'unique solution avec valeur initiale Z (pour plus de détails, voir [10]).

3.2 La propriété de Markov fort pour une EDS homogène

Dans cette section, on suppose toujours les hypothèses lipschitziennes : Les fonctions b et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en x , ie. il existe une constante $K > 0$, et pour tout $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|,$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

et $\forall t, \int_0^T |b(t, 0)| + |\sigma(t, 0)|^2 dt < \infty$ pour tout T où $|b|$ et $|\sigma|$ représentent la norme du vecteur b et de la matrice σ .

Pour avoir des propriétés markoviennes homogènes, on suppose en outre que l'EDS est homogène, c'est à dire que les coefficients de l'EDS ne dépendent pas du temps :

$$\sigma(t, y) = \sigma(y), b(t, y) = b(y).$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, on note P_x la loi sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ des solutions de $E_x(b, \sigma)$ (d'après le théorème 3.1.3, on a $P_x = \mathbb{W}F_x^{-1}$). L'assertion ii) dans le Théorème 3.1.3 montre que $x \mapsto P_x$ est continue pour la topologie de la convergence étroite : soit $x_n \rightarrow x$, pour $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$

$$\int f dP_{x_n} = \int f(F_{x_n}(\omega)) d\mathbb{W}(\omega) \rightarrow \int f(F_x(\omega)) d\mathbb{W}(\omega) = \int f dP_x$$

où on utilise $F_{x_n}(\omega) \rightarrow F_x(\omega)$ dû au Théorème 3.1.3 et la convergence dominée puisque $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$. On déduit alors d'un argument de classe monotone que pour toute fonction Φ borélienne de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ dans \mathbb{R} , l'application $x \mapsto \mathbb{E}_x[\Phi]$ est elle aussi mesurable.

Théorème 3.2.1. [10] (Markov fort pour les EDS homogène) Soit X une solution de $E(b, \sigma)$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Soit aussi T un temps d'arrêt fini p.s. Alors pour $\Phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne, on a

$$\mathbb{E}[\Phi(X_{T+t} : t \geq 0) | \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}_{X_T}[\Phi]$$

C'est à dire pour toute variable aléatoire U positive \mathcal{F}_T -mesurable

$$\mathbb{E}[U\Phi(X_{T+t} : t \geq 0)] = \mathbb{E}[U\mathbb{E}_{X_T}[\Phi]]$$

i.e

$$\mathcal{L}((X_{T+t})_{t \geq 0} | \mathcal{F}_T) = \mathcal{L}((X_t)_{t \geq 0} | X_T).$$

Remarque 3.2.1. Ce résultat signifie que la solution X de l'EDS vérifie la propriété de Markov forte par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$:

Pour tout temps d'arrêt fini T , la loi conditionnelle du "futur" $(X_{T+t} : t \geq 0)$ connaissant le "passé" \mathcal{F}_T est la loi de X partant de X_T , qui ne dépend que du présent à l'instant T .

Dans le cas particulier $\sigma = Id$ et $b = 0$, on retrouve la propriété de Markov forte pour le mouvement brownien. C'est du reste sur celle-ci qu'on s'appuie pour la preuve.

Preuve 3.2.1. (du théorème)

Pour simplifier la présentation de la preuve, on suppose encore que $m = 1, d = 1$. Notons $B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$. Il s'agit d'un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_t (propriété de Markov forte pour le brownien B). On pose aussi $X'_t = X_{T+t}$ et on remarque que le processus X' est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t \geq 0}$ où $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t}$ et que cette filtration satisfait les conditions habituelles. De plus, d'après l'EDS satisfaite par X ,

$$X'_t = X_T + \int_T^{T+t} b(X_s)ds + \int_T^{T+t} \sigma(X_s)dB_s.$$

Par changement de variable, on a de suite

$$\int_T^{T+t} b(X_s)ds = \int_0^t b(X'_s)ds$$

[10] (comme il s'agit d'une intégrale de Stieltjes définie ω par ω , on peut faire le changement de variable sans problème ω par ω , la valeur $T = T(\omega)$ étant alors figée). On fait aussi un changement de variable dans l'intégrale stochastique à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3.2.1. Si h est un processus continu adapté, on a

$$\int_T^{T+t} h(s, \omega)dB_s = \int_0^t h(T+s, \omega)dB_s^{(T)}.$$

Démonstration. Pour démontrer le lemme en approchant h par des combinaisons linéaires finies de processus de la forme $h(s, \omega) = \varphi(\omega)\mathbb{1}_{[r, r']}(s)$ où φ est \mathcal{F}_r -mesurable. Pour simplifier on prend même h de la forme $h(s, \omega) = \varphi(\omega)\mathbb{1}_{[T+r, T+r']}(s)$ où φ est \mathcal{F}_{T+r} -mesurable, il suffit de montrer le changement de variables pour ces fonctions particulières :

$$\begin{aligned}
\int_T^{T+t} h(s, \omega) dB_s &= \int_T^{T+t} \varphi(\omega) \mathbb{1}_{]T+r, T+r']} (s) dB_s \\
&= \varphi(\omega) \int_{(T+r) \wedge (T+t)}^{(T+r') \wedge (T+t)} dB_s \\
&= \varphi(\omega) (B((T+r') \wedge (T+t)) - B((T+r) \wedge (T+t))) \\
&= \varphi(\omega) (B((T+r') \wedge (T+t)) - B_T - B((T+r) \wedge (T+t)) + B_T) \\
&= \varphi(\omega) (B^T(r' \wedge t) - B^T(r \wedge t)) \\
&= \varphi(\omega) \int_{r \wedge t}^{r' \wedge t} dB_u^T \\
&= \int_{r \wedge t}^{r' \wedge t} \varphi(\omega) dB_u^T \\
&= \int_0^t \varphi(\omega) \mathbb{1}_{]r, r']} (u) dB_u^T \\
&= \int_0^t \varphi(\omega) \mathbb{1}_{]T+r, T+r']} (T+u) dB_u^T \\
&= \int_0^t h(T+u, \omega) dB_u^T
\end{aligned}$$

□

On déduit alors du lemme que

$$\int_T^{T+t} \sigma(X_s) dB_s = \int_0^t \sigma(X_{T+u}) dB_u^{(T)} = \int_0^t \sigma(X'_u) dB_u^{(T)}$$

et on a donc

$$X'_{T+t} = X_T + \int_0^t b(X'_s) ds + \int_0^t \sigma(X'_s) dB_s^{(T)}$$

On remarque que X' est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $B^{(T)}$ est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien et X_T est \mathcal{F}_0' -mesurable. D'après iii) dans le Théorème 3.1.3, on doit avoir ps $X' = F_{X_T}(B^{(T)})$. Le résultat du théorème suit alors facilement : comme X_T est F_T -mesurable et $B^{(T)}$ est indépendant de F_T , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Phi(X'_t : t \geq 0) | \mathcal{F}_T] &= \mathbb{E}[\Phi(F_{X_T}(B^{(T)})) | \mathcal{F}_T] \\
&= \int_{C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)} \Phi(F_{X_T}(\omega)) \mathbb{W}(d\omega) \\
&= \mathbb{E}_{X_T}[\Phi(X_t : t \geq 0)]
\end{aligned}$$

Lemme 3.2.2. Soit M une martingale locale universellement réductible pour tous les P^z , et $\beta > 0$. Alors M peut être décomposé en $M = N + B$, où N est une martingale locale pour tous les P^z et $B \in \psi$. Il existe un ensemble nul A (c'est-à-dire $P^z(A) = 0$ pour tout z) tel que $|\Delta N_s| \leq \beta$ pour tous les $s \in \mathbb{R}_+$, hors A .

Lemme 3.2.3. Soit $\eta_t^0 = W_0$, et

$$\eta_t^{n+1} = W_0 + \sum_{i=1}^m \int_0^t f_i(s, \eta_{s-}^n) dY_s^i \quad (3.2)$$

où Y^i sont des P -semi-martingales, et chaque f_i satisfait les conditions lipschitziennes. Soit W_t une solution de

$$W_t = W_0 + \sum_{i=1}^m \int_0^t f_i(s, W_{s-}) dY_s^i.$$

Alors $\eta_t^n \rightarrow W_t$ en probabilité.

Proposition 3.2.1. Soit (X_t^x) et (X_t) comme dans .

$$X_t^x = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}^x) dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-}^x) dA_s, \quad (3.3)$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s. \quad (3.4)$$

Soit $H \in b\mathcal{F}$, et $\widehat{H}(\omega) = H(\omega_1)1_{\mathbb{R}}(x)$, où $\omega = (x, \omega_1)$. Alors

- i) X_t et X_t^x sont $P^{x,z}$ indistinguables pour tous les z .
- ii) Pour toute $f \in b\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, $\mathbb{E}^{x,z}[f(X_t, \widehat{H})] = \mathbb{E}^z[f(X_t^x, H)]$.
- iii) $\mathbb{E}^{x,z}[\widehat{H}|\mathcal{G}_t] = \mathbb{E}^z[H|\mathcal{F}_t]1_{\mathbb{R}}$.

3.3 La propriétés Markovienne des solutions

Une diffusion D_t peut être définie comme un processus de Markov fort avec des trajectoires continus. Si l'on exige des conditions sur les incréments conditionnés pour qu'ils soient approximativement Gaussien, alors on peut exprimer D_t comme la solution d'un type Itô équation différentielle stochastique.

$$D_t = D_0 + \int_0^t f(s, D_s) dW_s + \int_0^t g(s, D_s) ds \quad (3.5)$$

où W_t est le processus de Wiener. (Voir Gihman et Skorhod [14]). Si l'on considère un modèle dans lequel la continuité des trajectoires n'est pas essentielle, on peut considérer des processus de Markov autres que le mouvement brownien, et aléatoires mesures, comme des écarts. Soit f, g satisfaisons les conditions lipschitziennes, Z soit (disons) un processus de Hunt qui est une semi-martingale complète par rapport à $P^{x,z}$ et A_t une fonction additive de Z . Soit X_0 comme dans 3.2.3, et soit X_t la solution de l'équation suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) dA_s. \quad (3.6)$$

On pourrait alors espérer que X_t serait un processus de Markov. Ce n'est pas vrai en général, comme le montrent des exemples simples. (Utilisez une chaîne de Markov pour que X devienne la solution d'une équation de différence et s'étendent au temps

continu). Il n'est pas nécessaire que les processus avec des incréments indépendants soient des semi-martingales. En effet, si Z_t a des incréments indépendants,

$$Y_t = Z_t - \sum_{s \leq t} \Delta Z_s \mathbb{1}_{\{|\Delta Z_s| \geq 1\}},$$

alors Z est une semi-martingale si et seulement si la fonction $t \rightarrow E[Y_t]$ est de variation bornée. Nous obtenons l'extension suivante du résultat classique d'Itô :

Théorème 3.3.1. [11] *Soit Z une semi-martingale ayant des incréments indépendants, $Z_0 = 0$. Soient f et g deux fonctions satisfaisant les conditions lipschitziennes. Soit X_0 tel que $X_0(\omega) = x$, lorsque $\omega = (x, \omega_1)$ et soit X_t une solution de*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^t g(s, X_s) ds. \quad (3.7)$$

Alors X_t est un processus de Markov fort.

Si Z est un processus de Lévy et f et g sont autonomes (c'est-à-dire, $f(t, x) = f(x)$, $g(t, x) = g(x)$), alors X_t est un processus de Markov fort (homogène dans le temps), avec sa transition le semi-groupe donné par

$$P_t h(x) = \mathbb{E}^{x,0}[h(X_t)].$$

Démonstration. Soit T un temps d'arrêt et $\mathcal{H}^T = \sigma\{Z_{T+u} - Z_T; u \geq 0\}$. Alors \mathcal{H}^T est une σ -algèbre dans Ω_1 et \mathcal{H}^T est indépendant de \mathcal{F}_T sous P^0 . Soit $\eta^0(x, s) = x$, définir $X(x, t, s)$ et pour $s > t$ définir inductive-ment $\eta^n(x, s)$ par

$$X_{x,t,s} = x + \int_t^s f(u, X(x, t, u^-)) dZ_u + \int_t^s g(u, X(x, t, u^-)) du. \quad (3.8)$$

$$\eta^{n+1}(x, s) = x + \int_t^s f(u, \eta^n(x, u^-)) dZ_u + \int_t^s g(u, \eta^n(x, u^-)) du.$$

Puisque η^n est une semi-martingale, il a des trajectoires càdlàg, donc (comme c'est facile à vérifier)

$$\eta^{n+1}(x, s) = \lim \sum_{u_i \in \mathcal{P}^m} f(u_i, \eta^n(x, u_i))(Z_{u_{i+1}} - Z_{u_i}) + \sum_{u_i \in \mathcal{P}^m} g(u_i, \eta^n(x, u_i))(u_{i+1} - u_i).$$

où la convergence est en probabilité P^0 et la limite est prise comme maillage $(\mathcal{P}^m) \rightarrow 0$, où \mathcal{P}^m sont des partitions de $[t, s]$. Un argument inductif montre $\eta^n \in \mathcal{H}^t$, et Le lemme 3.2.3 montre que $X(x, t, s) \in \mathcal{H}^t$. Par l'unicité des solutions (pour plus des détails voir [15] et [17]), on peut montrer $X_S^x = X(X(x, 0, T), T, S)$ pour les temps d'arrêt S, T avec $S \geq T$. Si X_t est la solution de 3.7, on écrit $X_t = X(X_0, 0, t)$ et aussi $X_t^x = X(x, 0, t)$. Par l'indépendance de \mathcal{F}_T et \mathcal{H}^T et en utilisant la proposition 3.2.1, nous avons pour tout $h \in b\mathcal{B}$ et les temps d'arrêt $S \geq T$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{x,0}[h(X_S)|\mathcal{G}_T] &= \mathbb{E}^0[h(X_S^x)|\mathcal{F}_T]\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \\ &= \mathbb{E}^0[h(X(X_T^x, T, S))|\mathcal{F}_T]\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \\ &= j(X_T^x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où

$$j(y) = \mathbb{E}^0[h(X(y, T, S))] = \mathbb{E}^{y,0}[h(X(X_0, T, S))]$$

, et la dernière égalité ci-dessus est la conséquence d'un lemme élémentaire dans Gihman et Skorohod [14].

On observe enfin que sous $P^{x,0}$ on a

$$j(X_T^x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}} = j(X_T). \quad (3.10)$$

Supposons maintenant que f et g soient autonomes, Z est un processus de Lévy et X_t est une solution de 3.7. Il est bien connu que pour un processus de Lévy Z , le processus $Z_{T+s} - Z_T$ est identique en droit à Z_s . Il est alors facile de vérifier que $X(x, T, T+u), u \geq 0$ est indépendant de \mathcal{F}_T et est identique en droit (sous P^0) à $X_u^x, u \geq 0$. Par 3.9 et 3.10 nous avons

$$\mathbb{E}^{x,0}[h(X_S)|\mathcal{G}_T] = j(X_T),$$

mais dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} j(y) &= \mathbb{E}^0[h(X(y, T, S))] \\ &= \mathbb{E}^0[h(X_{S-T}^y)] \\ &= \mathbb{E}^{y,0}[h(X_{S-T})] \end{aligned} \quad (3.11)$$

où la deuxième égalité ci-dessus est due à l'identification en droit de X_u^x et $X(x, T, T+u)$. Ceci complète la preuve du théorème 3.3.1.

Dans le théorème 3.3.1, nous avons supposé que le différentiel Z avait des incréments indépendants et on a pu conclure que la solution X de 3.7 était un processus de Markov fort.

Si nous affaiblissons les conditions sur Z de sorte que ce soit simplement un processus de Markov fort, la solution n'a pas besoin d'être Markov. Cependant, le processus vectoriel (X, Z) est un Processus de Markov. \square

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R} \times \Omega_1 \\ \mathcal{G}_t^0 &= \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_t^0 \\ P^{x,z} &= \varepsilon_x \times P^z \end{aligned} \quad (3.12)$$

Théorème 3.3.2. [11] Soit $Z = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \mathcal{Z}_t, P)$ une semi-martingale ayant la propriété de Markov (fort). On note 3.12 et soit X_t une solution de

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}) dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-}) ds.$$

où $X_0 \in \mathcal{M}_0$. Alors le processus vectoriel (X, Z) est Markov (fort) sur $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, P)$.

Démonstration. Soit $X(x, t, s)$ et $\eta^{n+1}(x, s)$ comme donné en 3.8. Alors les résultats de Doléans [15] et un argument inductif montre que $(x, t, \omega) \rightarrow \eta^n(x, t, \omega)$ est mesurable conjointement pour chaque n . Puisque $\eta^n(x, t, \omega) \rightarrow X(x, t, \omega)$ en probabilité P pour chaque x par le lemme 3.2.3, $-K \vee (\eta^n \wedge K)$ converge en (L^1, L^∞) vers $-K \vee (X \wedge K)$ pour chaque K .

Une application du lemme de Doob [16] donne que $(x, t, \omega) \rightarrow X(x, t, \omega)$ est conjointement mesurable. En effet, cela donne $X(x, t, \omega) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{H}^t$, où \mathcal{B} est l'ensemble Borel sur \mathbb{R} et $\mathcal{H}^t = \sigma\{Z_{t+u} - Z_u; u \geq 0\}$. Par l'unicité des solutions, on vérifie facilement que pour les temps d'arrêt $S \geq T$, $X_S = X(X_T, T, S)$. Soient $h \in b\mathcal{B}$ et $K \in b\mathcal{H}^t$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{h(X_t)K|\mathcal{M}_t\} &= h(X_t)\mathbb{E}\{K|\mathcal{M}_t\} \\ &= h(X_t)\mathbb{E}\{K|\mathcal{Z}_t\} \\ &= j(X_t, Z_t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donc

$$\mathbb{E}\{h(X_t)K|\mathcal{M}_t\} = \mathbb{E}\{h(X_t)K|X_t, Z_t\}.$$

Si Z est supposé être Markov fort, le précédent vaut pour les temps d'arrêt S, T . Le théorème suit maintenant par une application du théorème de classe monotone. Nous annonçons maintenant notre résultat principal. Observez que le temps a changé les processus de Lévy tels que ceux décrits dans l'expression :

$$\widehat{N}_{t \wedge \widehat{T}^n} = (\widehat{M}_t^n + \overline{F}_t^n - \widetilde{F}_t^n) + \widetilde{F}_t^n$$

satisfont aux conditions imposées à Z dans le théorème suivant. □

Théorème 3.3.3. [11] *Soit Z un processus de Hunt qu'est une semi-martingale universellement réductible.*

Soit A une fonction additive de Z . Soit f et g autonomes satisfont aux conditions lipschitziennes. Soit X_0 tel que $X_0(\omega) = x$, lorsque $\omega = (x, \omega_1)$, et soit X_t la solution de

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_{s-})dZ_s + \int_0^t g(X_{s-})dA_s. \quad (3.14)$$

Alors le processus vectoriel (X, Z) est un Markov fort, avec un semi-groupe de transition

$$P_t h(x, z) = \mathbb{E}^{x, z}[h(X_t, Z_t)].$$

Avant de prouver ce résultat, nous établissons une notation et un lemme. Pour u fixé, soit $\tilde{M}_t = M_t \circ \theta_u$, pour un processus M . Soit $\tilde{\mathcal{F}}_t = \theta_u^{-1}(\mathcal{F}_t)$. L'expression $C \cdot Y$ désigne l'intégrale stochastique $\int_0^t C_s dY_s$ pour une semi-martingale Y . le lemme suivant est utilisé dans la démonstration du théorème 3.3.3.

Lemme 3.3.1. *Soit Y une semi-martingale universellement réductible. Soit C un intégrant prévisible qui est borné universellement localement. Alors $\tilde{C} \cdot \tilde{Y} = \widetilde{C \cdot Y}$, pour tout u fixé.*

Démonstration. Soit $Y_t = Y_0 + M_t + B_t$ être une décomposition universelle et un arrêt (T^n) fois tendant à ∞ tel que M^{T^n} est une P^z martingale pour chaque n . Arrêt implicite Y à T^n pour certains n fixer, par Lemme 3.2.2 on peut écrire

$$M = N + B \quad (3.15)$$

où N est une martingale bornée localement (universellement), $B \in \psi$, et $N_0 = B_0 = 0$.

Soit $G \in \tilde{\mathcal{F}}_s$, où $G = H \circ \theta_u$, $H \in \mathcal{F}_s$. En arrêtant N si nécessaire nous supposons sans perte de généralité que N est borné. alors

$$\mathbb{E}^z[(\tilde{N}_t - \tilde{N}_s)G] = \mathbb{E}^z[\mathbb{E}^{Z_u}(N_t - N_s)H] = 0,$$

par conséquent \tilde{N} est une $\tilde{\mathcal{F}}_s$ martingale. Si M est une \mathcal{F}_t martingale de carré intégrable, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^z[(\tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle_t)G] &= \mathbb{E}^z[\mathbb{E}^{Z_u}[(M_t N_t - \langle M, N \rangle_t)H]] \\ &= \mathbb{E}^z[\mathbb{E}^{Z_u}[(M_s N_s - \langle M, N \rangle_s)H]] \\ &= \mathbb{E}^z[(\tilde{M}_s \tilde{N}_s - \langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle_s)G] \end{aligned} \quad (3.16)$$

et si $\langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle_t$ est $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -prévisible, par l'unicité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nous pouvons conclure

$$\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle_t = \langle \widetilde{M}, \widetilde{N} \rangle_t. \quad (3.17)$$

Soit $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ désignant l'algèbre prévisible pour une filtration (\mathcal{F}_t) . Soit $\mathcal{H} = \{Y \in b\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)\} : \tilde{Y} \in b\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{F}}_t)$. Alors \mathcal{H} contient clairement les processus continus à gauche et \mathcal{F}_t -adaptés, et donc un argument de classe monotone montre que le déplacement préserve prévisibilité.

Pour un processus $B \in \psi$, l'instruction $\tilde{C} \cdot \tilde{B} = \widetilde{C \cdot B}$ n'est qu'une notation.

Pour N borné localement, en utilisant 3.17 nous avons

$$\begin{aligned} \langle \tilde{C} \cdot \tilde{N} - \widetilde{C \cdot N}, \tilde{C} \cdot \tilde{N} - \widetilde{C \cdot N} \rangle &= (\tilde{C})^2 \cdot \langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle - 2\tilde{C} \cdot \langle \tilde{N}, \widetilde{C \cdot N} \rangle + \langle \widetilde{C \cdot N}, \widetilde{C \cdot N} \rangle \\ &= (\tilde{C})^2 \cdot \langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle - 2\tilde{C} \cdot (C \cdot \langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle) + (C^2 \cdot \langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle) \\ &= (\tilde{C})^2 \cdot \langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle - 2\tilde{C} \cdot \tilde{C} \cdot \langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle + (\tilde{C}^2) \cdot \langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Puisque $\tilde{C} \cdot \tilde{N}_0 - \widetilde{C \cdot N}_0 = 0$ implique que $\tilde{C} \cdot \tilde{N} = \widetilde{C \cdot N}$. Par l'utilisation de la décomposition 3.15 nous avons

$$\widetilde{C \cdot M} = \widetilde{C \cdot N} + \widetilde{C \cdot B} = \tilde{C} \cdot \tilde{N} + \tilde{C} \cdot \tilde{B} = \tilde{C} \cdot \tilde{M}$$

et le lemme est prouvé. □

Démonstration. du Théorème 3.3.3

Nous définissons $X(x, t, s)$ puis par induction $\mu^n(x, t, s)$ par $\mu^0(x, t, s) \equiv x$ et pour $s > t$,

$$\begin{aligned}\mu^{n+1}(x, t, s) &= x + \int_t^s f(\mu^n(x, t, u^-))dZ_u + \int_t^s g(\mu^n(x, t, u^-))dA_u \\ X(x, t, s) &= x + \int_t^s f(X(x, t, u^-))dZ_u + \int_t^s g(X(x, t, u^-))dA_u.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Nous écrivons également $X(x, t)$ pour $X(x, 0, t)$ et $\mu^n(x, t)$ pour $\mu^n(x, 0, t)$. Nous constatons que

$$\begin{aligned}\mu^1(x, t, s) &= x + f(x)(Z_s - Z_t) + g(x)(A_s - A_t) \\ &= (x + f(x)(Z_{s-t} - Z_0) + g(x)(A_{s-t} - A_0)) \circ \theta_t \\ &= \mu^1(x, s - t) \circ \theta_t.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Supposons $\mu^n(x, t, s) = \mu^n(x, s - t) \circ \theta_t$. On a donc

$$\begin{aligned}\mu^{n+1}(x, t, s) &= x + \int_t^s f(\tilde{\mu}^n(x, (u - t)^-))d\tilde{Z}_{u-t} + \int_t^s g(\tilde{\mu}^n(x, (u - t)^-))d\tilde{A}_{u-t} \\ &= x + \int_0^{s-t} f(\tilde{\mu}^n(x, u^-))d\tilde{Z}_u + \int_0^{s-t} g(\tilde{\mu}^n(x, u^-))d\tilde{A}_u \\ &= \left(x + \int_0^{s-t} f(\mu^n(x, u^-))dZ_u + \int_0^{s-t} g(\mu^n(x, u^-))dA_u \right) \circ \theta_t\end{aligned}\quad (3.21)$$

où la dernière égalité utilise le lemme 3.3.1. L'induction montre alors que pour tout n

$$\mu^n(x, t, s) = \mu^n(x, s - t) \circ \theta_t. \quad (3.22)$$

Nous établissons ensuite l'égalité

$$\mathbb{E}^z\{h(X(x, t, s), Z_s)|\mathcal{F}_t\} = \mathbb{E}^{Z_t}\{h(X(x, s - t), Z_{s-t})\} \quad (3.23)$$

Pour $h \in b\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ Considérons d'abord h de la forme $h(x, y) = h_1(x)h_2(y)$, avec h_i continu avec un support compact. Par le lemme 3.2.3 et la continuité uniforme de h_1 , $h_1(\mu^n(x, t, s)) \rightarrow h_1(X(x, t, s))$ dans la moyenne. En utilisant 3.22, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^z\{h_1(X(x, t, s))h_2(Z_s)|\mathcal{F}_t\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^z\{h_1(\mu^n(x, t, s))h_2(Z_s)|\mathcal{F}_t\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^z\{h_1(\mu^n(x, s - t))h_2(Z_{s-t}) \circ \theta_t|\mathcal{F}_t\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{Z_t}\{h_1(\mu^n(x, s - t))h_2(Z_{s-t})\} \\ &= \mathbb{E}^{Z_t}\{h_1(X(x, s - t))h_2(Z_{s-t})\}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Un argument de classe monotone donne maintenant 3.23. Notons que 3.23 est également valable pour temps d'arrêt $S \geq T$.

Soit (X_t) tel que donné en 3.14, et fixons une mesure $P^{x,z}$. Soit X_t^x la solution de

$$X_t^x = x + \int_0^t f(X_{u-}^x)dZ_u + \int_0^t g(X_{u-}^x)dA_u \quad (3.25)$$

Pour la loi P^z sur Ω_1 . Soit $h \in b\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, $F \in b\mathcal{F}_t^0$, et $k \in b\mathcal{B}$. Utilisation de la proposition 3.2.1 on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x,z}[h(X_s, Z_s)Fk(X_0)] &= \mathbb{E}^z[h(X_s^x, Z_s)F]k(x) \\ &= \mathbb{E}^z[h(X(X_t^x, t, s), Z_s)F]k(x)\end{aligned}\quad (3.26)$$

Par l'unicité des solutions. Comme l'a montré la preuve du théorème 3.3.2, X_t^x est mesurable conjointement en (x, t, ω) . Un argument de classe monotone donne alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^z[h(X(X_t^x, t, s), Z_s)F]k(x) &= \mathbb{E}^z[\mathbb{E}^z[h(X(X_t^x, t, s), Z_s)|\mathcal{F}_t^0]F]k(x) \\ &= \mathbb{E}^z[\mathbb{E}^z[h(X(y, k, s), Z_s)|\mathcal{F}_t^0]|_{y=X_t^x}F]k(x) \\ &= \mathbb{E}^z[\mathbb{E}^{X_t^x, z}[h(X(X_0, t, s), Z_s)|\mathcal{G}_t^0]F]k(x) \\ &= \mathbb{E}^{x,z}[\mathbb{E}^{X_t, z}[h(X(X_0, t, s), Z_s)|\mathcal{G}_t^0]Fk(X_0)].\end{aligned}\quad (3.27)$$

Ensemble 3.26 et 3.27 établissent que

$$\mathbb{E}^{x,z}[h(X_s, Z_s)|\mathcal{G}_t] = \mathbb{E}^{X_t, z}[h(X(X_0, t, s), Z_s)|\mathcal{G}_t^0]. \quad (3.28)$$

Soit

$$j(y) = \mathbb{E}^{y,z}[h(X(X_0, t, s), Z_s)|\mathcal{G}_t^0]. \quad (3.29)$$

Alors $j(y)$ est aussi une version de $\mathbb{E}^z[h(X(y, t, s), Z_s)|\mathcal{F}_t]$, et ainsi

$$\begin{aligned}j(y) &= \mathbb{E}^{Z_t}[h(X(y, s-t), Z_{s-t})] \\ &= \mathbb{E}^{y, Z_t}[h(X_{s-t}, Z_{s-t})]\end{aligned}\quad (3.30)$$

où nous avons utilisé 3.23 et 3.2.1. Combinaison des rendements 3.28, 3.29 et 3.30

$$\mathbb{E}^{x,z}[h(X_s, Z_s)|\mathcal{G}_t] = \mathbb{E}^{X_t, Z_t}[h(X_{s-t}, Z_{s-t})].$$

Pour montrer que (X, Z) est un Markov fort, il suffit de montrer

$$\mathbb{E}^{x,z}[h(X_{T+s}, Z_{T+s})|\mathcal{G}_t] = \mathbb{E}^{x,z}[h(X_{T+s}, Z_{T+s})|X_T, Z_T]$$

pour tout temps d'arrêt T , et $s > 0$. La preuve de 3.23 est valable pour les temps d'arrêt. Pour $h \in b\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x,z}[h(X_s, Z_s)|\mathcal{G}_t] &= \mathbb{E}^z\{h(X_{T+s}^x, Z_{T+s})|\mathcal{F}_t\} \\ &= \mathbb{E}^z\{h(X(X_{T+s}^x, T, T+s), Z_{T+s})|\mathcal{F}_t\}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Pour un P^z fixe on sait que $X(x, T, T+s, \omega)$, la solution relative à $(\Omega, \mathcal{F}^z, \mathcal{F}_t^z, P^z)$, est mesurable conjointement ; il suffit de constater que pour $h_1, h_2 \in b\mathcal{B}$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^z\{h_1(X_T^x)h_2(X(y, T, T+s), Z_{T+s})|\mathcal{F}_t\} &= h_1(X_T^x)\mathbb{E}^{Z_T}\{h_2(X(y, s), Z_s)\} \\ &= j(s, X_T, Z_T)a.s, P^{x,z}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Ceci complète la preuve du théorème 3.3.3. \square

Algorithme 1(Construction algorithmique de la chaîne de Markov en temps continu)

- Soit $X_n, n \geq 0$, une chaîne de Markov à temps discret de matrice de transition Q . Soit la distribution initiale de cette chaîne soit notée α de sorte que $P\{X_0 = k\} = \alpha_k$.
- Soit $E_n, n \geq 0$, une suite de variables aléatoires exponentielles unitaires indépendantes.

Construction algorithmique :

1. Sélectionnez $X(0) = X_0$ selon la distribution initiale α .
2. Soit $T_0 = 0$ et définissant $W(0) = E_0/\lambda(X(0))$, qui est exponentielle avec le paramètre $\lambda(X(0))$, pour être le temps d'attente dans l'état $X(0)$.
3. Soit $T_1 = T_0 + W(0)$, et définissant $X_t = X(0)$ pour tout $t \in [T_0, T_1)$
4. Soit X_1 choisi en fonction de la matrice de transition Q , et définissant $W(1) = E_1/\lambda(X_1)$.
5. Soit $T_2 = T_1 + W(1)$ et définissant $X_{(t)} = X_1$ pour tout $t \in [T_1, T_2)$
6. Continuez le processus.

3.4 Explosions

Maintenant nous avons une bonne idée de ce qu'est une chaîne de Markov en temps continu, nous démontrons un comportement qui n'est pas possible dans la mise à l'heure discrète : les explosions. Rappel que dans l'algorithme 1 [3.3](#), qui construit une chaîne de Markov en temps continu, la valeur T_n représente le temps de la nième transition de la chaîne. Par conséquent, la chaîne ainsi construit n'est défini que jusqu'au moment (aléatoire)

$$T_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n.$$

Si $T_\infty < \infty$, alors nous disons qu'une explosion s'est produite [\[13\]](#).

Définition 3.4.1. *Si*

$$P_i\{T_\infty = \infty\} \stackrel{\text{def}}{=} P\{T_\infty = \infty \mid X(0) = i\} = 1, \text{ pour tout } i \in S,$$

que nous dirons que le processus est non explosif. Sinon, nous dirons que le processus est explosif. Notez qu'un processus peut être explosif même si

$$P_i\{T_\infty = \infty\} = 1,$$

3.5 Convergence d'une chaîne de Markov vers une diffusion

L'objectif de cette section est d'énoncer un théorème permettant de démontrer la convergence en loi d'une suite de chaînes de Markov convenablement renormalisées en temps vers un processus de diffusion dont les coefficients de diffusion et de dérive sont explicites et on termine notre section par des exemples illustratifs montrant l'importance de la propriété Markovienne dans des différents phénomènes de la vie courante. Le résultat suivant montre que la convergence en loi d'une suite de chaînes de Markov vers un processus de diffusion se lit sur un pas de la chaîne.

Théorème 3.5.1. *Soit A le générateur infinitésimal d'un processus de diffusion, c'est-à-dire que, pour toute fonction régulière f ,*

$$Af(x) = \frac{1}{2}a(x)f''(x) + b(x),$$

avec a et b régulières. Soit $(\mu_N)_N$ une suite de noyaux de transition sur \mathbb{R} et posons

$$b_N(x) = N \int_{|y-x| \leq 1} (y-x) \mu_N(x, dy)$$

et

$$a_N(x) = N \int_{|y-x| \leq 1} (y-x)^2 \mu_N(x, dy).$$

Supposons que pour tous $r > 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{|x| \leq r} |b_N(x) - b(x)| \rightarrow 0, \text{ et } \sup_{|x| \leq r} |a_N(x) - a(x)| \rightarrow 0$$

et

$$\sup_{|x| \leq r} N \mu_N(x, \{y, |y-x| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0.$$

Soit $(Y^N(n))_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov de noyau de transition μ_N et X^N le processus défini par $X_t^N = Y^N([Nt])$.

Si $(Y^N(0))_N$ converge en loi vers ν alors (X^N) converge en loi vers la diffusion de générateur A et de loi initial ν . [12]

Remarque 3.5.1. *En pratique, la chaîne de Markov Y^N est en général à valeurs dans un sous-ensemble I_N discret (et souvent fini) de \mathbb{R} . Ainsi, son noyau de transition n'est-il pas défini sur tout \mathbb{R} . Dans ce cas, il convient d'adapter le théorème ci-dessus en remplaçant x par une suite (x_N) telle que $x_N \in I_N$ et qui converge vers x .*

3.6 Quelques exemples d'application des processus Markoviens en pratique

La convergence des processus de Markov se voit sur la convergence des générateurs infinitésimaux en toute généralité.

3.6.1 File d'attente en temps continu et processus d'Ornstein-Uhlenbeck

File d'attente : La salle de réservation d'une grande gare SNCF donne une bonne représentation d'une file d'attente. Elle comprend un certain nombre de guichets et des clients qui sont soit en train d'être servis, soit en attente qu'un guichet se libère. Le nombre total de ces clients présents dans la salle de réservation au temps t est noté N_t . Le hasard intervient dans les arrivées des clients ainsi que dans la durée des services. La suite $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique à temps continu et à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. L'objectif est d'étudier l'évolution de N_t au cours du temps afin d'optimiser le nombre de guichets nécessaires pour satisfaire en un temps raisonnable les clients .

On montre ici un exemple de chaîne de Markov à temps continu célèbre qui converge vers un processus de diffusion non moins célèbre. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. On définit le processus de Markov Z à temps continu à valeurs dans \mathbb{N} de générateur infinitésimal A donné par

$$A(i, j) = \begin{cases} \lambda & \text{si } j=i+1, \\ i\mu & \text{si } j=i-1, \\ -(\lambda + i\mu) & j=i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partant de i , le processus Z reste un temps exponentiel de paramètre $\lambda + i\mu$ puis saute en $i + 1$ avec probabilité $\lambda/(\lambda + i\mu)$ ou en $i - 1$ avec probabilité $i\mu/(\lambda + i\mu)$. Ce processus s'appelle la file $M/M/\infty$: elle modélise le nombre de clients dans une file d'attente où les personnes arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ et sont servis aussitôt arrivés en un temps exponentiel de paramètre μ . On peut se convaincre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}(Z_t | Z_0=k) = \mathcal{B}(k, e^{-\mu t}) * \mathcal{P}\left(\lambda \frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu}\right)$$

.

En particulier, Z admet $\mathcal{P}(\lambda/\mu)$ pour mesure invariante (symétrique) pour plus des détails voir[12].

Proposition 3.6.1. Pour tout $N \geq 1$, notons Z^N le processus $M/M/\infty(N\lambda, \mu)$ et

X^N le processus défini par

$$X_t^N = \sqrt{N} \left(\frac{Z_t^N}{N} - \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

avec

$$Z_0^N = [N\lambda/\mu + \sqrt{N}x].$$

Alors la suite (X^N) converge en loi vers le processus de diffusion X solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \sqrt{2\lambda} dB_t - \mu X_t dt \text{ avec } X_0 = x$$

,

c'est-à-dire vers un processus d'Ornstein-Uhlenbeck [12].

3.6.2 Modèles de croissance de populations

Modélisons la taille d'une population par un processus de vie et mort à temps continu dont la dynamique est la suivante ; Chaque individu meurt avec un taux μ et se dédouble avec un taux λ indépendamment des autres. Nous allons supposer que la population et le temps sont grands (mesurés en unités de taille N). [12]

Si $\lambda - \mu$ n'est pas de l'ordre de $1/N$ cette renormalisation sera triviale (la population devient nulle ou infinie immédiatement).

Supposons que $N(\lambda - \mu) = b$ et $\lambda + \mu = 2a + O(1/N)$. Si X_t^N est le nombre d'individus du processus au temps t , on considère qu'il y a NX_t^N dans notre population. Chacun des X_t^N individus a deux horloges exponentielles qui tournent au dessus de sa tête. L'instant (aléatoire) où un évènement (mort ou division) va se produire est donc de loi $\mathcal{E}(N(\lambda + \mu))$ et il s'agit d'une mort avec probabilité $\mu/(\lambda + \mu)$.

Pour le processus Y^N , chaque individu meurt avec un taux μ_N et se dédouble avec un taux λ_N indépendamment des autres et on note X^N le processus défini par $X^N(t) = Y^N([tN])/N$. Le processus X^N est à valeurs dans $K_N = (1/N)\mathbb{N}$ et son générateur infinitésimal est défini par

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, L_N \left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N} \right) = \begin{cases} i\lambda_N & \text{si } j=i+1, \\ i\mu_N & \text{si } j=i-1, \\ -i(\lambda_N + \mu_N) & j=i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, pour toute fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^+ ,

$$\begin{aligned} L_N f \left(\frac{i}{N} \right) &= i\lambda_N \left[f \left(\frac{i+1}{N} \right) - f \left(\frac{i}{N} \right) \right] + i\mu_N \left[f \left(\frac{i-1}{N} \right) - f \left(\frac{i}{N} \right) \right] \\ &= (\lambda_N - \mu_N) \frac{i}{N} f' \left(\frac{i}{N} \right) + \frac{\lambda_N + \mu_N}{2N} \frac{i}{N} f'' \left(\frac{i}{N} \right) + O \left(\frac{(\lambda_N + \mu_N)i}{N^3} \right). \end{aligned}$$

Supposons que $\lambda_N - \mu_N$ converge vers b et $(\lambda_N + \mu_N)/N$ converge vers $2a$ en choisissant par exemple

$$\lambda_N = aN + \frac{b}{2} \text{ et } \mu_N = aN - \frac{b}{2}$$

On obtient alors que si $(x_N)_N$ est une suite de réels telle que $x_N \in K_N$ pour tout N et qui converge vers $x > 0$ alors

$$L_N f(x_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} Lf(x) := axf''(x) + bx f'(x).$$

La suite de processus de Markov à espaces d'états discrets converge donc vers une diffusion X solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = \sqrt{2aX_t}dB_t + bX_t dt.$$

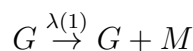
Donc la diffusion X (solution de l'équation différentielle stochastique) permet de trouver la suite de chaîne de Markov X_t^N dans les deux exemples :

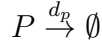
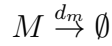
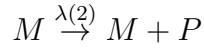
- La file M/M/ ∞ .
- Le nombre des individus du processus au temps t .

grâce à la convergence en loi d'une suite de chaîne de Markov vers un processus de diffusion.

3.6.3 Les ARNm molécules(acide ribonucléique nucléique messenger)

On va modéliser le comportement dynamique d'un seul gène(les molécules de ARNm produites, les protéines résultantes) via une chaîne de Markov en temps continu. C'est une question tout à fait raisonnable de se demander s'il est logique de modéliser les temps de réaction de tels processus cellulaires via des variables aléatoires exponentielles. la réponse est presque indubitablement «non», mais le modèle doit être interprété comme une approximation de la réalité et il a très bien réussi à élucider la dynamique cellulaire. C'est aussi un modèle beaucoup plus réaliste qu'une approche classique d'équations différentielles ordinaires, qu'est elle même une approximation grossière du modèle de chaîne de Markov en temps continu. Considérons un seul gène qui produit de l'ARNm (ce processus est appelé transcription) avec un taux constant de λ_1 , où les unités de temps sont des heures, par exemple. De plus, nous supposons que les molécules d'ARNm produisent des protéines (ce processus est appelé traduction) à un taux de $\lambda_2 \cdot (\#ARNm)$, pour certains $\lambda_2 > 0$. Ensuite, nous supposons que l'ARNm les molécules sont diminués à un taux de $d_m \cdot (\#ARNm)$, et les protéines sont dégradé à un taux de $d_p \cdot (\#protines)$. Graphiquement, nous pouvons représenter ce système via





Il est important de noter que ce n'est pas la seule façon d'écrire ces réactions. Par exemple, beaucoup dans les communautés biologiques écriraient $M \rightarrow P$, par opposition à $M \rightarrow M + P$. Cependant, nous pensons qu'il est important de souligner, à travers la notation $M \rightarrow M + P$, que la molécule d'ARNm n'est pas perdue au cours de la réaction. Comme le nombre de gènes dans le modèle est supposé constant dans le temps, l'état d'espace doit être considéré comme $Z_{\geq 0}^2$. Par conséquent, on laisse $X_{(t)} \in Z_{\geq 0}^2$ être l'état du processus au temps t où le premier composant donne le nombre de molécules d'ARNm et le second donne le nombre de protéines.

Maintenant, nous demandons : quelles sont les transitions possibles dans le modèle, et quelles sont les taux ? On voit que les transitions possibles sont données par addition de la réaction des vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

avec taux respectifs

$$\lambda_1, \lambda_2 X_1(t), d_m X_1(t), d_p X_2(t).$$

Notez que la vitesse de réaction 3, respectivement 4, sera nulle lorsque $X_1(t) = 0$, respectivement $X_2(t) = 0$. Par conséquent, la non-négativité des molécules est assurée [13].

Conclusion générale

Dans ce mémoire, je me souciais aux processus de Markov en temps continu qui sont des processus stochastiques ayant la propriété de Markov (qui signifie que pour définir le futur il suffit seulement le présent), ce type de processus se trouve dans deux cas :

1. Le 1er cas, les processus Markoviens de sauts comme étant la généralisation des chaînes de Markov au temps continu en remplaçant le pas de temps fixe d'une chaîne de Markov par des intervalles de temps aléatoires indépendants de loi exponentielle donc sont des processus stochastiques $\{X_t\}_{t \geq 0}$ à espace d'états $\{E = N\}$ et d'instants de sauts $(S_n)_{n \in N}$ et l'exemple le plus connu et utilisé c'est le processus de Poisson, je trouve aussi que les processus de naissance et de mort sont des cas particuliers de processus de Markov en temps continu, leurs applications apparaissent dans la dynamique des populations et la théorie des files d'attente, et on a vu que les chaînes de Markov intégrées sont les processus de Markov en temps continu.
2. Le 2 ième cas, les processus de Markov en temps continu à espace d'états continu où le mouvement brownien est la brique fondamentale pour construire des processus de Markov continue sur $(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^n)$.

J'ai étudié la propriété Markovienne qui joue un rôle important dans l'analyse stochastique, j'ai détaillé aussi des calculs compliqués trouvés dans des différentes références utilisées, et j'ai présenté des applications liées à la vie quotidienne, les systèmes des files d'attentes $M/M/\infty$ et l'ARN message mais j'ai trouvé un peu de difficulté en raison du manque de références puisque la plupart des applications se font en temps discret.

Bibliographie

- [1] Léonard Gallardo, Mouvement brownien et calcul d'Itô (cours et exercices corrigés), edition (Hermann).
- [2] David coupier, Processus stochastiques, université Polytech-Lille, 2011.
- [3] William J. Anderson, Continuous - Time Markov Chains, Springer-Verlag, 1991.
- [4] Continuous - Time Markov chains, chapter 5, Downloaded by [Cornell University] at 16 :28 03 August 2016.
- [5] Ouvrard.J.Y, Probabilités 2 (Maîtrise, Agrégation), edition Cassini, 2000.
- [6] Jean-François le GALL, Calcul stochastique et processus de Markov, Notes de Cours de Master 2, 2010-2011, Université Paris-Sud, Master Probabilités et Statistiques, Septembre 2010.
- [7] Jean-Christophe BRETON, Processus stochastique M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, Septembre-Octobre 2019.
- [8] Monique Jeanblanc, Cours de Calcul stochastiques, Master2IF EVRY(france), septembre 2006.
- [9] Springer-Verlag, [Bar94] G.Barles, Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi, Math. Appl., vol. 17, Paris, 1994.
- [10] Jean-Christophe BRETON, Calcul stochastique M2 Mathématiques , Université de Rennes 1, Septembre-Décembre 2014.
- [11] Philip Protter, Markov Solutions of Stochastic Differential Equations, by Springer-Verlag 1977, Mathematics Department, Duke University, Durham, N.C. 27706, USA.
- [12] Djalil Chafaï and Florent Malrieu, Modèles markovien en biologie, Master 2 Recherche en Mathématiques Appliquées Universités de Rennes I et de Toulouse III, Version préliminaire - Mars 2007.
- [13] William J. Anderson, Continuous Time Markov Chains - Chapter 6, Springer-Verlag, 1991.
- [14] Gihman I.I, Skorohod .A.V, Stochastic Differential Equations, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1972.

- [15] Doléans. C, Intégrales Stochastiques Dépendant d'un Paramètre, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 16, 23-35 (1967).
- [16] Meyer, P.A., Probability and Potentials. Toronto : Blaisdell 1966.
- [17] Protter, P.E. : Right Continuous Solutions of Systems of Stochastic Integral Equations. J. of Multivariate Anal.7, 204-214 (1977).
- [18] William J. Anderson, Continuous Time Markov Chains an application-oriented approach, Springer-Verlag New York Inc, 1991.
- [19] Kolmogorov, A. N, Uber die analytischen methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104,415-458, (1931).
- [20] Karlin, S, and McGregor, J. Coincidence probabilities. Pacific J. Math. 9, 1141-1164, (1959b).
- [21] Kendall, D. G, and Reuter, G. E. H, The calculation of the ergodic projection for Markov chains and processes with a countable infinity of states. Acta Mathematica 97,101-144, (1957).