République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Équations Différentielles Fonctionnelles Stochastique avec Retard

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité: Analyse Stochastique, Statistique des Processus et Applications

par

Meriem **H**AMRI[1]

Sous la direction de

Dr k. Mehdi

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

Mme. BENZIADI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mme. MEHDI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr. KANDOUCI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mlle. BENZIADI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

[1]e-mail: meriem-hamri@yahoo.com

Remerciement

Tout d'abord, je remercie DIEU le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée durant ma vie.

Je tiens à remercier particulièrement à mon encadreur, Madame " Khadem Mehdi" d'avoir encadré ce travail, m'a l'aisser une grande liberté tout au long de ce mémoire. Elle a toujours été à mon écoute et d'un aide précieuse.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.
Mme.F.BENZIADI, Pr.A. KANDOUCI, Mlle.F.BENZIADI
Je tiens à remercier mes enseignants du primaire, moyen, lycée et d'université
A tous ceux qui nous ont guidés avec gentillesse et effcacité

Un grand merci a mes collégues pour le soutien qui m'ont donnés .

Merci a tous ceux qui m'ont aidé de prés ou loin à réaliser ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail
A mes trés chers parents
A mes fréres: Ahmed, Abderrahim,et Youcef Iyad
A mes trés chers amies kenza ,sihem et chahira.

CONTENTS

Remerciement **i**

Dédicaces **ii**

Abstrat- Résumé **v**

Introduction Générale **1**

1 Préliminères **4**

1.1 Définitions de Base 4

1.1.1 Processus stochastique 4

1.1.2 Régularité des trajectoires 7

1.1.3 Autosimilarité 8

1.1.4 Processus gaussien 9

1.2 Mouvement Brownien 9

1.3 Mouvement Brownien Fractionnaire 11

1.3.1 Propriétés du Mouvement Brownien fractionnaire 12

1.4 La représentation du mouvement Brownien fractionnaire 13

1.4.1 Représentation par Moyenne Mobile 13

1.4.2 Représentation harmonizable 14

1.4.3 Représentation de Levy-Hida 14

1.5 Espace de Banach 15

1.5.1 Le principe de contraction de Banach 16

1.6 Rappels sur les équations différentielles fonctionnelles à retard 17

1.6.1 Définitions 18
1.6.2 Théorème d'existance et unicité de solution 19
1.6.3 Intégration par la méthode des pas 19
1.7 La fonction Gamma 21
1.7.1 Définition de la fonction Gamma 21
1.8 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 22

2 Équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Riemann-liouville dans l'espace des fonctions sommables 25
2.1 Hypothèses 26
2.2 L'équivalence du problème fractionnaire avec son équation intégrale correspondante 27
2.3 Existence et unicité de la solution pour le problème du type Cauchy 28

3 Solution faible presque périodique pour les équations différentielles fonctionnelles stochastique à retard dirigée par un MBF 34
3.1 Notions et Définitions 34
3.2 Solutions faible presque périodiques 39
3.3 Example 42

Bibliographie 45

Abstrat

In the present master thesis, we seek to introduce the mean properties of the fractional Brownian motion and to study the stochastic delay functional differential equations driven by a fractional Brownian motion.

First, we give some preliminary background of stochastic processes and stochastic integration in order to solve functional differential equations with delay, then we give an overview on the existence and uniqueness of the solution of a Nonlinear fractional differential problem of the voltérra type with delay in a finite interval . The results of existence and uniqueness are proved using the theorem of the Banach fixed point. Next, we establish the result of the existence of quadratic mean soft almost periodic solutions of a functional differential equations directed by fractional Brownian motion with Hurst parameter $H > \frac{1}{2}$, under certain appropriate assumptions, by means of semi-group of operators and the method fixed point.

Keywords: Fractional stochastic differential equation, Fixed point principle, Infinite delay, Fractional Brownian motion, Functional differential equations stochastic with delay, Almost periodic, quadratic mean solution.

Résumé

Dans ce travail, nous cherchons à présenter les propriétés du mouvement Brownien fractionnaire, et à étudier les équations stochastiques différentielles avec retard dirigées par le mouvement Brownien fractionnaire.
Premièrement nous donnons quelques notions préliminaires sur les processuses stochastiques et l'intégration stochastique afin de résoudre des équations différentielles fonctionnelle avec retard, puis nous donnons un aperçu sur l'éxistence et l'unicité de la solution d'un problème différentiel fractionnaire non linéaire du type voltérra avec retard dans un intervalle fini . Les résultats l'éxistence et l'unicité sont prouvés en utilisant le théorème du point fixe de Banach. Ensuite, nous établissons le résultat de l'existence des solutions presque périodiques à moyenne quadratique d'une équation différentielle fonctionnelle dirigée par le mouvement Brownien fractionnaire avec paramètre de Hurst $H > \frac{1}{2}$, sous certaines hypothèses appropriées, au moyen de semi-groupe d'opérateurs et de la méthode de point fixe.

Mots clés: Équation différentielle stochastique fractionnaire, Principe de point fixe, Retard infini, Mouvement brownien fractionnaire, Les équations différentielles fonctionnelles stochastique avec retard, Solution presque périodique à moyen quadratique.

Introduction générale

En 1993, F.Russo et P.Vallois ont jeté les premiers bases d'un calcul stochastique, généralisant ceux plus classique d'Itô et Stratonovitch et dont des intérêts est qu'il permet de donner un sens à des intégrales contre des processus qui ne sont pas forcément des semimartingales.

Les processus gaussiens fournissent de nombreux exemples de processus qui ne sont pas des semimartingales. Parmi les processus gaussiens le mouvement Brownien fractionnaire est trés utilisé, sa fonction de covariance étant particulièrement simple. C'est pourquoi, dans la suite, ce processus sera plus utilisé pour tester les résultats généraux que nous établirons. Le mouvement Brownien fractionnaire(MBF) $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ avec le paramètre de Hurst $H \in (0,1)$ est une moyenne null avec fonction de covariance

$$K_H(s,t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \tag{1}$$

De (1) on déduit que $E(|B_t^H - B_s^H|) = |t-s|^{2H}$ et par conséquence les trajectoires de B^H sont presques sûre localement β-hölderiennes continus, pour tout $\beta \in (0,1)$, étant donné que B^H n'est pas un semimartigale si $H \neq \frac{1}{2}$ on ne peut pas utilisé la théorie classique d'Itô, pour construire un calcul stochastique par rapport à MBF on peut utilisé une approche par chemain pour définir les intégrales par rapport MBF avec le paramètre $H > \frac{1}{2}$ et cette méthode est basé sur le calcule fractionnaire .

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées des ordres entiers (classiques) à des ordres non-entiers.

La théorie des dérivées de l'ordre non-entier ne soit pas nouveau, ces origines remontent à la fin du 17^{me} sciècle, le moment où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcule d'intégral différentiel. Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ pour désigner la n^{ime} dérivée d'une fonction f. Quand il a signalé cela dans une lettre à l'Hôpital, qui posa la question si $n = \frac{1}{2}$?, Leibniz réponds qu'il s'agit là d'un paradoxe, mais qu'un jour.
Les avantages des dérivés fractionnaires deviennent apparents dans la modélisation des propriétés mécaniques et électriques des matériaux réels et dans de nombreux autres domaines.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle.

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie de point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans nombreux problèmes non linéaires différents.

l'objectif de ce mémoire est d'appliquer cette dernière technique pour étudier certaines classes d'équations différentielles à retard, qui surviennent dans certains modèles dont l'état à un instant donné, est une fonction qui dépend de son passé. On peut rencontrer ces équations dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie ... etc. En effet, dans certains phénomènes, on s'est aperçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrire l'évolution sur un intervalle de temps donné. Plus précisément, nous intéressons de la périodicité. La théorie de presque périodicité a été développée dans le cadre des problémes liés aux équations différentielles, systèmes dynamiques et les autres domaines des mathématiques.

le travail réalisé dans ce mémoire a pour étudier des équations différentielles stochastiques fonctionnelles avec retard dirigé par un mouvement Brownien fractionnaire.

Le sujet principal est l'étude de l'existance et unicité des solutions faible presques périodiques à moyenne quadratique .

On a structuré ce manuscrit en trois chapitres.

Le premier chapitre, est introductif contient des préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit , des rappels concernant les équations différentielles fonctionnelles avec retard, notions de base sur calcul stochastique, une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent et le théorème du points fixe de banach est aussi présenté dans cette partie comme outil essentiel permettant de prouver l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Le deuxième chapitre, contient le premier résultat originale de ce mémoire qui consiste à démontrer l'existance et l'unicité d'un problème différentiel fractionnaire non linéaire du type voltérra avec retard suivant :

$$\begin{aligned}
(D_{0^+}^{\alpha}x)(t) &= f\Big[t, x_t, \int_0^t K(t,s,x_s)ds\Big], \qquad t>0, \quad 0<\alpha<1 && (2)\\
(I_{0^+}^{1-\alpha}x)(0^+) &= \tau, \qquad \tau\in\mathbb{R} && (3)\\
x(t) &= \varphi(t) \qquad t\in[-\tau,0] && (4)\\
x_t(\theta) &= x(t+\theta) \qquad \theta\in[-\tau,0]. && (5)
\end{aligned}$$

Dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans l'espace $\mathbf{L}^{\alpha}$ défini dans un intervalle fini $[0,\tau]$ pour tout $0<\alpha<1$.

Le troisième chapitre, qui est consacré à l'étude d'existance d'une solution faible presque périodique à moyenne quadratique pour les équations differentielles fonctionnelles à retard

$$\begin{aligned}
dx(t) &= (Ax(t)+b(t,x(t),x_t))dt+\sigma_H(t)dB_Q^H(t), \quad t\in[0,T],\\
x(t) &= \varphi(t), \quad -r\le t\le 0, \quad r\ge 0,
\end{aligned} \qquad (6)$$

Où $B_Q^H=\{B_Q^H(t), t\in[0,T]\}$ est un mBf indice de Hurst.$H\in(\frac{1}{2},1)$
Certains conditions suffisantes sur l'opérateur $\mathbf{A}$ et les coefficients $\mathbf{b}, \sigma_{\mathbf{H}}$, assurant l'existance des solutions faibles presque périodique à moyenne quadratique .

Le mémoire se termine par une conclusion, dans lequel nous résumons les principaux résultats de ce travail.

CHAPTER 1

PRÉLIMINÈRES

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions, propriétés et lemmes fondamentaux, qui seront utilisés tout au long du travail. Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre ,on peut référer aux [6],[8],[11],[16] et [12]

1.1 Définitions de Base

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1.1. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une famille de variables aléatoires indexées par un ensemble de temps T, toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ζ) appelé espace d'états du processus $X : (t, \omega) \to X_t(\omega)$.*
En général $T = [0, T] = [0, 1] = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$.
Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

- *Pout $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;*
- *Pour $\omega \in T$ fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.1.2. *On appelle loi fini-dimentionnelle d'un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ l'ensemble des lois*

$$\{\mathcal{L}(X_{t_1}, ..., X_{t_p}) : t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}.$$

qui est caracterisé la loi $\mathbb{P}_X$ du processus X.

Définition 1.1.1.3. *Etand donné deux processus stochastiques X et Y,*

- *Deux processus X et Y ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \in N^*$ et $t_1, ..., t_p \in T$,*

  $$(X_{t_1}, ..., X_{t_p}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_p})$$

  On écrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$,

- *On dira que Y est une version (ou une modification) du processus X si pour tout $t \in T$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$*

- *Deux processus sont dit indistinguables si $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1$.*

Définition 1.1.1.4. *Un processus est dit:*

- ***stastionnaire*** *si pour tout $h \geq 0$, $(X_{t+h})_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_t)_{t\geq 0}$ ne dépent pas de h .*

- *à **accroissements stationnaires** si la loi des accroissements $X_{t+h} - X_t$ ne dépent pas de t,ie $X_{t+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_h$*

- *à **accroissements indépendants** si pour tout $p \geq 1$ et $0 < t_1 < t_2 < ..... < t_p$ les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1} ..., X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ sont indépendantes.*

Définition 1.1.1.5. *Un processus X est à variation finie sur $[0, T]$ si pour tout famille de subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n = T$ on a:*

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

qui converge en probabilité vers une variable aléatoire Y. dans ce cas Y sera appelée la variation quadratique X

Soit $(t_i^n)_{i=0}^{N(n)}$ une subdivision de $[0,T]$ et

$$\delta(n) = \sup_i^{N(n)}(t_{i+1}^n - t_i^n).$$

Définition 1.1.1.6. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur cet espace est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$.*

Définition 1.1.1.7. *Soit $(\mathbb{F}_t)_{t\in T}$ Une filtration est :*

- *Complète si les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}_\infty$ sont dans $\mathcal{F}_0$ et si l'espace de probabilité est complet,*
- *Continue à droite si $\mathcal{F}_{t_+} = \mathcal{F}_t$, $\forall > 0$ oú $\forall > 0$, $\mathcal{F}_{t_+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$*
- *Satisfait les conditions habituelles, si elle est continue à droite et complète.*

On note $\bar{\mathbb{F}} = (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ la plus petite filtration qui contient $\mathbb{F}$ est satisfait les conditions habituelles.

Définition 1.1.1.8. *On dit qu'un processus X est mesurable si l'application*

$$(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$$

définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ muni de la tribu $\mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ est mesurable. Un processus est dit adapté si pour tout $t \geq 0, X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Le processus X est dit progressif si, pour tout $t \geq 0$ l'application

$$(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$$

est mesurable sur $[0,T] \times \Omega$ muni de la tribu $\mathbb{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_t$, où $\mathbb{B}([0,T])$ est la tribu de Borel.

Définition 1.1.1.9. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathbb{F}_t)_t$ une filtration de cet espace.*

Une famille adapté $(M_t)_{t\geq 0}$ *de variables intégrables (i.e vérifiant* $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$ *pour tout* t *) est*

- *Une martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/F_s) = M_s$.
- *Une surmartingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/F_s) \leq M_s$.
- *Une soumartingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/F_s) \geq M_s$.

Définition 1.1.1.10. *Soit* $\mathbb{H}^2$ *l'espace des martingales continues bornées et de carré intégrable, On définit un produit scalaire sur* $\mathbb{H}^2$ *par* $(M, N) = \mathbf{E}(< M, N >_\infty)$. *L'espace* L^2 *est l'espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(H, K) = \mathbf{E}(\int_0^{+\infty} H_s K_s d < M, M > s),$$

H_t, K_t *deux processus progressifs* $M \in \mathbb{H}^2$

1.1.2 Régularité des trajectoires

Définition 1.1.2.1. *On dit que le processus stochastique* X *est continu (respectivement continu à droite, continu à gauche) si* $\forall \omega \in \Omega$, *la trajectoire*

$$t \longrightarrow X_t$$

est continue (respectivement continue à droite, continue à gauche).

Définition 1.1.2.2. *On rappelle qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}^d$ *est dite* β*-Höldérienne s'il existe* $\kappa < +\infty$ *tel que :*

$$||f(x) - f(y)|| \leq \kappa ||x - y||^\beta$$

où $||.||$ *désigne la norme de* $\mathbb{R}^p$ *ou de* $\mathbb{R}^d$.

Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'un processus stochastique ait une modification continue avec des trajectoires Höldériennes.

Théorème 1.1.2.1. *[12](**Kolmogorov**) Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus tel qu'il existe* $p, \epsilon, \gamma > 0$ *vérifiant pour tout* s, t *:*

$$E(|X_t - X_s|^p) \leq \gamma |t-s|^{1+\epsilon}$$

Alors il existe une version continue $\tilde{X}$ *de* X*.*
En fait, les trajectoires de $\tilde{X}$ *sont mêmes* β*-höldériennes pour tout* $\beta < \frac{\epsilon}{p}$*.*

1.1.3 Autosimilarité

Définition 1.1.3.1. *Un processus* X *est autosimilaire d'indice* H *si pour tout* $a > 0$ *:*

$$\{X(\alpha t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\alpha^H X(t), t \in \mathbb{R}\}$$

au sens de l'égalité des lois fini-dimensionnelles.

Cette propriété montre qu'un changement d'échelle dans le temps est équivalent (en loi) à un changement d'échelle en espace. Attention, cependant au fait qu'il s'agit d'une égalité en loi et pas en trajectoire.

Remarque 1.1.3.1. *Un processus autosimilaire ne peut pas être en plus stationnaire car on aurait*

$$X(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X(\alpha t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha^H X(t)$$

On a en particulier $\mathbb{E}[X(t)] = \alpha^H \mathbb{E}[X(t)]$*, ce qui donne une contradiction quand on fait tendre* $a^H \to +\infty (H > 0)$*.*
Cependant, il existe un lien entre les processus autosimilaires et les processus stationnaires.

Proposition 1.1.3.1. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *H-autosimilaire, alors*

$$Y_t = e^{tH} X(e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

est stationnaire. Réciproquement, si $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est stationnaire alors* $X(t) = t^H Y(lnt)$ *est* H *autosimilaire.*

Proposition 1.1.3.2. *Soit* $(X_t)_t$ *un processus autosimilaire et à accroissements stationnaires tel que* $\mathbb{P}(X(1) \neq 0) > 0$*. On suppose que* $\mathbb{E}[|X(1)|^\beta] < +\infty$ *alors*

$$0 < H < \frac{1}{\beta} \quad si \quad 0 < \beta < 1,$$

$$0 < H \leq 1 \quad si \quad \beta \geq 1.$$

1.1.4 Processus gaussien

Définition 1.1.4.1. *Soit un processus* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles.*
On dit que ce processus est gaussien si tout ses loi fini-dimentionnelle $\mathcal{L}(X_{t_1},....,X_{t_p})$ *sont gaussiens* $(\forall p \in \mathbb{N}, \forall t_1,.....,t_p)$.

Autrement dit $X = (X_t)_t$ *est gaussien si toute combinaison linéaire* $\lambda_1 X_{t_1},....,\lambda_p X_{t_p}$ *suit une loi gaussienne (pour tout* $p \in \mathbb{N}, t_1,....,t_p$ *et* $\lambda_1,.....,\lambda_p \in \mathbb{R}$*).*

Définition 1.1.4.2. *Un espace gaussien est un sous-espace vectoriel fermé de* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *formé de variables gaussiennes.*

Par exemple si $X = (X_1,......,X_p)$ *est un vecteur gaussien dans* $\mathbb{R}^p$*, alors l'espace vectoriel engendré par* $\{X_1,.......,X_p\}$ *est un espace gaussien.*

Proposition 1.1.4.1. *Un processus gaussien* X *est stationnaire ssi* $E[X_t]$ *est constante et* $K(s,t) = K(s-t)$ *(on parle de stationnarité faible)*

Exemples de processus gaussiens :

- **Processus d'Ornstien-Uhlenbek**: est le processus gaussien centré définit par :
  $\chi_t = e^{-\frac{1}{2}} B(e^t)$, où B un mouvement Brownien

- **Bruit Blanc gaussien** : Soit $(\mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré et
  $\chi = \{B \in \mathfrak{B} : \mu(B) < +\infty\}$ le bruit blanc est un processus gaussien
  $(X_B)_{B\in\mathfrak{B}}$ indexé par l'ensemble des mesurables $\mathfrak{B}$

Remarque 1.1.4.1. *Les processus gaussiens les plus connus sont le mouvement Brownien et le mouvement Brownien fractionnaire*

1.2 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien a été exhibé pour représenter des mouvements qui évoluent au cours du temps de façon particulièrement désordonnée, par exemple en physique pour représenter des particules microscopiques soumises aux multiples chocs de leur environnement ou en finance pour représenter des cours de bourses trés volatiles. Le mouvement Brownien joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques (comme la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ pour les lois de probabilités sur $\mathbb{R}$). Il apparaît dans de nombreuses situations aussi bien théoriques qu'appliquées et il offre un cadre assez simple oú de nombreux calculs peuvent être menés .

Définition 1.2.1. *Un mouvement Brownien standard réel* (MB) *est un processus gaussien centré, noté* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *à trajectoires continues de fonction de covariance :*

$$cov(B_t, B_s) = \min(t, s) = t \wedge s.$$

On l'appelle aussi processus de Wienner.

Propriétés 1.2.1.

- $B_0 = 0$.
- *Pour tout* $t \geq 0, B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,t)$.
- *Pour tout* $0 < t_1 < t_2 < ..... < t_n$ *les variables aléatoires* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
- ***Autosimilarité*** *:Pour tout* $a > 0, \{a^{\frac{1}{2}} B_{at}\}$ *est un mouvement Brownien.*
- ***Propriétés de symétrie*** *: Le processus* $(-B_t)_{t\geq 0}$ *est aussi un mouvement Brownien.*
- ***Stationnarité*** *: Les accroissements du mouvement Brownien sont stationnaires*
- *i.e.* $\forall s \leq t; B_t - B_s$ *est une variable gaussienne centrée de variance* $t - s$.
- ***Inversion du temps****: Pour* $t \neq 0$ *et* $X_0 = 0, X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ *est un mouvement brownien standard .*
- ***Retournement du temps*** *:Le processus retourné à l'instant* $T, X_t = W_T - W_{T-t}$ *est encore un mouvement brownien sur* $[0, T]$ *.*

Proposition 1.2.1. *[12] Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont pas différentiables .*

1.3 Mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 1.3.1. *Le mouvement Brownien fractionnaire standard d'exposant de Hurst* $H \in (0,1)$ *noté* B_t^H *est un processus gaussien continu centré nul en zéro et est le seul prcossus vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *autosimilarité :*$\forall a > 0, (a^{-H} B_{at})_{t \geq 0}$ *a même loi que* $(B_t)_{t \geq 0}$

2. *accroissements stationnaires:*$\forall h > 0, (B_{t+h} - B_h)_{t \geq 0}$ *a même loi que* $(B_t)_{t \geq 0}$

3. *gaussien avec* $E(B_1) = 0$ *et* $E(B_1^2) = 1$.

Autrement dit
pour $0 < H \leq 1$, *Le mouvement Brownien fractionnaire d'indice* H, $(B_t^H)_{t \geq 0}$ *est le processus gaussien centré de fonction de covariance :*

$$cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

Remarque 1.3.1.

- *Le mouvement Brownien fractionnaire "non-standard" a la fonction de covariance suivante :*

$$cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{V^{(H)}}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

  avec

$$V^{(H)} = \frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}$$

  oú $\Gamma(.)$ *est la fonction gamma définie par:* $\Gamma(Z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$
  Nous n'aurons jamais considéré un tel cas.

- *Soit* $(B_t^H)_{t \geq 0}$ *un mouvement Brownien fractionnaire, pour* $H = \frac{1}{2}$ *on obtient le mouvement Brownien* $(B_t)_{t \geq 0}$.

Propriétés 1.3.1.

- *Le mouvement Brownien fractionnaire* $(B_t^H)_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien de variance* t^{2H} *;*

- *Le mouvement Brownien fractionnaire* (B_t^H) *de paramètre de Hurst* $H \in (0,1)/\{\frac{1}{2}\}$ *n'est pas un processus de Markov.*

1.3.1 Propriétés du Mouvement Brownien fractionnaire

La propriété de Hölder et la différentiabilité

Proposition 1.3.1.1. *pour* $H \in (0,1)$*, le mouvement Brownien fractionnaire* (B^H) *est* β*-Höldérien pour tout* $\beta < H$

Preuve:

$$E\big(|B_t^H - B_s^H|^2\big) = E(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|)$$

Par l'application de la linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|) &= E(|B_t^{2H}|) - 2E(|B_t^H B_s^H|) + E(|B_s^{2H}|) \\ &= |t^{2H}| + |s^{2H}| - |t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}| \\ &= (t-s)^{2H}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1.1. *Le mouvement Brownien fractionnaire* B^H *n'est pas différentiable, pour tous* $H \in (0,1)$*. De plus pour tout* $t_0 \in [0,\infty[$

$$\mathbb{P} = \big(\limsup_{t\to t_0} |\frac{B_t^H - B_s^H}{t - t_0}| = \infty\big)$$

Preuve:

Désignons que $\mathcal{T}_{t,t_0} = \dfrac{B_t^H - B_s^H}{t - t_0}$ utilisons la propriété d'autosimilarité, on a :

$$\mathcal{T}_{t,t_0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t-t_0)^{H-1} B_1^H$$

On définit $\mathcal{I}(t,\omega) = \{ \sup\limits_{0\leq s\leq t} |\dfrac{B_s^H}{s} > d|\}$ .Puis, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui décroit vers 0.

on a : $\mathcal{I}(t_{n+1},\omega) \subseteq \mathcal{I}(t_n,\omega)$.
Ainsi

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{I}(t_n))$$

et

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}(t_n)) \geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{B_s^{t_n}}{t_n}\right| > d\right) = \mathbb{P}(|B_1^H| > t_n^{1-H}d) \longrightarrow 1$$

propriétés 1.3.1.1. *Le mouvement Brwonien fractionnaire a aussi ces immédiates propriétés :*

- $B_0^H = 0 \quad \mathbb{P}$-*p.s*
- *Pour tous* $t \geq 0, \mathbb{E}((B_t^H)^2) = t^{2H}$;
- *La variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire est équivalente p.s à* n^{1-2H}.

1.4 La représentation du mouvement Brownien fractionnaire

Soit $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}, H \in (0,1)$ un mouvement Brownien fractionnaire. Il existe de nombreuses représentations d'un mouvement Brownien fractionnaire. Plus ou moins compliquées selon que l'on souhaite obtenir une représentation sur un compact de $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ tout entier

1.4.1 Représentation par Moyenne Mobile

Soit $0 < H < 1$, B Le mouvement Brownien ordinaire.
Le Processus définie par:

$$B_t^H = \frac{1}{C_1(H)} \int_R \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}\right) dB_s. \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

oú

$$C_1(H) = \left(\int_R \left((1+s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}}\right)^2 ds + \frac{1}{2H}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est Le mouvement Brownien fractionnaire d'indice de H (issue de Mandelbort et Van Ness(1968)[13])

1.4.2 Représentation harmonizable

Samorodnitsky et Taqqu (1994) ont montré que le mouvement brownien fractionnaire peut être représenté par l'intégrale stochastique suivante :

$$B_t^H = \frac{1}{C(H)} \int_R \frac{e^{itx}-1}{ix} |x|^{-(H-\frac{1}{2})} d\tilde{B}_x, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Avec

$$C(H) = \big(\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)}\big)^{\frac{1}{2}}$$

et $\tilde{B}$ est un mouvement Brownien à valeur complexe.

1.4.3 Représentation de Levy-Hida

la représentation de Levy-Hida du mouvement Brownien fractionnaire est la suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s) dB_s, \qquad 0 < s < t < 1$$

oú $K_H(t,s)$, est donné par

$$K_H(t,s) = d_H (t-s)^{H-\frac{1}{2}} + s^{H-\frac{1}{2}} F_1\big(\frac{t}{s}\big)$$

avec d_H est une constante et

$$F_1 = d_H\big(\frac{1}{2} - H\big) \int_0^{z-1} \theta^{H-\frac{3}{2}} (1 - (\theta+1)^{H-\frac{1}{2}}) d\theta$$

si $H \in (0, \frac{1}{2})$
le noyau K_H est donné par :

$$K_H(t,s) = b_H\Bigg((\frac{t}{s})^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \Big(H - \frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}-H}\Big)\int_s^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{3}{2}}dt\Bigg)$$

oú

$$b_H = \left(\frac{2H}{1-2H\mathcal{B}(1-2H, H+\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $\mathcal{B}$ est la fonction Bêta ($\mathcal{B}(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$)
si $H \in (\frac{1}{2}, 1)$:
Le noyau a la simple expression suivante :

$$K_H(t,s) = cHs^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t |u-s|^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}du, \qquad t > s,$$

oú

$$cH = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.5 Espace de Banach

Soit (X,d) un espace mérique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X.

Définition 1.5.1. *Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X. On dit que la suite (x_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall(p,n) \in \mathbf{N}, (p > N \ et \ n > N) \Rightarrow \|x_p - x_n\| < \epsilon$$

Proposition 1.5.1. *Toute suite convergente est évidemment de Cauchy.*
La réciproque est fausse.

Définition 1.5.2. *Un espace métrique (X,d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Définition 1.5.3. *On appelle espace de Banach* $(\mathrm{E}, \|.\|_{\mathrm{E}})$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

Définition 1.5.4. *On dit qu'une fonction* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$*, est lipschitzienne s'il existe* $k \geq 0$ *tel que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$$

pour tout $x, y \in \mathrm{E}$*. La plus petite valeur* k *satisfaisant cette propriété pour la fonction* f *est appelée la constante de Lipschitz.*

Définition 1.5.5. *On dit que la fonction* f *est localement lipschitzienne, si pour tout point* x_0 *de* E *il existe un voisinage de* x_0 *dans lequel* f *est lipschitzienne dans ce voisinage autrement dit* k *dépend de* x_0*.*
Une fonction lipschitzienne est continue.

1.5.1 Le principe de contraction de Banach

Théorème 1.5.1. *[6] Soient* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace de Banach,* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *une contraction, alors* f *admet un point fixe unique.*

Preuve.[6]

i) Existence

Soit k une constante de contraction de la fonction f, et soit x_0 un élément arbitraire mais fixe dans E. On construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E par

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad n \geq 1 \tag{1.2}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E. Comme f est une contraction, on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|, \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad n \geq 1 \tag{1.3}$$

Ainsi, on obtient

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|, \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad n \geq 1 \tag{1.4}$$

Par conséquent, pour tout $m > n$, on utilise l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &= \|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+2} - ... + x_{m-1} - x_m\| \\
&\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + ... + \|x_{m-1} - x_m\| \\
&\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1})\|x_1 - x_0\| \\
&\leq k(1 + k + ... + k^{m-n-1}\|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

et donc la suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est un espace de Banach, elle converge donc vers une limite $p \in$ E, $\quad p = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n$.

Par la continuité de f, on obtient

$$p = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n-1}) = f(p)$$

alors f admet un ponit fixe.

ii) Unicité

Supposons qu'il existe deux points fixes p et q de f, alors on a

$$\|p - q\| = \|f(p) - f(q)\| \leq \|p - q\|,$$

et comme $k < 1$, ceci n'est possible que si $p = q$.

1.6 Rappels sur les équations différentielles fonctionnelles à retard

Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les équations différentielles fonctionnelles à retard, le théorème d'existence et d'unicité des solutions, la méthode des pas, ainsi que quelques propriétés de ces équations. Pour plus de détails on peut référez aux livres [11] ,[16]

1.6.1 Définitions

Etant donné un nombre $\tau \geq 0, t_0 \in \mathbb{R}$, On note par $C = C([t_0 - \tau], \mathbb{R})$, l'espace de Banach des fonctions continues définies sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|, t_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6.1. *On appelle équation différentielle à retard, une équation de la forme*

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \quad t \geq t_0, \tag{1.5}$$

oú $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction continue.*

Définition 1.6.2. *Une condition initiale pour l'équation (1.5)est donné par la fonction*

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

Oú $\varphi \in C$.

Définition 1.6.3. *On dit que* x *est une solution de l'équation (1.5) s'il existe* $\alpha > 0$ *tels que*

- x *définie et continue sur* $[t_0 - r, t_0 + \alpha[$.
- x *dérivable sur* $[t_0, t_0 + \alpha[$ *et satisfait l'équation (1.5) sur l'intervalle* $[t_0, t_0 + \alpha[$.

Définition 1.6.4. x *est dite solution du problème de Cauchy,*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \tag{1.6}$$

s'il existe $\alpha > 0$ *tel que* x *soit solution de l'équation (1.5) sur* $[t_0, t_0 + \alpha[$, *et*

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0].$$

Proposition 1.6.1. *[11] soit* $t_0 \in \mathbb{R}, \varphi \in C$ *donné et* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction continue. Une fonction* x *est solution du problème (1.6) si et seulement si elle est solution du problème suivant*

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-\tau))ds, & t \geq t_0 \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \tag{1.7}$$

1.6.2 Théorème d'existance et unicité de solution

Considérons le problème de Cauchy (1.6),

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases}$$

Théorème 1.6.1. *Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors le problème (1.6) admet au moins une solution, si de plus f est localement lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables, alors cette solution est unique.*

Propriétés 1.6.1.

i) *Pour résoudre l'équation différentielle à retard (1.5)*

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \geq t_0,$$

il faut connaître $x(t)$ sur un intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$, de longueur τ.

ii) *Une équation différentielle à retard linéaire et homogène, peut avoir des solutions oscillantes non triviales, c'est-à-dire des solutions qui s'annulent plusieurs fois, mais elles ne sont pas identiquement nulles.*

iii) *Deux solutions, d'une équation différentielle à retard peuvent se rencontrer en plusieurs points, sans qu'elles soient égales.*

1.6.3 Intégration par la méthode des pas

Pour simplifier les calculs nous considérons $t_0 = 0$. Alors le problème de Cauchy (1.6) devient

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{1.8}$$

i) La résolution sur $[0, \tau]$;

Soit $t \in [0, \tau]$, alors $t - \tau \in [-\tau, 0]$ et de la on a

$$x(t-\tau) = \varphi(t-\tau),$$

et le problème de Cauchy (1.8) devient

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t \in [0, \tau], \\ x(t) = \varphi(0), \end{cases}$$

d'aprés la proposition (1.6.1) l'équation $x^{'}(t) = f(t, x(t), \varphi(t-\tau)), t \in [0, \tau]$, s'écrit sous la forme intégrale suivante $x(t-\tau) = \varphi(t-\tau)$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), \varphi(s-\tau))ds, \quad t \in [0, \tau],$$

donc, la solution sur $[0, \tau]$, qu'on notera $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), \varphi(s-\tau))ds, \quad t \in [0, \tau] \tag{1.9}$$

ii) La résolution sur $[\tau, 2\tau]$

On refait l'opération sur $[\tau, 2\tau]$, en considérant comme condition initiale $x(t) = x_1(t)$ sur $[0, \tau]$.

Soit $t \in [\tau, 2\tau]$, alors $t - \tau \in [0, \tau]$ et de la on a

$$x(t-\tau) = x_1(t-\tau)$$

et le problème de Cauchy (1.8) devient

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x_1(t-\tau)), & t \in [\tau, 2\tau], \\ x(\tau) = x_1(\tau), \end{cases}$$

l'équation $x^{'}(t) = f(t, x(t), x_1(t-\tau)), \quad t \in [\tau, 2\tau]$,
s'écrit sous la forme intégrale suivante

$$x(t) = x_1(\tau) + \int_\tau^t f(s, x(s), x_1(s-\tau))ds, \quad t \in [\tau, 2\tau]$$

donc, la solution sur $[r, 2r]$, qu'on notera $x_2(t)$ est donnée par

$$x_2(t) = x_1(\tau) + \int_\tau^t f(s, x(s), x_1(s-\tau))ds, \quad t \in [\tau, 2\tau]$$

et ainsi de suite.
Cette méthode s'appelle la méthode des pas.

1.7 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grande importance, elle a été étudiée par d'autres éminents mathématiciens comme Adrien -Marie Legendre (1752-1833) , Carl Friedrich Gauss (1777-1855) , Christoph Gudermann (1798- 1852) , Joseph Liouville (1809-1882) , Karl Weierstrass (1815-1897) , Charles Hermite (1822-1901) et beaucoup d'autres. Elle apparaît également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques , l'intégration définie , série hypergéométrique , fonction zêta de Riemann , théorie des nombres ...Pour plus de détails sur cette fonction (voir [2],[9]).

1.7.1 Définition de la fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$:
La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Quelques propriétés de la fonction Gamma

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt = \Big[-t^z e^{-t} \Big]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\Pi}{\sin(\pi z)} (z \notin Z_0; 0 < \Re(z) < 1); \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

La fonction beta est définie par

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt(\Re(z) > 0); (\Re(\omega) > 0),$$

Cette fonction est reliée aux fonctions gamma par la relation suivante

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, (z,\omega \notin Z_0^-)$$

1.8 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $f \in C(\Omega)$.On définie l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}(\alpha > 0)$ au sens de Riemann-liouville (à droite) notée $I_{a^+}^{\alpha}$ par

$$(I_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, (t > a, \alpha > 0) \tag{1.10}$$

ou Γ est la fonction gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\Re(z) > 0), \tag{1.11}$$

Si $a = 0$, en écrit $(I_{0^+}^{\alpha})(t) = f(t) * \varphi_\alpha(t)$, telle que $\varphi_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$ et $\varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$.

Définition 1.8.1. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville (à droite) notée $D_{a^+}^{\alpha} x$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}(0 < \tau < 1)$ est définie par*

$$\begin{aligned}(D_{a^+}^{\alpha} x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s)ds}{(t-s)^{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dt}(I_{a^+}^{1-\alpha} x)(t), \quad (t > a, 0 < \alpha < 1)\end{aligned} \tag{1.12}$$

lorsque le membre de droite existe

Dans ce qui suit nous rappelons quelques résultats essentiels utiles pour notre étude.

Le premier est le résultat bien connu qui caractérise les fonctions absolument continues comme les fonctions qui sont primitives de fonctions sommables. On a une relation qui lie L'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire qui est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.8.1. *[5] Si $f \in L^1(a,b)$ et $(I_{a^+}^{1-\alpha} f) \in AC[a,b]$ et si $0 < \alpha < 1$ alors*

$$(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \frac{(I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \tag{1.13}$$

Le deuxième montre que $I_{a^+}^{\alpha}$ est un opérateur continue de L_p dans luis même
$AC[a,b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$

Lemme 1.8.2. *L'espace $AC[a,b]$ coincide avec l'espace des primitives de fonctions sommables de Lebesgue, c'est-à-dire*

$$f \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(x)dt, \qquad (\varphi \in L(a,b)). \tag{1.14}$$

Ainsi une fonction absolument continue $f(x)$ a une dérivée sommable $f(x) = f'(x)$ dans $[a,b]$, Alors (1.14) signifie que

$$\varphi(t) = f'(t) \text{ et } c = f(a)$$

Lemme 1.8.3. *[5] L'opérateur $I_{a^+}^{\alpha}$ avec $\alpha > 0$est bornée dans $L_p(a,b)$ $(0 \leq p \leq +\infty)$*

$$\|I_{a^+}^{\alpha} f\|_p \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_p \tag{1.15}$$

Le troisième affirme que $I_{a^+}^{\alpha}$ est bien l'inverse à droite de $D_{a^+}^{\alpha}$

Lemme 1.8.4. *Si $\alpha > 0$ et $f \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ alors*

$$(D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = f(x), \text{ presque partout dans } [a,b] \tag{1.16}$$

Le lemme suivant donne une loi de composition pour $I_{a^+}^{\alpha}$

Lemme 1.8.5. *[5] Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors*

$$(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f)(x) = (I_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x), \text{ presque partout dans } [a,b] \tag{1.17}$$

Propriétés 1.8.1. *[1]*

- $\forall j = 1, 2, 3, ..., [\alpha] + 1, \alpha > 0$ *on a*

$$\left(D^{\alpha}_{a_+} (t-a)^{\alpha - j} \right)(x) = 0$$

- *Si* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}(\beta > 0)$ *alors*

$$\left(I^{\alpha}_{a_+} (t-a)^{\beta - j} \right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (x-a)^{\alpha + \beta - 1}$$

CHAPTER 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES AVEC LA DÉRIVÉE DE RIEMANN-LIOUVILLE DANS L'ESPACE DES FONCTIONS SOMMABLES

Dans ce chapitre nous étudions l'existance et l'unicité de la du problème différentiel fractionnaire non linéaire du type voltérra avec retard suivant

$$\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{0^+}x)(t) &= f\left[t, x_t, \int_0^t K(t,s,x_s)ds\right], \qquad t>0, \quad 0<\alpha<1 && (2.1)\\
(I^{1-\alpha}_{0^+}x)(0^+) &= \tau, \qquad \tau\in\mathbb{R} && (2.2)\\
x(t) &= \varphi(t) \qquad t\in[-\tau,0] && (2.3)\\
x_t(\theta) &= x(t+\theta) \qquad \theta\in[-\tau,0]. && (2.4)
\end{aligned}$$

Dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans l'espace $\mathbf{L}^{\alpha}$ défini pour tout $0<\alpha<1$ par

$$\mathbf{L}^{\alpha}(0,\tau) = x \in L(0,\tau) : (D^{\alpha}_{0^+}x) \in L(0,\tau) \tag{2.5}$$

La méthode que nous utilisons consiste à réduire le problème (2.1)-(2.2)-(2.3)-(2.4) à une équation intégrale de voltérra et en utilisant le théoreme de point fixe de banach nous prouvons l'unicité de la solution pour le le problème (2.1)-(2.2)-(2.3)-(2.4)

On commence d'abord par énoncer les hypothèses sur f et K permettant la réduction du problème fractionnaire avec retard à une équation intégrale.

2.1 Hypothèses

- **(H.1)** Soit $f : (0, \tau] \times G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t, X, Z) \in L(0, \tau), \forall X \in G$ et $\forall Z \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux fonctions $l_1(t), l_2(t)$ positives telles que

$$\begin{aligned} \|f(t, X_1, Z_1) - f(t, X_2, Z_2)\|_{L(0,\tau)} &\leq l_1(t)\|X_1 - X_2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\ +l_2(t)\|Z_1 - Z_2\|_{L(0,\tau)}, \forall t \in & (0, \tau], \forall X_1, X_2 \in G, \forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Oú

$$X_i = x_t^i \quad \text{et} \quad Z_i = \int_0^t K(t, s, x_s^i)ds \qquad (i = 1, 2) \tag{2.7}$$

et on pose

$$l^* = \sup_{t\in(0,\tau]} \{l_1(t) - l_2(t)\} \tag{2.8}$$

- **(H.2)** Soit $K : D \times G \to \mathbb{R}$ telle que $K(t, s, x_s) \in L(0, \tau), \forall 0 \leq s \leq t, \forall x_s \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ oú $D = (t, s) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, 0 \leq s \leq t \leq \tau$ et il existe une fonction $H(t, s) \in C(D, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|K(t, s, x_s^1) - K(t, s, x_s^2)\|_{L(0,\tau)} \leq H(t, s)\|x_s^1 - x_s^2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}, \tag{2.9}$$

$$\forall t, s \in D, \forall x_s^1, x_s^2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \tag{2.10}$$

et on note par

$$H^* = \sup_{t\in(0,\tau_1]} \left\{ \int_0^t H(t, s)ds, t, s \in D \right\} < +\infty \tag{2.11}$$

- **(H.3)** Soit $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que M soit indépendant de $x(t)$ et $\forall x_1, x_2 \in L(0, \tau)$ alors $x_t^1, x_t^2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ et

$$\|x_t^1 - x_t^2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \leq M(t)\|x_1 - x_2\|_{L(0,\tau)} \tag{2.12}$$

on pose

$$M^* = \sup_{t\in[0,\tau_1]} \{M(t)\} < +\infty \tag{2.13}$$

2.2 L'équivalence du problème fractionnaire avec son équation intégrale correspondante

Définition 2.2.1. *[3] La fonction x est dite solution du problème (2.1)-(2.2)-(2.3)-(2.4) si x satisfait l'équation (2.1) et la condition initiale (2.2) dans $(0,\tau]$ et la condition (2.3) et (2.4) dans $[-\tau,0]$.*

Théorème 2.2.1. *[1] Soit $0<\alpha<1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f:(0,\tau]\times G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(\tau>0)$ une fonction telle que $f(t,X,Z)\in L(0,\tau)$ pour tout $X\in G$ et $Z\in\mathbb{R}$*

Si $x\in L(0,\tau)$ alors x satisfait les relations (2.1)-(2.2) si et seulement si x satisfait l'équation intégrale suivante

$$x(t)=\frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f[s,x_s,\int_0^s K(s,z,x_z]ds}{(t-s)^{1-\alpha}},(t>0) \tag{2.14}$$

Preuve. *Nous démontrons*

i) la nécessité.

Soit $X\in L(0,\tau)$ satisfaisant les relations (2.1) et (2.2). puisque $f(t,X,Z)\in L(0,\tau)$, (2.2) signifie qu'il existe dans $[0,\tau]$ la derivée fractionnaire $D^{\alpha}_{0+}x\in L(0,\tau)$ on a

$$(D^{\alpha}_{0+}x)(t)=\frac{d}{dt}(I^{1-\alpha}_{0+}x)(t),(I^{1-\alpha}_{0+}x)(t))=x(t) \tag{2.15}$$

Il suit du lemme 1.8.2 que $(I^{1-\alpha}_{0+})\in AC[0,\tau]$ car

$$(2.1)\Leftrightarrow\frac{d}{dt}(I^{1-\alpha}_{0+})(t)=f(t,X(t),Z(t))\Rightarrow(I^{1-\alpha}_{0+})(t)=c+\int_0^t f(s,X(s),Z(s))ds, \tag{2.16}$$

Où

$$c=(I^{1-\alpha}_{0+})(0)=\tau. \tag{2.17}$$

Alors nous pouvons appliqué le lemme 1.8.1 (avec $f(x)=x(t)$) on a

$$(I^{\alpha}_{0+}D^{\alpha}_{0+}x)(t)=x(t)-\frac{(I^{1-\alpha}_{0+})(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}=x(t)-\frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} \tag{2.18}$$

D'après le lemme 1.8.3 l'intégrale $(I_{0^+}^{\alpha} f) \in L(0,\tau)$ *i.e existe dans* $[0,\tau]$ *Appliquons l'opérateur sur les deux membres de (2.1) et utilisons (2.18) et (1.10) on obtient l'équation (2.14) ce qui montre la nécessité .*

ii) la suffisance.

Soit $x \in L(0,\tau)$ *satisfait l'équation (2.14). Appliquons l'opérateur sur* $D_{0^+}^{\alpha}$ *les deux membres de (2.14), on a d'une part*

$$(D_{0^+}^{\alpha} x)(t) = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)} (D_{0^+}^{\alpha} s^{\alpha-1})(t) \left(D_{0^+}^{\alpha} I_{0^+}^{\alpha} f \left[s, x_s, \int_0^t K(s,z,x_z) dz \right] \right)(t) \tag{2.19}$$

la propriété 1.8.1 et lemme 1.8.4 (avec $f(x)$ *est remplacé par* $f[s, x_s, \int_0^t K(s,z,x_z)dz]$*) nous donne l'équation (2.1).*
D'autre part on démontre que la condition initiale (2.2) est satisfaite. pour ceci on applique l'opérateur $I_{0^+}^{1-\alpha}$ *à (2.14) on obtient*

$$(I_{0^+}^{1-\alpha} x)(t) = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)} (I_{0^+}^{1-\alpha} s^{\alpha-1})(t) \left(I_{0^+}^{1-\alpha} I_{0^+}^{\alpha} f \left[s, x_s, \int_0^t K(s,z,x_z) dz \right] \right)(t) \tag{2.20}$$

on utilise le lemme 1.8.5 et la propriété 1.8.1 on trouve que

$$(I_{0^+}^{1-\alpha} x)(t) = \tau + \int_0^t f \left[s, x_s, \int_0^s K(s,z,x_z) dz \right] ds, \tag{2.21}$$

Le passage à la limite quant $t \to 0^+$ *dans la dernière relation nous donne la condition initiale (2.2) ce qui montre la suffisance, et donc la démonstration du théorème 2.2.1 est achevée.*

2.3 Existence et unicité de la solution pour le problème du type Cauchy

Soit

$$Y = \{ x : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R} : x|_{[-\tau,0]} \in C([-\tau,0],\mathbb{R}), \text{ et } x|_{(0,\tau]} \in C((0,\tau],\mathbb{R}) \cap L(0,\tau) \}$$

Théorème 2.3.1. *Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Si les hypothèses (**H.1**)-(**H.2**)-(**H.3**) sont satisfaites alors le problème (2.1)-(2.2)-(2.3)- (2.4) admet une solution unique dans l'espace $C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \cap C((0, \tau], R) \cap L \in (0, \tau)$*

Preuve. D'abord nous démontrons l'existence de la solution $x \in L(0, \tau)$: Alors suivant le théorème 2.2.1, il suffit de démontrer l'existence de la solution $x \in L(0, \tau)$ pour l'equation intégrale non linéaire de voltérra (2.14) . Pour cela
On applique la méthode connue, pour démontrer le résultat dans une partie de l'intervalle $[0, \tau]$.

L'équation (2.14) a un sens dans tout intervalle $[0, \tau_1] \subset [0, \tau]$ $(0 < \tau_1 < \tau)$. Choisissons τ_1 tel que

$$(1 + H^*) \frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \tag{2.22}$$

et démontrons l'existence de la solution $x \in L(0, \tau_1)$ pour l'équation intégrale (2.14) dans l'intervalle $[0, \tau_1]$. Pour cela on utilise le théorème du point fixe de Banach dans l'espace $L(0, \tau_1)$ dont la norme est

$$\|x\|_{L(0,\tau_1)} = \int_0^{\tau_1} |x(t)| dt \tag{2.23}$$

Il est clair que $L(0, \tau_1)$ est un espace métrique complète avec la distance

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_{L(0,\tau_1)} = \int_0^{\tau_1} |x_1(t) - x_2(t)| dt \tag{2.24}$$

Considérons l'opérateur $\mathbf{T} : Y \to Y$ défini par

$$(\mathbf{T}x)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si} \quad t \in [-\tau, 0] \\ x_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f[s, x_s, \int_0^s K(s, z, x_z dz] ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, & \text{si} \quad t \in (0, \tau]. \end{cases} \tag{2.25}$$

oú

$$x_0(t) = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha - 1} \tag{2.26}$$

Soit $x(t) : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si} \quad t \in [-\tau, 0] \\ 0, & \text{si} \quad t \in (0, \tau]. \end{cases} \tag{2.27}$$

Pour tout $r \in C((0,\tau],\mathbb{R})$ avec $r_0(t) = x_0(t)$ on définit la fonction $\hat{r}$ par

$$\hat{r}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \in [-\tau, 0] \\ r(t), & \text{si} \quad t \in (0, \tau], \end{cases} \tag{2.28}$$

Si x satisfait l'équation intégrale (2.14), on peut décomposé $x(.)$ en $x(t) = \hat{r}(t)+y(t), t > 0$, ce qui implique que $x_t = \hat{r}_t + y_t$, pour tout $t > 0$, et la fonction $r(.)$ satisfait

$$r(t) = r_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\left[s, (\hat{r}_t + y_t), \int_0^t K[s, z, (\hat{r}_t + y_t)]dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \tag{2.29}$$

Soit

$$C_0 = r \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \cap C((0, \tau]\mathbb{R})$$

L'espace C_0 est un espace de Banach dont la norme est

$$\|r\|_{C_0} = \sup_{t\in(0,\tau]} |r(t)| \tag{2.30}$$

Soit maintenant l'opérateur $\mathbf{P} : C_0 \to C_0$ définit par

$$(\mathbf{P}r)(t) = r_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\left[s, (\hat{r}_s + y_s), \int_0^t K[s, z, (\hat{r}_z + y_z)]dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, t \in (0, \tau]. \tag{2.31}$$

Il est clair que l'opérateur $\mathbf{T}$ a un point fixe équivalent à l'opérateur $\mathbf{P}$ et donc on applique le théorème du point fixe de Banach, (c-à-d) on va démontrer que si $r \in L(0, \tau_1)$, alors $\mathbf{P}r \in L(0, \tau_1)$ et pour tout $r_1, r_2 \in L(0, \tau_1)$ on a l'estimation

$$\|\mathbf{P}r_1 - \mathbf{P}r_2\|_{L(0,\tau_1)} \leq \kappa\|r_1 - r_2\|_{L(0,\tau_1)},\ \kappa = (1 + H^*)\frac{\tau_1^\alpha M_* l^*}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.32}$$

Il suit du (2.26) que $r_0(t) \in L(0, \tau_1)$ car

$$\|r_0(t)\|_{L(0,\tau_1)} = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} |t^{\alpha-1}|dt = \frac{\tau\tau_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} < +\infty \tag{2.33}$$

Puisque $f(t,X,Z) \in L(0,\tau)$, alors par suite du lemme 1.8.3 avec $b = \tau_1$ et $a = 0$ l'intégrale $I^{\alpha}_{0^+} f \in L(0,\tau_1)$ et donc $\mathbf{P}r \in L(0,\tau_1)$

Démontrons maintenant l'estimation (2.32), on a $\mathbf{P} : L(0,\tau_1) \to L(0,\tau_1)$

Soit $r_1, r_2 \in L(0,\tau_1)$, alors

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}r_1 - \mathbf{P}r_2\|_{L(0,\tau_1)} &\leq \Bigg\| I^{\alpha}_{0^+}\Bigg(\Bigg| f\left[s, (\hat{r}^1_s + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}^1_z + x_z)]dz\right] \\
&\quad - f\left[s, (\hat{r}^2_s + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}^2_z + x_z)]dz\right]\Bigg|\Bigg)\Bigg\|_{L(0,\tau_1)} \\
&\leq \frac{\tau_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg\|\Bigg(\Bigg| f\left[s, (\hat{r}^1_s + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}^1_z + x_z)]dz\right] \\
&\quad - f\left[s, (\hat{r}^2_s + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}^2_z + x_z)]dz\right]\Bigg|\Bigg)\Bigg\|_{L(0,\tau_1)} \\
&\leq \frac{\tau_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg(l_1(s)\|\hat{r}^1_s - \hat{r}^2_s\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + \\
&\quad l_2(s)\left\| \int_0^s \Big[K[s,z,(\hat{r}^1_z + x_z)] - K[s,z,(\hat{r}^2_z + x_z)]\Big] dz\right\|_{L(0,\tau_1)}\Bigg)
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^s \Big[K[s,z,(\hat{r}^1_z + x_z)] - K[s,z,(\hat{r}^2_z + x_z)]\Big] dz\right\|_{L(0,\tau_1)} \\
&\leq \int_0^s \Big\| [K[s,z,(\hat{r}^1_z + x_z)] - K[s,z,(\hat{r}^2_z + x_z)]] \Big\|_{L(0,\tau_1)} dz \\
&\leq \int_0^s H(s,z)\|\hat{r}^1_z - \hat{r}^2_z\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}dz \\
&\leq \left(\sup_{s\in(0,\tau_1]} \int_0^s H(s,z)dz\right)\|\hat{r}^1_z - \hat{r}^2_z\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\leq H^*\|\hat{r}^1_z - \hat{r}^2_z\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}r_1-\mathbf{P}r_2\|_{L(0,\tau_1)} &\leq \frac{\tau_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(l_1(s)+l_2(s)H^*)\|\hat{r}_s^1-\hat{r}_s^2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}\\
&\leq \frac{\tau_1^{\alpha}M(s)}{\Gamma(\alpha+1)}(l_1(s)+l_2(s)H^*)\|r_1-r_2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}\\
&\leq \frac{\tau_1^{\alpha}M^*l^*}{\Gamma(\alpha+1)}(1+H^*)\|r_1-r_2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Ce qui implique l'estimation (2.32) et de (2.22) on a $0<\kappa<1$, et alors $\mathbf{P}$ est un opérateur contractant dans $L(0,\tau_1)$ et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique $x^*(t)\in L(0,\tau_1)$ pour l'équation (2.14) dans l'intervalle$(0,\tau_1]$.
On considère maintenant l'intervalle $[\tau_1,\tau_2]$, $\tau_1=\tau_1+h_1, h_1>0$ et $\tau_2<\tau$.
On peut écrire l'quation (2.14) sous la forme

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f[s,x_s,\int_0^s K(s,z,x_z)dz]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^t\frac{f[s,x_s,\int_0^s K(s,z,x_z)dz]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Puisque la fonction $x(t)$ est bien définie sur l'intervalle $(0,\tau_1]$, on peut écrire que

$$x_1=\frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f[s,x_s,\int_0^s K(s,z,x_z)dz]ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \tag{2.35}$$

et l'équation (2.34) devient

$$x(t)=x_1+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^t\frac{f[s,x_s,\int_0^s K(s,z,x_z)dz]ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \tag{2.36}$$

et de la même manière on deduit qu'il existe une solution unique $x^*(t)\in L(\tau_1,\tau_2)$ pour l'équation (2.14) dans l'intervalle $[\tau_1,\tau_2]$:
Si on prend l'autre intervalle $[\tau_2;\tau_3]$ où $\tau_3=\tau_2+h_2, h_2>0$ et $\tau_3<\tau$, on répéte ce processus
on conclut alors qu'il existe une solution unique $x(t)=x^*(t)\in L(0,\tau)$ pour l'équation

intégrale de voltérra (2.14) dans l'intervalle $(0, \tau]$ et par suite pour le problème (2.1)-(2.2)-(2.3)-(2.4) dans l'espace $C_0 \cap L(0, \tau)$.

Pour terminer la preuve on doit démontrer que la solution unique $x(t)$ dans $L(0, \tau)$ appartient a l'espace $L^\alpha(0, \tau)$, pour cela d'après (2.5) il suit de démontrer que $D^\alpha_{0+}x \in L(0, \tau)$. Alors on sait d'après le théorème du point fixe que la solution unique $x(t)$ est obtenue comme une limite d'une suite convergente $x_m(t) \in L(0, \tau)$, (i,e)

$$\lim_{m \to +\infty} \|x_m - x\|_{L(0,\tau)} = 0 \tag{2.37}$$

avec le choix de certaine y_m dans un certain intervalle $(0, \tau_1], ..., [\tau_{l-1}, \tau]$. En effet, d'après (2.1) et les hypothèses (**H.1**)-(**H.2**)-(**H.3**) on a

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha_{0+}x_m - D^\alpha_{0+}x\|_{L(0,\tau)} &= \left\| f\left[t, x^m_t, \int_0^t K(t, s, x^m_s)\right] - f\left[t, x_t, \int_0^t K(t, s, x^m_s)\right] \right\|_{L(0,\tau)} \\
&\leq l_1(t)\|x^m_t - x_t\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\quad + l_2(t)\left\| \int_0^t [K(t, s, x^m_s) - K(t, s, x_s)]ds \right\|_{L(0,\tau)} \\
&\leq l_1(t)\|x^m_t - x_t\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + l_2(t)H^*\|x^m_s - x_s\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\leq l^* M^*(1 + H^*)\|x_m - x\|_{L(0,\tau)}.
\end{aligned}$$

la relation (2.37) affirme que

$$\lim_{m \to +\infty} \|D^\alpha_{0+}x_m - D^\alpha_{0+}x\|_{L(0,\tau)} = 0$$

et donc $D^\alpha_{0+}(t)x \in L(0, \tau)$. Alors le problème (2.1)-(2.2)-(2.3)-(2.4) admet une solution unique dans l'espace $C_0 \cap L^\alpha(0, \tau)$, et la preuve du théorème 2.3.1 est terminée.

CHAPTER 3

SOLUTION FAIBLE PRESQUE PÉRIODIQUE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FONCTIONNELLES STOCHASTIQUE À RETARD DIRIGÉE PAR UN MBF

Ce chapitre est motivé par [4],[7],[17] basé sur la méthode de semi-groupes d'opérateurs et la méthode de point fixe, nous étudions l'existance d'une solution faible presque périodique à moyenne quadratique pour les équations differentielles stochastique fonctionnelles à retard

$$\begin{cases} dx(t) = & (Ax(t) + b(t, x(t), x_t))dt + \sigma_H(t)dB_Q^H(t), \quad t \in [0, T] \\ x(t) = & \varphi(t), \qquad -\tau \leq t \leq 0, \quad \tau \geq 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $B_Q^H = \{B_Q^H(t), t \in [0, T]\}$ est un MBF d'indice de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Certains conditions suffisantes sur l'opérateur A et les coefficients b, σ_H, assurant l'existance des solutions presque périodique à moyenne quadratique .

3.1 Notions et Définitions

Dans cette section nous introduisons quelques notions, définitions et des lemmes de techniques qui sont utilisés dans ce qui suit.

Soit $T > 0$ et notons Υ l'espace linéaire des fonctions de pas a valeur dans $\mathbb{R}$ sur $[0, T]$, i.e $\phi \in \Upsilon$ si

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

Où $t \in [0, T], z_i \in \mathbb{R}$ et $0 = t_1 < t_2 < . < t_n = T$. pour $\phi \in \Upsilon$. son intégral de Wiener par rapport à B^H est

$$\int_0^T \phi(s) dB^H(s) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i (B^H(t_{i+1}) - B^H(t_i)).$$

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert défini comme la fermeture de Υ par rapport au produit scalaire $\langle \chi_{[0,t]}, \chi_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t, s)$. Ensuite

$$\phi = \sum_{i=1}^{n-1} z_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) \mapsto \int_0^T \phi(s) dB^H(s)$$

est une isometrie entre Υ et l'espace linéaire $span\,\{B^H(t), t \in [0, T]\}$, qui peut être étendu à une isometrie entre $\mathcal{H}$ et le premier chaos de Wiener de MBF $\overline{span}^{L^2(\Omega)}\{B^H(t), t \in [0, T]\}$, $(voir$[14]). L'image d'un élément $\phi \in \mathcal{H}$ par cette isometrie est appelée l'intégrale de Wiener de ϕ en ce qui concerne B^H.
considérons maintenant le noyau

$$K_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2} - H} \int_s^t (u - s)^{H - 3/2} u^{H - 1/2} du$$

Où $c_H = (\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})})^{\frac{1}{2}}$, Où β la fonction Béta et ce n'est pas difficile de voir que

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t, s) = H(\frac{t}{s})^{H - \frac{1}{2}}(t - s)^{H - \frac{3}{2}}.$$

Soit $\mathcal{K}_H : \Upsilon \mapsto L^2([0, T])$ opérateur linéaire donné par

$$\mathcal{K}_H \phi(s)(s) = \int_s^t \phi(t) \frac{\partial K_H}{\partial t}(t, s) dt.$$

alors $(\mathcal{K}_H \chi_{[0,t]})(s) = K_H(t,s)\chi_{[0,t]}(s)$ et K_H est une isometrie entre Υ et $L^2([0,T])$ qui peut être étendu a $\mathcal{H}$.
Soit $L^2_{\mathcal{H}}([0,T]) = \{\phi \in \mathcal{H}, \mathcal{K}_H\phi \in L^2([0,T])\}$. puisque $H > 1/2$, nous avons

$$L^{1/H}([0,T]) \subset L^2_{\mathcal{H}}([0,T]). \tag{3.2}$$

De plus le resultat suivant est valable:

Lemme 3.1.1. [14]. *pour* $\phi \in L^{1/H}([0,T])$,

$$H(2H-1)\int_0^T\int_0^T |\phi(\tau)||\phi(u)||\tau-u|^{2H-2}d\tau du \le c_H||\phi||^2_{L^{1/H}([0,T])}.$$

Considérons maintenant deus espaces de Hilbert séparable $(U, |\cdot|_U, \langle\cdot,\cdot\rangle_U)$ et $(V, |\cdot|_V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $L(V,U)$ désigne l'espace de tout opérateur linéaire borné de V à U et $Q \in L(V,V)$ d'un opérateur auto-adjoint non négative. Notons $L^0_Q(V,U)$ l'espace de tout $\xi \in L(V,U)$ tel que $\xi Q^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur de Hilbert-schmidt. La norme est donné par

$$|\xi|^2_{L^0_Q(V,U)} = |\xi Q^{\frac{1}{2}}|^2_{HS} = tr(\xi Q \xi^*).$$

Alors ξ est appelé un opérateur Q-Hilbert-Schmidt de V à U.

Soit $\{B^H_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une séquence de MBF $(two-sideone-dimensional)$ naturellement indépandant sur l'espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base orthogonal complète dans V.
Définir le processus stochastique $B^H_Q(t)$ a valeur dans V par

$$B^H_Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B^H_n(t) Q^{\frac{1}{2}} e_n, t \ge 0.$$

Si Q est un opérateur de classe de trace auto-adjoint non négatif alors cette serie converge dans l'espace V ,i.e qu'il tient que $B^H_Q(t) \in L^2(\Omega, V)$. Alors, nous disons que $B^H_Q(t)$ est un mBf Q cylindrique a valeur dans V avec l'opérateur de covariance

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\mathcal{K}_H(\psi Q^{\frac{1}{2}})e_n||_{L^2([0,T],U)} < \infty. \tag{3.3}$$

Définition 3.1.1. *Soit $\psi : [0,T] \to L_Q^0(V,U)$ satisfait (3.3). Alors l'intégral stochastique de ψ par rapport a MBF B_Q^H est défini pour $t \geq 0$ comme*

$$\int_0^t \psi(s) dB_Q^H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \psi(s) Q^{1/2} e_n dB_n^H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (\mathcal{K}_H(\psi Q^{1/2} e_n))(s) dW(s),$$

Où W est un processus de Wiener

notez que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi Q^{\frac{1}{2}} e_n\|_{L^{1/H}([0,T],U)} < \infty, \tag{3.4}$$

puis en particulier (3.4) tient, ce qui suivent immédiatement de (3.3).

Le lemme suivant est prouvé dans [14] et obtenu comme une simple application du lemme 3.1.1.

Lemme 3.1.2. *([14]). pour tout $\psi : [0,T] \to L_Q^0(V,U)$ telle que (3.4) soit vrai et pour tout $\alpha, \beta \in [0,T]$ avec $\alpha > \beta$,*

$$\mathbb{E}\left|\int_\beta^\alpha \psi(s) dB_Q^H(s)\right|_U^2 \leq cH(2H-1)(\alpha-\beta)^{(2H-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_\beta^\alpha \psi Q^{\frac{1}{2}} e_n\right|_U^2 ds,$$

où $c = c(H)$. Si de plus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\psi Q^{\frac{1}{2}} e_n\right|_U \quad est\ converge\ uniformement\ pour\ t \in [0,T], \tag{3.5}$$

Ensuite

$$\mathbb{E}\left|\int_\beta^\alpha \psi(s) dB_Q^H(s)\right|_U^2 \leq cH(2H-1)(\alpha-\beta)^{(2H-1)} \int_\beta^\alpha |\psi(s)|_{L_Q^0(V,U)}^2 ds. \tag{3.6}$$

Les définitions suivantes suivent la référence [4]

Définition 3.1.2. *Un processus continue $X : [0,T] \to L^2(\Omega, U)$ est dit pesque périodique à condition que pour chaque $\epsilon > 0$, l'ensemble*

$$J(X,\epsilon) = \left\{ k : \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}|X(t+k) - X(t)|_U^2 < \epsilon \right\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. *i.e qu'il existe une constante* $c = c(\epsilon) > 0$ *telle que* $J(X, \epsilon) \cap [t, t + c] \neq \varnothing$, , , , *pour tout* $t \in [0, T]$.

Notons l'ensemble de tout les processus stochastiques presque périodique à moyenne quadratique par $\widehat{C}([0, T], L^2(\Omega, U))$
notez que cet ensemle est un sous-espace fermé de $C([0, T]; L^2(\Omega, U))$. Par conséquence $\widehat{C}([0, T], L^2(\Omega, U))$ équipé avec la norme sup est un espace de Banach .

Définition 3.1.3. *Une fonction* $b(t, Y) : [0, T] \times L^2(\Omega, U) \to L^2(\Omega, V)$, *qui est congointement continue, est dit presque périodique pour* $t \in [0, T]$, *et uniformement pour* $Y \in \mathbb{K}$, *où* $\mathbb{K} \subset L^2(\Omega, U)$ *est compact, si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une constante* $c(\epsilon, \mathbb{K}) > 0$ *telle que tout intervalle de longueure* $c(\epsilon, \mathbb{K}) > 0$ *contient au moins un nombre* k *satisfait*

$$\sup_{t \in [0,T]} \left(\mathbb{E}|b(t + k, Y) - b(t, Y)|_V^2 \right) < \epsilon,$$

pour chaque processus stochastique $Y : [0, T] \to \mathbb{K}$.
L'ensembre de ces fonctions sera désignées par $\widehat{C}([0, T] \times L^2(\Omega, U), L^2(\Omega, V))$.

Le lemme suivant est également prouvé dans [4].

Lemme 3.1.3. *Soit* $\widetilde{C}([-\tau, 0]; L^2(\Omega, U))$ *l'espace des fonctions continues de* $[-\tau, 0]$ *en* $L^2(\Omega, U)$ *avec la norme sup*

$$||Z||_{\widetilde{C}([-\tau,0];L^2(\Omega,U))} = sup\{|Z(s)|_U ; Z \in \widetilde{C}, -\tau \leq s \leq 0\},$$

$\mathbb{K} \subset L^2(\Omega, U) \times \widetilde{C}([-\tau, 0]; L^2(\Omega, U))$ *soit ensemble compact. Supposons que la fonction* $b(t, x, y) : [0, T] \times L^2(\Omega, U) \times \widetilde{C}([-\tau, 0]; L^2(\Omega, U)) \to L^2(\Omega, V))$ *Soit presque périodique a moyenne quadratique pour* $t \in [0, T]$, *et uniformement pour* $(x, y) \in \mathbb{K}$, *de plus il existe un constante* $c_1 > 0$ *tel que*

$$|b(t, x, y) - b(t, \tilde{x}, \tilde{y})|_V^2 \leq c_1 \left(|x - \tilde{x}|_U^2 + ||y - \tilde{y}||_{\widetilde{C}^2([-\tau,0];L^2(\Omega,U))} \right),$$

pour $t \in [0, T]$ *and* $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in L^2(\Omega, U) \times \widetilde{C}([-\tau, 0]; L^2(\Omega, U))$, *alors pour tout processus stochastique presque périodique à moyenne quadratique* $\psi : [0, T] \to L^2(\Omega, U)$, *le processus stochastique* $t \to b(t, \psi(t), \psi_t)$ *est presque périodique à moyenne quadratique*

3.2 Solutions faible presque périodiques

Dans cette section, nous étudions l'éxistance de solutions faibles presque périodiqe à moyenne quadratique pour l'équation différentielle fonctionelle à retard stochastique

$$\begin{array}{rcl} dx(t) & = & (Ax(t) + b(t, x(t), x_t))dt + \sigma_H(t)dB_Q^H(t), \quad t \in [0, T], \\ x(t) & = & \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \quad r \geq 0, \end{array} \tag{3.7}$$

où $B_Q^H(t)$ est le mouvement Brownien fractionnaire qui a été introduit dans la section précédente

La condition initiale $\varphi \in \widetilde{C}([-\tau, 0]; L^2(\Omega, U))$ est une fonction définie par $\varphi_t(s) = \varphi(t+s), s \in [-\tau, 0]$, et $A : Dom(A) \subset U \to U$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $S(.)$ sur U, C'est-a-dire que pour tout $t \geq 0$,

$$|S(t)|_U \leq Me^{\rho t}, M \geq 1, \rho \in \mathbb{R}$$

.

Les coefficients $b : [0, T] \times U \times \widetilde{C}([-\tau, 0]; U) \to U$ et $\sigma_H : [0, T] \to L_Q^0(U, V)$ sont des fonctions appropriées.

Définition 3.2.1. *Un processus X à valeur dans U est appelé une solution faible de (3.7) si $x \in \widetilde{C}([-\tau, T]; L^2(\Omega, U))$, $x(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$, et pour $t \in [0, T]$, satisfait*

$$x(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)b(s, x(s), x_s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma_H(s)dB_Q^H(s) \quad \mathbb{P} - a \cdot s. \tag{3.8}$$

Maintenant, nous énonçons notre premier résultat principal, et utilisons les hypothèses suivantes sur les coefficients

- (**H**b) la fonction $b \in \widehat{C}([0, T] \times U \times \widetilde{C}, U)$, et il existe une constante $c_b > 0$ telle que

$$|b(t, x, y) - b(t, \widetilde{x}, \widetilde{y})|_U^2 \leq c_b \left(|x - \tilde{x}|_U^2 + ||y - \widetilde{y}||_{\widetilde{C}}^2 \right),$$

  où l'espace $\widetilde{C}$ est définie dans la section 1, $(x, y), (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in U \times \widetilde{C}, t \in [0, T]$.

- $(\mathbf{H}\sigma_H)$ La fonction $\sigma_H : [0,T] \to L_Q^0(U,V)$ satisfait les conditions suivantes: pour la base horthonormal complète $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on V, nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma_H Q^{\frac{1}{2}} e_n\|_{L^2([0,T],U)} < \infty.$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_H(t,x(t)) Q^{\frac{1}{2}} e_n|_U \quad est\ converge\ uniformemt\ pour\ t \in [0,T].$$

Notez que l'hypothèse $(\mathbf{H}\sigma_H)$ implique immédiatement que pour tout $t \in [0,T]$, $\int_0^t |\sigma_H(s)|^2_{L_Q^0(U,V)} < \infty$.

Théorème 3.2.1. *Sous les conditions de A, les hypothèses $(\boldsymbol{Hb})$ et $(\boldsymbol{H}\sigma_H)$, pour tout $\varphi \in \widetilde{C}([-\tau,T];L^2(\Omega,U))$, Eq. (3.7) a une solution unique faible prêsque périodique à moyenne quadratique x quand*

$$\gamma = 2Me^{\rho T}\sqrt{Tc_b} < 1,$$

où c_b est une constant positive

Preuve.
On peut supposer que $\rho > 0$, sinon on peut prend $\rho_0 > 0$,telle que, pour tout $t \geq 0$, $|S(t)| \leq Me^{\rho_0 t}$. Définir l'opérateur $\mathcal{L}$ sur $\widehat{C}([0,T],U)$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}x)(t) &= S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)b(s,x(s),x_s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma_H(s)dB_Q^H(s) \\ &= S(t)\varphi(0) + \Phi x(t) + \Psi(t). \qquad\qquad \mathbb{P}-a\cdot s. \end{aligned} \tag{3.9}$$

D'abord il suffit de montrer $\Phi x(.)$ est presque périodiqe à moyenne quadratique chaque fois que X est presque périodique à moyenne quadratique .

En effet, en supposant que x est presque périodique à moyenne quadratique , en utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}b)$ et Lemme 3.1.3, On peut voir que c'est $s \mapsto b(s,x(s),x_s)$ est presque périodique à moyenne quadratique. Alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $c(\epsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $c(\epsilon)$ contient au moins κ satisfaisant

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|b(t+\kappa,x(t+\kappa),x_{t+\kappa}) - b(t,x(t),x_t)|_U^2 \leq \frac{\epsilon}{(TMe^{\rho T})^2}, \tag{3.10}$$

Pour $T > 0$ fixé. De plus

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}|\Phi x(t+\kappa) - \Phi x(t)|_U^2 \\
= \ & \mathbb{E}\left|\int_0^t S(t-s)b(s+\kappa, x(s+\kappa), x_{s+\kappa})ds - \int_0^t S(t-s)b(s, x(s), x_s)ds\right|_U^2 \\
\leq \ & t\mathbb{E}\int_0^t |S(t-s)\left(b(s+\kappa, x(s+\kappa), x_{s+\kappa}) - b(s, x(s), x_s)\right)|_U^2\, ds \\
\leq \ & tM^2 e^{2\rho T}\mathbb{E}\int_0^t |S(t-s)(b(s+\kappa, x(s+\kappa), x_{s+\kappa}) - b(s, x(s), x_s))|_U^2 ds \\
\leq \ & TM^2 e^{2\rho T}\int_0^t \sup_{0\leq\tau\leq s} \mathbb{E}|b(\tau+\kappa, x(\tau+\kappa), x_{\tau+\kappa}) - b(\tau, x(\tau), x_\tau))|_U^2 ds \\
< \ & \epsilon.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $\upsilon > 0$ choisi assez petit ,nous avons

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}|\Psi(t+\upsilon) - \Psi(t)|^2 \\
= \ & \mathbb{E}\left|\int_0^{t+\upsilon} S(t+\upsilon-s)\sigma_H(s)dB_Q^H(s) - \int_0^t S(t-s)\sigma_H(s)dB_Q^H(s)\right|^2 \\
\leq \ & 2\mathbb{E}\left|\int_0^t [S(t+\upsilon-s) - S(t-s)]\sigma_H(s)dB_Q^H(s)\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_t^{t+\upsilon} S(t-s)\sigma_H(s)dB_Q^H(s)\right|^2 \\
= \ & I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (3.5) a I_2 nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_1 \ \leq \ & 2cH(2H-1)t^{2H-1}\int_0^t |S(t-s)(S(\upsilon) - Id)\sigma_H(s)|_{L_Q^0(U,V)}^2\, ds \\
\leq \ & 2cH(2H-1)t^{2H-1}M^2 e^{2\rho T}\int_0^t |(S(\upsilon) - Id)\sigma_H(s)|_{L_Q^0(V,U)}^2\, ds \\
\leq \ & 2cH(2H-1)t^{2H-1}M^4 e^{2\rho T}(1+e^{2\rho\upsilon})\int_0^t |\sigma_H(s)|_{L_Q^0(V,U)}^2\, ds.
\end{aligned}$$

En appliquant maintenant inégalité (3.5) a I_2 nous obtenons

$$I_2 \leq 2cH(2H-1)\upsilon^{2H-1}M^2 e^{2\rho\upsilon}\int_0^{t+\upsilon} |\sigma_H(s)|_{L_Q^0(V,U)}^2\, ds.$$

On observe que la condiion $(H\sigma_H)$ assure l'existance de constantes positives c_1 et c_2 tel que

$$2cH(2H-1)t^{2H-1}M^4 e^{2\rho T}(1+e^{2\rho\upsilon})\int_0^t |\sigma_H(s)|_{L_Q^0(V,U)}^2\, ds \leq c_1,$$

et

$$2cH(2H-1)\upsilon^{2H-1}M^2e^{2\rho\upsilon}\int_0^{t+\upsilon}|\sigma_H(s)|^2_{L^0_Q(V,U)}\,ds\le c_2.$$

par conséquance, pour $\upsilon>0$ choisi ,et tout $t\ge 0$ nous avons

$$\mathbb{E}|\Psi(t+\upsilon)-\Psi(t)|^2\le c_1+c_2=c_3.$$

D'aprés la discussions ci-dessus,il est claire que l'opérateur $\mathcal{L}$ mappe $\widehat{C}([0,T],U)$ en lui même.

Enfin affirmons que $\mathcal{L}$ est un contraction sur $\widehat{C}([0,T],U)$. nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|(\mathcal{L}x)(t)-(\mathcal{L}y)(t)|^2 &= \mathbb{E}\left|\int_0^t S(t-s)\big[b(s,x(s),x_s)-b(s,y(s),y_s)\big]ds\right|^2\\ &\le 2M^2e^{2\rho T}\mathbb{E}\int_0^t|b(s,x(s),x_s)-b(s,y(s),y_s)|^2_U ds\\ &\le 2M^2e^{2\rho T}\mathbb{E}\int_0^t\sup_{0\le\tau\le s}|b(\tau,x(\tau),x_\tau)-b(\tau,y(\tau),y_\tau)|^2_U ds\\ &\le 2TM^2e^{2\rho T}c_b\sup_{0\le\tau\le s}\big(|x-y|^2_U+||x-y||^2_{\widehat{C}}\big)\\ &\le 4TM^2e^{2\rho T}\sup_{0\le\tau\le s}||x-y||^2_\infty.\end{aligned}$$

par conséquent

$$||(\mathcal{L}x)(t)-(\mathcal{L}y)(t)||_\infty\le 2Me^{\rho T}\sqrt{Tc_b}||x-y||_\infty=\gamma||x-y||_\infty. \tag{3.11}$$

comme $\gamma<1$,par (3.11), nous savons que $\mathcal{L}$ est un contraction par le principe de contraction, $\mathcal{L}$ a un point fixe unique x, qui est évidemment la solution faible presque périodique à moyenne quadratique à Eq. (3.7).

3.3 Example

Les équations à retard jouent un rôle cruciale dans la modélisation de nombreux domaines. Dans cette section nous présentons un exemple d'équation d'évolution stochastique suivante

$$\begin{cases} d\xi(t,x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(t,x)+\delta[\xi(t,x)(\sin(t)+\sin(\sqrt{2t}))]\right]dt+\sigma_H(t)dB^H_Q(t), & t\in[0,t],x\in[0,\pi]\\ \xi(t,0) = \xi(t,\pi)=0,\\ \xi(t,x) = \varphi(t,x)=0, \quad t\in[-\tau,0],\end{cases} \tag{3.12}$$

où $\tau \in (0,1), \varphi(\cdot, x) \in \widetilde{C}([-r,0],\mathbb{R})$ et $B_Q^H(t)$ est un mouvement brownien fractionnaire Q-cylindrique avec le paramètre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ satisfaisant $tr(Q) = 1$.

Notons $U = L^2(\mathbb{P}; L^2[0,\pi])$, et définissez $A : D(A) \subset U \to U$ donné par $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec $D(A) = \{\xi(.) \in U : \xi'' \in U, \xi' \in U$ est absolument continue sur $[0,\pi], \xi(0) = \xi(\pi) = 0\}$.

Il est bien connu qu'un semi-groupe S fortement continu, généré par l'opérateur A, vérifie $|S(t)| \leq e^{-t}$, pour $t \geq 0$. En prenant $b(t,\varphi,\varphi_t)(\theta) = \delta[\varphi(\theta)(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t))]$, et σ_H satisfait l'hypothèse $(\mathbf{H}\sigma_H)$. Ainsi on a

$$|b(t,x,x_t) - b(t,y,y_t)|_U^2 \leq 4\delta^2 |x-y|_U^2.$$

Par conséquent, Eq. 3.12 a une solution faible presque périodique à moyenne quadratique, à condition que, $\delta \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$ selon le théorème 3.2.1.

Soit $\eta_n(t) = \delta_n(t) = \delta^2(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t))^2$ pour $n \in \mathbb{N}$, Eq. 3.12 a une solution faible presque périodique à moyenne quadratique selon le théorème 3.2.1.

Soit $\eta(t) = \delta_n(t) = \delta^2(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t))^2$, Eq. 3.12 a une solution faible presque périodique à moyenne quadratique selon le théorème (3.4, [10]).

Conclusion

On a vu au cours de ce travail, une introduction de plusieurs notions théoriques relatives aux équations différentielles dont les équations différentielles à retard et équations différentielles à retard dirigé par un MBF, ces deux catégories d'équations occupent une place de premier importance dans différents domaines d'applications.
Notre travail consiste à prouver l'éxistence et l'unicité de solution d'une équation différentielle fractionnaires à retard dans le cas de la dérivée de Riemann-Liouville. Pour cette raison, on a appliqué le théorème du point fixe de Banach. dans ce cas nous avons traité le probléme frationnaire dans l'espace de fonctions sommables. Nous avons imposé quelques hypothèses sur f et K permettant la rèduction du problème fractionnaire avec retard à une équation intégrale.
Ensuite, on a éffectué une étude sur les équations différentielles stochastiques à retard dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire sous des conditions sur les coefficients qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution presque périodique à moyenne quadratique,ce qui est nouveau et nous permet de développer l'existence de diverses équations différentielles fractionnaires à retard et équations différentielles fractionnaires stochastiques avec retard, en utilisant certains théorèmes de point fixe appropriés et la théorie des systèmes d'évolution et un exemple est fourni pour illustrer l'applicabilité du nouveau résultat.
Nous espérons étudier au futur quelques problèmes pour l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle à retard infini dirigé par Mouvement Brownien gris.

BIBLIOGRAPHY

[1] **Anatoly** A. Kilbas, Hari M. Srivastava and Juan J. Trujillo., *Theory and Aplications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Stadies 204, Jan van Mill, Elsevier 2006

[2] **E. Artin**, *The Gamma Function*, New York, Holt, Rinehart and Winston, (1964)

[3] **A. Belarbi**, M. Benchohra et A. Ouahab., *Uniqueness results for functional differential equations with infinite delay in Fréchet spaces*, Applicable Analysis Vol. 85, No. 12, December 2006, 14591470

[4] **P. Bezandry**, T. Diagana, Existence of almost periodic solutions to some stochastic diferential equations, *Applicable Analysis*, vol. 86, no. 7, pp. 819-827, 2007

[5] **T.Brahim**,*Résolution des équations différentielles fractionnaires* ,Université de Contantine-1 algérie, Thèse de Doctorat,janvier 2018

[6] **R. M. Brooks** et K Schmitt, *The contraction mapping principle and some applications*, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 09, 2009.

[7] **J. Cao**, Q. Yang, Z. Huang, *On almost periodic mild solutions for stochastic functional differential equations. Nonlinear Anal:* Real World. App 13 (2012) 275-286.

[8] **P. N. Dutta** et B. S. Choudhury, *A generalisation of contraction principle in metric spaces,*Fixed point theory and applications, 2008 45-53

[9] **M.Godefroy**, *La fonction Gamma , Théorie, Histoire, Bibliographie,* Gauthier-Villars, Paris. (1901)

[10] **T. Guendouzi**, K. Mehdi, *Almost periodic mild solutions for stochastic delay functional differential equations driven by a fractional Brownian motion*, Romanian Journal of Mathimatics and computer science, 4(2014), 12 - 26.

[11] **J.K. Hale**, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977

[12] **Joachim Y**. Nahmani. *Introduction to stochastic integration w.r.t fBm.* Institue of Mathematics A (june 2009).

[13] **B.Mendelbort** et J.van Ness-*Fractional Brownian motions,fractional noises and applications* SIAM rev.10(1968),P.898-437.

[14] **Y. Mishura**, *stochastic calculus for fractional brownian motion and related processes*, Springer-Verlag Berhim Heidelberg 2008.

[15] **B.Samorodnitsky** et M.Taqqu *stable non-Gaussien radom processes, stochastic* Modling, chapman et Hall,New york 1994.

[16] **H. Smith**, *An introduction to Delay differential equations with applications to the life sciences*, Springer-Verlag, New York, 2011.

[17] **T. Taniguchi**, K. Liu, A. Truman, *Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solution to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces.* J. Differ. Equations 181 (2002) 72-91.