

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ.: 2019/2020



# Analyse d'un système de files d'attente Markovien avec vacances du serveur et clients impatients

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saïda - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : ASSPA

par

**Hamri Kenza**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Dr. L. Yahiaoui**

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

<b>Dr. S. Soltani</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
<b>Dr. L. Yahiaoui</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
<b>Dr. W. Benzatout</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
<b>Dr. L. Bousmaha</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

---

1. e-mail : hamrikenza97@gmail.com

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Processus Stochastiques</b>	<b>9</b>
1.1	Processus aléatoire . . . . .	9
1.2	Processus de comptage . . . . .	10
1.3	Processus de renouvellement . . . . .	10
1.4	Processus de Poisson . . . . .	11
1.4.1	Loi de Poisson et loi exponentielle . . . . .	12
1.5	Chaînes de Markov . . . . .	12
1.5.1	Chaînes de Markov à temps discret . . . . .	12
1.5.2	Chaînes de Markov à temps continu . . . . .	14
1.6	Processus de naissance et de mort . . . . .	16
1.6.1	Processus de naissance . . . . .	17
1.6.2	Processus de mort . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Systèmes de Files d'Attente Classiques</b>	<b>18</b>
2.1	File d'attente simple . . . . .	19
2.2	Notation de Kendall . . . . .	21
2.3	Loi de Little . . . . .	22
2.3.1	Analyse en régime stationnaire . . . . .	23
2.4	Modèle d'attente $M/M/1$ . . . . .	23
2.5	La file $M/M/1/K$ . . . . .	26
2.6	La file $M/M/C$ . . . . .	27
2.7	La file $M/M/\infty$ . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Systèmes markoviens avec vacances et clients impatientes</b>	<b>32</b>
3.1	Modèles de file d'attente avec des clients impatientes . . . . .	32
3.1.1	Modèles intégrant l'impatience du client . . . . .	32
3.2	Modèles de file d'attente pour les vacances . . . . .	33
3.2.1	Différents types de modèles de vacances . . . . .	34
3.3	Description de modèle . . . . .	35

---

3.4	Résultat principal . . . . .	36
3.4.1	Calculer les probabilités $\pi_{00}, \pi_{10}, \pi_{11}$ , et les nombres moyens $\mathbb{E}(L_0)$ , $\mathbb{E}(L_1)$ . . . . .	38
3.4.1.1	Les autres mesures de performance . . . . .	40
3.5	Exemples numériques . . . . .	41
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

# Remerciement

Avant toute chose, je tiens à remercier Dieu le tout puissant.

J'adresse mes remerciements particuliers à mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi, ma mère, **TIRES Yamina**. Que de fois elle s'est assise à mes côtés, dans le bureau, pendant que je rédigeais ce mémoire. sa simple présence était un stimulant pour aller de l'avant. Je remercie vivement mon encadreur de mémoire et Mon professeur au lycée Monsieur : **Lahcene Yahiaoui** pour sa continuelle assistance, sa patience et ses conseils qui m'ont été d'un grand apport et encouragement pendant toute la durée de l'élaboration de ce travail.

Je le remercie profondément pour sa disponibilité, ses orientations et ses remarques fructueuses. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Dr. **L. Soltani**, d'avoir accepté à présider le jury de mon mémoire.

Je souhaite également remercier Dr. **W. Benzatout**. et Dr. **L. Bousmaha** de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être examinateurs de mon mémoire. Leurs remarques et précieux conseils ont abouti à une amélioration de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à tous Les membres du laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistique et Applications et à la tête le directeur *Pr.* **A. Kandouci**.

Je remercie également tous les enseignants de départements de Mathématiques.

Ma gratitude va également aux enseignants du Département de Mathématiques que j'ai eu durant mon cursus.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs qui m'ont enseigné.

je remercie mes amis surtout mon amie intime **Meriem** pour les bons moments passés ensemble et aussi pour leur soutiens et leur encouragements.

# Dédicace

*A travers ce modeste travail,*

Je dédie mes meilleurs vœux à mes très chers parents, à qui je  
n'arriverai jamais à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance,

pour ses amours ses soutiens tout au long de mes études

A mes chers frères et sœurs : Djamila et son mari, fafa, sidahmed et kada

A chacune des deux familles Hamri et Tires

A tous ceux qui me connaissent de près ou de loin.

A tous ce qu'ils ont aimé me voir ce jour-là.

# Introduction

La théorie des files d’attente, ou des queues, est un des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation de systèmes de logistiques et de communication. Cette théorie a pour objet l’étude de systèmes et réseaux où des entités, appelées clients, cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d’en obtenir un service. La demande concurrente d’une même ressource par plusieurs clients engendre des délais dans la réalisation des services et la formation de file de clients désireux d’accéder à une ressource indisponible. L’analyse théorique de tels systèmes permet d’établir à l’avance les performances de l’ensemble, d’identifier les éléments critiques ou, encore, d’appréhender les effets d’une modification des conditions de fonctionnement.

Les systèmes de file d’attente avec l’impatience des clients et les vacances du serveur ont été largement étudiés en raison de leurs vastes applications dans les problèmes de congestion réels tels que les systèmes de communication, les télécommunications systèmes, systèmes de circulation et systèmes de fabrication / production.

Le comportement impatient du client devrait être nécessaire dans l’étude du système de files d’attente pour modéliser avec précision les conditions réelles. L’exploitation occasionnelle d’un service peut être économiquement invoquée lorsque le service à temps complet entraînerait un temps d’inactivité substantiel du serveur ou empêcherait l’utilisation du serveur dans différentes capacités. D’autre part, le serveur ne fonctionnant pas pendant des périodes de temps pourrait gagner la probabilité des pertes de clients dues à la réticence et au reniement de Goswami [17].

Les files d’attente avec des vacances ont été largement analysées, Ke et al. [25] a fourni un résumé succinct des travaux de recherche récents sur les systèmes de file d’attente avec des vacances au cours de la dernière décennie, Tian et Zhang [36] ont discuté de nombreux des variantes de politique de vacances et une variété d’applications de modèles de vacances typiques qui incluent des centres d’appels avec employés polyvalents, fabrication personnalisée, systèmes de télécommunication, activités de maintenance, etc. également étudié. Yue et coll. [41] ont présenté une analyse pour un système de mise en file d’attente

$M/M/1/N$  avec dérobade, abondance et les vacances de serveur. En utilisant la méthode du processus de Markov, les auteurs ont développé les équations des probabilités d'état, alors, ils ont dérivé la solution sous forme matricielle des probabilités d'état stationnaire, et ont donné des mesures de performance du système, après quoi ils ont formulé un modèle de coût pour déterminer le service optimal.

Il existe plusieurs situations où le serveur reste actif pendant la période de vacances s'appelle "travail-vacances". Le serveur peut fournir service à une vitesse inférieure pendant la période de vacances au lieu d'arrêter complètement le service. Si la file d'attente est vide à la fin des vacances, le serveur prend de nouvelles vacances ; sinon, une période de service commence par le tarif de service normal Goswami [17].

Les systèmes de file d'attente avec interruption de vacances ont été étudiés par de nombreux auteurs, Baba [8] a étudié un  $M/PH/1$  file d'attente avec type de phase travail-vacances et interruption de vacances où suit le temps de vacances une distribution de type de phase, Chen et al. [11] Considéré comme une file d'attente  $GI/M/1$  avec des travail-vacances de type phase et interruption de vacances où le temps de vacances suit une distribution de type phase. Li et Tian [28] ont étudié la File d'attente  $M/M/1$  avec travail-vacances et interruptions de vacances, Zhang et Hou [45] ont analysé un  $M/G/1$  file d'attente avec des travail-vacances et une interruption de vacances. En utilisant la méthode d'une variable supplémentaire et la méthode d'analyse matricielle, les auteurs ont obtenu la distribution de la longueur de la file d'attente et l'état du service à un époque arbitraire en régime permanent. Zhang et Shi [44] ont présenté une file d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli-schedule vacances et interruption de vacances. Altman et Yechiali [3] n'ont considéré que l'impatience des clients lorsque les serveurs sont en vacances et indisponibles pour le service. Selvaraju et Goswami [34] analysés impatients clients dans une file d'attente markovienne de serveur unique avec des travail-vacances uniques et multiples.

De nombreux systèmes pratiques de mise en file d'attente, en particulier ceux avec des retentions et des abandons, ont été largement appliqués à de nombreux problèmes de la vie réelle, tels que les situations impliquant des clients de standard téléphonique impatients, les salles d'urgence des hôpitaux traitant des patients critiques et les systèmes d'inventaire avec stockage des denrées périssables marchandises Robert [31]. Haight [19] a considéré une file d'attente  $M/M/1$  avec dérobade. Une file d'attente  $M/M/1$  avec les clients abandons a également été proposé par Haight [20]. Les effets combinés de la dérobade et l'abandon dans un  $M/M/1/N$  file d'attente ont été étudiés par Ancker et

Gafarian ([4],[5]). Abou-EI-Ata et Hariri [2] considéraient le multiple système de mise en file d'attente des serveurs  $M/M/c/N$  avec dérobade et abandonne. Wang et Chang [37] ont étendu ce travail à étudier une file d'attente  $M/M/c/N$  avec dérobade , abandonne et des pannes de serveur. Laxmi et coll. [27] ont étudié  $M/M/1/N$  file d'attente de travail-vacances avec dérobade et abandonne. Yue et coll. [40] ont analysé un système de mise en file d'attente  $M/M/1$  avec des travail-vacances et des clients impatient, les auteurs ont dérivé les fonctions génératrices de probabilité nombre de clients dans le système lorsque le serveur est en période de service et en travail-vacances , respectivement, puis ils ont obtenu les expressions de forme fermée pour diverses mesures de performance.

Mon mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions de bases de l'étude des systèmes de files d'attente, à savoir les processus stochastiques et Chaînes de Markov :

- Processus aléatoire,
- Processus de comptage,
- Processus de renouvellement,
- Processus de Poisson,
- Chaînes de Markov,
- Processus de naissance et de mort.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la terminologie de la théorie des files d'attente. Certaines définitions et notations qui sont nécessaires dans l'étude des systèmes de files d'attente comme (Notation de Kendall, la loi de Little ,...etc ) sont notamment données. Ensuite nous étudions quelque modèles de files d'attente (  $M/M/1$ ,  $M/M/1/K$ ,  $M/M/c$ ,  $M/M/\infty$  ) et l'évaluation de leurs paramètres de performance. Enfin dans le troisième chapitre nous présentons une étude de certains modèles d'attente avec vacances et clients impatient [39] ,[9]. Ensuite nous présentons quelques exemples numériques pour voir comment les différents paramètres du modèle influencent sur le comportement du système.



# Chapitre 1

## Processus Stochastiques

L'étude des processus stochastiques s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles.

Par exemple, le prix d'un baril du Pétrole, il a connu au cours de ces cinq dernières années des fluctuations, qui ont tiré l'attention de beaucoup des spécialistes économiques. En effet, Ce prix, dans la bourse, varie tout le temps, cette variation nous donne l'idée d'établir un processus aléatoire, ou encore un processus stochastique, d'où la modélisation par une famille de variables aléatoires  $X(t)_{t \in T}$  où  $T$  est l'ensemble des temps pendant lesquels le phénomène est observé. La famille  $X(t)_{t \in T}$  est appelée processus aléatoire, ou encore processus stochastique.

### 1.1 Processus aléatoire

**Définition 1.1.1.** [43] *Un **processus aléatoire** ou un processus stochastique est un modèle probabiliste permettant d'étudier un phénomène aléatoire au cours du temps. Formellement, un processus stochastique est la donnée :*

1. *d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*
2. *d'un espace mesurable  $(E, B)$*
3. *d'une famille  $(Y_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $(E, B)$ .*

*L'ensemble  $E$  est l'espace des états du processus, l'ensemble  $T$  l'espace des temps. Pour  $w$  dans  $\Omega$ , l'application qui à tout  $t$  de  $T$  associe  $Y_t(w)$  est la trajectoire de  $w$ . souvent,  $T$  est l'ensemble des entiers  $\mathbb{N}$ , et alors on dit que le processus est à temps discret, ou bien  $T = \mathbb{R}$  et on dit alors que le processus est à temps continu.*

## 1.2 Processus de comptage

**Définition 1.2.1.** Un processus  $(N_t)_{\mathbb{R}_+}$  est appelé processus de comptage si c'est un processus croissant, c'est-à-dire si pour tout  $s \leq t$ ,  $N_s \leq N_t$ . La variable aléatoire  $N_t - N_s$  est alors appelée accroissement du processus sur  $]s, t]$ .

**Définition 1.2.2.** Un processus de comptage  $(N_t)_{\mathbb{R}_+}$  est appelé processus à accroissements indépendants si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous  $t_1, \dots, t_n$  tels que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les accroissements  $N_{t_1} - N_0, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont des variables aléatoires indépendantes.

**Définition 1.2.3.** Le processus est dit stationnaire (ou homogène dans le temps), si pour tout  $s$  et pour tout  $t$ , l'accroissement  $N_{t+s} - N_s$  a même loi que  $N_t$ .

**Définition 1.2.4.** Un processus à accroissements indépendants stationnaire  $(N_t)_{\mathbb{R}_+}$  est dit à événements rares si

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \mathbb{P}([N_h > 0]) = 0$$

et si

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}([N_h > 1])}{\mathbb{P}([N_h = 1])} = 0.$$

## 1.3 Processus de renouvellement

Un processus de renouvellement a pour fonction de dénombrer les occurrences d'un phénomène donné, lorsque les délais entre deux occurrences consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il peut s'agir de compter le nombre de pannes d'un matériel électronique en théorie de la fiabilité (le matériel est alors renouvelé après chaque panne, d'où la dénomination), de dénombrer les arrivées de clients dans une file d'attente, de recenser les occurrence d'un sinistre pour une compagnie d'assurance...

**Définition 1.3.1.** Un processus de comptage dont la suite des inter-arrivées forme une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées s'appelle processus de renouvellement. Les temps de renouvellement (ou les temps de la  $n$ -ième arrivée) sont :

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

avec  $a_i, i = 1, 2, \dots$  est le temps entre deux arrivées consecutives. Il est facile de voir que le nombre d'arrivées avant le temps  $t$ , i.e. le processus

$$(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = \sup_k \{k, A_k \leq t\}$$

est un processus de comptage.

## 1.4 Processus de Poisson

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent par des "arrivées" survenant une par une à des instants aléatoires successifs.

**Exemples 1.4.1.** *Les exemples de processus ne se limitent évidemment pas à la biologie :*

- Appels téléphoniques à un standard,
- Prise d'un poisson par un pêcheur,
- Arrivée d'un client à un guichet,
- Passage d'un autobus.

De tels phénomènes peuvent se définir par la famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  des temps d'arrivées qui sont des variables aléatoires [21]. mais on peut aussi le faire à partir du processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .  $N_t$  est le nombre d'événements apparus jusqu'à l'instant  $t$ .

**Définition 1.4.1.** *Un processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  tel que  $N_0 = 0$  est un processus de Poisson si*

1.  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est stationnaire,
2.  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus à accroissements indépendants,
3.  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus à événements rares.

Le nom donné au processus de Poisson s'explique par ce qui suit :

**Propriété 1.4.1.** [32] *Un processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  tel que  $N_0 = 0$  est un processus de Poisson si et seulement si :*

1.  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est stationnaire,
2.  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus à accroissements indépendants,
3.  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  il existe  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $N_t$  suive la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .

### 1.4.1 Loi de Poisson et loi exponentielle

**Définition 1.4.2.** Une variable aléatoire  $X$  à valeurs entières suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp^{-(\lambda)}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$$

Fonction génératrice :

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = e^{\lambda(s-1)}$$

**Définition 1.4.3.** Une variable aléatoire  $Y$  à valeurs réelles strictement positives suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu > 0$  si :

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(Y = t) = \mu \exp^{-(\mu t)}$$

Sa fonction de densité se présente ainsi, avec  $\mu > 0$  :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mu e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

**Propriété 1.4.2.** La loi exponentielle de paramètre  $\mu$  est notée  $\mathcal{E}(\mu)$  .

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\mu)$

– Sa fonction de répartition est

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

– Sa fonction génératrice des moments est

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \infty & \text{si } t \geq \mu \\ \frac{\mu}{\mu - t} & \text{si } t < \mu \end{cases}$$

– Sa moyenne et sa variance sont

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mu} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\mu^2}$$

## 1.5 Chaînes de Markov

### 1.5.1 Chaînes de Markov à temps discret

**Définition 1.5.1.** [42] Une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable  $E$  est une chaîne de Markov d'espace d'états  $E$  si et seulement

si [14] pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $(X_0, \dots, X_{k+1})$  dans  $E$  tels que  $\mathbb{P}(X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1}/X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1}/X_k = x_k).$$

La chaîne est dite homogène si on a de plus pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = y/X_k = x) = \mathbb{P}(X_1 = y/X_0 = x).$$

**Définition 1.5.2.** On appelle probabilité de transition pour aller de l'état  $x$  à l'état  $y$  la probabilité

$$p_{x,y} = \mathbb{P}(X_{k+1} = y/X_k = x)$$

**Lemme 1.5.1.** [22] On note  $\nu_0$  la loi de  $X_0$  ( $\nu_0(x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)$ ). On a alors pour tous  $(X_0, \dots, X_n)$  dans  $E$

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \nu_0(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p_{x_k, x_{k+1}}.$$

Démonstration : Par conditionnements successifs :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_1 = x_1/X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_2 = x_2/X_1 = x_1, X_0 = \\ x_0) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n/X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) &= \nu_0(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p_{x_k, x_{k+1}}. \end{aligned}$$

**Définition 1.5.3.** On appelle matrice de transition la matrice  $\mathcal{P} = (P_{x,y})_{x,y \in E}$  :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{x_0, x_0} & p_{x_0, x_1} & p_{x_0, x_2} & \cdots \\ p_{x_1, x_0} & p_{x_1, x_1} & p_{x_1, x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme précédent, la loi d'une chaîne de Markov est caractérisée par la loi  $\nu_0$  de  $X_0$  et par sa matrice de transition.

C'est une matrice finie ou dénombrable, suivant que l'ensemble des états est fini ou dénombrable.

**Proposition 1.5.1.** Toute matrice de transition vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout couple  $(x, y)$  de  $E$ ,  $0 \leq p_{x,y} \leq 1$ ;

2. pour tout  $x \in E$ , on a  $\sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$ .

Démonstration : Les nombres  $p_{x,y}$  sont des probabilités, donc le premier point est évident. Le second point découle du fait qu'on somme les probabilités sur toutes les valeurs possibles d'une variable aléatoire.

**Théorème 1.5.1 (Equation de Chapman-Kolmogorov).** Soit  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov homogène sur  $E$  de matrice de transition  $P$  et de loi initiale  $\mu_0$ . Notons  $\pi_n$  la loi de  $X_n$ . Alors

- la suite  $(\pi_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence, appelée équation de Chapman-Kolmogorov, suivante :

$$\pi_{n+1} = \mu_n P = \pi_0 P^{n+1},$$

- pour tous  $x, y \in E$ ,  $\mathbb{P}(X_n = y / X_0 = x) = P^n(x, y)$

Démonstration : on utilisant la loi total et la propriété de markov.

## 1.5.2 Chaînes de Markov à temps continu

**Définition 1.5.4.** Le processus aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  d'espace d'états  $E = \{e_i\}_{i \in I}$ , fini ou dénombrable, est une chaîne de Markov à temps continu, si sont vérifiées les deux propriétés :

1. propriété de Markov :  $\forall (e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) \in E^{n+1}, \forall (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  tels que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = e_{n+1} / X_{t_n} = e_n, \dots, X_{t_1} = e_1) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = e_{n+1} / X_{t_n} = e_n).$$

2. homogénéité :  $\forall t_1, t_2, t \in \mathbb{R}_+, \forall e_i, e_j \in E$  :

$$\mathbb{P}(X_{t_1+t} = e_j / X_{t_1} = e_i) = \mathbb{P}(X_{t_2+t} = e_j / X_{t_2} = e_i) = p_{i,j}(t).$$

**Définition 1.5.5.** On rappelle que, si  $\pi(t)$  est la loi de  $X_t$ , i.e  $\pi(t) = (\pi_x(t))_{x \in E}$  où  $\pi_x(t) = P([X_t = x])$ , on a :

$$p_i(t) = \pi(0)P(t).$$

**Propriété 1.5.1.** [42] La matrice de transition  $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j \in I}$  et  $\pi(t)$  la loi de  $X_t$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $\forall t, \forall i, j \in I, p_{i,j}(t) \geq 0$  ;

$$(2) \quad \forall t, \forall i \in I, \sum_j p_{i,j}(t) = 1.$$

$$(3) \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^+, P(s+t) = P(s)P(t)$$

$$(4) \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^+, \pi(s+t) = \pi(s)P(t)$$

Contrairement à ce qui se passe pour les chaînes de Markov à temps discret, on ne dispose pas ici d'un historique complet du processus : on observe celui-ci à certains instants dans le temps, choisis aussi nombreux que l'on veut et répartis comme on veut mais la notion d'"unité de temps" n'a plus de sens ici et la matrice  $P = P(1)$  ne permet pas de déterminer  $P(t)$  pour tout  $t$ .

L'idée est alors de considérer  $P(h)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Grâce à  $P(t+h) = P(t)P(h) = P(h)P(t)$  et à  $P(0) = I$ , on a :

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t) \frac{P(h) - I}{h} P(t).$$

Sous réserve d'existence des limites, si on pose  $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = P'(0)$ , On a alors :

$$P'(t) = P(t)A = AP(t) \quad \text{et} \quad P(0) = I$$

Cette équation différentielle matricielle admet l'unique solution :

$$P(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

### Remarque :

L'évolution d'un processus de Markov à temps continu peut se voir comme une répétition de deux phases :

- on reste un certain temps (de loi exponentielle) dans un état ;
- lorsqu'on quitte cet état, on choisit l'état vers lequel on sort, cette destination ne dépendant ni du temps passé dans l'état, ni du chemin par lequel on est arrivé à l'état. On notera  $p_{x,y}$  la probabilité de se rendre dans l'état  $y$  en quittant l'état  $x$ .

**Définition 1.5.6.** On dit que le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est stationnaire si la loi de  $X_t$  est indépendante de  $t$ .

On a alors  $\pi(t) = \pi(0)$  pour tout  $t \geq 0$  et en dérivant l'équation précédente, on obtient :

$$0 = \pi(0)P'(t) = \pi(0)P(t)A = \pi(t)A = \pi(0)A.$$

**Définition 1.5.7.** On appelle distribution stationnaire toute probabilité  $\pi$  qui vérifie

$$\pi A = 0.$$

Si  $(X_t)$  converge en loi et si  $\pi^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$ , alors  $\pi^\infty$  est distribution stationnaire du processus.

On a  $(\pi A)_y = \sum_{x \in E} \pi_x a_{x,y} = \sum_{x \neq y} \pi_x a_{x,y} + \pi_y a_{y,y}$  avec  $a_{y,y} = -\sum_{x \neq y} a_{y,x}$  ainsi :

$$\pi A = 0 \text{ quivaut } \sum_{x \neq y} \pi_x a_{x,y} = \sum_{x \neq y} \pi_y a_{y,x}.$$

Cette relation traduit l'équilibre (**l'équation de Kolomogorov**), en régime stationnaire du flux rentrant en  $y$   $\sum_{x \neq y} \pi_x a_{x,y}$  et du flux sortant de  $y$   $\sum_{x \neq y} \pi_y a_{y,x}$ .

## 1.6 Processus de naissance et de mort

**Définition 1.6.1.** On peut réaliser un processus de naissance et de mort de la façon suivante :

- Les arrivées et les départs d'entités obéissent à des lois exponentielles de taux respectifs  $\lambda(n)$  et  $\mu(n)$  :
- A l'aide d'hypothèse de régularité : deux évènements ne peuvent pas se produire en même temps, donc la probabilité que deux évènements se produisent dans un intervalle de temps  $dt$  est négligeable.
- Il y a une transition vers un état voisin, soit par l'arrivée d'un client (naissance), soit par le départ d'un client (mort).

Si  $\pi_n(t)$  est la probabilité pour qu'il y a  $n$  clients dans le système à l'instant  $t$ , l'équation de Kolomogorov s'écrit, pour  $n > 0$

$$\pi_n(t + dt) = (1 - (\lambda_n + \mu_n)dt)\pi_n(t) + \mu_{n+1}\pi_{n+1}(t)dt + \lambda_{n-1}\pi_{n-1}(t)dt + o(dt)$$

C'est-à-dire, en faisant tendre  $dt$  vers 0, pour  $n > 0$

$$\frac{d}{dt}\pi_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)\pi_n(t) + \mu_{n+1}\pi_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}\pi_{n-1}(t)$$



De la même façon , on obtient pour  $n = 0$  .

$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda_0\pi_0(t) + \mu_1\pi_1(t),$$

### 1.6.1 Processus de naissance

**Définition 1.6.2.** *Le processus de naissance est la généralisation direct d'un processus de poisson lorsque le paramètre d'intensité  $\lambda$  dépend de l'état courant du processus, il va nous permettre d'introduire le concept "d'explosion" Si la taille d'une population a une transition  $n \rightarrow n + 1$  donc il correspond à une naissance.*

### 1.6.2 Processus de mort

Si la taille d'une population a une transition  $n \rightarrow n - 1$  une mort

**Définition 1.6.3.** *(Processus de naissance et de mort) C'est un cas particulier de chaîne de Markov [7] où seules les transitions d'un état à un état voisin sont permises, on s'intéresse au cas continu avec des taux de transition C'est le point de départ de la théorie des files d'attente. On introduit les données suivantes :*

$\lambda_n$  :taux de naissances quand le nombre de population égale à  $n$ .

$\mu_n$  :taux de morts quand le nombre de population égale à  $n$ .

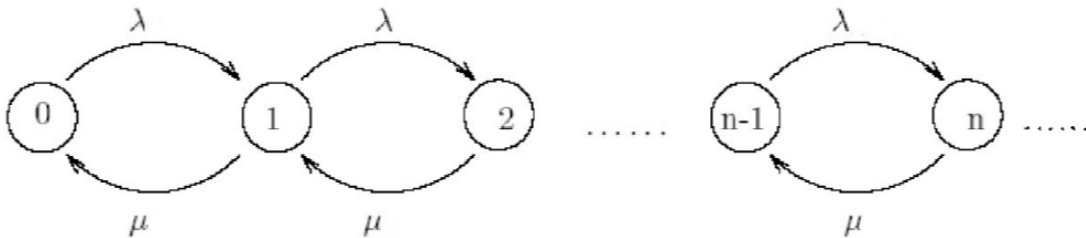


FIGURE 1.1 – Diagramme de transition d'un processus de naissance et de mort

# Chapitre 2

## Systèmes de Files d'Attente Classiques

La théorie de files d'attente est une technique de la recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques pour aider les praticiens dans leurs prises de décisions. Des résultats et formulations théoriques sont bien établis pour les modèles de files d'attente avec arrivées poissonniennes et les durées de services exponentielles [38].

### Définition 2.0.4.

**File d'attente** : [12] l'ensemble des clients qui attendent d'être servis, à l'exclusion de celui qui est en train de se faire servir.

**Système d'attente** : l'ensemble des clients qui font la queue, y compris celui qui se fait servir.

Le **phénomène d'attente** s'étend à tous les clients possibles (dans le cas de systèmes bouclés, où les mêmes clients reviennent plus tard à l'entrée par exemple les machines qui tombent en panne dans un atelier, le nombre des clients est, en général, fini). Ces appellations se généralisent et prennent surtout leur intérêt dans les situations où il existe plusieurs stations et plusieurs files d'attente.

### Classification des systèmes d'attente :

Pour identifier un système d'attente, on a besoin des spécifications suivantes [33] :

- La nature stochastique du processus des arrivées, qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives ;
- La distribution du temps aléatoire de service ;
- Le nombre  $c$  des stations de service ;
- La capacité  $N$  du système. Si  $N < \infty$ , la file d'attente ne peut dépasser une longueur de  $N - c$  Unités. Dans ce cas, certains clients arrivant vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer ;
- la source des clients potentiels.

**Terminologie et notations[6] :**

- $\lambda$  : Le taux d'arrivée ; le nombre moyen d'arrivées par unité de temps.
- $\frac{1}{\lambda}$  : L'intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives.
- $\mu$  : Le taux de service ; le nombre moyen de clients servis par unité de temps.
- $\frac{1}{\mu}$  : Temps moyen de service d'un client dans le système.
- $\bar{N} = \mathbb{E}(N)$  : nombre moyen de clients dans le système.
- $\bar{N}_S$  : nombre moyen de clients en train d'être servis.
- $\bar{N}_Q$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente.  $N_Q$ ,  $N_S$  et  $N$  sont les v.a. correspondantes.
- $\bar{T}$  temps moyen qu'un client passe dans le système.
- $\bar{T}_S$  temps moyen de service.
- $\bar{T}_Q$  temps moyen d'attente d'un client dans la file.  $T_Q$ ,  $T_S$  et  $T$  sont les v.a. correspondantes.

## 2.1 File d'attente simple

Une file d'attente simple est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station [24]. Afin de spécifier complètement une file d'attente simple, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente .

**Processus d'arrivée**

L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$ .

Si  $A_n$  désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du n-ième client dans le système, on aura ainsi :  $A_0 = 0$ ,  $A_n = \inf\{t, N_t = n\}$ .

Si  $T_n$  désigne la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du (n-1)-ième client et du n-ième client [26], on a alors :

$$T_n = A_n - A_{n-1}$$

**Temps de service**

Considérons tout d'abord une file à serveur unique.

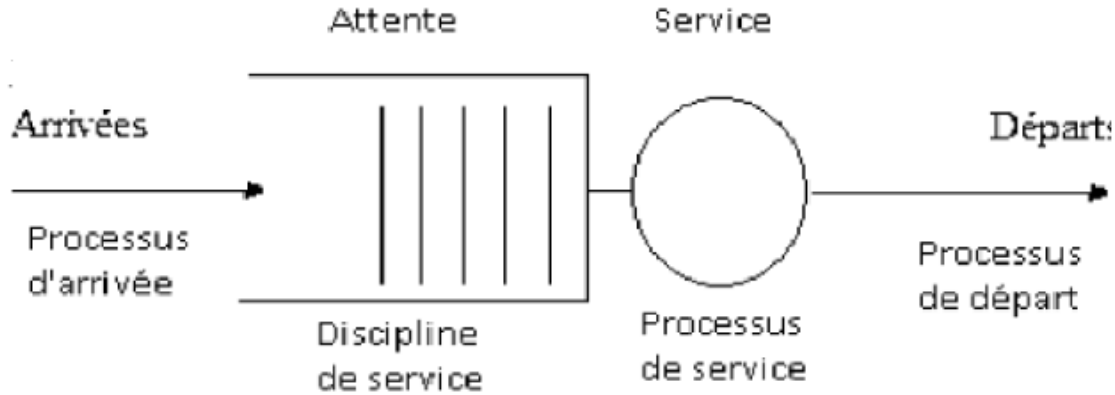


FIGURE 2.1 – le système de file d'attente

On note  $D_n$  la variable aléatoire mesurant l'instant de départ du  $n$ -ième client du système et  $Y_n$  la variable aléatoire mesurant le temps de service du  $n$ -ième client (le temps séparant le début et la fin du service). Un instant de départ correspond toujours à une fin de service [29], mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut en effet qu'un client qui quitte la station laisse celle-ci vide. le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arrivée du prochain client. On note  $\mu$  le taux de service :

$\frac{1}{\mu}$  est la durée moyenne de service.

### Structure et discipline de la file :

#### Nombre de serveurs

Une station peut disposer de plusieurs serveurs en parallèle. Soit  $C$  le nombre de serveurs. Dès qu'un client arrive à la station, soit il y a un serveur libre, le client entre instantanément en service, soit tous les serveurs sont occupés et le client se place dans la file en attente de libération d'un des serveurs. Mais on suppose à la plupart du temps que les serveurs sont identiques et indépendants les uns des autres. Une station particulière est la station *IS* (infinité servers) dans la quelle le nombre de serveurs est infini. Cette station ne comporte donc pas de file d'attente.

#### Capacité de la file

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit  $K$  la capacité de la file, une file à capacité illimitée vérifie  $K = +\infty$ .

#### Discipline de service

La discipline d'attente, est la règle de priorité déterminant l'ordre dans lequel les clients vont accéder à la ressource modélisé par le serveur. Les disciplines d'attente classiques, ainsi que leurs acronymes, [30] sont

- *FIFO* (first in, first out) ou *FCFS* (first come, first served) : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines *FIFO* et *FCFS* ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur, termine avant lui.
- *LIFO* (last in, first out) ou *LCFS* (last come, first served). Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). À nouveau, les disciplines *LIFO* et *LCFS* ne sont équivalentes que pour une file mono serveur.
- *RANDOM* (aléatoire) : le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.
- *Round – Robin* (cyclique). Tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant un quantum  $Q$  de leur temps de service et sont remplacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli. Cette discipline de service a été introduite afin de modéliser les systèmes informatiques.
- *PS* ( Processor Sharing ), les clients sont servis de manière égale. La capacité du système est partagée entre les clients.

## 2.2 Notation de Kendall

Pour la classification des systèmes de files d'attente, on a recours à une notation symbolique introduite par Kendall [13] , comprenant six symboles rangés dans l'ordre

$$A/B/C/N/D/O$$

- $A$  : indique le processus d'arrivée des clients. Les codes utilisés sont :
  - $M$  ( Markov ) : inter-arrivées des clients sont indépendamment, identiquement distribuées selon une loi exponentielle. Il correspond à un processus de Poisson ponctuel (propriété sans mémoire),
  - $D$  ( Répartition déterministe ) : les temps inter-arrivées des clients ou les temps de service sont constants et toujours les mêmes,
  - $GI$  ( général indépendant ) : Les inter-arrivées des clients ont une distribution générale ( il n'y a aucune hypothèse sur la distribution mais les interarrivées sont indépendantes et identiquement distribuées),

- $G$  ( général ) : Inter-arrivées de clients ont une distribution générale et peuvent être dépendantes,
- $E_k$  : Ce symbole désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi d'Erlang d'ordre  $k$ .
- $B$  : décrit la distribution des temps de service d'un client. les codes sont les mêmes que  $A$ ,
- $C$  : nombre de serveurs,
- $N$  : capacité de la file (c'est le nombre de places dans le système en d'autre terme c'est le nombre maximal de clients permis dans le système  $B$  compris ceux en service,
- $D$  : population des usagers,
- $O$  : discipline de service ( c'est la façon dont les clients sont ordonnés pour être servi.

## 2.3 Loi de Little

La loi de Little est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime permanent du système. Aucune hypothèse sur les variables aléatoires qui caractérisent le système (temps d'inter-arrivées, temps de service,... etc). La seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable. Le débit du système est alors indifféremment soit le débit d'entrée, soit le débit de sortie La loi de Little s'exprime telle que dans la propriété suivante :

**Théorème 2.3.1.** *Le nombre moyen de clients  $\bar{N}$ , le temps moyen passé dans le système  $\bar{T}$  et le débit moyen  $\lambda$  d'un système stable en régime permanent se relient de la façon suivante :*

$$\bar{N} = \lambda_e \bar{T}$$

où  $\lambda_e$  est le taux d'entrée dans le système (  $\lambda_e = \lambda$  pour une file  $(M/M/1)$  ) On a vu que la loi de Little nous dit qu'il existe une relation entre le nombre moyen de clients dans la file (en attente ou en service) et le temps moyen total de séjour d'un client dans la file (temps d'attente + temps de service).

$$\bar{N} = \lambda_e \bar{T}$$

La loi de Little peut aussi s'appliquer en considérant uniquement l'attente dans la queue (sans le service). Elle permet alors de relier le nombre moyen de clients en attente ( $\bar{N}_Q$ ) au temps moyen d'attente d'un client avant service ( $\bar{T}_Q$ )

par la relation :  $\bar{N}_Q = \lambda_e \bar{T}_Q$

Enfin, on peut appliquer la loi de Little en ne considérant que le serveur. Dans ce cas, elle relie le nombre moyen de clients en service ( $\bar{N}_S$ ) au temps moyen de séjour d'un client dans le serveur qui n'est rien d'autre que le temps moyen de service ( $\bar{T}_S$ ) par la relation :  $\bar{N}_S = \lambda_e \bar{T}_S$ . On a obtenu trois relations en appliquant la loi de Little successivement au système entier à la file d'attente seule et enfin au serveur seul. Ces trois relations ne sont bien sûr pas indépendantes. On peut en effet déduire l'une d'entre elles à partir des deux autres en remarquant que  $\bar{N} = \bar{N}_Q + \bar{N}_S$  et  $\bar{T} = \bar{T}_Q + T_S$ .

**Remarque 2.3.1.** La loi de Little s'applique à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file M/M/1).

### 2.3.1 Analyse en régime stationnaire

Il est difficile d'étudier la variable aléatoire  $N(t)$  représentant le nombre de clients au temps  $t$  dans le système. On s'intéresse plutôt à  $N = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ , on parle alors d'analyse en régime stationnaire (ou analyse à l'équilibre). Pour qu'une file M/M/1 puisse atteindre l'équilibre par exemple, il faut que  $\lambda < \mu$  (sinon la taille de la file augmentera à l'infini). À l'équilibre, on peut montrer que

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathbb{P}(N = n - 1) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \mathbb{P}(N = n + 1)$$

Il s'agit de la règle des probabilités totales. Le terme  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathbb{P}(N = n - 1)$  représente la probabilité qu'un nouveau client arrive avant que le client en service quitte le système, et  $\frac{\mu}{\lambda + \mu} \mathbb{P}(N = n + 1)$  est la probabilité que le client en service quitte avant qu'un nouveau client n'arrive.

## 2.4 Modèle d'attente M/M/1

Le système de files d'attente M/M/1 est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attente. Le flot des arrivées est poissonnier de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ , la discipline d'attente est FIFO la file d'attente est de capacité infinie.

La file peut être considérée comme un processus de naissance et de mort pour lequel figure (1.1)

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

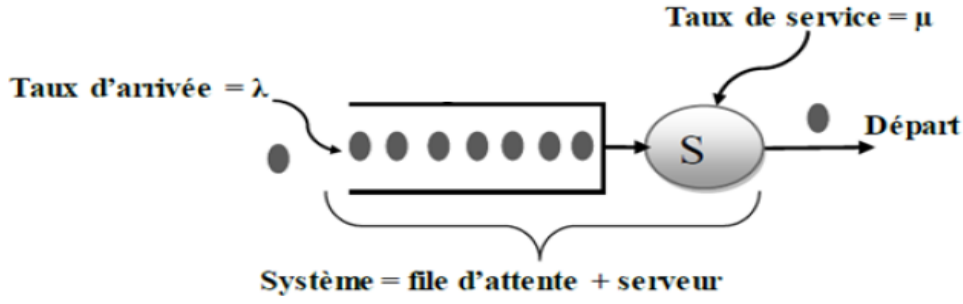


FIGURE 2.2 – La file M/M/1

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \forall n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

### Régime transitoire :

Soit  $N(t)$  le nombre de clients présents dans le système à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ) grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle,  $N(t)$  est un processus markovien homogène.

Les probabilités d'état  $p_n(t) = \mathbb{P}[N(t) = n]$  peuvent être calculées par les équations différentielles de Kolmogorov ci-dessous, connaissant les conditions initiales du processus.

$$p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t)$$

$$\text{et } p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

### Régime stationnaire :

Sous la condition de stationarité du système  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , pour laquelle le régime stationnaire existe, il est aisé d'obtenir les probabilités stationnaires

$$\begin{aligned} \pi_n &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) \\ &= (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\pi = \{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelé distribution stationnaire, elle suit une loi géométrique.

### Caractéristiques du système :



- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\begin{aligned}
 \overline{N} &= \mathbb{E}(N) \\
 &= \sum_{n \geq 0} n \pi_n \\
 &= (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

- Nombre moyen de clients en train d'être servis :

$$\overline{N}_S = 1 - \pi_0 = \rho \quad (2.1)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file

$$\begin{aligned}
 \overline{N}_Q &= \sum_{n \geq 1} (n - 1) \pi_n \\
 &= \frac{\rho^2}{1 - \rho}
 \end{aligned}$$

Le temps moyen qu'un client passe dans le système  $T$ , le temps moyen de service  $\overline{T}_S$  et le temps moyen d'attente dans la file  $\overline{T}_Q$  sont obtenus à partir des formules de Little, ou des distributions du système

- Temps moyen qu'un client passe dans le système

$$\begin{aligned}
 \overline{T} &= \overline{N} / \lambda \\
 &= \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} \\
 &= \frac{1}{\mu - \lambda}
 \end{aligned}$$

- Temps moyen de service

$$\overline{T}_S = 1 / \mu \quad (2.2)$$

- Temps moyen d'attente

$$\begin{aligned}
 \overline{T}_Q &= \overline{T} - \overline{T}_S \\
 &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}
 \end{aligned}$$

## 2.5 La file $M/M/1/K$

On considère une file d'attente simple avec 1 serveur et une capacité  $K$ . Les hypothèses sont les mêmes que pour la file  $M/M/1$

- Le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$ .
- Le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux  $\mu$ .
- Soit  $K$  la capacité de la file d'attente : c'est le nombre maximal de clients qui peuvent être présents dans le système, soit en attente, soit en service.

Dans la pratique, les files d'attente sont toujours finies. Dans ce cas, quand un client arrive alors qu'il y a déjà  $K$  clients présents devant lui dans le système, il est perdu, (par exemple, les appels téléphoniques). Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/1/K$ .

L'espace d'états  $E$  est maintenant fini :  $E = 0, 1, 2, \dots, K$ . La capacité de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que ce que le serveur de la file est capable de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés. Le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors

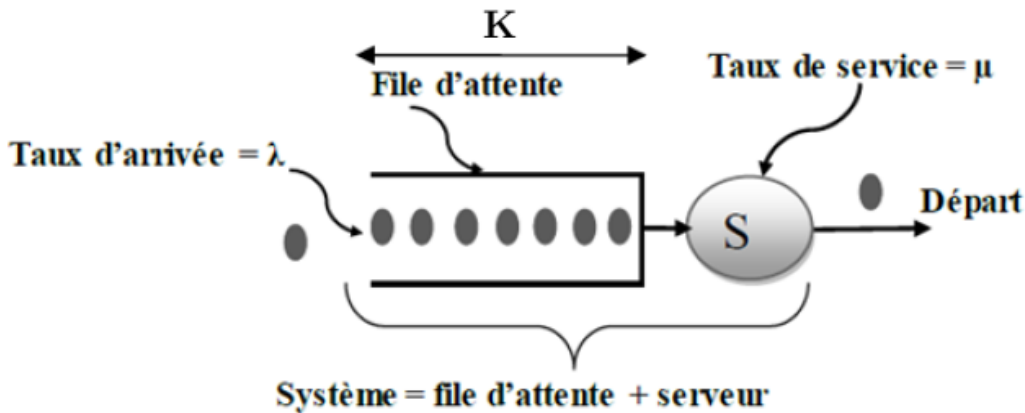


FIGURE 2.3 – La file  $M/M/1/K$

défini de la façon suivante :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n < K; \\ 0, & \text{si } n > K; \end{cases}$$

L'intégration de l'équation récurrente permettant de calculer  $\pi_n$  se fait alors comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_n &= \pi_0 \rho^n \quad \text{pour } n \leq K \\ \pi_n &= 0 \quad \text{pour } n > K \end{aligned}$$

et

$$\pi_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{n=0}^K \rho^n} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \text{si } \lambda \neq \mu; \\ \frac{1}{K+1} & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

### Caractéristiques du système :

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=0}^K n\pi_n \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \end{aligned}$$

À nouveau, lorsque  $K$  tend vers l'infini et  $\rho < 1$ , on retrouve les résultats de la file  $M/M/1$  :

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\begin{aligned} \bar{N}_Q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n \\ &= \bar{N} - (1 - \pi_0) \end{aligned}$$

Le temps moyen qu'un client passe dans le système  $\bar{T}$  et le temps moyen d'attente dans la file  $\bar{T}_Q$  sont obtenus à partir la loi de Little :

- Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} \tag{2.3}$$

- Temps moyen d'attente

$$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda} \tag{2.4}$$

## 2.6 La file $M/M/C$

On considère un système identique à la file  $M/M/1$  excepté qu'il comporte  $c$  serveurs identiques et indépendants les uns des autres. On conserve les hypothèses :

- Le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$ .
- Le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux  $\mu$ .

Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/C$ . L'espace d'états  $E$  est comme pour la  $M/M/1$  infini :  $E = 0, 1, 2, \dots$ . La file d'attente est de capacité infini.

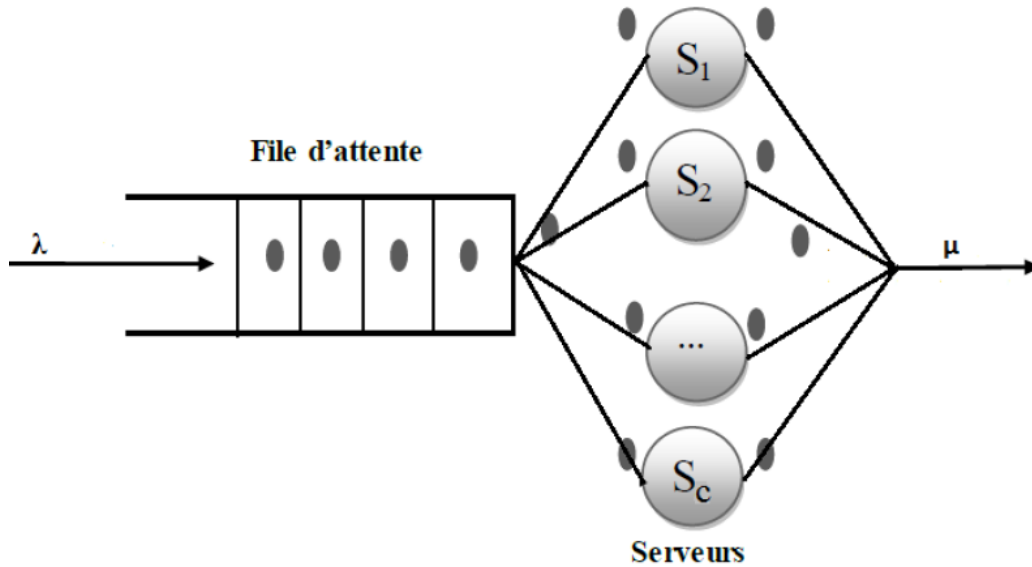


FIGURE 2.4 – La file  $M/M/C$

Le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors défini de la façon suivante :

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n\mu & \forall n = 1, \dots, c \\ c\mu & \forall n \geq c \end{cases}$$

Du diagramme, on déduit les résultats qui suivent. L'analyse du système en régime stationnaire, à l'aide de la procédure des équations de Chapman Kolmogorov aboutit aux équations suivantes :

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$$

$$(\lambda + n\mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} \quad 1 \leq n < c$$

$$(\lambda + c\mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1} \quad n \geq c$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

La résolution du système ci-dessus présente la distribution stationnaire suivante :

$$\begin{aligned} \overline{N}_Q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \pi_n \\ &= \overline{N} - (1 - \pi_0) \\ \pi_n &= \frac{\rho^c}{c!} (A)^{n-c} \pi_0, \quad n \geq c \end{aligned} \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \rho^{n-c} \right]^{-1} \\ \rho &= \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

et

$$A = \frac{\lambda}{c\mu}$$

Cette dernière existe si :  $\lambda < C\mu$

**Caractéristiques du système** : A partir de la distribution stationnaire du processus  $\{N(t), t \geq 0\}$ , on peut calculer les caractéristiques du système. En effet,

– Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\overline{N} = \rho + \frac{\rho^{c+1}}{c \cdot c! (1-A)^2} \rho_0 \tag{2.6}$$

– Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\overline{N}_Q = \frac{\rho^{c+1}}{c \cdot c! (1-A)^2} \rho_0 \tag{2.7}$$

– Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\overline{T} = \frac{c\mu\rho^c}{c!(c\mu - \lambda)^2} \rho_0 \tag{2.8}$$

– Temps moyen d'attente :

$$\overline{T}_Q = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^c}{\mu c \cdot c! (1-A)^2} \rho_0 \tag{2.9}$$

## 2.7 La file $M/M/\infty$

On considère un système composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il rentre donc instantanément en service. Donc cette file particulière, il n'y a donc pas d'attente. On suppose toujours que le processus d'arrivée des clients est poissonien de taux  $\lambda$  et que les temps de service sont exponentiels de taux  $\mu$  (pour tous les serveurs). Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/\infty$ .

Comme cela a été fait pour la file  $M/M/C$ , on peut facilement démontrer que le taux de transition d'un état  $n$  quelconque vers l'état  $n - 1$  est égal à  $n\mu$  et correspond au taux de sortie d'un des  $n$  clients en service. De même, le taux de transition d'un état  $n$  vers l'état  $n + 1$  est égal à  $\lambda$  et correspond au taux d'arrivée d'un client.

De façon intuitive, la capacité de traitement de la file est infinie puisque tout nouveau client se présentant à l'entrée de la file est instantanément traité. La condition de stabilité exprimant que "le nombre moyen de client arrivant à la file par unité de temps doit être inférieure à la capacité de traitement de la file" est donc toujours satisfaite.

Soit  $\pi_n$  la probabilité stationnaire d'être dans l'état  $n$ . Les équations d'équilibre nous donnent

$$\begin{aligned} \pi_{n-1}\lambda &= \pi_n n\mu \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \\ \text{soit } \pi_n &= \frac{\rho}{n} \pi_{n-1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, \\ &\text{où } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

On peut alors exprimer toutes les probabilités en fonction de  $\pi_n$ .

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

La condition de normalisation nous donne alors immédiatement  $\pi_n$

$$\pi_n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}} = e^{-\rho}$$

Notons que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}$  converge pour toutes valeurs de  $\rho$  (donc de  $\lambda$  et de  $\mu$ ), ce

qui est cohérent avec la stabilité inconditionnelle de la file. On obtient finalement

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

### Caractéristiques du système :

- Nombre moyen de clients  $\overline{N}$  :

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \pi_n \\ &= e^{-\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} \\ &= e^{-\rho} \rho e^{\rho} = \rho \end{aligned}$$

- Temps moyen de séjour  $\overline{T}$  :

Intuitivement, le temps moyen passé dans le système est réduit au temps moyen de service, soit  $\frac{1}{\mu}$ . On peut redémontrer ce résultat en utilisant la loi de Little :

$$\begin{aligned} \overline{T} &= \frac{\overline{N}}{\lambda_0} \\ &= \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Systèmes markoviens avec vacances et clients impatients

### 3.1 Modèles de file d'attente avec des clients impatients

L'impatience prend généralement trois formes. Le premier dérobade (le client qui refuse d'entrer dans la file d'attente s'il voit que la file d'attente est très grande ou le temps d'attente est trop long.), le second abandon( Après un moment passé dans la file, le client décide de quitter le système sans être servi), et le troisième jockeying entre les lignes lorsque chacun de nombre de les lignes parallèles ont leur propre file d'attente. [18].

L'impatience "dérobade et abandon" est une fonctionnalité intéressante dans une grande variété de modèles de mise en file d'attente avec des clients impatients qui peuvent être satisfaites dans les applications de santé, les centres d'appels, les réseaux de télécommunications, les systèmes de fabrication où les commandes accumulées peuvent être annulées, la fabrication systèmes de denrées périssables.

#### 3.1.1 Modèles intégrant l'impatience du client

Les modèles incluant l'impatience des clients sont plus proches de la réalité et conduisent à une analyse plus précise. Citons quelques applications.

- **Applications de la santé.**

Pour divers processus médicaux, les patients sont confrontés à un risque élevé de complications ou de décès lorsqu'ils le traitement (par exemple dans le cas d'une transplantation d'organe) est surteint. Dans une telle situation, s'il y a beaucoup de patients en attente de traitement (une file d'attente se forme), ce sera plus adapté pour servir les patients en fonction de l'urgence de leurs besoins. Quand l'état d'un



patient se détériore à un certain niveau, le traitement peut devenir non plus nécessaire. Dans un tel cas, le patient est retiré de la file d'attente sans service (un patient abandonné).

– **Biens périssables.**

Il existe de nombreux exemples de produits périssables, citons par exemple les produits alimentaires, les produits chimiques, les produits pharmaceutiques, les matériaux adhésifs utilisés pour le contreplaqué, le sang, etc. [23] a rapporté qu'en 2004, 22 des biens de consommation emballés étaient dus à des produits périmés et 5,8 de sang traité pour transfusion étaient dépassés. Par conséquent, il est extrêmement important de comprendre ces systèmes et étudier l'impact de la finitude des durées de vie des produits sur décisions de production et de contrôle des stocks. Une littérature liée à la modélisation des systèmes d'inventaire périssables via des systèmes de mise en file d'attente avec des clients impatients est considérable, sachant que l'abandon du client et la perte de produit sont des phénomènes similaires. Cette est, un client dont le temps de patience expire quitte le fichier d'attente et de même un produit fait à un stock dont la durée de vie expire est retiré de l'inventaire.

– **Avions en file d'attente pour l'atterrissage, les applications militaires et les centres d'appels.**

- \* Les avions en attente d'atterrissage sont un autre exemple de clients impatients. Avions sont prêts à attendre, mais seulement jusqu'à un certain point. Un avion peut manquer de carburant et doit ont donc priorité pour l'atterrissage.
- \* Dans les applications militaires, l'abandon est une caractéristique importante. Par exemple, l'ennemi les aéronefs ou les missiles (clients) mettent un temps limité pour transiter vers une zone où l'interception est possible et ils s'échappent (abandonnent) s'ils ne sont pas interceptés (servis) dans ce délai.
- \* Dans la plupart des cas, les clients qui attendent en ligne sont impatients. Un client va attendre un certain temps pour que le service commence. Si le service n'a pas commencé par cette fois, il abandonnera et sera perdu.

## 3.2 Modèles de file d'attente pour les vacances

Les systèmes de mise en file d'attente avec des vacances de serveur ont fait l'objet de recherches approfondies en raison de leur applications étendues dans plusieurs domaines, y compris les systèmes de communication informatique, les systèmes de fabrication et de

production et les systèmes d'inventaire. Dans un système de file d'attente de vacances, le serveur peut ne pas être disponible pendant un certain temps (utiliser le temps d'inactivité à des fins différentes) pour de nombreuses raisons telles que la vérification de la maintenance, le travail sur d'autres files d'attente, recherche de nouveaux travaux (un aspect typique de nombreux systèmes de communication) ou simplement faire une pause. Cette période, lorsque le serveur n'est pas disponible pour les clients principaux, est appelé vacances [10]. Pour plus de détails à ce sujet de merveilleuses enquêtes sur les modèles de vacances de serveurs dans la littérature sur les files d'attente ([16], [35]).

Une vacance dans une file d'attente est une période pendant laquelle le serveur est indisponible pour fournir le service. Les arrivées qui arrivent pendant les vacances ne peuvent entrer en service après le retour du serveur de ses vacances. Il existe de nombreuses situations qui entraînent les vacances du serveur, c'est-à-dire les pannes de la machine (pannes), la maintenance des systèmes et serveurs (où le serveur sert plus d'une file d'attente dans le système ou plus d'un système).

Le modèle de file d'attente avec vacances de serveur (absences de serveur) a été bien étudié dans le depuis trois décennies et appliqué avec succès dans de nombreux domaines tels que la fabrication / le service et systèmes de réseaux informatiques / de communication et de nombreuses autres situations réelles.

### 3.2.1 Différents types de modèles de vacances

Les modèles de files d'attente avec vacances peuvent être classés en fonction des processus d'arrivée, des processus de service et des politiques de vacances. Ainsi, comme il a été mentionné ci-dessus, d'excellentes enquêtes sur des travaux antérieurs de modèles de vacances ont été donnés par [16], [35], et [36].

Conformément aux précédents chapitres et livres de l'enquête en particulier celui de [16], différents types de modèles de vacances sont les suivants :

- ✓ Le modèle de vacances simple, il n'y a qu'une seule vacance après la fin de chaque occupation période. Si le serveur revient de ces vacances, il ne repart pas même en vacances si le système est encore vide à ce moment-là. Ce type de vacances peut provenir de cas tels que comme maintenance dans les systèmes de production (la maintenance peut être considérée comme des vacances).
- ✓ Le modèle de vacances multiples, ce type de vacances peut provenir de cas tels que

maintenance dans les systèmes informatiques et de communication où les processeurs en informatique et les systèmes de communication effectuent des tests et une maintenance approfondis en plus de leur principales fonctions (traitement des appels téléphoniques, réception et transmission de données, etc.). le les travaux d'entretien nécessaires sont divisés en segments courts. Chaque fois que les clients sont absents, le processeur effectue un segment de travail de maintenance. Lorsque le système est inactif, le serveur prend des vacances (fonctionne sur un segment de maintenance). Au retour de vacances, le serveur démarre le service uniquement s'il trouve  $K$  ou plusieurs clients en attente dans la file d'attente, le nombre de clients en attente est inférieur à  $K$  puis un autre congé a lieu (segment Maintenance).

- ✓ Le modèle de vacances à service limité dans lequel le serveur prend des vacances pour devenir inactif ou après avoir servi  $m$  clients consécutifs, ou après un certain temps  $T$ .

La façon dont le serveur sert un client est liée au type de vacances. Dans ([16]) certains des modèles de service sont discutés comme suit :

- Service fermé, dès que le serveur revient de vacances il met une porte derrière le dernier client en attente. Il commence alors à servir uniquement les clients la porte, basée sur certaines règles de combien ou de combien de temps elle pourrait servir.
- Service exhaustif, le serveur fonctionne (sert les clients) jusqu'à ce que le système soit vidé, après son départ en vacances.
- Service limité, une limite fixe de  $K$  est fixée au nombre maximum de clients qui peut être servi avant le départ du serveur pour les vacances. Le serveur part en vacances soit : (a) lorsque le système est vide, ou (b) lorsque les  $K$  clients ont été servis.

### 3.3 Description de modèle

Nous considérons le système de files d'attente de vacances multiples  $M/M/1$  avec des interruptions de vacances de Bernoulli, et les clients s'impatientent en raison aux vacances des serveurs. Les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée  $\lambda$ . Les temps de service pendant une période de service normale, les temps de service pendant une période de travail-vacances et les période de vacances sont distribué de façon exponentielle avec les taux  $\mu$ ,  $\alpha$  et  $\theta$ , respectivement.

Les clients sont supposés être impatients pendant les travail-vacances . Chaque fois

qu'un client arrive au système et que le système est en travail-vacances, le client active une minuterie impatiente  $T$ , qui est distribué exponentiellement avec le taux  $\vartheta$ . Si le serveur termine les travail-vacances avant l'impatience la minuterie expire, le client reste dans le système jusqu'à la fin de son service.

Pendant la période de travail-vacances, un client est servi à un taux inférieur aux taux du service en la période normale, les vacances sont interrompues et le serveur reprend une période d'occupation régulière avec probabilité  $1 - \beta$  (s'il y a des clients dans la file d'attente) ou reste en vacances avec une probabilité  $\beta$ . Les temps inter-arrivées, les durées de service, les durées de vacances et les périodes d'impatience sont considérées comme indépendantes les unes des autres. les clients sont servis selon une discipline de file d'attente du premier arrivé, premier servi

Soit  $N(t)$  le nombre de clients dans le système au temps  $t$ , et soit  $S(t)$  l'état du serveur au temps  $t$  avec

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est en période de travail-vacances,} \\ 1, & \text{si le serveur est en période d'occupation normale.} \end{cases}$$

Ensuite, la paire  $(N(t), S(t), t \geq 0)$  est un processus de Markov en temps continu avec espace d'états  $\Omega = [(0, 0) \cup (i, j), i = 1, 2, \dots, j = 0, 1]$ . tel que  $\pi_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{N(t) = i, S(t) = j\}, (i, j) \in \Omega$ .

Soit  $\pi_{i0}, i \geq 0$  la probabilité qu'il y ait  $i$  clients dans le système lorsque le serveur dans la période de travail-vacances et soit  $\pi_{i1}, i \geq 1$  la probabilité qu'il y ait  $i$  clients dans le système lorsque le serveur est en période de service normale

## 3.4 Résultat principal

Dans cette partie, nous étudions une analyse stationnaire pour notre modèle. Dans un premier temps, nous développons les fonctions génératrice des probabilités du nombre de clients dans le système lorsque le serveur est en période de travail-vacances et pendant la période de service normale, respectivement. Ensuite, nous dérivons les expressions explicites pour diverses mesures performances.

### Régime stationnaire :

Via la théorie du processus de Markov, nous obtenons l'ensemble suivant d'équations stationnaires :

$$\lambda\pi_{00} = (\vartheta + \alpha)\pi_{10} + \mu\pi_{11} \quad (3.1)$$

$$(\lambda + \alpha + \theta + n\vartheta)\pi_{n0} = \lambda\pi_{n-10} + (\beta\alpha + (n+1)\vartheta)\pi_{n+10}, \quad n \geq 1 \quad (3.2)$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{11} = \theta\pi_{10} + \bar{\beta}\alpha\pi_{20} + \mu\pi_{21} \quad (3.3)$$

$$(\lambda + \mu)\pi_{n1} = \theta\pi_{n0} + \lambda\pi_{n-11} + \mu\pi_{n+11} + \bar{\beta}\alpha\pi_{n+10}, \quad n \geq 2 \quad (3.4)$$

où  $\bar{\beta} = 1 - \beta$ . Définissons les fonctions génératrices de probabilité comme

$$\Pi_0(z) = \sum_{n=0} \pi_{n0} z^n, \quad \Pi_1(z) = \sum_{n=1} \pi_{n1} z^n, \quad (3.5)$$

$$\text{où } \Pi_0(1) + \Pi_1(1) = 1 \text{ et } \Pi'_0(z) = \sum_{n=1} n z^{n-1} \pi_{n0}.$$

En multipliant la puissance appropriée de  $z^n$  en 3.1 et 3.2, en 3.3 et 3.4, respectivement, puis en additionnant sur tout valeurs possibles de  $n$ , on obtient

$$\vartheta z(1-z)\Pi'_0(z) + (\lambda z^2 - (\lambda + \alpha + \theta)z + \beta\alpha)\Pi_0(z) + (\mu\pi_{11} + (\theta + \bar{\beta}\alpha)\pi_{00} + \bar{\beta}\alpha\pi_{10})z + \beta\alpha\pi_{00}(1-z) = 0. \quad (3.6)$$

$$(\lambda z - \mu)(1-z)\Pi_1(z) = (\theta z + \bar{\beta}\alpha)\Pi_0(z) - (\mu\pi_{11} + (\theta + \bar{\beta}\alpha)\pi_{00}) + \bar{\beta}\alpha\pi_{10}z - \bar{\beta}\alpha(1-z)\pi_{00}. \quad (3.7)$$

Ensuite, résolvez Eq 3.7, nous obtenons

$$\Pi_0(z) = \frac{-(\mu\pi_{11} + (\theta + \bar{\beta}\alpha)\pi_{00} + \bar{\beta}\alpha\pi_{10})\Phi_1(z) + \beta\alpha\Phi_2(z)}{\vartheta e^{-(\frac{\lambda}{\vartheta})z} z^{\frac{\beta\alpha}{\vartheta}} (1-z)^{\frac{(\theta + \bar{\beta}\alpha)}{\vartheta}}}, \quad (3.8)$$

où

$$\Phi_1(z) = \int_0^z e^{-(\frac{\lambda}{\vartheta})x} x^{\frac{\beta\alpha}{\vartheta}} (1-x)^{\frac{(\theta + \bar{\beta}\alpha)}{\vartheta} - 1} dx, \quad (3.9)$$

$$\Phi_1(z) = \int_0^z e^{-(\frac{\lambda}{\vartheta})x} x^{\frac{\beta\alpha}{\vartheta} - 1} (1-x)^{\frac{(\theta + \bar{\beta}\alpha)}{\vartheta}} dx, \quad (3.10)$$

où  $\vartheta \neq 0$ ,  $x \neq 0$  et  $\vartheta \neq 1$ . Maintenant, nous devrions trouver les probabilités  $\pi_{00}$ ,  $\pi_{10}$  et  $\pi_{11}$ , puis quelques mesures de performance importantes sont obtenu.

### 3.4.1 Calculer les probabilités $\pi_{00}, \pi_{10}, \pi_{11}$ , et les nombres moyens $\mathbb{E}(L_0)$ , $\mathbb{E}(L_1)$

Supposons que  $\mathbb{E}(L_0)$  et  $\mathbb{E}(L_1)$  sont le nombre attendu de clients dans le système lorsque le serveur est allumé une période de vacances-travail et une période normale de pointe, respectivement.

Donc, en ajoutant 3.3 et 3.4 sur toutes les valeurs possibles de  $n$ , on obtient

$$(\theta + \bar{\beta}\alpha)\Pi_0(1) = (\mu\pi_{11} + (\theta + \bar{\beta}\alpha)\pi_{00}) + \bar{\beta}\alpha\pi_{10}. \quad (3.11)$$

Et en utilisant 3.7, nous avons

$$\Pi_1(z) = \frac{(\theta z + \bar{\beta}\alpha)\Pi_0(z) - z(\theta + \bar{\beta}\alpha)\Pi_0(1)}{(\lambda z - \mu)(1 - z)} - \frac{\bar{\beta}\alpha\pi_{00}}{(\lambda z - \mu)} \quad (3.12)$$

En utilisant la règle de L'Hopital, nous obtenons

$$\Pi_1(1) = \left( \frac{\theta + \bar{\beta}\alpha}{\mu - \lambda} \right) \Pi'_0(1) + \left( \frac{\bar{\beta}\alpha}{\mu - \lambda} \right) (\pi_{00} - \Pi_0(1)), \quad (3.13)$$

où  $\Pi'_0(1) = \mathbb{E}(L_0)$ , le nombre attendu de clients dans le système lorsque le serveur est en fonctionnement période de vacances. Puisque  $\Pi_1(1) = 1 - \Pi_0(1)$ , et en utilisant 3.13, on obtient

$$\mathbb{E}(L_0) = \left( \frac{\mu - \lambda}{\theta + \bar{\beta}\alpha} \right) (1 - \Pi_0(1)) - \left( \frac{\bar{\beta}\alpha}{\theta + \bar{\beta}\alpha} \right) (\pi_{00} - \Pi_0(1)). \quad (3.14)$$

Maintenant, nous devons déduire la proportion de temps pendant laquelle le serveur est en période de travail-vacances de  $\pi_0(1)$ , de sorte que  $\mathbb{E}(L_0)$  peut être dérivé. En ajoutant 3.2 – 3.4 et en réorganisant les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda\pi_{n0} + \lambda\pi_{n1} &= ((\alpha + (n+1)\vartheta)\pi_{n+1,0} + \mu\pi_{n+1,1}) \\ &= \lambda\pi_{n-1,0} + \lambda\pi_{n-1,1} \\ &+ ((\alpha + n\vartheta)\pi_{n0} + \mu\pi_{n1}), \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Utilisation récursive 3.15 et application 3.1

$$\lambda\pi_{n0} + \lambda\pi_{n1} = (\alpha + (n+1)\vartheta)\pi_{n+1,0} + \mu\pi_{n+1,1}, \quad n \geq 0 \quad (3.16)$$

En additionnant toutes les valeurs possibles de  $n$  dans 3.16, on obtient

$$\lambda\Pi_0(1) + \lambda\Pi_1(1) = \mu\Pi_1(1) + \alpha(\Pi_0(1) - \pi_{00}) + \vartheta\Sigma_{n=0}^{\infty} (n+1)\pi_{n+1,0}, \quad n \geq 0 \quad (3.17)$$

Notez que  $\mathbb{E}(L_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\pi_{n+1,0}$  et  $\Pi_1(1) = 1 - \Pi_0(1)$ .

En substituant la valeur de  $\mathbb{E}(L_0)$  de 3.14 dans 3.17, on obtient

$$\begin{aligned} (\vartheta + \theta + \bar{\beta}\alpha)(\mu - \lambda) &= (\vartheta(\mu - \lambda) + (\mu - \alpha)(\theta + \bar{\beta}\alpha) - \vartheta\bar{\beta}\alpha)\Pi_0(1) \\ &+ (\vartheta\bar{\beta}\alpha + \alpha(\theta + \bar{\beta}\alpha))\pi_{00}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Lorsque  $z \rightarrow \infty$  dans 3.8 et en utilisant 3.6, 3.7 et 3.12, on obtient

$$\Pi_0(1) = \frac{e^{\lambda/\vartheta}}{\vartheta} (-(\theta + \bar{\beta}\alpha)\Pi_0(1)\Phi_1(1) + \bar{\beta}\alpha\pi_{00}\Phi_2(1)) \lim_{z \rightarrow +\infty} (1-z)^{-(\theta+\bar{\beta}\alpha)/\vartheta} \quad (3.19)$$

comme  $0 \leq \Pi_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n0} \leq 1$  et  $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^{-(\theta+\bar{\beta}\alpha)/\vartheta} \rightarrow \infty$ , donc nous devrions avoir

$$-(\theta + \bar{\beta}\alpha)\Pi_0(1)\Phi_1(1) + \beta\alpha\pi_{00}\Phi_2(1) = 0. \quad (3.20)$$

Ensuite, en utilisant 3.19 et 3.20, nous obtenons

$$\pi_{00} = \frac{(\theta + \bar{\beta}\alpha)\Phi_1(1)}{\beta\alpha\Phi_2(1)}\Pi_0(1), \quad (3.21)$$

et

$$\begin{aligned} \Pi_0(1) &= ((\vartheta + \theta + \bar{\beta}\alpha)(\mu - \lambda)\beta\Phi_2(1)) \times ((\bar{\beta}\vartheta + \theta + \bar{\beta}\alpha)(\theta + \bar{\beta}\alpha)\Phi_1(1)) \\ &+ (\vartheta(\mu - \lambda) + (\mu - \alpha)(\theta + \bar{\beta}\alpha) \times \beta\Phi_2(1))^{-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi,  $\mathbb{E}(L_0)$  est trouvé à partir de 3.14. En utilisant 3.1 et 3.11 les inconnues  $\pi_{10}$  et  $\pi_{11}$  sont obtenues comme suit :

$$\pi_{10} = \frac{(\theta + \bar{\beta}\alpha) \left( (\lambda + \theta + \bar{\beta}\alpha)\Phi_1(1) - \beta\alpha\Phi_2(1) \right)}{(\vartheta + \beta\alpha)\beta\alpha\Phi_2(1)}\Pi_0(1), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= (((\theta + \bar{\beta}\alpha)\{(\vartheta + \alpha)\beta\alpha\Phi_2(1) - \Phi_1(1)(\lambda\bar{\beta}\alpha + (\vartheta + \alpha)(\theta + \bar{\beta}\alpha))\}) \\ &\times (\beta\mu\alpha\Phi_2(1)(\vartheta + \beta\alpha))^{-1})\Pi_0(1). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Maintenant, les probabilités stationnaires  $\pi_{n0}$  et  $\pi_{n1}$  peuvent être dérivées en utilisant 3.2 – 3.4 en termes de  $\pi_{00}$ ,  $\pi_{10}$ , et  $\pi_{11}$ .

Le nombre attendu de clients dans le système lorsque le serveur est dans une période d'occupation normale  $\mathbb{E}(L_1)$  peut être obtenu à partir de 3.12.

En utilisant la règle de L'Hopital, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_1) = \Pi'_1(1) &= \frac{\theta + \bar{\beta}\alpha}{\mu - \lambda} \frac{\Pi''_0(1)}{2} + \frac{1}{(\theta + \bar{\beta}\alpha)(\mu - \lambda)} \\ &\times ((\theta\mu + \lambda\bar{\beta}\alpha)(1 - \Pi_0(1)) + \theta\bar{\beta}\alpha(\Pi_0(1) - \pi_{00})). \end{aligned} \quad (3.25)$$

En différenciant 3.6 deux fois en  $z = 1$ , on obtient

$$f''(1)\Pi_0(1) + 2(f'(1) - \vartheta)\Pi'_0(1) + (f(1) - 2\vartheta)\Pi''_0(1) = 0, \quad (3.26)$$

où  $f(1) = -(\theta + \bar{\beta}\alpha)$ ,  $f'(1) = \lambda - (\alpha + \theta)$  et  $f'' = 2\lambda$ . Ensuite, à partir de 3.26, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\Pi''_0(1) = \left( \frac{\lambda}{\theta + \bar{\beta}\alpha + 2\vartheta} \right) \Pi_0(1) - \left( \frac{\vartheta + \alpha + \theta - \lambda}{\theta + \bar{\beta}\alpha + 2\vartheta} \right) \times \mathbb{E}(L_0) \quad (3.27)$$

En utilisant 3.27 et 3.14 dans 3.25, nous obtenons  $\mathbb{E}(L_1)$ . Le nombre attendu de clients dans le système peut être calculé comme  $\mathbb{E}(L) = \mathbb{E}(L_0) + \mathbb{E}(L_1)$ .

### 3.4.1.1 Les autres mesures de performance

Maintenant, nous définissons les temps de séjour, soit  $W$  le temps de séjour total d'un client dans le système, évalué de l'instant d'arrivée au départ, le départ étant soit dû à l'achèvement de service ou à la suite d'un abandon. Nous avons selon la règle de Little

$$\mathbb{E}(W) = \frac{1}{\lambda}(\mathbb{E}(L_0) + \mathbb{E}(L_1)). \quad (3.28)$$

Soit  $\Delta$  la proportion de clients servis, et  $\Theta$  le taux d'abandon dû à l'impatience. Le attendu le nombre de clients servis par unité de temps est  $\mu\Pi_1(1) + \alpha(\Pi_0(1) - \pi_{00})$  signifiant que la proportion des clients servis est

$$\Delta = \frac{1}{\lambda}(\mu\Pi_1(1) + \alpha(\Pi_0(1) - \pi_{00})). \quad (3.29)$$

Le taux d'abandon  $\Theta$  d'un client pour impatience est donné par

$$\Theta = \vartheta\mathbb{E}(L_0) = \lambda - (\mu\Pi_1(1) + \alpha(\Pi_0(1) - \pi_{00})), \quad (3.30)$$



qui découle de 3.17. La probabilité que le système soit en période de pointe normale  $\Gamma$  et la probabilité que le système est en vacances-travail  $\Omega$  sont respectivement données par

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{n,1} = \Pi_1(1), \quad \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n0} = \Pi_0(1). \quad (3.31)$$

### 3.5 Exemples numériques

**Tableau 1 :** Impact de  $\vartheta$  et  $\beta$  sur certaines mesures du rendement

$\beta$	$\vartheta$	$\mathbb{E}(L_0)$	$\mathbb{E}(L_1)$	$\mathbb{E}(L)$	$\mathbb{E}(W)$	$\Delta$	$\Theta$	$\Gamma$	$\Omega$
0.15	0.4	0.411	0.319	0.730	0.365	0.917	0.164	0.165	0.834
	1.2	0.356	0.233	0.590	0.295	0.786	0.427	0.129	0.870
	2	0.313	0.183	0.497	0.248	0.686	0.627	0.105	0.894
0.5	0.4	0.459	0.294	0.754	0.377	0.908	0.183	0.149	0.850
	1.2	0.384	0.209	0.594	0.297	0.769	0.461	0.114	0.885
	2	0.331	0.163	0.494	0.247	0.668	0.662	0.093	0.906
0.9	0.4	0.543	0.251	0.794	0.397	0.891	0.217	0.123	0.876
	1.2	0.425	0.174	0.599	0.299	0.744	0.510	0.0939	0.906
	2	0.355	0.136	0.491	0.245	0.644	0.710	0.077	0.922
1	0.4	0.572	0.235	0.808	0.404	0.885	0.229	0.114	0.885
	1.2	0.438	0.163	0.601	0.300	0.737	0.525	0.087	0.912
	2	0.362	0.128	0.490	0.245	0.637	0.724	0.0724	0.927

Dans cette partie , nous présentons quelques exemples numériques pour démontrer comment les différents paramètres du modèle influence le comportement du système et montre l'impact des différents paramètres et sa relation avec le nombre attendu de clients lorsque le système est en travail-vacances  $E(L_0)$ , le nombre attendu de clients lorsque le système est en période deservice normale  $E(L_1)$ , le nombre attendu de clients dans le système  $E(L)$ , le temps d'attente attendu dans le système  $E(W)$ , la proportion de clients desservis, le taux d'abandon , la probabilité que le système soit en période de pointe normale et la probabilité que le système fonctionne vacances .

✓ Tout d'abord, présentons l'évolution du système en faisant varier  $\beta$ ,  $\vartheta$  et  $\alpha$ .

- Les paramètres du tableau 3.5 sont pris comme suit :  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 6$ ,  $\theta = 0.8$  et  $\alpha = 3$ . Le tableau 3.5 montre tout d'abord que pour  $\vartheta$  fixe,  $E(L_0)$ ,  $E(L_1)$ ,  $E(L)$ ,  $E(W)$ ,  $\Omega$  et  $\Theta$  augmente à mesure que  $\beta$  augmente, sinon  $\Delta$  et  $\Gamma$  décéder à mesure que  $\beta$  augmente. Maintenant, pour  $\beta$  fixe,  $E(L_0)$ ,  $E(L_1)$ ,  $E(L)$ ,  $E(W)$ ,  $\Gamma$  et  $\Delta$  diminuez à mesure que  $\vartheta$  augmente. Mais le taux d'abandon  $\Theta$  d'un client dû à l'impatience

et à la probabilité que le système est en vacances-travail  $\Omega$  augmentent à mesure que  $\vartheta$  augmente.

- Les paramètres du tableau 3.5 sont pris comme suit :  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 7$ ,  $\theta = 0.4$  et  $\vartheta = 0.6$ .

**Tableau 2 :** Impact de  $\beta$  et  $\alpha$  sur certaines mesures du rendement

$\beta$	$\alpha$	$\mathbb{E}(L_0)$	$\mathbb{E}(L_1)$	$\mathbb{E}(L)$	$\mathbb{E}(W)$	$\Delta$	$\Theta$	$\Gamma$	$\Omega$
0.3	2	0.851	0.605	1.456	0.485	0.829	0.510	0.233	0.766
	4	0.531	0.444	0.976	0.325	0.893	0.319	0.193	0.806
	5	0.449	0.392	0.841	0.280	0.910	0.269	0.177	0.822
0.6	2	1.005	0.552	1.557	0.519	0.798	0.603	0.206	0.793
	4	0.622	0.382	1.004	0.334	0.875	0.373	0.162	0.837
	5	0.520	0.328	0.848	0.282	0.895	0.312	0.145	0.854
0.8	2	1.159	0.496	1.656	0.552	0.768	0.695	0.179	0.820
	4	0.714	0.317	1.031	0.343	0.857	0.428	0.131	0.868
	5	0.590	0.263	0.854	0.284	0.881	0.354	0.114	0.885
1	2	1.396	0.405	1.802	0.600	0.720	0.837	0.139	0.860
	4	0.856	0.214	1.070	0.356	0.828	0.513	0.085	0.914
	5	0.697	0.165	0.863	0.287	0.860	0.418	0.069	0.930

Le tableau 3.5 montre pour  $\alpha$  fixe,  $E(L_0)$ ,  $E(L)$ ,  $E(W)$ ,  $\Omega$  et  $\Theta$  augmente lorsque  $\beta$  augmente, sinon  $E(L_1)$ ,  $\Delta$  et  $\Gamma$  diminuer.

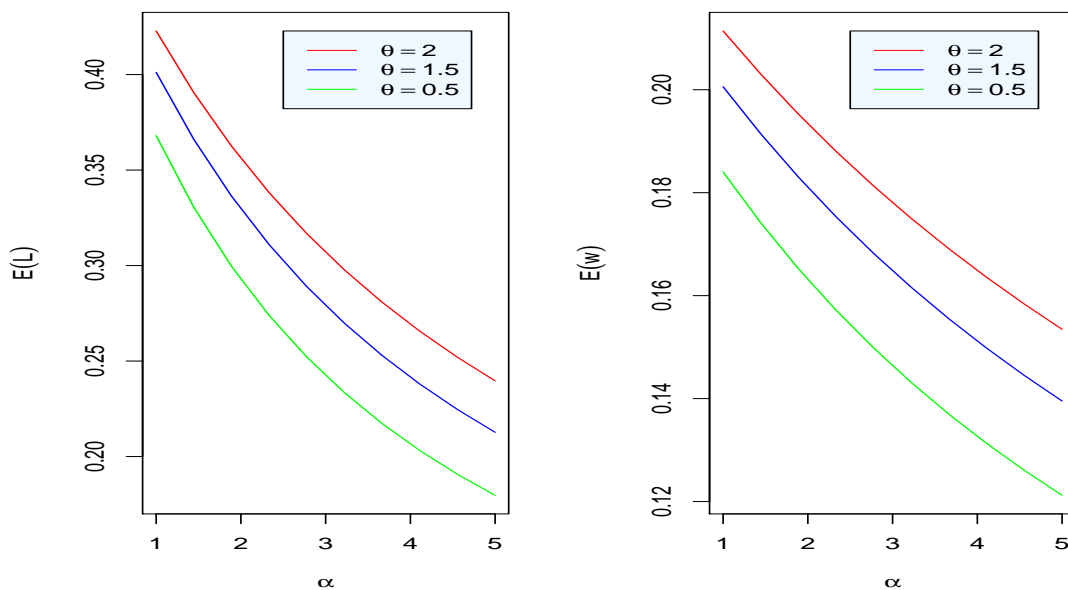
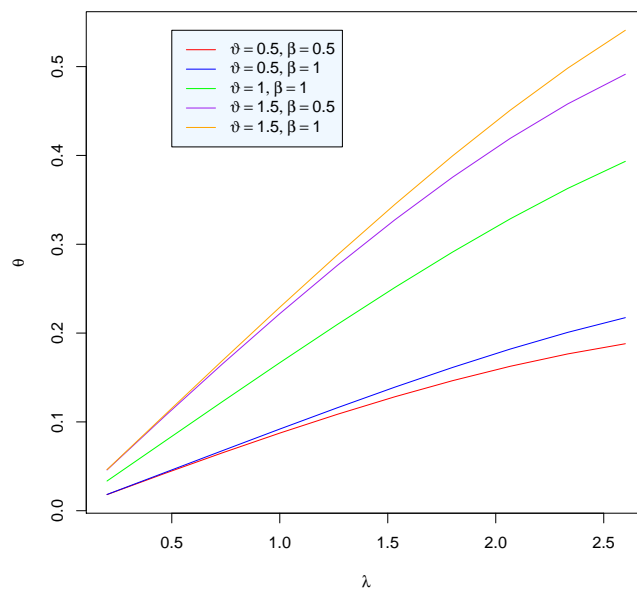
Cependant, pour  $\beta$  fixe,  $E(L_0)$ ,  $E(L_1)$ ,  $E(L)$ ,  $E(W)$ ,  $\Gamma$  et  $\Theta$  diminuent lorsque  $\alpha$  augmente, sinon, et augmenter à mesure que  $\alpha$  augmente. Tous ces résultats (tableaux 3.5,3.5) concordent absolument avec notre intuition.

- ✓ Présentons maintenant l'impact du taux de service pendant les vacances  $\alpha$  sur le nombre attendu de clients en le système pour différentes valeurs de taux de vacances  $\theta$ , tandis que  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 5$ ,  $\vartheta = 1$  et  $\beta = 1$ . Les résultats numériques sont donnés sur la figure 3.1.

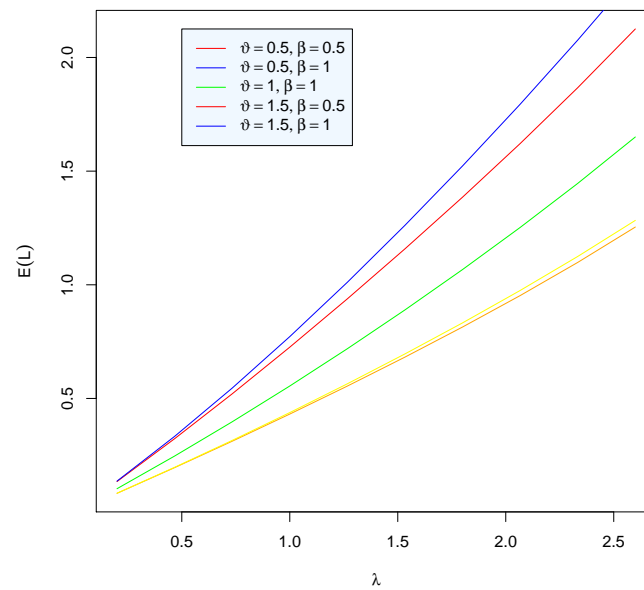
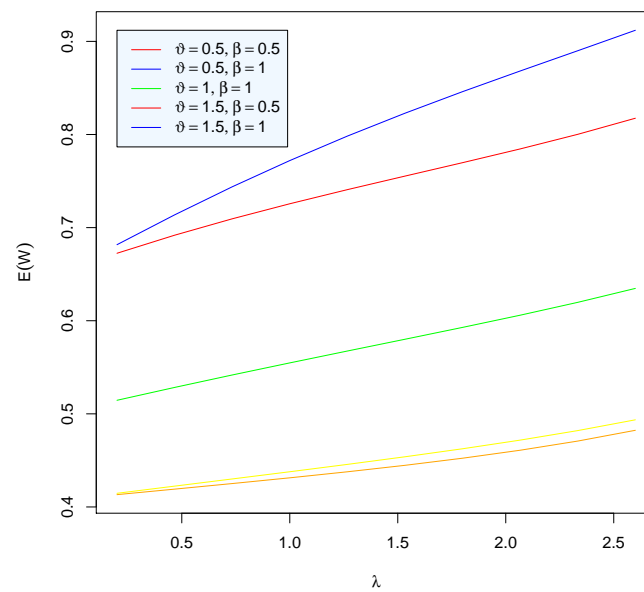
À partir de la figure 3.1, nous observons que le nombre attendu de clients dans le système diminue avec l'augmentation de  $\alpha$ , de plus lorsque  $\alpha > 1.5$ ,  $E(L)$  augmente lorsque  $\theta$  augmente, cependant, lorsque  $\alpha < 1.5$ ,  $E(L)$  diminue lorsque le taux de vacances augmente.

- ✓ Ensuite, nous présentons l'effet du taux d'arrivée  $\lambda$  sur le taux d'abandon d'un client par impatience,  $\Theta$ , et l'effet du taux d'arrivée  $\lambda$  sur  $\mathbb{E}(L)$  et sur  $\mathbb{E}(W)$  pour divers paramètres  $\vartheta$  et  $\beta$ . On prend  $\mu = 6$ ,  $\theta = 0.5$  et  $\alpha = 4$ .

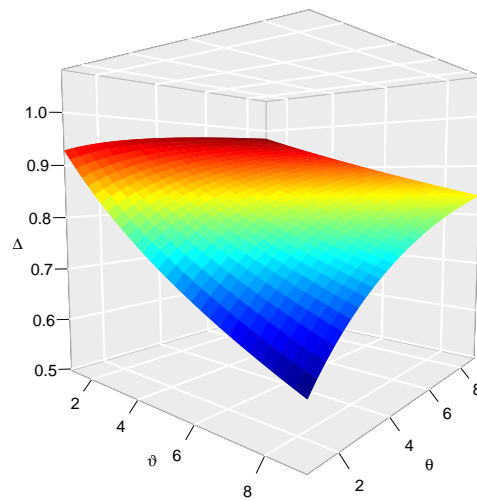
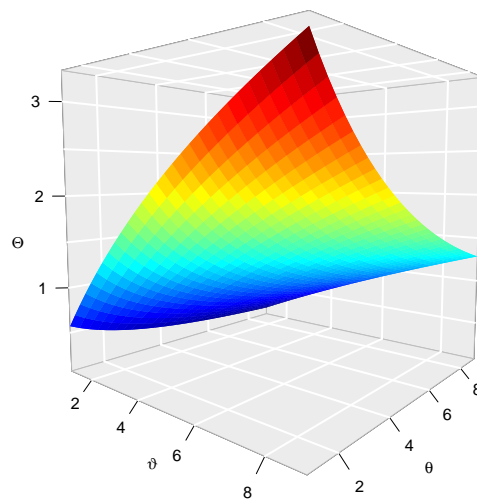
La figure 3.2 montre que  $\Theta$  les premières augmentations diminuent ensuite avec

FIGURE 3.1 – Effet de  $\alpha$  sur  $E(L)$  et  $E(W)$ .FIGURE 3.2 – Taux d'arrivée  $\lambda$  versus  $\theta$ 

l'augmentation du taux d'arrivée lorsque  $\beta = 0.5$  et  $\beta = 1$ , ce qui correspond absolument à notre attente, le taux d'abandon d'un client augmente lorsque  $\vartheta$  augmente car plus de clients renient et quittent le système.

FIGURE 3.3 – Taux d'arrivée  $\lambda$  versus  $E(L)$ FIGURE 3.4 – Taux d'arrivée  $\lambda$  versus  $E(W)$ 

Les figures 3.3 et 3.4 montrent les augmentations de  $\mathbb{E}(L)$  et  $\mathbb{E}(W)$  avec les augmentations de  $\lambda$ . Ce résultat est tout à fait raisonnable.

FIGURE 3.5 – Effet de  $\theta$  et  $\vartheta$  sur  $\Delta$ FIGURE 3.6 – Effet de  $\theta$  et  $\vartheta$  sur  $\Theta$ 

✓ Ensuite, nous présentons la dépendance de la proportion de clients servis et du taux d'abandon  $\Delta$  et  $\Theta$  avec  $\theta$  et  $\vartheta$ . Soit  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 5$ ,  $\alpha = 0.65$  et  $\beta = 0.5$ .

Les figures 3.5 et 3.6 montre que pour  $\theta$  fixe,  $\Delta$  diminue et  $\Theta$  augmente lorsque  $\vartheta$

---

augmente. De plus, pour  $\vartheta$  fixe,  $\Delta$  augmente et  $\Theta$  diminue lorsque  $\theta$  augmente.

# Conclusion

Dans ce mémoire, une analyse d'un système de file d'attente Markovien avec travail-vacances multiple du serveur et clients impatientes, les expressions explicites pour diverses mesures de performances sont dérivées. Quelques exemples numériques sont présentés pour montrer comment les différents paramètres du modèle influencent le comportement du système. Pour des travaux ultérieurs, ce modèle peut être étudié avec un accès et un taux de service en fonction du temps. L'analyse coût-bénéfice du modèle peut également être effectuée pour étudier son analyse économique.

# Bibliographie

- [1] A. Gomez-Corral and M.F. Ramalhoto. On the waiting time distribution and the busy period of a retrial queue with constant retrial rate. *Stochastic Modelling and Applications*, 3, 37-47, (2000).
- [2] Abou El-Ata, M. O., Hariri, A.M.A. : The M/M/c/N queue with balking and reneging. *Comput. Oper. Res.* 19(13), 713-716 (1992)
- [3] Altman, E.; Yechiali, U. : Analysis of customers impatience in queues with server vacations. *Queueing Syst. Theory Appl.* 52(4), 261-279 (2006)
- [4] Ancker Jr., C.J.; Gafarian, A.V. : Some queueing problems with balking and reneging : I. *Oper. Res.* 11(1), 88-100 (1963)
- [5] Ancker Jr., C.J., Gafarian, A.V. : Some queueing problems with balking and reneging : II. *Oper. Res.* 11(6), 928-937 (1963)
- [6] Anisimov, V. V., Zakusilo, O. K., and Donchenko, V. S. 1987. *Elements of Queueing Theory and Asymptotic System Analysis*. Vishcha Shkola, Kiev (in Russian).
- [7] Arnaud GUYADER , *Processus Markoviens de sauts* , Université de Rennes 2006/2007.
- [8] Baba, Y. : The M/P H/1 queue with working vacations and vacation interruption. *J. Syst. Sci. Syst. Eng.* 19(4), 496-503 (2010)
- [9] Bouchentouf, A.A. and Yahiaoui, L. (2017). On feedback queueing system with reneging and retention of reneged customers, multiple working vacations and Bernoulli schedule vacation interruption, *Arabian Journal of Mathematics*, 6(1), 111.
- [10] Chandrasekaran, V.M., Indhira, K., Saravanarajan, M.C. and Rajadurai P. (2016). A survey on working vacation queueing models. *International Journal of Pure and Applied Mathematics.*, 106(6) :33-41.
- [11] Chen, H., Li, J.; Tian, N. : The GI/M/I queue with phase type working vacations and vacation interruption. *J. Appl. Math. Comput.* 30(1-2), 121-141 (2009)



- 
- [12] Cheprasov, V. P. 1985. Elements of Queueing Theory. Kazan Aviation Institute (in Russian).
- [13] Claudie Hasseforder CHABRIAC , Eléments de Théorie des files d'attente, page05, Janvier 2008.
- [14] David Coupier, Processus Stochastiques, Polytech'Lille GIS 4.
- [15] Djouhra. D. Modélisation et simulation du flux dans un réseaux pour la regulation du trafic. Ingénierie des données et connaissances.
- [16] Doshi, B. T. (1986). Queueing systems with vacation-a survey. Queueing Systems., 1 : 29-66.
- [17] Goswami, V. : Analysis of impatient customers in queues with Bernoulli schedule working vacations and vacation interruption. J. Stoch. 2014, 1-10, Article ID 207285 (2014).
- [18] Gupta, N. and Garg, R. (2012). A view of queue analysis with customer behaviour, balking and reneging. Proceedings of the National Conference on Trends and Advances in Mechanical Engineering, YMCA University of Science and Technology, Faridabad, Haryana., 19-20.
- [19] Haight, F.A. : Queueing with balking. Biometrika 44, 360-369 (1957)
- [20] Haight, F.A. : Queueing with reneging. Metrika 2, 186-197 (1959)
- [21] Jean Louis Poss, Probabilité et statistique version 2.1 Mai 2003 p74.
- [22] Jean-Jacques Ruch-Marie-Line Chabanol, CHAÎNES DE MARKOV, Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1, Année 2012-2013.
- [23] Karaesmen, I., Deniz, B. (2011). Managing Perishable and Aging Inventories : Review and Future Research Directions. in Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise, A State of the Art Handbook., 1 : 393-438.
- [24] K.B, GK, Techniques de modélisation : Méthodes analytiques.
- [25] Ke, J.C. ; Wu, C.H. ; Zhang, Z.G. : Recent developments in vacation queueing models : a short survey. Int. J. Oper. Res. 7(4), 3-8 (2010)
- [26] Khintchine, A. Y 1969. Mathematical Methods in the Theory of Queueing.
- [27] . Laxmi, P.V., Goswami, V, Jyothsna, K. : Analysis of finite buffer Markovian queue with balking, reneging and working vacations. Int. J. Strateg. Decis. Sci. 4(1), 1-24 (2013)

- [28] Li, J. ; Tian, N. : The M/M/1 queue with working vacations and vacation interruptions. J. Syst. Sci. Syst. Eng. 16(1), 121-127 (2007)
- [29] M.Petito , Introduction à la modélisation des réseaux, page21, 26 Octobre 2010.
- [30] Raj J.(2008). Introduction to queueing theory. Technical report. Washington university.
- [31] Robert, E. : Reneging phenomenon of single channel queues. Math. Oper. Res. 4(2), 162-178 (1979)
- [32] Rubino. G., Processus Stochastiques, Février 2006.
- [33] Rugg. R. Processus stochastique. Presses Polytechniques Romandes, 1989.
- [34] Selvaraju, N, Goswami, C. : Impatient customers in an M/M/1 queue with single and multiple working vacations. Comput. Ind. Eng. 65(2), 207-215 (2013)
- [35] Takagi, H.(1991). Queueing Analysis, Volume 1 : Vacation and Priority Systems. NorthHolland, Amsterdam.
- [36] Tian, N. ; Zhang, Z.G. : Vacation Queueing Models. Springer, New York (2006)
- [37] Wang, K.-H. ; Chang, Y.-C. : Cost analysis of a finite M/M/R queueing system with balking, reneging and server breakdowns. Math. Methods Oper. Res. 56(2), 169-180 (2002)
- [38] Willing. A. A short introduction to queueing thehory. Technical University Berlin, Telecommunication Networks Group, 1999.
- [39] Yahiaoui, L. (2017).Stability study of queueing systems with impatience. . Thèse de doctorat, université de saida. [https : //www.univ – saida.dz/busc/doc\\_num.php?explnum\\_id = 414](https://www.univ-saida.dz/busc/doc_num.php?explnum_id=414)
- [40] Yue, D., Yue, W. ; Xu, G. : Analysis of customers' impatience in an M/M/1 queue with working vacations. J. Ind. Manag. Optim. 8(4), 895-908 (2012)
- [41] Yue, D., Zhang, Y. ; Yue, W. : Optimal performance analysis of an M/M/1/N queue system with balking, reneging and server vacation. Int. J. Pure Appl. Math. 28(1), 101-115 (2006)
- [42] Yves Caumel, Probabilités et processus stochastiques.
- [43] Zakhar Kabluchko, Stochastic Processes (Stochastik II), University of Ulm Institute of Stochastics, (2013-2014). Second edition, Hafner Publishing Company, New York (First edition : Griffin, London, 1960 ; Russian original : 1955). 859-866.

- 
- [44] Zhang, H. ; Shi, D. : The M/M/1 queue with Bernoulli schedule-controlled vacation and vacation interruption. *Int. J. Inf. Manag. Sci.* 20(4), 579-587 (2009)
- [45] Zhang, M., Hou, Z. : Performance analysis of M/G/1 queue with working vacations and vacation interruption. *J. Comput. Appl. Math.* 234(10), 2977-2985 (2010)