



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ.: 2019/2020

# Files d'attente avec serveurs hétérogènes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Nom de spécialité

par

**Mlle. Dehini Fatna<sup>1</sup>**

Sous la direction de

**Dr. M.K adi**

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

<b>Mme F. Mokhtari</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
<b>Dr. M. Kadi</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
<b>Dr. N. Ait Ouali</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
<b>Dr. N. Hachemi</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

---

1. e-mail : fatna.dehini@gmail.com

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les processus stochastiques</b>	<b>8</b>
1.1	Le processus de poisson . . . . .	9
1.1.1	Le processus de comptage . . . . .	9
1.1.1.1	Loi exponentielle et la loi de poisson . . . . .	10
1.1.1.2	Relation entre la distribution Exponentielle et la distribution de Poisson . . . . .	10
1.1.2	processus de poisson . . . . .	11
1.1.3	Processus de renouvellement . . . . .	12
1.1.4	Caractérisation d'un processus de Poisson par ses temps d'arrivée . . . . .	13
1.1.5	Processus de naissance et de mort . . . . .	13
1.1.5.1	Diagramme de transition et interprétation intuitive . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Système des Files d'attente</b>	<b>15</b>
2.1	File d'Attente Simple . . . . .	15
2.1.1	Processus d'arrivée . . . . .	16
2.1.2	Temps de service . . . . .	16
2.1.3	Structure de la file : . . . . .	16
2.1.4	Notation de Kendall : . . . . .	17
2.2	Loi de Little . . . . .	18
2.2.0.1	Remarque . . . . .	19
2.2.1	Mesures de performance d'une file d'attente . . . . .	19
2.3	Arrivée avant un départ et départ avant une arrivée . . . . .	19
2.4	Le système $M/M/1$ . . . . .	20
2.4.1	Régime transitoire . . . . .	20
2.4.2	Régime stationnaire . . . . .	20
2.4.3	Caractéristiques du système . . . . .	21
2.4.3.1	Remarque . . . . .	22
2.5	Le système $M/M/1/K$ . . . . .	22
2.5.1	Caractéristiques du système . . . . .	23
2.6	Le système $M/M/C$ . . . . .	24
2.6.1	Caractéristiques du système . . . . .	25

---

2.7	Le système $M/M/\infty$ . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Files d'attente avec serveurs hétérogènes</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	27
3.2	Description et notations du modèle . . . . .	29
3.3	Les équations de l'état stationnaire et leur solution . . . . .	30
3.4	Mesures de performance . . . . .	31
3.5	Les résultats numériques . . . . .	32
	<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Dedicaces

Je dédie ce modeste travail à mes très chers au monde :  
Ma chère mère que Dieu le tout puissant la garde et la protège.  
très chères sœurs Fatima et Sihem.  
Mes très chers frères Omar, Mohamed, Larbi et Smail .  
Tous mes camarades en particulier S.Fatima et D.abla.

# Remerciements

"La science ne cherche pas à énoncer des vérités éternelles ou de dogmes immuables ; loin de prétendre que chaque étape est définitive et qu'elle a dit son dernier mot, elle cherche à cerner la vérité par approximations successives." (Bertrand Russell/1872-1970)

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné le privilège d'étudier et de suivre le chemin de la science. Ce travail doit beaucoup à la qualité du cadre de recherche dont j'ai bénéficié. Je remercie, **Dr. K.Kadi**, de m'avoir proposé d'effectuer un mémoire sous sa direction, de ses remarques judicieuses, de l'encouragement constant et de la confiance qu'il m'a témoigné tout le long de ce travail. Je suis très honoré et remercie de part leur présence à mon jury de Master : **Dr. F. Mokhtari**, pour l'honneur qu'il m'a fait de présider ce jury **Dr. N. Ait Ouali**, qui a bien voulu accepter de juger ce travail et de faire partie du jury **Dr. N.Hachemi**, qui a mis beaucoup de bonne volonté pour lire le mémoire et qui a accepté de faire partie du jury. Je remercie vivement mes professeurs, pour leur soutien et leur aide précieuse en explications, documentation sur le sujet. Finalement je remercie infiniment ma mère pour son soutien et qui m'a été bien utile pour mener à bien ce travail.

# Introduction générale

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent dans la nature : Fluctuations de la température, de la pression atmosphérique, etc. En électronique et en télécommunications, l'étude des processus aléatoires est utile notamment dans le contexte des communications numériques, certains signaux sont impossibles à caractériser a priori. L'exploitation des processus aléatoires est aussi à la base de nombreuses approches en traitement du signal, que ce soit pour caractériser le contenu fréquentiel du signal ou pour coder et tatouer un signal de parole. Plus généralement, les sources d'information telles que le son, les images sont aléatoires et varient dans le temps. Enfin, les processus aléatoires ont une application dans le cadre du traitement du trafic dans les réseaux et notamment pour l'analyse du temps de transfert et/ou du temps de traitement d'un paquet d'informations de taille aléatoire, généré à des intervalles de temps aléatoires (Théorie des Files d'Attente). La théorie des processus aléatoire vise à introduire les outils de traitement des phénomènes variant aléatoirement dans le temps. Les phénomènes d'attente sont devenus l'une des préoccupations de l'homme depuis bien longtemps. Attendre, constitue la tâche la plus désagréable de la vie moderne. Comment gérer un système présentant des files d'attente, afin d'améliorer sa qualité de service ? Cette question a été abordée, pour la première fois par A.K. Erlang avec ses travaux concernant le réseau téléphonique de Copenhague [17]. La théorie mathématique s'est ensuite développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek [17] et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques. Cette théorie s'est ensuite étendue à de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les télécommunications en général, la fiabilité de systèmes complexes, . . . Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont omniprésents dans notre société. Les exemples ne manquent pas :

- Attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration),
- trafic urbain ou aérien,
- réseaux téléphoniques,
- circulation de pièces dans un atelier,
- programmes dans un système informatique, . . .

En effet, afin d'analyser le comportement de ces systèmes, évaluer et optimiser

leurs performances, il faut d'abord les représentés par des modèles mathématiques qui proviennent de la théorie des files d'attente. Un modèle typique de files d'attente nécessite la définition des processus d'inter-arrivées et la durée de service de client, la taille de la file qui peut être fini ou non, ainsi que la discipline de service. Tous ces paramètres sont indiqués dans la notation dite de Kendall. Dans certains systèmes, on est amené à imposer des priorités d'utilisation du service. Notre travail consiste à étudier une classe de systèmes de files d'attente, qui porte le nom de système de files d'attente simple comprenant une station de service et pour lequel la capacité de l'espace est infini et de discipline de service FIFO. Dans notre mémoire nous analysons des modèles de systèmes de files d'attente avec dérobade, abandon, feedback et deux serveurs hétérogènes. Le mémoire est composée de trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous abordons les processus à la base de l'étude de tels systèmes d'attente qui sont les processus stochastiques. Nous présentons une introduction aux concepts de base de la théorie des processus stochastiques. Nous présentons également les relations fondamentales entre les différents processus stochastiques.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la terminologie de la théorie des files d'attente. Certaines définitions et notations qui sont nécessaires dans l'étude des systèmes de files d'attente (la notation de KANDELL, la formule de LITTLE  $\dots$ ) sont nottamment données. Et nous étudions quelque modèles de files d'attente ( $M/M/1$ ,  $M/M/1/K$ ,  $M/M/c$ ,  $M/M/\infty$ ) et l'évaluation de leurs paramètres de performance.

Dans le troisième chapitre, nous traitons le cas d'un système de files d'attente de deux serveurs hétérogènes  $M/M/2/N$  (capacité  $N$  finie) avec dérobade, abandon et feedback. Nous développons d'abord les équations des probabilités d'état stable. Ensuite, nous donnons quelques mesures de performance du système. Enfin, nous présentons quelques exemples numériques pour démontrer comment les différents paramètres du modèle influencent sur le comportement du système.

# Chapitre 1

## Les processus stochastiques

L'étude des processus stochastiques s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc.), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie). Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. Par exemple, le prix d'un baril du Pétrole, qui ont tiré l'attention de beaucoup des spécialistes économiques. En effet, Ce prix, dans la bourse, varie tout le temps, cette variation nous donne l'idée d'établir un processus aléatoire, ou encore un processus stochastique, d'où la modélisation par une famille de variables aléatoires  $X(t)_{t \in T}$  où  $T$  est l'ensemble des temps pendant lesquels le phénomène est observé. La famille  $X(t)_{t \in T}$  est appelée processus aléatoire, ou encore processus stochastique.

**Définition 1.0.1.** *Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires indexées par  $T$  à valeurs dans un ensemble  $X$ . Sa caractéristique de base est le fait que la loi de la variable  $X$  soit fonction de  $t$  définies dans le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans l'espace mesurable  $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ ,  $t \in T$  représente une date.*

★ Lorsque  $T \subseteq \mathbb{Z}$ , on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

★ lorsque  $T$  est un intervalle  $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ , on parlera de processus à temps continu. Il existe également les processus de Poisson, de Markov et de Yule.

**Définition 1.0.2.** *On appelle espace des états l'ensemble  $\mathbb{E}$  où les variables  $X_n$  prennent leurs valeurs. L'ensemble  $\mathbb{E}$  peut être discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre types de processus :*

1. Suite stochastique à espace d'états discret
2. Suite stochastique à espace d'état continu.
3. Processus continu à espace d'état discret.



#### 4. Processus continu à espace d'état continu.

La loi d'un processus stochastique est caractérisée par la donnée de la loi du vecteur qui lui est associé.

**Définition 1.0.3.**  $\{\mathcal{E}, t \geq 0\}$  est à **accroissement stationnaire** (homogène), si  $\forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R} : X_{t_2+h} - X_{t_1+h}$  et  $X_{t_2} - X_{t_1}$  sont des variables aléatoires de même loi.

## 1.1 Le processus de poisson

Parmi les processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discret étudiés, le processus de Poisson occupe une place privilégiée. De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent par des "arrivées" survenant une par une à des instants aléatoires successifs. Il est utilisé avant tout pour décrire la réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné.

### 1.1.1 Le processus de comptage

**Définition 1.1.1.** Un processus  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est appelé processus de comptage si c'est un processus croissant, c'est-à-dire si pour tout  $s \leq t$ ,  $N_s \leq N_t$ . La variable aléatoire  $N_t - N_s$  est alors appelée accroissement du processus sur  $]s, t]$ . par exemple :

$\diamond N(t)$  = nombre de poissons capturés dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ ,

$\diamond N(t)$  = taille d'une population à la date  $t$ .

**Définition 1.1.2.** Un processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est appelé processus à **accroissements indépendants** si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous  $t_1, \dots, t_n$  tels que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les accroissements  $N_{t_1} - N_0, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont des variables aléatoires indépendantes.

**Définition 1.1.3.** Un processus à **accroissements indépendants stationnaire**  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est dit à événements rares si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}([N_t > 0]) = 0$$

et si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}([N_{t>1}])}{\mathbb{P}([N_{h=1}])} = 0$$

**Définition 1.1.4.** Une variable aléatoire  $X$  est dite sans mémoire (ou sans usure) si :  $\forall s, t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X > t + s / X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ .

**Par exemple** Si  $X$  est la durée de vie d'un matériel quelconque l'équation précédente s'interprète de la manière suivante, sachant le matériel en état de bon fonctionnement au temps  $t$ , la loi de probabilité de sa durée de vie future est la même que celle de sa durée de vie initiale. En d'autres termes, le matériel ne s'use pas.

## 1.1.1.1 Loi exponentielle et la loi de poisson

## Définitions et généralité :

**Définition 1.1.5.** Une variable aléatoire  $X$  à valeurs entières suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda k)$$

**Définition 1.1.6.** Une variable aléatoire  $Y$  à valeurs réelles strictement positives suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu > 0$  si :

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(X = t) = \mu \exp(-\mu t)$$

## Distribution de la loi Poisson

Soit  $n$  une variable aléatoire discrète avec  $n = 0, 1, \dots$  qui suit une distribution Poisson.

- La densité de probabilité de  $n$  est  $P_n = \lambda^n \exp^{-\lambda} / n!$ ,
- L'espérance de  $n$  est  $\mathbb{E}(x) = \lambda$ ,
- et la variance de  $n$  est  $\text{Var}(x) = \lambda$ .

## Remarque

La distribution de Poisson peut également être définie en unités de temps  $t$ . Dans ce cas, la variable discrète  $n$  représente le nombre d'occurrences dans le temps  $t$  devient,

$$P(n, t) = (\lambda t)^n \exp^{-(\lambda t)} / n!$$

## Distribution de la loi exponentielle

Soit  $t$  une variable aléatoire avec  $t \geq 0$  qui suit une distribution exponentielle.

- La densité de probabilité de  $t$  est  $f(t) = \mu \exp^{(-\mu t)}$ ,
- la distribution cumulée correspondante est  $F(t) = 1 - \exp^{(-\mu t)}$ ,
- L'espérance de  $t$  est  $\mathbb{E}(x) = 1/\mu$ ,
- et la variance de  $t$  est  $\text{Var}(x) = 1/\mu^2$ .

## 1.1.1.2 Relation entre la distribution Exponentielle et la distribution de Poisson

La densité de probabilité d'une distribution exponentielle  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  Supposons  $\tau$  est exponentielle avec une espérance  $\frac{1}{\lambda}$ , et  $n$  est de Poisson de moyenne  $\mu$  on

a :

$$\begin{aligned}
 P(\tau > t) &= 1 - F(t) \\
 &= e^{-\lambda t} \\
 &= P(n = 0 \text{ en } t) \\
 &= P(0, t)
 \end{aligned}$$

Notons  $P(n, t)$  la probabilité d'avoir  $n$  unité dans le temps  $t$ .

$$P(0, t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(1, t) = \int_{\tau=0}^t P(0, \tau) f(1 - \tau) d\tau = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$P(2, t) = \int_{\tau=0}^t P(1, \tau) f(1 - \tau) d\tau = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} / 2!$$

...

$$P(n, t) = \int_{\tau=0}^t P(n-1, \tau) f(1 - \tau) d\tau = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!$$

## 1.1.2 processus de poisson

Un processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  tel que  $N_0 = 0$  est un processus de Poisson si

✓  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est **stationnaire**,

✓  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un processus à **accroissements indépendants**,

✓  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un processus à **événements rares**.

On s'intéresse ici au comptage du nombre d'occurrences d'un événement, par exemple la naissance d'un individu. De tels phénomènes peuvent se définir par la famille  $(A_n)_n \in \mathbb{N}^*$  des temps d'arrivées qui sont des variables aléatoires et on note  $N(t)$  le nombre d'événements survenus dans l'intervalle  $[0, t]$ . Un tel processus a une trajectoire en escalier (voir figure 1.1). L'événement d'intérêt survient aux dates  $t_1, t_2, \dots$ , à chacune de ces dates, le comptage  $N(t)$  augmente de 1 :

$$\begin{aligned}
 N(t) &= 0 \quad \text{si } t < t_1, \\
 &= 1 \quad \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\
 &\vdots \\
 &= k \quad \text{si } t_k \leq t \leq t_{k+1}, \\
 &\text{etc}
 \end{aligned}$$

- Appels téléphoniques à un standard ;
- passage de véhicules à un péage d'autoroute ;
- prise d'un poisson par un pêcheur ;
- arrivée d'un client à un guichet ;
- passage d'un autobus.

**Définition 1.1.7.** On dit qu'un processus est **poissonnien** s'il vérifie les hypothèses suivantes :

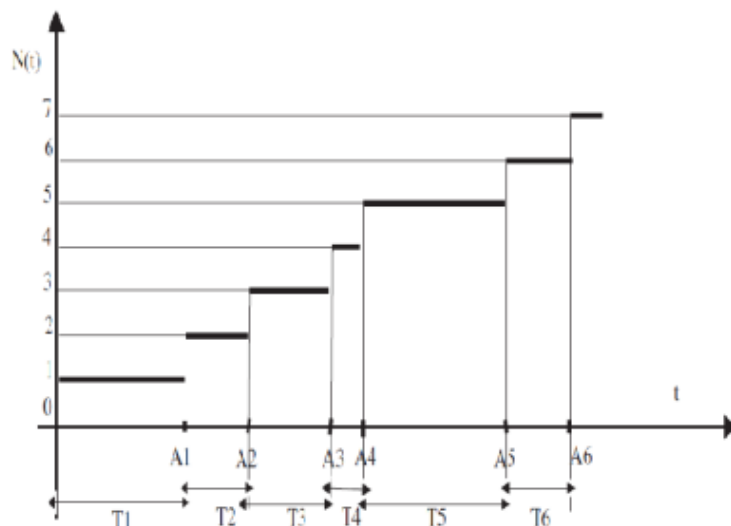


FIGURE 1.1 – Le processus de comptage

**A** Le processus est sans mémoire : l'occurrence d'événements avant la date  $t$  n'influe en rien sur l'occurrence d'événements après  $t$  :

$$N(t+h) - N(t) \perp N(t) - N(t-k).$$

**B** Le processus est homogène dans le temps : la loi de l'accroissement  $[N(t+h) - N(t)]$  du processus ne dépend que de  $h$  et pas de  $t$  (et est donc la même que celle de  $N(h)$ ) :

$$N(t+h) - N(t) = {}^1N(h) - N(0).$$

Un processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  tel que  $N_0 = 0$  est un processus de Poisson si et seulement si :

C1 :  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  : est stationnaire,

C2 :  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  : est un processus à accroissements indépendants,

C3 : il existe  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $N_t$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .

**Proposition 1.1.1.** Si  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , le temps aléatoire  $U$  qui sépare un instant  $\theta$  du prochain événement et le temps aléatoire  $V$  qui sépare  $\theta$  du dernier événement suivent la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

### 1.1.3 Processus de renouvellement

**Définition 1.1.8.** Un processus de comptage dont la suite des inter-arrivées forme une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées s'appelle un processus de renouvellement.

---

1. La notation signifie que les variables aléatoires ont la même loi de probabilité, pas la même valeur

pelle processus de renouvellement. Les temps de la  $n^{\text{ème}}$  arrivée (ou les temps de renouvellement) sont :

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i, n = 0, 1, 2, \dots$$

**Définition 1.1.9.** Un processus de renouvellement à pour fonction de dénombrer les occurrences d'un phénomène donné, lorsque les délais entre deux occurrences consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il peut s'agir de compter le nombre de pannes d'un matériel électronique en théorie de la fiabilité (le matériel est alors **renouvelé** après chaque panne, d'où la dénomination), de dénombrer les arrivées de clients dans une file d'attente, de recenser les occurrence d'un sinistre pour une compagnie d'assurance....

## 1.1.4 Caractérisation d'un processus de Poisson par ses temps d'arrivée

Soit  $A_n$  l'instant de la  $n^{\text{ème}}$  arrivée :  $A_n = \{\inf t \geq 0; N_t = n\}$  et  $T_n$  le  $n^{\text{ème}}$  temps d'attente pour

$n \in N^* : T_n = A_n - A_{n-1}$  (en convenant  $A_0 = 0$ ).

On a  $A_n = \sum_{i=1}^n T_i$

et  $N_t = \max_{n \geq 0} A_n \leq t$ .

**Théorème 1.1.4.1.**  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  si et seulement si les variables aléatoires  $T_n$  sont indépendantes de même loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  de densité

$$f_{T_n}(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)$$

## 1.1.5 Processus de naissance et de mort

Les valeurs dans l'espace des états  $\mathbb{N}$  et dont les seules transitions possibles à partir de l'état  $n$  se font vers les états  $(n-1)$  et  $(n+1)$ . Les processus de naissance et de mort sont utilisés pour modéliser les systèmes d'attente et l'évolution de populations. Le processus de Poisson est un processus de naissance et de mort pour lequel la seule transition possible à partir de l'état  $n$  se fait vers l'état  $(n+1)$ . Dans le cas d'un système d'attente, on considère par exemple des populations comprenant tous les clients qui sont dans le système à l'instant  $t$ . Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discret  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Ils sont caractérisés par deux conditions importantes :

ils sont sans mémoire, et à partir d'un état donné  $n$ , des transitions ne sont possibles que vers l'un ou l'autre des états voisins  $(n+1)$  et  $(n-1)$  pour  $n \geq 1$ . Les processus de Poisson ne connaissent que des incrémentations avec un taux constant. Dans la

suite, nous introduisons des processus sans mémoire qui admettent des incréments et des décréments avec des taux variables, dépendants de l'état actuel du processus. Ces processus, intervenant dans la modélisation de larges classes de phénomènes d'attente, sont appelés processus de naissance et de mort.

### 1.1.5.1 Diagramme de transition et interprétation intuitive

On associe à un processus de naissance et de mort un graphe fini ou infini (suivant la finitude ou l'infinitude du processus), valué de la façon suivante :

associé au processus. Les valeurs associées aux arcs ne sont pas des probabilités de transitions, mais des taux de probabilités de transitions :

- Pour voir une interprétation intuitive de l'équation différentielle portant sur la probabilité d'être dans l'état  $E_k$ , analysons le flux de probabilité entrant en  $E_k$  et le flux de probabilité sortant de  $E_k$

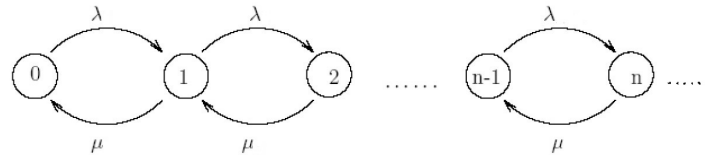


FIGURE 1.2 – Diagramme de transition d'un processus de naissance et de mort

# Chapitre 2

## Système des Files d'attente

La théorie des files d'attente s'attache à modéliser et à analyser de nombreuses situations. Pour acheter un timbre à la poste, pour se faire enregistrer à l'aéroport, . . . etc. Ces situations qui sont différentes en apparences, mais qui relèvent néanmoins du schéma descriptif général suivant : Des clients arrivent à intervalles aléatoires dans un système comportant un ou plusieurs serveurs. Chaque client doit attendre son tour pour adresser sa requête. La durée du service auprès de chaque serveurs est elle même aléatoire. Après avoir été servis les clients quittent le système.

Considérons l'exemple d'une file d'attente aux caisses d'un grand magasin. Le client pourra alors se poser plusieurs questions :

- ⊇ Combien de temps va-t-il attendre en moyenne dans la queue ?
- ⊇ Quelle probabilité a-t-il d'attendre plus d'un temps  $t$  ?
- ⊇ Combien de clients va-t-il trouver devant lui ?

Si nous essayions de répondre aux questions ci-dessus de manière analytique, il nous serait impossible de tenir compte du fait que les clients arrivent de façon aléatoire au magasin. Nous serions obligés de considérer que les clients arrivent de manière régulière, ou au moins à des moments connus, et que les temps de service soient eux aussi connus. Or, il est certain qu'il y a beaucoup plus de clients aux heures de pointe qu'aux heures creuses de la journée. Les moments exacts où les clients arrivent et les temps de service sont tout sauf connus à l'avance. La prise en compte des différents aléas n'entre guère dans un modèle déterministe. Pour pouvoir résoudre un tel problème, nous avons besoin de différentes notions que nous verrons dans ce chapitre, nous présentons les éléments essentiels et quelques résultats concernant les systèmes de files d'attente.

### 2.1 File d'Attente Simple

Une file d'attente simple est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station. Afin de spécifier

complètement une file d'attente simple, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente .

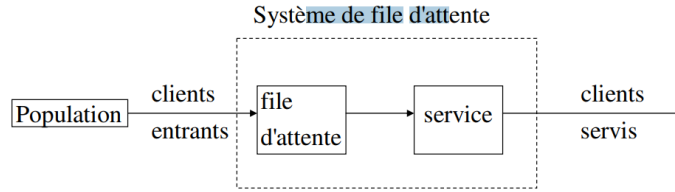


FIGURE 2.1 – Système de file d'attente

### 2.1.1 Processus d'arrivée

L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Si  $A_n$  désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du  $n^{ime}$  client dans le système, on aura ainsi :  $A_0 = 0$  et  $A_n = \inf\{t; N_t = n\}$ . Si  $T_n$  désigne la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du  $(n-1)^{ime}$  client et du  $n^{ime}$  client, on a alors :

$$T_n = A_n - A_{n-1}.$$

### 2.1.2 Temps de service

Considérons tout d'abord une file à serveur unique.

On note  $D_n$  la variable aléatoire mesurant l'instant de départ du  $n^{ime}$  client du système et  $Y_n$  la variable aléatoire mesurant le temps de service du  $n^{ime}$  client (le temps séparant le début et la fin du service). Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut en effet qu'un client qui quitte la station laisse celle-ci vide. le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arrivée du prochain client. On note  $\mu$  le taux de service :

$$\frac{1}{\mu} \text{ est la durée moyenne de service.}$$

### 2.1.3 Structure de la file :

#### *Nombre de serveurs*

Une station peut disposer de plusieurs serveurs en parallèle. Soit  $C$  le nombre de serveurs. Dès qu'un client arrive à la station, soit il y a un serveur de libre et le client entre instantanément en service, soit tous les serveurs sont occupés et le client se place dans la file en attente de libération d'un des serveurs. Mais on suppose à la plupart du temps que les serveurs sont identiques et indépendants les uns des autres. Une station particulière est la station **IS** (infinite servers) dans la quelle le



nombre de serveurs est infini. Cette station ne comporte donc pas de file d'attente.

*Capacité de la file :*

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit  $K$  la capacité de la file, une file à capacité illimitée vérifie  $K = +\infty$ .

### Remarque

Quand nous commençons à analyser un système de file d'attente, l'état de ce dernier dépend beaucoup de l'état initial et du temps écoulé. Nous disons alors que le système est en situation **transitoire**, et son étude est alors très complexe.

C'est pourquoi dans la théorie des files d'attente, nous préférons faire l'étude une fois que le système a atteint sa situation d'équilibre où les états du système sont essentiellement indépendantes de l'état initial et du temps déjà écoulé. On suppose en quelque sorte que le système est en opération depuis un très long moment.

## 2.1.4 Notation de Kendall :

Pour la classification des systèmes d'attente, on a recours à la notation symbolique introduite par *Kendall* au début des années cinquante. Cette notation comprend des symboles rangés dans l'ordre  $T/Y/C/K/m/Z$  où

- $T$  : indique le processus d'arrivée des clients. Les codes utilisés sont :
  - $M$  : Interarrivées des clients sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle. Il correspond à un processus de Poisson ponctuel (propriété sans mémoire).
  - $D$  : Les temps interarrivées des clients ou les temps de service sont constants et toujours les mêmes.
  - $GI$  : Interarrivées des clients ont une distribution générale (il n'y a aucune hypothèse sur la distribution mais les interarrivées sont indépendantes et identiquement distribuées).
  - $G$  : Interarrivées des clients ont une distribution générale et peuvent être dépendantes.
  - $E_k$  : Ce symbole désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi d'Erlang d'ordre  $k$ .
- $Y$  : décrit la distribution des temps de service d'un client. Les codes sont les mêmes que  $T$
- $C$  : nombre de serveurs
- $K$  : capacité de la file c'est le nombre de places dans le système en d'autre terme c'est le nombre maximal de clients dans le système y compris ceux en service
- $m$  : population des usagers.

- $Z$  : discipline de service c'est la façon dont les clients sont ordonnés pour être servi. Les codes utilisés sont les suivants :

#### Discipline de service :

- FIFO (first in, first out) ou FCFS (first come first served) : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que dans la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui,
- LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served). Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). A nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file monoserveur
- SIRO (Served In Random Order), les clients sont servis aléatoirement.
- PNP (Priority service), les clients sont servis selon leur priorité. Tous les clients de la plus haute priorité sont servis premiers, puis les clients de priorité inférieur sont servis, et ainsi de suite.
- PS ( Processor Sharing ), les clients sont servis de manière égale. La capacité du système est partagée entre les clients.

## 2.2 Loi de Little

La loi de Little est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime permanent du système. Aucune hypothèse sur les variables aléatoires qui caractérisent le système (temps d'inter-arrivées, temps de service,...etc). La seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable. Le débit du système est alors indifféremment soit le débit d'entrée, soit le débit de sortie :  $d_s = d_e = d$  La loi de Little s'exprime telle que dans la propriété suivante :

**Théorème 2.2.1. (Formule de Little) :** *Le nombre moyen de clients  $\bar{N}$ , le temps moyen passé dans le système  $\bar{T}$  et le débit moyen d'un système stable en régime permanent  $\lambda_e$  se relie de la façon suivante :*

$$\bar{N} = \lambda_e \bar{T}$$

pour une file  $(M/M/1)$   $\lambda_e = \lambda$

On a vu que la loi de Little nous dit qu'il existe une relation entre le nombre moyen de clients dans la file (en attente ou en service) et le temps moyen total de séjour d'un client dans la file (temps d'attente + temps de service)

**Remarque 2.2.1.** *La loi de Little s'applique à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file  $M/M/1$ ).*

### 2.2.0.1 Remarque

La loi de Little s'applique à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file  $M/M/1$ ).

## 2.2.1 Mesures de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente ou d'un réseau de files d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données, et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

$\bar{N} = \mathbb{E}(N)$  : nombre moyen de clients dans le système,

$\bar{N}_s$  : nombre moyen de clients en train d'être servis,

$\bar{N}_Q$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente.  $N_Q$ ,  $N_s$  et  $N$  : sont les v.a. correspondantes.

$\bar{T}$  : temps moyen qu'un client passe dans le système,

$\bar{T}_s$  : temps moyen de service,

$\bar{T}_s$  : temps moyen d'attente d'un client dans la file.  $T_Q$ ,  $T_s$  et  $T$  : sont les v.a. correspondantes.

De manière générale, une file est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté  $\lambda$ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter  $\mu$  clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est  $c$ , une file est stable si et seulement si

$$\lambda < m\mu \Leftrightarrow \rho = \lambda/c\mu < 1,$$

où,  $\rho$  est appelé l'intensité du trafic.

## 2.3 Arrivée avant un départ et départ avant une arrivée

▷ Temps pour qu'une nouvelle arrivée se produise :

$$A \sim \exp(\lambda)$$

.

▷ Temps pour qu'un nouveau départ se produise :

$$D \sim \text{Exp}(\mu).$$

( $A$  et  $D$  sont indépendantes).

▷ Probabilité qu'une arrivée se produise avant un départ :

$$P(A < D) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

▷ Probabilité qu'un départ se produise avant une arrivée :

$$P(D < A) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

## 2.4 Le système $M/M/1$

Le système de files d'attente  $M/M/1$  est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attente. Le flot des arrivées est poissonnien de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ , la discipline d'attente est *FIFO*, la file d'attente est de capacité infinie.

La file peut être considérée comme un processus de naissance et de mort, pour lequel :

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \forall n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

### 2.4.1 Régime transitoire

Pour ce système, le plus simple de la théorie des files d'attente, le flux des arrivées est poissonnien de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ . La capacité d'attente est illimitée et il y a une seule station de service. Le processus  $(X_t)$  est markovien (doté de la propriété d'absence de mémoire), ce qui rend son étude aisée. Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de loi exponentielle, nous avons pour un petit intervalle de temps  $\Delta t$  les équations différentielles de Kolmogorov :

$$\begin{cases} P_0'(t) = \lambda P_0(t) + \mu P_1(t), & n=0, \\ P_n'(t) = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) & n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

où

$$P_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n)$$

### 2.4.2 Régime stationnaire

Quand  $t \rightarrow \infty$ , on peut montrer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$  existent et sont indépendante de l'état initial du processus et que

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\pi = \{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelé distribution stationnaire, elle suit une loi géométrique

On obtient alors un système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0, & n=0; \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu)P_n, & n=1,2,\dots \end{cases}$$

aux quelles on ajoute la condition  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ . En additionnant les  $(n+1)$  premières equations , on trouve

$$\mu P_{n+1} = \lambda P_n.$$

D'où

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

alors

$$P_n = (1 - \rho)(\rho)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

à condition que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1.$$

On constate que la file  $M/M/1$  est gouvernée par la loi géométrique.

- $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$  est le coefficient d'utilisation du système ou intensité du trafic.
- $\rho$  correspond au nombre moyen d'arrivées par la durée moyenne du service.
- $P_0 = 1 - \rho$  correspond à la probabilité que le système soit inoccupé. Si  $\rho \geq 1$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ie : la longueur de la file d'attente dépasse toute mesure.

### 2.4.3 Caractéristiques du système

Une importante caractéristique des systèmes de files d'attente est

✓ le nombre moyen de clients dans le système :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \mathbb{E}(N) \\ &= \sum_{n \geq 0} n \pi_n \\ &= (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n, \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

✓ Nombre moyen de clients en train d'être servis :

$$\bar{N}_s = 1 - \pi_0 = \rho$$

✓ Nombre moyen de clients en train d'être servis :

$$\bar{N}_s = 1 - \pi_0 = \rho$$

✓ Nombre moyen de clients dans la file :

$$\bar{N}_Q = \sum_{n \geq 1} (n-1) \pi_n = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

De la même manière, on peut trouver,

• La variance du nombre de clients dans le système

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}(X) \\ &= (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} (K-N)^2 \rho^K = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \end{aligned}$$

Le temps moyen de séjour dans le système. On peut l'obtenir en appliquant La formule de Little.

✓ Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\bar{N}}{\lambda} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

✓ Temps moyen de service :

$$\bar{T}_s = 1/\mu$$

✓ Temps moyen d'attente :

$$\bar{T}_Q = \bar{T} - \bar{T}_s = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

### 2.4.3.1 Remarque

D'autres caractéristiques peuvent être déduites à partir de ces relations, en utilisant les formules de Little

## 2.5 Le système $M/M/1/K$

On considère un système à serveur simple identique à la file  $M/M/1$  excepté que la capacité de la file d'attente est finie. On a donc toujours les hypothèses suivantes : le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux  $\mu$ . Soit  $K$  la capacité de la file d'attente : c'est le nombre maximal de clients qui peuvent être présents dans le système, soit en attente, soit en service. Quand un client arrive alors qu'il y a déjà  $K$  clients présents dans le système, il est perdu. Ce système est connu sous le nom de file  $M//M/1//K$ . L'espace d'états  $E$  est

maintenant infini :  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  La capacité de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que ce que le serveur de la file est capable de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés. Le nombre de clients dans la file ne peut donc jamais "partir" à l'infini. De plus, dès qu'un client est autorisé à entrer, il sortira un jour et son temps de séjour dans la file est fini, puisqu'il correspond au temps de service de tous les clients devant lui et que ce nombre est limité par  $K$ . Sur un temps très long, le débit de sortie sera donc bien égal au débit d'entrée, ce qui correspond bien à la stabilité inconditionnelle du système. Le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors défini de la façon suivante :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n < K; \\ 0, & \text{si } n > K; \end{cases}$$

L'intégration de l'équation récurrente permettant de calculer  $\pi_n$  se fait alors comme suit :

$$\pi_n = \pi_0 \rho^n \text{ pour } n \leq K \\ \pi_n = 0 \text{ pour } n > K \\ \pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^K \rho^n} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \text{ si } \lambda \neq \mu \left( \text{et } \frac{1}{K+1} \text{ si } \lambda = \mu \right)$$

### 2.5.1 Caractéristiques du système

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^K n \pi_n = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}$$

À nouveau, lorsque  $K$  tend vers l'infini et  $\rho < 1$ , on retrouve les résultats de la file M/ M/1 :

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\bar{N}_Q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \pi_n = \bar{N} - (1 - \pi_0)$$

Le temps moyen qu'un client passe dans le système  $\bar{T}$  et le temps moyen d'attente dans la file  $\bar{T}_Q$  sont obtenus à partir la loi de Little :

- Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda}$$

- Temps moyen d'attente

$$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda}$$

## 2.6 Le système $M/M/C$

On considère un système identique à la file  $M/M/l$  excepté qu'il comporte  $C$  serveurs identiques et indépendants les uns des autres. On conserve les hypothèses : processus d'arrivée des clients poissonien de taux  $\lambda$  et temps de service exponentiel de taux  $\mu$ , (pour chacun des serveurs) Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/C$ . L'espace d'états  $E$  est, comme pour la  $M/M/1$  infini :  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  La file d'attente est de capacité infini. Si l'un des serveurs est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce serveur. Dans le cas contraire, le client prend sa place dans une file d'attente commune pour tous les serveurs. Lorsqu'un serveur se libère, le client en tête de la file occupe ce serveur. Par conséquent, la discipline d'attente est FIFO.

Le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors défini de la façon suivante :

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n\mu & \forall n = 1, \dots, C \\ C\mu & \forall n \geq C \end{cases}$$

Du diagramme, on déduit les résultats qui suivent. L'analyse du système en régime stationnaire, à l'aide de la procédure des équations de Chapman Kolmogorov aboutit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\ (\lambda + n\mu)\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} \quad 1 \leq n < c \\ (\lambda + c\mu)\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1} \quad n \geq c \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

La résolution du système ci-dessus présente la distribution stationnaire suivante :

$$\bar{N}_Q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \bar{N} - (1 - \pi_0) \quad (2.1)$$

$$\pi_n = \frac{\rho^C}{C!} (A)^{n-C} \pi_0, \quad n \geq C \quad (2.2)$$

où

$$\pi_0 = \left[ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!} \sum_{n=C}^{\infty} \rho^{n-C} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ et } A = \frac{\lambda}{C\mu}$$

Cette dernière existe si :  $\lambda < C\mu$



## 2.6.1 Caractéristiques du système

A partir de la distribution stationnaire du processus  $\{N(t), t \geq 0\}$ , on peut calculer les caractéristiques du système. En effet,

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^{C+1}}{C \cdot C! (1-A)^2} \rho_0 \quad (2.3)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\bar{N}_Q = \frac{\rho^{C+1}}{C \cdot C! (1-A)^2} \rho_0 \quad (2.4)$$

- Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\bar{T} = \frac{C \mu \rho^C}{C! (C \mu - \lambda)^2} \rho_0 \quad (2.5)$$

- Temps moyen d'attente

$$\bar{T}_Q = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^C}{\mu C \cdot C! (1-A)^2} \rho_0 \quad (2.6)$$

## 2.7 Le système $M/M/\infty$

On considère un système composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il rentre donc instantanément en service. Dans cette file particulière, il n'y a donc pas d'attente. On suppose toujours que le processus d'arrivée des clients est poissonien de taux  $\lambda$  et que les temps de service sont exponentiels de taux  $\mu$  (pour tous les serveurs). Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/\infty$ .

Comme cela a été fait pour la file  $M/M/C$ , on peut facilement démontrer que le taux de transition d'un état  $n$  quelconque vers l'état  $n-1$  est égal à  $n\mu$  et correspond au taux de sortie d'un des  $n$  clients en service. De même, le taux de transition d'un état  $n$  vers l'état  $n+1$  est égal à  $\lambda$  et correspond au taux d'arrivée d'un client.

De façon intuitive, la capacité de traitement de la file est infinie puisque tout nouveau client se présentant à l'entrée de la file est instantanément traité. La condition de stabilité exprimant que "le nombre moyen de client arrivant à la file par unité de temps doit être inférieure à la capacité de traitement de la file" est donc toujours satisfaite.

Soit  $\pi_n$  la probabilité stationnaire d'être dans l'état  $n$ . Les équations d'équilibre nous donnent

$$\pi_{n-1} \lambda = \pi_n n \mu \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

soit  $\pi_n = \frac{\rho}{n} \pi_{n-1}$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

On peut alors exprimer toutes les probabilités en fonction de  $\pi_n$ .

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0 \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

La condition de normalisation nous donne alors immédiatement  $\pi_n$

$$\pi_n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}} = e^{-\rho}$$

Notons que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}$  converge pour toutes valeurs de  $\rho$  (donc de  $\lambda$  et de  $\mu$ ), ce qui est cohérent avec la stabilité inconditionnelle de la file. On obtient finalement

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

#### Caractéristiques du système :

– Nombre moyen de clients  $\bar{N}$

$$\bar{N} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \pi_n = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} = e^{-\rho} \rho e^{\rho} = \rho$$

– Temps moyen de séjour  $\bar{T}$

Intuitivement, le temps moyen passé dans le système est réduit au temps moyen de service, soit  $\frac{1}{\mu}$ . On peut redémontrer ce résultat en utilisant la loi de Little :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

# Chapitre 3

## Files d'attente avec serveurs hétérogènes

### 3.1 Introduction

Dans la vie réelle, il existe de nombreuses situations de file d'attente se produisant dans lesquelles il peut y avoir une tendance pour que les clients soient découragés par une longue file d'attente. En conséquence, les clients décident de ne pas rejoindre la file d'attente (c.-à-d. dérober) ou partir après avoir rejoint la file d'attente sans obtenir un service en raison d'une impatience (c.-à-d. abandonner). Le dérobage et l'abandon ne sont pas seulement des phénomènes courants dans les files d'attente survenant dans les activités quotidiennes, mais aussi dans la réparation des machines par exemple.

De nombreux systèmes pratiques de files d'attente, en particulier ceux qui ont des dérobadés et des abandons, ont été largement appliqués à plusieurs problèmes de la vie réelle, comme les situations impliquant des clients impatientes du standard téléphonique, les urgences des hôpitaux et les systèmes d'inventaire et de gestion des stocks et des biens périssables [11]. Dans ce chapitre, on parle d'un système de file d'attente  $M/M/2/N$  avec dérobage, abandon, feedback et deux serveurs hétérogènes. Des systèmes de file d'attente avec dérobage, abandon ou les deux ont été étudiés par de nombreux chercheurs. Haight [6] a d'abord envisagé une file d'attente  $M/M/1$  avec des abandons. Haight [7] a également proposé une file d'attente  $M/M/1$  avec abandon des clients. Ancker et Gafarian [2],[3] ont étudié les effets combinés du dérobage et de l'abandon dans une file d'attente  $M/M/1/N$ . Abou-El-Ata et Hariri [1] ont considéré un système de file d'attente à serveurs multiples  $M/M/c/N$  avec dérobage et abandon. Wang et Chang [16] a étendu ce travail à l'étude d'une file d'attente  $M/M/c/N$  avec des dérobadés, abandons et les pannes de serveurs

Le mécontentement des clients en raison d'une qualité de service inadéquate dans les systèmes de files d'attente provoque le feedback de ces clients. En cas de feedback,

après avoir obtenu un service partiel ou incomplet, le client refait sa demande de service. En matière de communication informatique, La transmission de l'unité de données du protocole est parfois répétée en raison de l'apparition d'une erreur. Cela se produit généralement en raison d'une qualité de service non satisfaisante. Retravailler dans les opérations industrielles est également un exemple de file d'attente avec feedback. Takacs [14] étudie de la file d'attente avec feedback pour déterminer le processus stationnaire pour la taille de la file et les deux premiers moments de la fonction de répartition du temps total passé dans la file par un client. Avignon et Disney ont étudié les files d'attente à serveur unique avec feedback dépendant de l'état du serveur. Santhakumaran et Thangaraj [12] ont considéré serveur unique avec des clients impatientes, ils ont étudié  $M/M/1$  modèle de file d'attente pour la longueur de la file d'attente aux époques d'arrivée et résultat obtenu pour la distribution stationnaire, la moyenne et la variance de la longueur de la file d'attente. Thangaraj, et Vanitha [15] ont obtenu une solution transitoire de  $M/M/1$  avec feedback, la solution à l'état stable, des moments sous l'analyse de l'état et de la période d'activité a été calculée. Ayyapan et. al [4] ont étudié  $M/M/1$  système de file d'attente de nouveaux procès avec perte et feedback dans le cadre du service prioritaire par la méthode de matrice géométrique. Kumar et Sharma [8] ont étudié une file d'attente à serveur unique avec rétention des clients abandonnés. Kumar et Sharma [9] ont étudié un système de file d'attente sur un seul serveur avec rétention des clients dérobés. Sharma et Kumar [18] ont étudié un système de files d'attente markovienne à serveur unique, et à capacité finie avec abandon, et rétention des clients dérobés, dans lequel les temps d'attente entre les arrivées et les services suivent une distribution exponentielle. Mahdy El-Paoumy et Hossam Nabwey [10] ont étudié la file d'attente  $M/M/2/N$  avec un dérobade général. Dans ce mémoire, nous considérons un système de file d'attente  $M/M/2/N$  avec deux serveurs hétérogènes, la capacité de la file étant finie, avec abandon et dérobade, la mise en réserve et la rétention des clients abandonnés dans lesquels le service et l'arrivée des cliets suivent une distribution exponentielle. Les temps d'abandon sont supposés être distribués de manière exponentielle. Après l'achèvement du service, chaque client peut rejoindre le système (feedback) pour recevoir un autre service avec probabilité  $\alpha$  ou il peut quitter le système avec une probabilité  $\beta$  où  $\alpha + \beta = 1$  : Un client abandonné peut être retenu dans de nombreux cas en employant certains mécanismes convaincants de rester dans la file d'attente pour l'accomplissement de son service. Ainsi, un client renié peut être retenu dans le système de file d'attente avec une certaine probabilité  $\gamma$  et peut quitter la file d'attente sans recevoir de service avec probabilité  $\delta = 1 - \gamma$ .

## 3.2 Description et notations du modèle

On considère une file d'attente  $M/M/2/N$  avec un feedback instantané qui suit une distribution de Bernoulli avec abandon des clients et la rétention des clients abandonné. La capacité du système est pris comme fini (capacité  $N$ ). Les clients arrivent à la station-service un par un selon un processus de Poisson avec le taux d'arrivée  $\lambda$ . Il y a deux serveurs hétérogènes qui fournissent un service à tous les clients qui arrivent. Les temps de service sont indépendants et variables aléatoires

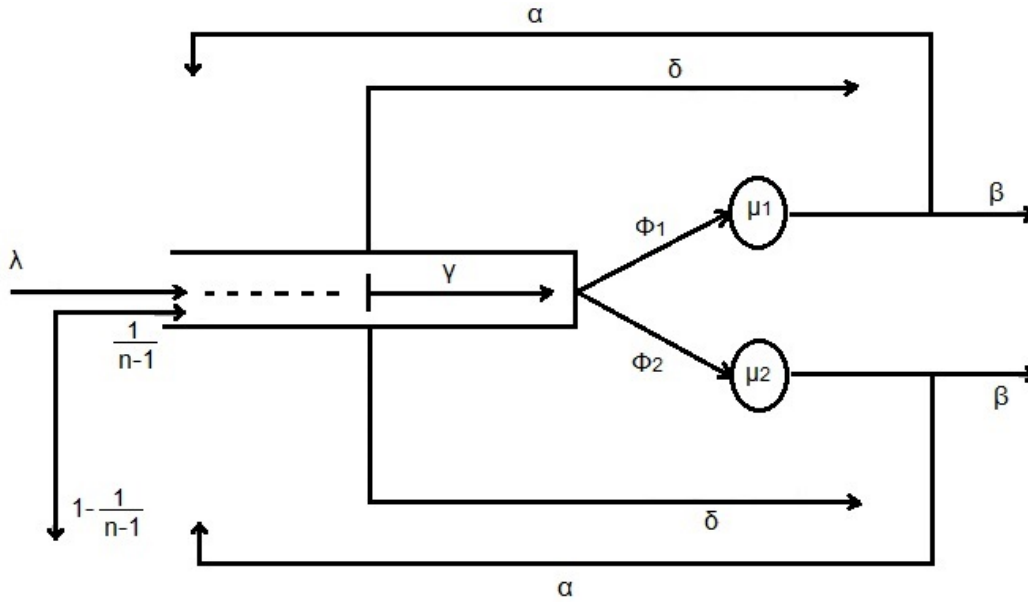


FIGURE 3.1 – un modèle

exponentielles à distribution identique avec des taux  $\mu_i, i = 1, 2$ . Après être servi, le client peut soit rejoindre la file avec probabilité  $\alpha$  ou il peut quitter le système avec probabilité  $\beta$  où  $\alpha + \beta = 1$ . Les clients nouvellement arrivés et ceux qui ont fait un feedback sont servis dans l'ordre dans laquelle ils rejoignent la queue de la file d'attente initiale. Nous ne faisons pas de distinction entre les arrivées régulières et les feedbacks. Les clients sont servis selon la discipline "premier arrivé, premier servi". Le client dans la file d'attente (arrivée régulière ou feedback) peut s'impatisser lorsque le service n'est pas disponible pendant une longue période. En effet, chaque client, à son arrivée, active une chronomètre individuelle, qui suit une distribution exponentielle avec le paramètre  $\eta$ . Ce temps est le temps d'impatience d'un client, après le quel, le client décide soit d'abandonner la file d'attente avec probabilité  $\delta (= 1 - \gamma)$  ou retenue avec une probabilité complémentaire  $\gamma$  où  $\delta + \gamma = 1$ . Nous supposons qu'il y a  $n$  clients dans le système ( $n > 2$ ), le client qui arrive rejoint le système avec une certaine probabilité de dérobade. On suppose qu'un client arrivant dérobe avec une probabilité de  $1 - \frac{1}{n-1}$ , où  $n$  est le nombre de clients dans le système et rejoint donc le système avec une probabilité  $\frac{1}{n-1}$ .

Les clients sont servis selon la discipline suivante :

- ✓ Si les deux serveurs sont occupés, les clients attendent dans la file d'attente.
- ✓ Si un serveur est libre, le premier client de la file d'attente s'y rend.
- ✓ Si les deux serveurs sont libres, le client en tête de la file d'attente choisit le serveur 1 avec une probabilité  $\phi_1$  et serveur 2 avec probabilité  $\phi_2$ , où  $\phi_1 + \phi_2 = 1$

### 3.3 Les équations de l'état stationnaire et leur solution

Soit  $P_n$  la probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans la système. En appliquant la théorie du processus de Markov, nous obtenons l'ensemble suivant d'équations d'état stationnaire

$$P_{00} = \mathbb{P}(\text{il n'y a pas de client dans le système}),$$

$$P_{10} = \mathbb{P}(\text{il y a un client desservi par le serveur 1}),$$

$$P_{01} = \mathbb{P}(\text{il y a un client desservi par le serveur 2}),$$

$$P_n = \mathbb{P}(\text{il y a } n \text{ clients dans le système}), n = 2, 3, \dots, N.$$

De plus,  $P_0 = P_{00}$ ,  $P_1 = P_{10} + P_{01}$  et  $P_2 = P_{11}$

Un système d'équations différentielles satisfaites par la file d'attente  $M/M/2/N$  avec les clients abandonnés, les réticences et les feedbacks sont modélisées comme une chaîne de Markov à temps continu.

$$\lambda P_0 = \beta \mu_1 P_{10} + \beta \mu_2 P_{01}, n = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} (\lambda + \beta \mu_1) P_{10} = \beta \mu_2 P_{11} + \lambda \phi_1 P_0, \\ (\lambda + \beta \mu_2) P_{01} = \beta \mu_1 P_{11} + \lambda \phi_2 P_0, \end{cases} n = 1 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{n} + \beta(\mu_1 + \mu_2) + (n-2)\eta\delta\right) P_n = & (\beta(\mu_1 + \mu_2) + (n-1)\eta\delta) P_{n+1} + \frac{\lambda}{n-1} P_{n-1}, \\ & 2 \leq n \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{\lambda}{N-1} P_{N-1} = (\beta(\mu_1 + \mu_2) + (N-2)\eta\delta) P_N, n = N. \quad (3.4)$$

La résolution de la relation (3.2) et l'utilisation (3.1) peuvent être facilement déduites :

$$P_{10} = \frac{\lambda}{\beta \mu_1} \left( \frac{\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2)\phi_1}{2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2)} \right) P_0. \quad (3.5)$$

$$P_{01} = \frac{\lambda}{\beta \mu_2} \left( \frac{\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2)\phi_2}{2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2)} \right) P_0. \quad (3.6)$$

C'est pour cette raison que

$$P_1 = \frac{\lambda}{\beta \mu_1 \mu_2} \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 \phi_2 + \mu_2 \phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right) P_0. \quad (3.7)$$

En résolvant itérativement les équations (3.2) – (3.4), on obtient

$$P_n = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right) P_1, 2 \leq n \leq N. \quad (3.8)$$

Par la même occasion,

$$P_n = \frac{\frac{\lambda}{\beta\mu_1\mu_2} \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1\phi_2 + \mu_2\phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right)}{\frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right)} P_0, 2 \leq n \leq N. \quad (3.9)$$

En utilisant la condition de normalisation,  $\sum_{n=0}^N P_n = 1$ , on obtient

$$P_0 = \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{\beta\mu_1\mu_2} \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1\phi_2 + \mu_2\phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right) \right) \left( 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right) \right) \right]^{-1} \quad (3.10)$$

### 3.4 Mesures de performance

En utilisant la probabilité en régime permanent donnée ci-dessus, nous pouvons obtenir certaines mesures de performance, telles que le nombre moyen de clients dans le système  $L_s$ , le nombre moyen de clients dans la file d'attente  $L_q$ , le temps d'attente moyen des clients dans le système  $W_s$ , le temps d'attente moyen des clients dans la file d'attente  $W_q$  et le nombre moyen de clients servis  $\mathbb{E}(\text{Client Servi})$ .

- La taille moyenne du système.

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{n=1}^N n P_n \\ &= \left[ \frac{\lambda}{\beta\mu_1\mu_2} \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1\phi_2 + \mu_2\phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right) \left( 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right) \right) \right] P_0 \end{aligned}$$

- La durée moyenne de la file d'attente.

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=3}^N (n-2) P_n \\ &= \left[ \frac{\lambda}{\beta\mu_1\mu_2} \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1\phi_2 + \mu_2\phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right) \left( \sum_{n=3}^N \frac{n-2}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right) \right) \right] P_0 \end{aligned}$$

- Le temps d'attente moyen dans le système.

$$\begin{aligned}
 W_s &= L_s / \lambda \\
 &= \left[ \frac{1}{\beta \mu_1 \mu_2} \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 \phi_2 + \mu_2 \phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left( 1 + \sum_{n=2}^N \frac{n}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right) \right) \right] P_0
 \end{aligned}$$

- Le temps d'attente moyen dans la file d'attente.

$$\begin{aligned}
 W_q &= L_q / \lambda \\
 &= \left[ \frac{1}{\beta \mu_1 \mu_2} \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 \phi_2 + \mu_2 \phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left( \sum_{n=3}^N \frac{n-2}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right) \right) \right] P_0
 \end{aligned}$$

- Le nombre moyen de clients servis.

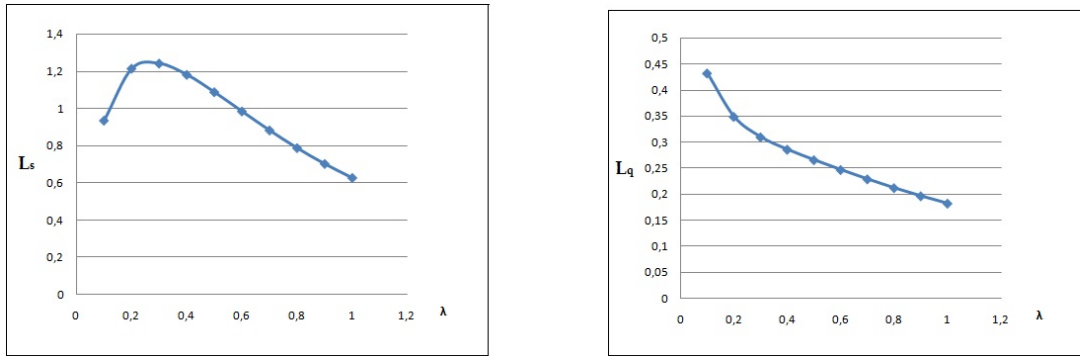
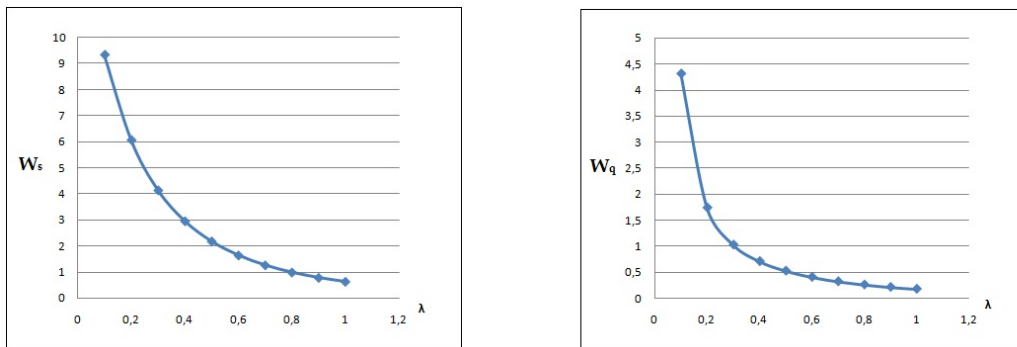
$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\text{Client servi}) &= \sum_{n=1}^N n(\mu_1 + \mu_2) \beta P_n \\
 &= \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \left[ \left( \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \beta(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 \phi_2 + \mu_2 \phi_1)}{(2\lambda + \beta(\mu_1 + \mu_2))} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left( 1 + \sum_{n=2}^N \frac{n}{(n-1)!} \prod_{k=2}^n \left( \frac{\lambda}{\beta(\mu_1 + \mu_2) + (k-2)\eta\delta} \right) \right) \right] P_0
 \end{aligned}$$

### 3.5 Les résultats numériques

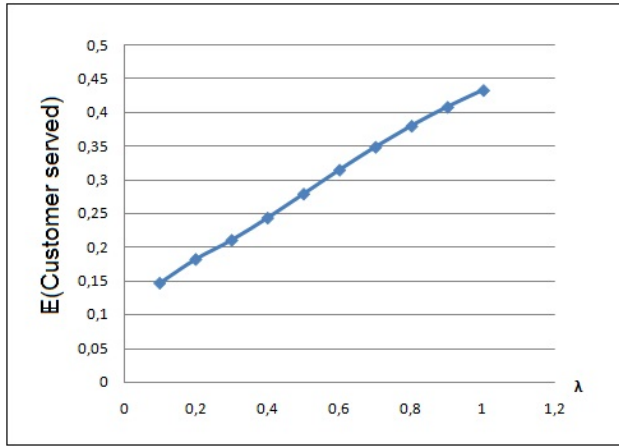
Dans cette partie, nous présentons quelques exemples numériques pour montrer l'impact des différents paramètres et sa relation avec la taille moyenne du système, la longueur moyenne de la file d'attente, le temps d'attente moyen dans le système, le le temps d'attente dans la file d'attente et le nombre moyen de clients servis. Tout d'abord, présentons l'évolution du système lorsque  $\lambda$  varie de 0.1 à 1,  $N = 6$ ,  $d = 0.2$ ,  $\mu_1 = 7$ ,  $\mu_2 = 4$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\phi_1 = 0.3$ ,  $\phi_2 = 0, 7$



$\lambda$	$L_s$	$L_q$	$W_s$	$W_q$	$\mathbb{E}(\text{client servi})$
0.1	0.933977962	0.431967748	9.33977962	4.319677481	0.146387405
0.2	1.213010966	0.34877451	6.065054832	1.743872551	0.181817771
0.3	1.240585123	0.309719988	4.135283745	1.032399959	0.210161695
0.4	1.180298512	0.285826868	2.950746281	0.714567169	0.243151735
0.5	1.086840648	0.265819453	2.173681296	0.531638905	0.278733228
0.6	0.983377705	0.24701997	1.638962842	0.411699951	0.314391502
0.7	0.881352598	0.229088382	1.25907514	0.327269118	0.34835838
0.8	0.786437572	0.212222905	0.983046965	0.265278631	0.379619449
0.9	0.701064439	0.196642663	0.778960487	0.218491847	0.407736074
1	0.625821636	0.18246406	0.625821636	0.18246406	0.432651425

FIGURE 3.2 – variation de  $L_s$  et  $L_q$  par rapport à  $\lambda$ FIGURE 3.3 – variation de  $W_s$  et  $W_q$  par rapport à  $\lambda$ 

La figure (3.2) montre que, parallèlement à l'augmentation de  $\lambda$ , le nombre moyen de clients dans le système augmente, puis à partir de la valeur de  $\lambda = 0.4$  ; il commence à diminuer, tandis que la longueur de la file d'attente, le temps d'attente moyen dans la file et dans le système diminue contre l'augmentation de  $\lambda$  ; figure (3.3), en raison de l'abandon et du dérobade et enfin, le nombre moyen

FIGURE 3.4 –  $\mathbb{E}(\text{client servi})$  par rapport à  $\lambda$ 

de clients servis augmente avec l'augmentation de  $\lambda$ ; figure (3.4). Tous ces résultats concordent parfaitement avec notre intuition.

Maintenant, présentons la relation entre  $\delta$  (la probabilité de quitter la file d'attente sans recevoir de service) et différentes mesures de performance du système. Dans un premier temps, nous fixons le nombre maximum de clients dans le système  $N = 5$ ; le taux d'arrivée  $\lambda = 0.5$ ; le taux de service au serveur 1,  $\mu_1 = 7$ ; le taux de service au serveur 2,  $\mu_2 = 4$ ; la probabilité que le client quitte le système sans avoir retour  $\beta = 0.7$ ; le temps d'abandon du taux  $\eta = 0.1$ ; la probabilité que le client choisisse serveur 1,  $\phi_1 = 0.3$ ; la probabilité que le client choisisse le serveur 2,  $\phi_2 = 0.7$ : Puis nous faisons varier  $\delta$  de 0 à 1 par pas de 0.1.

Les résultats numériques sont résumés dans le tableau suivant

$\delta$	$L_s$	$L_q$	$W_s$	$W_q$	$\mathbb{E}(\text{client servi})$
0	0,135312293	0,132785988	0,270624587	0,265571976	1,158397488
0.1	0,1353097	0,132786683	0,2706194	0,265573366	1,158399427
0.2	0,135307114	0,132787376	0,270614228	0,265574752	1,158401363
0.3	0,135304535	0,132788068	0,270609069	0,265576136	1,158403294
0.4	0,135301962	0,132788758	0,270603924	0,265577516	1,158405222
0.5	0,135299397	0,132789446	0,270598793	0,265578892	1,158407146
0.6	0,135296838	0,132790133	0,270593676	0,265580265	1,158409066
0.7	0,135294286	0,132790818	0,270588572	0,265581635	1,158410982
0.8	0,135291741	0,132791501	0,270583481	0,265583002	1,158412894
0.9	0,135289202	0,132792182	0,270578404	0,265584365	1,158414803
1	0,13528667	0,132792862	0,270573341	0,265585725	1,158416708

Pour le deuxième résultat, pour chaque valeur de  $N = 5$ ;  $\lambda = 0.5$ ;  $\mu_1 = 7$ ;  $\mu_2 = 4$ ;  $\beta = 0.25$ ;  $\eta = 0.1$ ;  $\phi_1 = 0.3$ ;  $\phi_2 = 0.7$  sélectionné, nous faisons varier  $\delta$  de 0 à 1 par

pas de 0.1. Les résultats numériques sont résumés dans le tableau suivant :

$\delta$	$L_s$	$L_q$	$W_s$	$W_q$	$\mathbb{E}(\text{client servi})$
0	0,331603365	0,288830411	0,663206731	0,577660822	1,090550257
0.1	0,331480297	0,288859098	0,662960594	0,577718195	1,090644402
0.2	0,331358181	0,28888763	0,662716363	0,57777526	1,090737894
0.3	0,331237006	0,288916009	0,662474012	0,577832018	1,090830738
0.4	0,331116759	0,288944235	0,662233518	0,57788847	1,090922942
0.5	0,330997428	0,288972308	0,661994856	0,577944616	1,091014511
0.6	0,330879002	0,289000229	0,661758003	0,578000459	1,091105453
0.7	0,330761468	0,289027999	0,661522937	0,578055999	1,091195773
0.8	0,330644817	0,289055618	0,661289634	0,578111237	1,091285477
0.9	0,330529037	0,289083087	0,661058074	0,578166175	1,091374571
1	0,330414117	0,289110407	0,660828234	0,578220813	1,091463062

Ces deux tableaux montrent que les  $L_s$  et  $W_s$  diminuent avec l'augmentation de  $\delta$  ; tandis que les  $L_q$  et  $W_q$  augmentent en fonction de l'accroissement de  $\delta$  ; le nombre moyen de clients servis est en augmentation. Les résultats comparés sont présentés

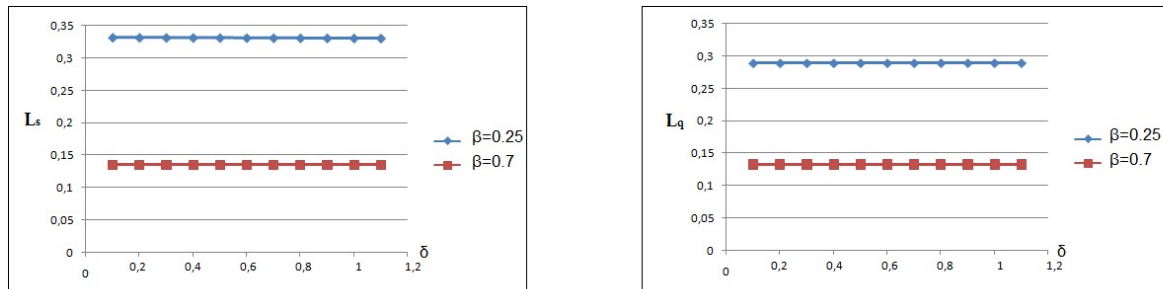
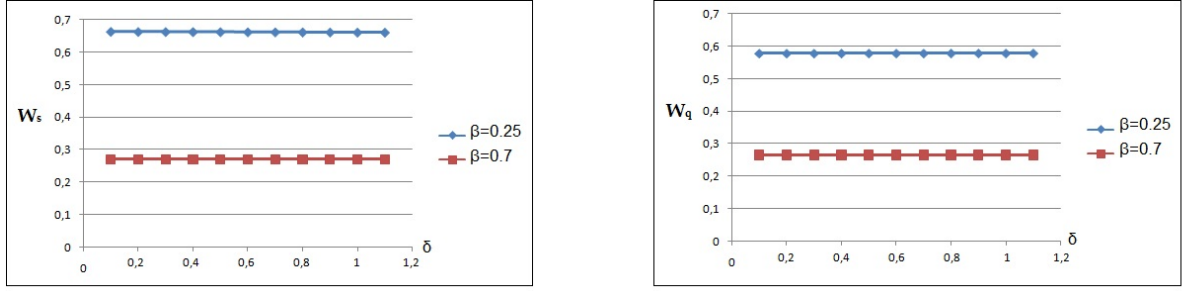
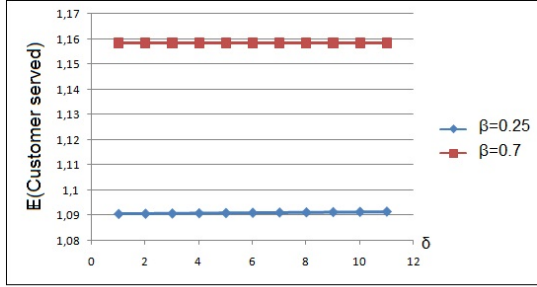


FIGURE 3.5 – variation de  $L_s$  et  $L_q$  par rapport à  $\delta$

dans les figures (3.5),(3.6),(3.7) qui montrent plus loin que lorsque La probabilité de non-feedback est grande,  $\beta = 0.7$  ; le nombre de clients dans le système, dans la file d'attente est inférieure à celle de  $\beta$  lorsque celui-ci est petit,  $\beta = 0.25$  ; et par conséquent le temps d'attente moyen dans le système, le temps d'attente moyen dans la file d'attente, dans le premier cas est inférieur au second, le nombre moyen de clients servis dans le premier cas est plus importante que dans le second. Ces résultats concordent parfaitement avec notre intuition.

Enfin, nous présentons l'effet de la probabilité de non-feedback  $\beta$  ; nous évaluons différentes performances de mesure à ses différentes valeurs alors que  $N = 7$  ;  $\lambda = 2$  ;  $\delta = 0.75$   $\mu_1 = 7$  ;  $\mu_2 = 4$  ;  $\eta = 0.1$  ;  $\phi_1 = 0.3$  ;  $\phi_2 = 0.7$ . Voir le tableau suivant :

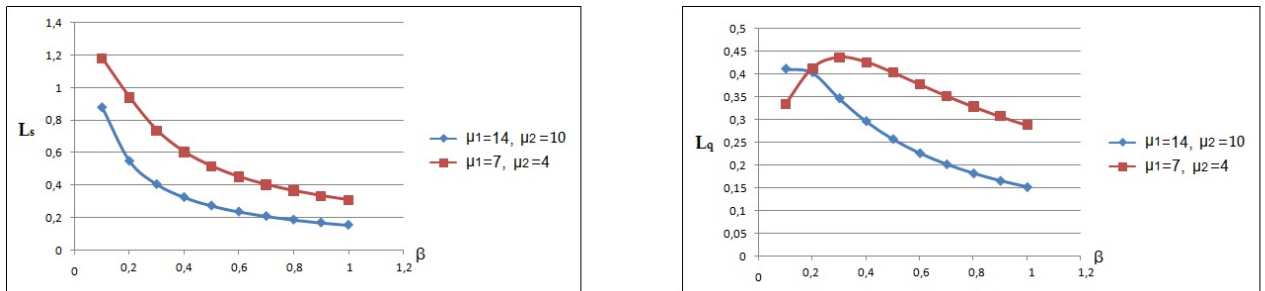
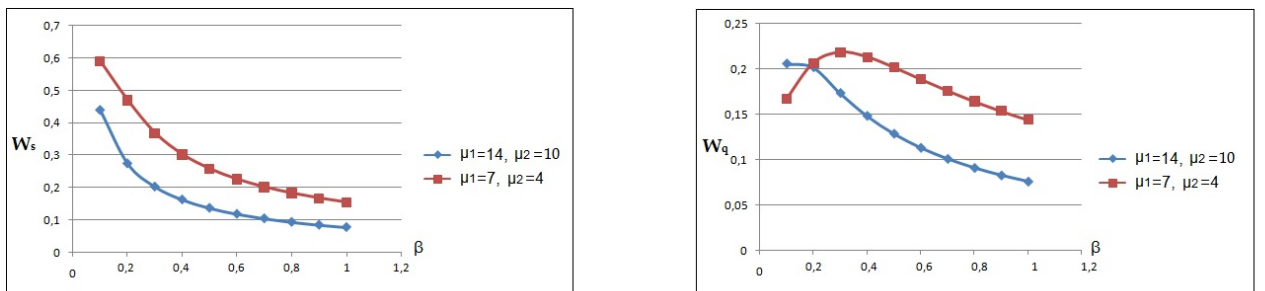
FIGURE 3.6 – variation de  $W_s$  et  $W_q$  par rapport à  $\delta$ FIGURE 3.7 –  $\mathbb{E}(\text{client servi})$  par rapport à  $\delta$ 

$\beta$	$L_s$	$L_q$	$W_s$	$W_q$	$\mathbb{E}(\text{client servi})$
0.1	1,181243839	0,334005347	0,59062192	0,16700267	1,88176221
0.2	0,940511222	0,413229209	0,47025561	0,2066146	2,90935318
0.3	0,737499147	0,436879606	0,36874957	0,2184398	3,52937514
0.4	0,604826516	0,426653359	0,30241326	0,21332668	3,87112936
0.5	0,515591814	0,403652243	0,25779591	0,20182612	4,06933007
0.6	0,451791792	0,377567405	0,2258959	0,1887837	4,1938374
0.7	0,403652144	0,352145624	0,20182607	0,17607281	4,27813706
0.8	0,365778891	0,32866691	0,18288945	0,16433345	4,33888292
0.9	0,335022606	0,307435757	0,1675113	0,15371788	4,38488782
1	0,309431653	0,288383991	0,15471583	0,144192	4,42112069

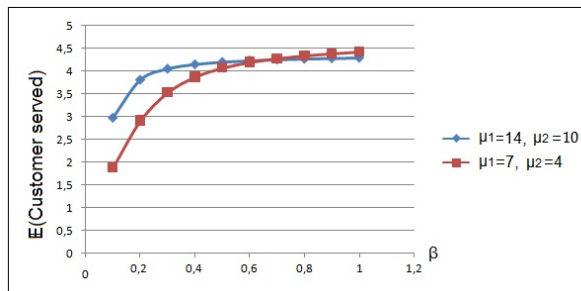
Maintenant, nous évaluons différentes performances de mesure à différentes valeurs de probabilité de non-feedback  $\beta$  ; tandis que  $N = 7$  ;  $\lambda = 2$  ;  $\delta = 0.75$   $\mu_1 = 14$  ;  $\mu_2 = 10$  ;  $\eta = 0.1$  ;  $\phi_1 = 0.3$  ;  $\phi_2 = 0.7$ . Les résultats numériques sont résumés dans le tableau suivant :

$\beta$	$L_s$	$L_q$	$W_s$	$W_q$	$\mathbb{E}(\text{client servi})$
0.1	0,877125577	0,411818314	0,43856279	0,20590916	2,98166869
0.2	0,547837429	0,403817466	0,27391871	0,20190873	3,81108064
0.3	0,404824653	0,34705907	0,20241233	0,17352953	4,05151848
0.4	0,32522401	0,296927802	0,162612	0,1484639	4,14885349
0.5	0,273399553	0,257559104	0,13669978	0,12877955	4,19974158
0.6	0,236487835	0,22675818	0,11824392	0,11337909	4,23111321
0.7	0,208663127	0,202268759	0,10433156	0,10113438	4,25262326
0.8	0,186850741	0,182427073	0,09342537	0,09121354	4,26845414
0.9	0,169250844	0,166064974	0,08462542	0,08303249	4,2806916
1	0,154729651	0,152359846	0,07736483	0,07617992	4,29049251

Les tableaux ci-dessus montrent l'effet de la probabilité de non-feedback  $\beta$  pour notre modèle avec les dérobades, les abandons et les feedbacks. Lorsque la probabilité  $\beta$  de non-feedbacks ou de retour au système augmente,  $L_s$  ;  $L_q$  ;  $W_s$  ;  $W_q$  diminue, tandis que  $\mathbb{E}(\text{client servi})$  augmente, ce qui correspond parfaitement à l'intuition. Les résultats comparés des deux tableaux ci-dessus sont présentés dans les figures suivantes. Les figures (3.8),(3.9),(3.10) donnent un résultat significatif pour notre

FIGURE 3.8 – variation de  $L_s$  et  $L_q$  par rapport à  $\beta$ FIGURE 3.9 – variation de  $W_s$  et  $W_q$  par rapport à  $\beta$ 

système. Lorsque les temps moyens de service sont faibles,  $\mu_1 = 14$  ;  $\mu_2 = 10$  le nombre de clients attendus dans le système, dans la file d'attente est inférieur à celui lorsque les temps de service moyens sont grands  $\mu_1 = 7$  ;  $\mu_2 = 4$  ; le temps d'attente moyen dans le système, dans la file d'attente dans le premier cas, est inférieur

FIGURE 3.10 –  $\mathbb{E}(\text{client servi})$  par rapport à  $\beta$ 

à celui dans le second, et enfin le nombre moyen de clients servis est important dans le premier cas que dans le second.

En conclusion, nous estimons que tous les chiffres indiquent que les résultats numériques sont raisonnables et efficaces pour approcher  $L_s$ ;  $L_q$ ;  $W_s$ ;  $W_q$ ; et  $\mathbb{E}(\text{Client Servi})$  pour toutes les valeurs de  $\lambda$ ;  $\mu_1$ ;  $\mu_2$ ;  $\delta$  et  $\beta$ .

# Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à un système de files d'attente avec deux serveurs hétérogènes, dérobade, abandon et feedback.

◊ *Le premier chapitre* est consacré à l'étude des processus stochastiques qui sont des outils importants dans l'analyse des différents systèmes dynamiques (réseaux de files d'attente, systèmes de communication et informatiques, biologiques, économiques...).

◊ *Le chapitre deux* est une étude détaillée pour les systèmes de files d'attente. Les modèles ( $M/M/1$ ,  $M/M/1/K$ ,  $M/M/c$ ,  $M/M/\infty$ ) sont donnés.

◊ Dans *le troisième chapitre* l'analyse d'un modèle de files d'attente de deux serveurs hétérogènes  $M/M/2/N$  (capacité du système  $N$  finie) avec dérobade, abandon et feedback est traitée. les équations des probabilités d'état stable sont développées, diverses mesures de performance du système ont été présentées. De plus, différents exemples numériques ont été réalisés afin de montrer comment les différents paramètres du modèle influencent sur le comportement du système.

# Bibliographie

- [1] Abou El-Ata, M. O. and Hariri, A. M. A. The  $M/M/c/N$  queue with balking and reneging. Computers and Operations Research. 19 (1992), No. 13 713-716.
- [2] Ancker, Jr., C. J. and Gafarian, A. V. Some queuing problems with balking and reneging : I. Operations Research. 11 (1963), No. 1, 88-100.
- [3] Ancker, Jr., C. J. and Gafarian, A. V. Some queuing problems with balking and reneging : II. Operations Research. 11 (1963), No. 6, 928-937.
- [4] Ayyapan, G., Muthu Ganapathi Subramanian, A. and Sekar,  $GM/M/1$  Retrial Queueing System with Loss and Feedback under Non-pre-emptive Priority Service by Matrix Geometric Method, Applied Mathematical Sciences.4,(2010), No. 48, 2379-2389.
- [5] D'Avignon, G.R. and Disney, R.L., Single Server Queue with State Dependent Feed- back,INFOR. 14 (1976), 71-85.
- [6] Haight, F. A. Queueing with balking. Biometrika. 44 (1957), 360-369.
- [7] Haight, F. A. Queueing with reneging. Metrika. 2 (1959) 186-197.
- [8] Kumar, R. and Sharma, S.K.  $M/M/1/N$  Queueing System with Retention of Reneged Customers, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research. 8(2012), 859-866.
- [9] Kumar, R. and Sharma,S.K. An  $M/M/1/N$  Queueing Model with Retention of reneged customers and Balking, American Journal of Operational Research. 2(2012), No. 1, 1-5.
- [10] Mahdy S. El-Paoumy and Hossam A. Nabwey, The Poissonian Queue with Balking Function, Reneging and two Heterogeneous Servers. International Journal of Basic & Applied Sciences IJBAS-IJENS. 11 (2011), No. 6, 149-152.
- [11] Robert, E. Reneging phenomenon of single channel queues. Mathematics of Operations Re- search. 4 (1979), No. 2, 162-178.
- [12] Santhakumaran, A. and Thangaraj, V. A Single Server Queue with Impatient and Feedback Customers,Information and Management Science. 11, (2000), No. 3, 71-79.
- [13] Sharma S. K and Kumar. R, A Markovian Feedback Queue with Retention of Reneged Customers and Balking. AMO-Advanced Modeling and Optimization. 14 (2012), No. 3, 681-688.



- [14] Takacs, L. A Single Server Queue with Feedback, The Bell System Tech. Journal. 42 (1963), 134-149.
- [15] Thangaraj, V. and Vanitha, S. On the Analysis of  $M/M/1$  Feedback Queue with Catastrophes using Continued Fractions, International Journal of Pure and Applied Mathematics. 53(2009), No. 1, 131-151.
- [16] Wang, K-H. and Chang, Y-C. Cost analysis of a finite  $M/M/R$  queueing system with balking, reneging and server breakdowns. Mathematical Methods of Operations Research 56 (2002), No.2, 169-180.
- [17] W.GRASSMANN, Modeling Markovien Queues and Similar Process, Department of Cumputer Science, University of Sakatchewan, 2000.
- [18] Kumar, R. and Sharma, S.K.  $M/M/1/N$  Queuing System with Retention of Reneged Customers, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research. 8(2012), 859-866