République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Sur les espaces homogènes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie différentielle

par

Benatia Djelloul[1]

Sous la direction de

Pr S. Ouakkas

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : bena95djalloul@gmail.com

DÉDICACES

.... Je dédie ce travail :

$\mathcal{A}$

Mes Parents
Pour tous leurs sacrifices, leurs soutiens,
Leurs encouragements et leurs amours qui ont été la raison de ma réussite.
Que dieu leur présente une bonne santé et une longue vie.

$\mathcal{A}$

Mes soeurs et Mes frères
Pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et les sources de mon stress
Avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans leur vie.

$\mathcal{A}$

Tous ceux que j'aime et qu'ils m'aiment.
Qu'ils trouvent dans ce travail l'expression de mes sentiments les plus affectueux.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à mon encadreur de ce mémoire, monsieur **S. O**uakkas, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je souhaite également remercier chaque membre de mon jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce mémoire en commençant par **B.S**aadli, **A.H**alimi et **K.D**jerfi.

Je tiens à remercier mes amis mathématiciens pour tant de bons moments. Enfin, je voudrais terminer ces remerciements par une pensée toute particulière à ma famille et à mes proches, pour leur soutien et leur affection.

TABLE DES MATIÈRES

INRODUCTION

Les groupes de Lie sont des structures importantes de la géométrie différentielle. Les notions de groupes de Lie et d'algèbres de Lie sont utilisées en physique quantique pour analyser les interactions. Il est important de noter que la théorie des groupes de Lie est un domaine très vaste qui recouvre de l'algèbre, aussi bien que du calcul différentiel ou de la topologie. Une autre structure qui possède une grande importance est la notion d'espaces homogènes. Par exemple, les espaces riemanniens symétriques de la géométrie différentielle sont des espaces homogènes pour le groupe de leurs isométries. Cela généralise les espaces euclidiens, les sphères euclidiennes, les espaces elliptiques et les espaces hyperboliques. Plus généralement, il y a les espaces symétriques qui sont des espaces homogènes pour leurs groupe des déplacements.En géométrie différentielle, parmi les espaces homogènes les plus importants, on retrouve les espaces symétriques et les variétés de drapeaux.

Ce mémoire rentre dans ce cadre dont l'intérêt s'est principalement porté dans une première partie à une introduction à la théorie des groupes et algèbres de Lie et dans une deuxième partie à l'introduction et l'étude des espaces homogènes. Le plan de ce mémoire est le suivant :
Dans le premier chapitre, on présente une introduction générale aux groupes et algèbre de Lie où on cite les notions générales liées à ces structures et cer-

tains types d'algèbres de Lie et on termine ce chapitre par la décomposition de Cartan d'un groupe semi simple.

Le deuxième chapitre de ce mémoire constitue la partie principale de ce travail, on commence par un petit rappel sur la topologie quotient et la définition de l'action d'un groupe de Lie. Ces deux notions nous permettent de définir les espaces homogènes en citant quelques exemples et en donnant les démonstrations de plusieurs résultats qui concernent les espaces homogènes et on termine par un cas particulier qui concerne les espaces homogènes réducteurs.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALISATION SUR GROUPES DE LIE, ALGÈBRES DE LIE

1.1 Groupes et Algèbres de Lie

1.1.1 Groupes de Lie

Definition 1.1.1.1. *Un groupe de Lie est un groupe muni d'une structure de variété différentielle compatible, c'est à dire que les applications*

$$\begin{aligned} m \;:\; & G \times G \longrightarrow G \\ & (x, y) \longmapsto xy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i \;:\; & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

sont différentiables.

Exemples.

- Le quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe distingué et fermé est un groupe de Lie.
- Le groupe des difféomorphismes d'une variété préservant certaines structures. Par exemple le groupe des isométries d'une variété riemannienne.

Definition 1.1.1.2. ***(Sous-groupe de Lie)*** *Soit G un groupe de Lie. Un sous-groupe de Lie H de G est un sous-groupe munie d'une topologie et d'une structure différentiable qui en font un groupe de Lie et tel que l'injection canonique $\imath : H \hookrightarrow G$ soit une immersion de G.*

Théorème 1.1.1.1. *(Cartan, Von-Neumann) Tout sous-groupe fermé H d'un groupe de Lie G est un sous-groupe de Lie. Plus précisément, il existe une structure de groupe de Lie sur H (nécessairement unique) qui fait de H une sous-variété de G(voir [5]).*

1.1.2 Algèbre de Lie

Definition 1.1.2.1. *Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire, appelée crochet de Lie*

$$\begin{aligned} [,] \ : \ & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ & (X, Y) \longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

vérifiant :

1. *Antisymétrique :*$[X, Y] = -[X, Y]$.
2. *Identité de Jacobi* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Pour $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Exemples.

(1) Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$, muni du crochet de Lie nul, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, dite abélienne (ou commutative).

(2) Si A est une algèbre (associative) sur $\mathbb{K}$, alors l'espace vectoriel A, muni du crochet

$$[x, y] = xy - yx,$$

est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. C'est par exemple le cas, pour tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$, de l'algèbre $End(V)$ des endomorphismes de V , et nous noterons $\mathfrak{gl}(V)$, l'algèbre de Lie obtenue. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, c'est aussi le cas de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, et nous noterons $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, l'algèbre de Lie obtenue. Si V est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, et $\mathcal{B}$ une base de V , alors l'application, qui à un endomorphisme de V associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Une représentation(respectivement représentation de dimension finie) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, où V est un espace vectoriel (respectivement espace vectoriel de dimension finie) sur $\mathbb{K}$.

1.1.3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soient G un groupe de Lie et T_eG l'espace tangent à G en son élément neutre e. Notons $Ad : G \longrightarrow GL(T_eG)$ l'application

$$g \mapsto Ad\, g = T_e i_g : T_eG \longrightarrow T_eG$$

qui à $g \in G$ associe l'application tangente en e de la conjugaison $i_g : h \mapsto ghg^{-1}$. C'est une représentation de groupes de Lie, appelé la représentation adjointe de G. Notons

$$ad = T_eAd : T_eG \longrightarrow End(T_eG)$$

l'application tangente en e de Ad. Pour tous les X et Y dans T_eG, posons

$$[X, Y] = ad\, X(Y).$$

Notons que $[\cdot, \cdot] : T_eG \times T_eG \longrightarrow T_eG$ est bilinéaire, par la linéarité des applications tangentes en un point.

Exemple 1. *Pour les groupes donnés en exemples, nous donnons leur algèbre de Lie :*

$$GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$SL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), tr\, A = 0\}$$

$$O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^t + A = 0\}$$

1.1.4 Représentation adjointe et forme de Killing.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application $ad\,X$: $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ définie par

$$ad\,X(Y) = [X, Y]$$

est une dérivation d'algèbres de Lie (parfois appelée dérivation intérieure), car pour tous les Y et Z dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$ad\,X([Y, Z]) = [ad\,X(Y), Z] + [Y, ad\,X(Z)],$$

ce qui est une simple réécriture de l'identité de Jacobi. L'application ad : $g \longrightarrow Der(\mathfrak{g})$ définie par $X \mapsto ad\,X$ est un morphisme d'algèbres de Lie, car pour tous les X et Y dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$ad[X, Y](Z) = ad\,X \circ ad\,Y(Z) \circ ad\,Y \circ ad\,X(Z) = [ad\,X, ad\,Y](Z),$$

ce qui est aussi une simple réécriture de l'identité de Jacobi (le crochet de Lie à droite est celui de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$). La représentation d'algèbres de Lie

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

s'appelle la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Elle est à valeur dans $Der(\mathfrak{g})$. Le noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est appelé le centre de $\mathfrak{g}$, et noté

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g},\ [X, Y] = 0\}.$$

En particulier, toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sans centre se plonge dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Par exemple, puisque toute matrice $n \times n$ qui commute avec toute matrice diagonale est un multiple de la matrice identité I_n, nous avons

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(K)) = KI_n.$$

Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est l'application $B = B_{\mathfrak{g}}$: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ définie par

$$B(x, y) = tr(ad\,x \circ ad\,y).$$

Par les propriétés de la trace des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, et par linéarité de la représentation adjointe, la forme de

Killing est bilinéaire et symétrique.
Elle est invariante par tout automorphisme d'algèbres de Lie : si $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, alors, pour tous les x et y dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$B_{\mathfrak{g}'}(f(x), f(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y),$$

car l'égalité $[f(x), f(y)] = f([x, y])$ implique que $ad(f(x)) = f \circ (adx) \circ f^{-1}$, et le résultat découle des propriétés de la trace.
Elle est de plus ad-alternée (une terminologie fréquente mais peu mnémotechnique est « invariante ») c'est-à-dire alternée pour les endomorphismes $ad\, x$: pour tous les x,y,$z \in \mathfrak{g}$,

$$B(ad\, x(y), z) = -B(y, ad\, x(z)).$$

En effet, en appliquant deux fois l'identité de Jacobi,

$$\begin{aligned} B([x, y], z) &= tr((ad\, x \circ ad\, y - ad\, y \circ ad\, x) \circ ad\, z) \\ &= tr(ad\, y \circ ad\, z \circ ad\, x)?tr(ad\, y \circ ad\, x \circ ad\, z) = B(y, [z, x]) =?B(y, [x, z]). \end{aligned}$$

Par exemple, la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(K)$ est

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}_n(K), B(X, Y) = 2ntr(XY) - 2tr\, X\, tr\, Y. \tag{1.1}$$

En effet, soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $M_n(K)$ (où les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf le coefficient $i-j$ qui vaut 1). Pour tout $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{gl}_n(K)$, nous avons

$$adX(E_{i,j}) = \sum_{1 \leq k \leq n} x_{k,i} E_{k,j} - \sum_{1 \leq k \leq n} x_{j,k} E_{i,k}.$$

Un petit calcul montre alors le résultat.

1.1.5 Translation à gauche et à droite

Soit $(G, \cdot)$ un groupe de Lie, on définit les deux applications de classe C^∞.

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto L_g = g \cdot x, \end{aligned}$$

est la translation à gauche sur le groupe.

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto R_g = x \cdot g, \end{aligned}$$

est la translation à droite sur le groupe.
Ainsi que leurs applications réciproques $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$, par suite R_g et L_g sont des difféomorphismes de G dans G, et ils commutent entre eux :

$$L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g.$$

Les propriétés des applications tangentes aux difféomorphismes impliquent que, pour chaque $x \in G$:
TL_g (resp. TR_g) induit un isomorphisme linéaire de T_xG sur $T_{g \cdot x}G$ (resp. $T_{g \cdot x}G$).

1.1.6 Champs de vecteurs invariants.

Si X est un champ de vecteurs sur G, nous dirons que
X est invariant à gauche si $\forall g \in G$, $\forall x \in G$, $d_xL_g(X_x) = X_{g.a}$ où pour mémoire nous rappelons que nous avons $d_xL_g : d_xG \longrightarrow d_{g.a}G$. Nous pouvons encore écrit cette condition sous la forme

$$(L_g)_*X = X$$

pour tout $g \in G$.

$$\mathfrak{L}(G) = \{X \in \mathfrak{X}/(L_g)_*X = X, \forall g \in G\}$$

L'ensemble des champs de vecteurs invariant à gauche est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.1.7 Flot local d'un champ de vecteurs.

Soit X un champ de vecteurs C^k sur M, avec $k \geqslant 1$.

Théorème 1.1.7.1. *Pour tout x_0 dans M, il existe un triplet (U, I, ϕ) formé d'un voisinage ouvert U de x_0, d'un intervalle ouvert I contenant 0, et d'une application $\phi : I \times U \longrightarrow M$ de classe C^k, notée $(t, x) \longrightarrow \phi_t(x)$, vérifiant, pour tous s dans I et x dans U,*

- $\frac{d\phi_t(x)}{dt}|_{t=s} = X(\phi_s(x))$,
- $\phi_0(x) = x$,

Si $(U_\prime, I', \phi')$ est un autre tel triplet, alors ϕ et ϕ' coïncident sur $(I \times U) \cap (I' \times U')$. De plus, pour tous t, s dans I et x dans U,

- *Si $\phi_s(x) \in U$ et $t + s \in I$, alors $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$,*
- *ϕ_t est un C^k-difféomorphisme local,*
- *ce C^k-difféomorphisme local préserve le champ de vecteurs X, au sens que pour tout t dans I et x dans U,*

$$T_x\phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x)).$$

1.1.8 Application exponentielle

Nous allons maintenant construire une application entre $\mathfrak{g}$ et G. Cette application est un pont entre les deux structures, et permet de trouver certaines propriétés de G connaissant $\mathfrak{g}$. Pour cela, soit $X \in \mathfrak{g}$ considéré comme champ de vecteurs invariant à gauche. Il définit donc une équation différentielle, dont le flot est noté $\phi_X(t, y)$. C'est à dire que :

$$\frac{d\phi_X(t, y)}{dt} = X_{\phi_X(t,y)}$$

et

$$\phi_X(0, y) = y$$

Definition 1.1.8.1. *L'application entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie G et le groupe de Lie lui même est appelée application exponentielle définie par :*

$$\begin{aligned} \exp \quad : \quad & \mathfrak{g} \longrightarrow G \\ & X \longmapsto \phi_X(1, e) \end{aligned}$$

Par construction, cette application vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

1) $\exp(tX) = \phi_X(t, e)$.

2) $\phi_X(t, y) = y \exp(tX)$.

3) $\frac{d\exp(tX)}{dt} = X_{\exp(tX)}$.

4) $\exp(0) = e$.

Definition 1.1.8.2. *Soit X un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'exponentielle de X désigne la somme de la série (normalement convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_n(K)$)*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}$$

Donnons quelques propriétés de l'exponentielle.

Proposition 1.1.8.1. *Quels que soient X et Y dans $\mathcal{M}_n(K)$:*

(i) Si X et Y commutent $\exp X \exp Y = \exp(X+Y)$.

(ii) L'exponentielle est à valeurs dans $GL(n,\mathbb{K})$ et

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X).$$

(iii) Quels que soient t, s dans $\mathbb{K}$,

$$\exp(sX)\ \exp(tX)) = \exp((s+t)X)$$

(iv) L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{K}) \\ t & \longrightarrow & \exp(tX) \end{array}$$

est l'unique solution différentiable de l'équation différentielle du premier ordre

$$a'(t) = X\, a(t)$$

avec la condition initiale $a(0) = I_n$.

(v) Pour tout $g \in GL(n,\mathbb{K})$, $g \exp X\, g^{-1} = \exp(gXg^{-1})$.

Remarque 1.1.8.1. *On peut reformuler (iii) en disant que $t \longrightarrow \exp(tX)$ est un morphisme de groupes (continu) de $\mathbb{R}$ dans $GL(n,\mathbb{K})$. On appelle un tel morphisme un sous-groupe à un paramètre de $GL(n,\mathbb{K})$.*

Sous-groupes continus à un paramètre

Proposition 1.1.8.0.1. *Soient G un groupe de Lie et $\gamma : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$ un homomorphisme continu. Alors γ est différentiable (et donc γ est un sous-groupe à un paramètre).*

Démonstration 1. *Soit $U \subset \mathfrak{g}$ un voisinage ouvert de 0 tel que l'exponentielle induise un difféomorphisme $U \xrightarrow{\sim} V = \exp(U)$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant O tel que $\gamma(I) \subset V$. Définissons $\varphi : I \longrightarrow U$ par $\exp(\varphi(t)) = \gamma(t)$. On veut montrer que φ est linéaire dans un voisinage de 0. Pour cela, on considère un $t_0 \in I$, $t_0 > 0$ et on calcule :*

$$\exp(2\varphi(\frac{t_0}{2})) = \exp(\varphi(\frac{t_0}{2}))^2 = \gamma(\frac{t_0}{2})^2 = \gamma(t_0) = \exp(\varphi(t_0)).$$

Ainsi $\varphi(\frac{t_0}{2}) = \frac{1}{2}\varphi(t_0)$. On en déduit alors que $\varphi(\frac{k}{2^n}t_0) = \frac{k}{2^n}\varphi(t_0)$. Comme γ est continue, φ l'est également et par un argument de densité, on voit que pour tout $t \in [0, t_0]$, $\varphi(t) = tX$ avec $X = \frac{\varphi(t_0)}{t_0} \in \mathfrak{g}$. Comme $[0, t_0]$ engendre $(\mathbb{R}, +)$, on trouve $\gamma(t) = \exp(tX)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.8.2. *L'application exponentielle*

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

est de classe C^∞, sa différentielle à l'origine est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.1.9 Idéaux d'algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps commutatif K. Un idéal de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel I de $\mathfrak{g}$ tel que pour tous les $x \in I$ et $y \in \mathfrak{g}$, nous ayons $[x, y] \in I$. L'algèbre de Lie quotient de $\mathfrak{g}$ par un idéal I est l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/I$ muni du crochet de Lie $[x + I, y + I] = [x, y] + I$ pour tous les $x, y \in \mathfrak{g}$.

Un idéal est en particulier une sous-algèbre de Lie. Si I est un idéal de $\mathfrak{g}$, la projection canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/I$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Par exemple, le noyau $Ker\, f$ d'un morphisme f d'algèbres de Lie est un idéal, et l'algèbre de Lie image de f est isomorphe à l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/Ker\, f$.

Le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est donc un idéal de $\mathfrak{g}$. Toute intersection et toute somme vectorielle d'idéaux de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En particulier, pour toute partie A de $\mathfrak{g}$, l'intersection de tous les idéaux de $\mathfrak{g}$ contenant A est le plus petit idéal contenant A, appelé l'idéal engendré par A. Si I et J sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, alors l'inclusion de J dans $I+J$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $J/(I\cap J)$ et $(I+J)/I$.
Une partie génératrice de $\mathfrak{g}$ est une partie A de $\mathfrak{g}$ telle que la plus petite sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant A soit $\mathfrak{g}$. Une présentation de $\mathfrak{g}$ est un couple (S,R), où S est une partie génératrice de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et R est une partie de l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}(S)$ sur S, tel que l'unique morphisme de $\mathfrak{L}(S)$ dans $\mathfrak{g}$ valant l'identité sur S induise par passage au quotient un isomorphisme de l'algèbre de Lie quotient de $\mathfrak{L}(S)$ par l'idéal engendré par R à valeurs dans $\mathfrak{g}$.
Si (S,R) est une présentation de $\mathfrak{g}$, nous dirons aussi que $\mathfrak{g}$ est définie par générateurs les éléments de S et relations les éléments de R.

1.1.10 Algèbres de Lie nilpotentes

Définition 1.1.10.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. On pose pour tout entier $j\geqslant 0$, $\mathfrak{g}_{(j+1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_j]$, avec $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}_0\supseteq \}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}_j\supseteq\cdots$ est appelée la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$.*

Définition 1.1.10.2. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier $k\geqslant 1$ tel que $\mathfrak{g}_k=\{0\}$. Si $\mathfrak{g}_{k-1}\neq\{0\}$ et $\mathfrak{g}_k=0$, on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente de rang k.*

1.1.11 Algèbres de Lie résolubles

Définition 1.1.11.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$. On pose pour tout $j\geqslant 0$, $\mathfrak{g}^{(j+1)}=[\mathfrak{g}^{(j)},\mathfrak{g}^{(j)}]$, avec $\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}$. La suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}^0\supseteq\mathfrak{g}^1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}^{(j)}\supseteq\cdots$ est appelée la suite dérivée de $\mathfrak{g}$.*

Définition 1.1.11.2. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est résoluble si la suite des commutateurs s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier $k\geqslant 1$ tel que $\mathfrak{g}^{(k)}=\{0\}$ et $\mathfrak{g}^{(k-1)}\neq 0$.*

Exemple 2. - *Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble, puisque* $\mathfrak{g}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}_{(j)}$ *pour tout* j.
- *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieurs (ou inférieurs) est résolubles (et nilpotente si tous les termes diagonaux sont nuls).*

1.1.12 Algèbres de Lie simples et semi-simples

La notion d ?algèbre de Lie semi simple est liée à la notion de radical :

Définition 1.1.12.1. *Le radical d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est le plus grand idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$. *On notera* $rad(\mathfrak{g})$ *ce radical.*

Définition 1.1.12.2. *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est dite semi simple si son radical est réduit à* $\{0\}$.
Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *est dite simple si* $\mathfrak{g}$ *n'est pas commutative et ses seuls idéaux sont* $\{0\}$ *et* $\mathfrak{g}$.

Définition 1.1.12.3. *Soit* G *un groupe de Lie connexe. On dit que* G *est semi-simple si son algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple. On dit que* G *est quasi-simple si* $\mathfrak{g}$ *est simple.*

1.1.13 Décomposition de Cartan d'un groupe semi simple

Soient $\mathfrak{g}$ algèbre semi simple, B forme de Killing et θ involution de Cartan (i.e θ automorphisme de $\mathfrak{g}$ avec $\theta^2 = I$ et $B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta(Y))$ est définie positive). Comme $\theta^2 = I$ donc on à deux valeurs propre $(+1)$ et (-1) de θ. Soient sous algèbres $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{p}$ les espaces propres associées a $+1$ et -1 respectivement on a la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ est

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$$

avec

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subseteq \mathfrak{l}$$

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$$

et

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{l}.$$

Remarque 1.1.13.1. *La forme de Killing B est définie positive en $\mathfrak{p}$, et définie négative en $\mathfrak{l}$.*

Exemple 3. *Pour $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ on a $\theta(X) = -X^t$ est $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{p}$ le sous espace des matrices symétriques.*

CHAPITRE 2

ESPACES HOMOGÈNES

2.1 Rappel sur la topologie quotient

2.1.1 La topologie quotient.

Passons à présent à la seconde construction, en commençant à nouveau par de rapides rappels de théorie des ensembles.
Une relation sur un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{R} \subset X \times X$. On note habituellement l'assertion $(x, x') \in \mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}x'$. Comme vous le savez, une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est une relation d'équivalence si :

(i) $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout $x \in X$, $x\mathcal{R}x$.

(ii) $\mathcal{R}$ est symétrique : pour tous $x, x' \in X$, si $x\mathcal{R}x'$ alors $x'\mathcal{R}x$.

(iii) $\mathcal{R}$ est transitive : pour tous $x, x', x'' \in X$, si $x\mathcal{R}x'$ et $x'\mathcal{R}x''$, alors $x\mathcal{R}x''$.

Pour alléger la notation, une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est souvent notée par le symbole $\backsim$. Étant donné $x \in X$, on note habituellement $\overline{x}$ le sous-ensemble de X défini par

$$\overline{x} := \{x' \in X, x \backsim x'\},$$

appelé la classe d'équivalence de x. Notons que par réflexivité, x appartient à sa classe d'équivalence. De plus, par symétrie et transitivité, deux classes d'équivalence $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ sont soit identiques (si $x \backsim x'$), soit disjointes (sinon).

Ainsi, les classes d'équivalence forment une partition de X, c'est-à-dire que X est l'union disjointe de ces classes. Finalement, on note $X/\backsim$ l'ensemble de ces classes d'équivalence, appelée ensemble quotient, et

$$\pi : X \longrightarrow X/\backsim$$

la projection de $x \in X$ sur sa classe $\overline{x}$.
Rappelons encore que si une application $f : X \longrightarrow Y$ vérifie $f(x) = f(x')$ pour tout $x \backsim x' \in X$, alors il existe une unique application $g : X/\backsim \longrightarrow Y$ telle que $f = g \circ \pi$: on dit que f passe au quotient. Cette application g a même image que f, et est injective si et seulement si $f(x) = f(x') \Rightarrow x \backsim x'$. En particulier, toute application $f : X \longrightarrow Y$ induit une bijection $g : X/\backsim \longrightarrow f(X)$, où la relation d'équivalence sur X est donnée par $x \backsim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.

Exemple de relations d'équivalence.

Considérons l'ensemble $X = \mathbb{R}^2$ muni de la relation d'équivalence suivante : $(x_1, x_2) \backsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Les classes d'équivalence correspondantes sont les cercles centrés en l'origine, ainsi que l'origine elle même. La projection π envoie un élément $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sur le cercle de rayon $\|x\|$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|$ passe au quotient et induit une bijection $g : \mathbb{R}^2/\backsim \longrightarrow [0, \infty)$.

Supposons maintenant que X est un espace topologique. Comment définir une topologie sur le quotient $X/\backsim$? Cette fois-ci, il y a une unique réponse naturelle, que voici : en posant

$$U \subset X/\backsim \ \textit{est ouvert} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset X \ \textit{est ouvert},$$

on définit une topologie sur $X/\backsim$ appelée <u>la topologie quotient</u>. L'espace topologique ainsi obtenu est appelé <u>l'espace quotient</u>.

Remarques.

1. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une topologie, la plus fine sur l'ensemble quotient telle que π soit continue.

2. Soient Y un espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application qui passe au quotient, induisant $g : X/\backsim \longrightarrow Y$ telle que $f = g \circ \pi$. Alors, f est continue si et seulement si g est continue.
   En effet, si g est continue, alors $f = g \circ \pi$ l'est aussi puisque π est continue pour la topologie quotient. Réciproquement, si $U \subset Y$ est un ouvert, alors $\pi^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert puisque f est continue ; par définition de la topologie quotient, cela signifie que $g^{-1}(U) \subset X/\backsim$ est ouvert, et donc que g est continue.

On a ainsi démontré l'énoncé suivant :

> Toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ induit une bijection continue $g : X/\backsim \longrightarrow f(X)$, où la relation d'équivalence sur X est donnée par
> $$x \backsim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

C'est une sorte d'analogue topologique du premier théorème d'isomorphisme en théorie des groupes : tout homomorphisme de groupes $f; G \longrightarrow G'$ induit un isomorphisme de groupes $g : G/Ker(f) \longrightarrow f(G)$. Mais rappelons-le encore une fois, si en théorie des groupes, un homomorphisme bijectif est automatiquement un isomorphisme, ce n'est pas le cas en topologie : une application continue bijective n'est pas toujours un homéomorphisme !

Autre façon :
Soit G un groupe et H un sous-groupe. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie sur G par :

$$\forall x, y \in G, \ (x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H)$$

La classe $\bar{x}$ d'un $x \in G$ est le sous-ensemble de G suivant :

$$\bar{x} = xH = \{xy / y \in H\}$$

L'ensemble de ces classes d'équivalences est l'ensemble noté G/H. La surjection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ est l'application définie par : $\pi(x) = \bar{x}$. On définit une topologie sur G/H en décrétant qu'une partie U est un ouvert de G/H si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de G. C'est la topologie quotient sur G/H.

proposition

- La surjection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ est continue et ouverte.
- G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G.

Démonstration

▶ La continuité de q découle immédiatement de la définition de la topologie quotient. Soit maintenant O un ouvert de G, on a

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = OH = \bigcup_{b \in H} Ob$$

Ce qui montre que π est ouverte.

▶ Si G/H est séparé alors le singleton $\{\bar{e}\}$ est un fermé de G/H, ce qui conduit à $H = \pi^{-1}\{\bar{e}\}$ est un fermé de G.
Réciproquement, Soit $x, y \in G$ tels que $xH \neq yH$. On a donc $x^{-1}y \in G/H$ qui est un ouvert de G. Par continuité de l'application $f : (a; b) \longrightarrow ax^{-1}yb$ de $G \times G$ dans G au point (e, e), on peut choisir V un voisinage ouvert symétrique ($V^{-1} = V$) de e tel que $f(V; V) \cap H = \emptyset$. Il en résulte alors que les deux ensembles xVH et yVH sont disjoints, et puisqu'en plus ce sont des ouverts saturés et que la projection π est une application ouverte, on obtient que $\pi(xVH)$ et $\pi(yVH)$ sont des voisinages ouverts disjoints respectivement de $\pi(x)$ et de $\pi(y)$.

Exemple.

- Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à un cercle.

  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est séparé (puisque $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$). La projection canonique $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est définie par $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$. En utilisant la partie entière d'un nombre réel, on obtient que $\pi(\mathbb{R}) = q([0, 1])$ ce qui implique que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact. Considérons maintenant l'application $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$ définie par $h(\bar{x}) = e^{i2\pi x}$. Il est clair que h est bijective et continue, donc c'est un homéomorphisme puisque $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact.

2.2 Actions de groupes de Lie.

Soit M une variété différentiable, notons la difféomorphisme de M par $Diff(M)$ et $(Diff(M)), \circ)$ est un groupe des C^∞-difféomorphismes.

Définition 2.2.1. *Une action de G sur M est un homomorphisme de groupes $\rho : G \longrightarrow Diff(M)$. Autrement dit, pour tout $g \in G$, $\rho(g) : M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme tel que*

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$$

L'action ρ de G sur M est C^∞ si l'application évaluation :

$$\begin{aligned} \phi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, m) &\longmapsto \rho(g)(m) \end{aligned}$$

est C^∞. On note $\rho(g)(m)$ par $g \cdot m$. On dira que g agit ou opère sur M.

Remarque 2.2.1. *Ce que nous venons de définir est une action à gauche. On peut définir une action à droite comme étant un anti-homomorphisme $\hat{\rho} : G \longrightarrow Diff(M)$, ce qui se traduit par :*

$$\hat{\rho}(g_1 g_2) = \hat{\rho}(g_1) \circ \hat{\rho}(g_2)$$

Par composition avec l'inversion du groupe $g \longmapsto g^{-1}$, on peut passer d'une action à droite à une action à gauche et réciproquement.

Exemples :

1 Tout groupe sous-groupe de $GL(\mathbb{R}^n)$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par des transformations linéaires.

2 Le groupe des rotations $SO(n+1)$ opère sur la sphère $\mathbb{S}^n$

3 La donnée d'un champ de vecteurs sur une variété compacte équivaut à la donnée d'une

4 La donnée d'un champ de vecteurs sur une variété compacte équivaut à la donnée d'une action (différentiable) de $\mathbb{R}$ sur M.

5 Tout groupe de Lie G opère sur lui même à gauche, à droite et par conjugaison $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$.

6 Si H est un sous-groupe fermé de G, alors l'action homogène de G sur G/H est l'action différentiable : $(g, aH) \mapsto gaH$.

Définition 2.2.2. ***(Orbites et groupes d'isotropies)*** *Soit $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ une action différentiable d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable M.*

1. *Pour tout $m \in M$, l'orbite de l'action en m est le sous-ensemble de M :*
$$G \cdot m := \{g \cdot m / g \in G\}$$
2. *Le groupe d'isotropie en m est :*
$$G_m := \{g \in G / g.x = x\}$$
C'est un sous-groupe de G.

Exemple 4. *Les rotations autour de l'axe des z engendrent une action du cercle $\mathbb{S}^1$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$. Les orbites sont des points ou des cercles.*

Exemple 5. *Considérons l'action adjointe du groupe unitaire $G = U(n)$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = u(n)$ des matrices anti-hermitiennes. Toute orbite rencontre Σ l'ensemble des matrices diagonales $Diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ avec $\alpha_k \in i\mathbb{R}$. Si par exemple m désigne une matrice diagonale où toutes les valeurs propres sont distinctes, alors on peut montrer que le groupe d'isotropie G_m s'identifie à $(\mathbb{S}^1)^n$ et donc l'orbite de m s'identifie au quotient $U(n)/(\mathbb{S}^1)^n$. Pour tout $m \in M$, l'application évaluation $g \mapsto g \cdot m$ induit une bijection de G/G_m sur l'orbite $G \cdot m$.*

Définition 2.2.3. ***(L'espace des orbites)*** *Soit $\rho : G \longrightarrow Diff(M)$ une action. Pour $m, m' \in M$, la relation d'appartenance à la même orbite est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalences sont les orbites $G \cdot m$. L'espace des orbites M/G est l'ensemble*
$$M/G := \{G \cdot m / m \in M\}$$
La surjection canonique
$$\pi : M \longrightarrow M/G, \quad m \mapsto G \cdot m$$

permet de munir M/G de la topologie quotient. L'action sera dite transitive s'il n'y a qu'une seule orbite, le quotient M/G est un point.

Théorème 2.2.1. *Soit G un groupe topologique localement compact et $\rho : G \longrightarrow Diff(M)$ une action effective. Alors G est un groupe de Lie et l'action sur M est différentiable.*

Exemple 6. *Soit α un nombre irrationnel et considérons l'action de $\mathbb{R}$ sur le tore $S^1 \times S^1$ donnée par $t \cdot (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = (e^{i(t+\theta_1)}, e^{i(\alpha t+\theta_2)})$. Les orbites sont denses et l'espace des orbites n'est pas séparé.*

2.2.1 Orbites comme sous-variétés.

Soit $\rho : G \longrightarrow Diff(M)$ une action différentiable et $m \in M$. L'application évaluation

$$\rho_m : G \to M, \quad \rho_m(g) = g \cdot m$$

est différentiable (comme composé des application $g \mapsto (g, m)$ et $(g, m) \mapsto g \cdot m$).

Théorème 2.2.2.
1. *Le groupe d'isotropie G_m est un sous-groupe de Lie de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_m = ker T_e\rho_m.$.*
2. *L'orbite $G \cdot m$ est une sous-variété immergé.*
3. *Si l'action est transitive, l'application $gG_m \mapsto g.m$ est un difféomorphisme G-équivariant de l'espace homogène G/G_m sur M.*

Démonstration 2. *1 . Le groupe d'isotropie $G_m = \rho_m^{-1}\{m\}$ est un sous fermé de G, c'est donc un sous-groupe de Lie . Son algèbre de Lie $Lie(G_m)$ s'identifie alors à la sous-algèbre de Lie*

$$\mathfrak{g}_m := \{u \in \mathfrak{g}/exp_G(tu) \cdot m = m, pour\, tout\, t \in \mathbb{R}\}$$

Il en résulte que pour tout $u \in \mathfrak{g}_m, \rho_m(exp_G(tu)) = m$; en dérivant en $t = 0$, on obtient $T_e\rho_m(u) = 0$. On a ainsi montré l'inclusion $\mathfrak{g}_m \subset ker T_e\varphi_m$. Réciproquement, soit $u \in ker T_e\rho_m$. La courbe $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow M$ donnée par $\beta(t) = exp_G(tu) \cdot m$, satisfait :

$$\beta^{'}(t) = T_m l_{exp(tu)} \circ T_e \rho_m(u) = T_m l_{exp(tu)}(0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Il en résulte que $exp_G(tu) \cdot m = m$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'où $u \in \mathfrak{g}_m$.

2. *L'application $\rho_m : G \longrightarrow M$ se factorise en une application différentiable :*

$$\overline{\rho_m} : G/G_m \longrightarrow M, \ \ \textit{telle que} \ \ \overline{\rho_m} \circ \pi = \rho_m$$

qui est clairement injective avec image l'orbite $G \cdot m$. Nous allons montrer que les applications linéaires tangentes :

$$T_{\overline{a}}\overline{\rho_m} : T_{\overline{a}}(G/G_m) \to T_{a \cdot m}M, \quad \overline{a} \in G/G_m$$

sont injectives. Puisque l'action homogène de G sur G/G_m est transitive et que l'application $\overline{\rho_m}$ est G-équivariante, il suffit de le montrer pour le cas $\overline{a} = \overline{e}$. Soit alors $v \in T_e(G/G_m)$ tel que $T_e\bar{\rho_m}(v) = 0$, par surjectivité de $T_e\pi$ on peut choisir $u \in \mathfrak{g}$ tel que $T_e\pi(u) = v$. Il en résulte que $T_{\overline{e}}\overline{\rho_m} \circ T_e\pi(u) = 0$, donc $T_e\rho_m(u) = 0$. Et par suite $u \in kerT_e\rho_m = \mathfrak{g}_m$ et $v = T_e\pi(u) = 0$.

3. *L'action étant transitive, l'application différentiable $\overline{\rho_m} : G/G_m \to M$ alors une immersion bijective. C'est alors un difféomorphisme. En effet, d'après le théorème de Sard, il existe un point $a \in G/G_m$ tel que*

$$T_{\overline{a}}\overline{\rho_m} : T_{\overline{a}}(G/G_m) \longrightarrow T_{a \cdot m}M$$

est surjective, donc $dimM = dim(G/G_m)$ et par suite tous les applications $T_{\overline{a}}\overline{\rho_m}$ sont des isomorphismes ; le théorème d'inversion locale permet alors de conclure que $\overline{\rho_m}$ est un difféomorphisme.

Remarque 2.2.2. *Soit $\rho : G \longrightarrow Diff(M)$ une action différentiable et $m \in M$. Soit $f : N \longrightarrow G \cdot m$ une application. On peut alors montrer l'équivalence que f est C^∞ si et seulement si $i \circ f : N \longrightarrow M$ est C^∞ (avec $i : G \cdot m \longrightarrow M$ l'injection canonique).*

2.3 Espaces homogènes.

Si H est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G, alors H agit librement et proprement par translations à gauche sur G, et donc G/H admet

une unique structure de variété C^∞ telle que $\pi : G \longrightarrow G/H$ soit un C^∞-difféomorphisme local.
Le but de ce paragraphe est d'étendre ceci au cas où H est seulement supposé un sous-groupe fermé de G.
Dans tout ce paragraphe, notons G un groupe de Lie, H un sous-groupe de Lie de G, et $\pi : G \longrightarrow G/H$ la projection canonique.

Théorème 2.3.1. *Il existe une et une seule structure de variété différentielle de classe C^∞ sur l'espace topologique quotient G/H, telle que π soit une submersion.*
De plus,

- *$dim(G/H) = dim(G) - dim(H)$;*
- *l'action de G par translations à gauche sur G/H est de classe C^∞ ;*
- *l'application π est une fibration C^∞ de fibre H ;*
- *pour tout g dans G, l'application $T_g\pi : T_gG \longrightarrow T_{gH}(G/H)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_gG)/(T_g(gH)) \simeq T_{gH}(G/H)$;*
- *pour toute variété M de classe C^k, une application $f : G/H \longrightarrow M$ est de classe C^k si et seulement si $f \circ \pi$ l'est.*

Cette structure s'appelle la structure de variété quotient sur G/H. En particulier, l'application $T_e\pi$ induit un isomorphisme linéaire de T_eG/T_eH sur $T_{eH}(G/H)$.

Preuve. *Tout d'abord, comme H est fermé, l'espace G/H est séparé. Il est à base dénombrable, comme tout espace quotient d'un espace à base dénombrable par une action dont la projection canonique est ouverte.*
Soient p la dimension de H, n celle de G et Δ le champ de p-plans sur G, invariant à gauche, tel que $\Delta_e = T_eH$. Ce champ de p-plans est intégrable. Il est donc tangent à un feuilletage $\mathcal{F}$, dont les feuilles sont, par unicité, les translatés à gauche par G de la composante neutre de H. Soit (U, φ) une carte locale feuilletée C^∞ pour ce feuilletage, où U est un voisinage de e et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ est un C^∞-difféomorphisme qui envoie le feuilletage $\mathcal{F}_{|U}$ sur le feuilletage dont les feuilles sont les sous-espaces horizontaux $\mathbb{R}^p \times \{x\}$. Quitte à réduire U, comme H est une sous-variété, pour tout g dans G, l'intersection $gH \cap U$ est vide ou ne contient qu'une seule feuille locale de $\mathcal{F}$ dans U. Notons $pr_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ la seconde projection. Alors $pr_2 \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ induit par passage au quotient une bijection $\overline{pr_2 \circ \varphi}$ de

$\pi(U)$ sur $\mathbb{R}^{n-p}$. Comme π est continue et ouverte , cette bijection est un homéomorphisme. Alors la famille $(\pi(L_g U), \overline{pr_2 \circ \varphi \circ L_g^{-1}})_{g\in G}$ est un atlas de cartes C^∞ sur G/H, car les applications de transitions sont localement de la forme $x \mapsto pr_2 \circ \varphi \circ L_g^{-1}(0, x)$ donc sont de classe C^∞.
L'application π est alors une submersion C^∞, car, lue dans les cartes locales C^∞ précédentes, c'est juste la seconde projection pr_2 :

$$\begin{array}{ccc} L_g U & \overset{\varphi\circ L_g^{-1}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \\ \pi \downarrow & & pr_2 \downarrow \\ \pi(L_g U) & \overset{\overline{pr_2\circ\varphi\circ L_g^{-1}}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{n-p} \end{array}$$

L'avant dernière assertion en découle aussi. De plus, pour tout x dans G/H, il existe un voisinage V de x dans G/H et une section locale de π sur V , i.e. une application $\sigma : V \longrightarrow G$ de classe C^∞ telle que $\pi \circ \sigma = I$. La dernière assertion du théorème en découle, par le théorème de dérivation des fonctions composées.
Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer que s'il existe deux structures C^∞ sur G/H telles que π soit une submersion, alors l'identité de G/H est un C^∞-difféomorphisme entre ces deux structures. Ou en disant que localement, l'identité coïncide avec $\pi \circ \sigma$, et que π est C^∞ pour une structure, et σ est C^∞ pour l'autre.
De même, le fait que l'action à gauche $\lambda : G \times G/H \longrightarrow G/H$ soit C^∞ vient du fait que localement, on peut écrire

$$\lambda(g, g'H) = \pi(g\sigma(g'H)),$$

avec σ une section locale comme ci-dessus.
Enfin, si V est un voisinage ouvert de $x_0 \in G/H$ tel qu'il existe une section locale σ de π définie sur V , alors l'application θ de $\pi^{-1}(V)$ dans $V \times H$ définie par

$$g \mapsto (\pi(g), g(\sigma \circ \pi(g))^{-1})$$

est un C^∞-difféomorphisme, d'inverse $(x, h) \mapsto \sigma(x)h$, qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V) & \overset{\theta}{\longrightarrow} & V \times H \\ \pi \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & V & \end{array}$$

Donc π est une fibration C^∞ de fibre H. ∎

Remarque.
Si de plus H est distingué, alors G/H, muni de ses structures de variété quotient et de groupe quotient, est un groupe de Lie, et la projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ est un morphisme de groupes de Lie.
En effet, si σ et σ' sont des sections locales de π, alors l'application $G/H \times G/H \longrightarrow G/H$, définie par $(xH, yH) \mapsto xy^{-1}H$, coïncide, sur le produit des domaines de définition de σ et σ', avec $(u, v) \mapsto \pi(\sigma(u)\sigma(v)^{-1})$, qui est de classe C^∞.
La remarque tautologique suivante permet de construire une structure de variété sur un ensemble, en exhibant celui-ci comme ensemble quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe de Lie.

Remarque 2.3.1. *Soit G un groupe de Lie, agissant transitivement sur un ensemble E, tel que le stabilisateur G_x d'un point x de E soit un sous-groupe de Lie de G. Alors il existe sur E une et une seule structure de variété C^∞ telle que*

- *l'action de G sur E soit de classe C^∞,*
- *la bijection canonique $G/G_x \longrightarrow E$ soit un C^∞-difféomorphisme.*

Dans la section suivante, nous verrons que si E admettait une structure de variété C^∞ pour laquelle l'action de G fut C^∞, alors cette structure et celle construite dans la remarque précédente coïncideraient.

2.4 Actions transitives de groupes de Lie.

Le paragraphe précédent montre qu'une variété quotient G/H d'un groupe de Lie G par un sous-groupe de Lie H est une variété homogène C^∞. Le but de cette partie est de montrer que, à C^∞-difféomorphisme près, toute variété homogène C^∞ est de cette forme.

Théorème 2.4.1. *Soit M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ transitive d'un groupe de Lie G. Alors pour tout x dans M, la bijection canonique $\Theta_x : G/G_x \longrightarrow M$ est un C^∞-difféomorphisme.*

Preuve. *Comme $\Theta = \Theta_x$ est obtenue par passage au quotient de l'application orbitale $\varphi_x : g \mapsto gx$ de classe C^∞, la bijection Θ est C^∞ (voir le théorème* 2.3.1 *). Le théorème d'inversion locale nous dit que Θ est un C^∞-difféomorphisme dès que $T_u\Theta$ est injective en tout point u de G/G_x. Il suffit de le vérifier pour $u = eG_x$, car pour tout g dans G, les actions de g sur G/G_x et sur M sont des C^∞-difféomorphismes, rendant le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \xrightarrow{\Theta} & M \\ g\downarrow & & \downarrow g \\ G/G_x & \xrightarrow{\Theta} & M \end{array}$$

Le théorème de forme normale des applications de rang constant, appliqué à $\varphi_x : g \mapsto gx$, montre que

$$KerT_e\varphi_x = T_eG_x.$$

Notons que π est une submersion et que $\varphi_x = \Theta \circ \pi$. Si $X \in KerT_{G_x}\Theta \subset T_{G_x}(G/G_x)$, alors en choisissant Y tel que $T_e\pi(Y) = X$, on a $Y \in KerT_e\varphi_x = T_eG_x$. Or par le théorème 2.3.1*, l'application $T_e\pi : T_eG \longrightarrow T_{G_x}(G/G_x)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_eG)/(T_eG_x) \simeq T_{G_x}(G/G_x)$. Donc $X = 0$ et $T_{G_x}\Theta$ est injective, ce qui montre le résultat.* ∎

Remarque. *Le théorème* 2.4.1 *implique immédiatement le corollaire suivant.*

Corollaire 2.4.1. *Soit M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ d'un groupe de Lie G. Alors pour tout x dans M tel que $G \cdot x$ soit une sous-variété C^∞ de M, l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x$ est un C^∞-difféomorphisme.*

Voici une condition nécessaire et suffisante pour qu'une orbite soit une sous-variété, donnant une généralisation du théorème 2.4.1.

Théorème 2.4.2. *Soient M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ d'un groupe de Lie G, et $x \in M$. L'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété C^∞ si et seulement si elle est localement fermée.*
Si $G \cdot x$ est localement fermée, alors l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x$ est un C^∞-difféomorphisme.

En particulier, si une orbite est fermée, alors c'est une sous-variété.

Preuve. *Supposons que $G \cdot x$ soit localement fermée, donc localement compacte. Montrons que l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \longrightarrow M$ est un homéomorphisme sur son image. Comme c'est une application C^∞, et comme la preuve du théorème* 2.4.1 *implique que c'est une immersion, l'application canonique Θ_x sera donc un plongement C^∞. Donc son image est une sous-variété C^∞, et Θ_x est un C^∞-difféomorphisme.*
Si nous montrons que l'application $\varphi_x : G \longrightarrow G \cdot x$, définie par $g \mapsto gx$, est ouverte, alors l'application $\Theta_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x$ sera une bijection continue et ouverte (car $\Theta_x(U) = \varphi_x(\pi^{-1}(U))$ pour tout ouvert U de G/G_x), donc un homéomorphisme.
Soit U un voisinage ouvert de e dans G, montrons que U_x est un voisinage ouvert de x dans $G \cdot x$. Ceci concluera, car pour tout g dans G, la partie U_g est un voisinage ouvert de g, $\Theta_x(U_g) = \Theta_{gx}(U)$ et $G \cdot gx = G \cdot x$.
Soit V un voisinage compact de e dans G tel que $V^{-1}V \subset U$. Alors Vx est compact (car φ_x est continue et $G \cdot x$ séparé), donc fermé dans $G \cdot x$. Comme G est séparable, il existe une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans G telle que $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_iV$. Donc $G \cdot x = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i(Vx)$. Si V_x est d'intérieur vide, alors l'espace localement compact non vide Gx est une union dénombrable d'ensembles fermés d'intérieur vide, ce qui contredit le théorème de Baire. Soit donc g dans V tel que gx soit un point intérieur de Vx. Alors $g^{-1}Vx$ est un voisinage de x, contenu dans Ux, ce qui montre le résultat.

Corollaire 2.4.2. *Soient M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ d'un groupe de Lie compact G, et $x \in M$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété C^∞ compacte de M, et l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x$ est un C^∞-difféomorphisme.*

Preuve. *Puisque G est compact et l'action continue, toute orbite est compacte, donc fermée, et on applique le théorème précédent.* ∎

2.4.1 Exemples de variétés homogènes.

(1) Un groupe de Lie est un espace homogène de plusieurs manières. Voici deux : $G = G \times G/G = G/e$. Pour la première représentation de G comme espace homogène, $G \times G$ agit sur G par des translations à gauche et droite, et le sous-groupe d'isotropie est G intégré en diagonale dans $G \times G$.

(2) Les sphères. Le groupe orthogonal $O(n+1)$ (respectivement spécial orthogonal $SO(n+1)$) agit transitivement par rotations sur la sphère unité $\mathbb{S}_n$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, étant donné deux vecteurs unitaires, l'application qui vaut l'identité sur le supplémentaire orthogonal d'un plan vectoriel réel contenant ces deux vecteurs, et la rotation d'angle égal à l'angle entre ces deux vecteurs sur ce plan, envoie le premier vecteur sur le second. L'application de $O(n)$ (respectivement $SO(n)$) dans $O(n+1)$ (respectivement $SO(n+1)$) définie par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de groupes de Lie de $O(n)$ (respectivement $SO(n)$) sur le stabilisateur de $(1, 0, ..., 0)$, par lequel nous identifions $O(n)$ (respectivement $SO(n)$) avec son image. Donc les applications orbitales en $(1, 0, ..., 0)$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{S}_n \simeq O(n+1)/O(n) \simeq SO(n+1)/SO(n).$$

Le groupe unitaire $U(n+1)$ (respectivement spécial unitaire $SU(n+1)$), agit transitivement sur la sphère unité $\mathbb{S}_{2n+1}$ de l'espace hermitien usuel $\mathbb{C}^{n+1}$. En effet, considérons un plan vectoriel complexe P contenant deux vecteurs unitaires, muni d'une base orthonormée telle que ces deux vecteurs aient respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et (α, β), avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. La matrice de l'application linéaire qui vaut l'identité sur le supplémentaire orthogonal de P, et admet comme matrice sur P, dans la base choisie, la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

est un élément de $SU(n+1)$ qui envoie le premier vecteur sur le second. L'application de $U(n)$ (respectivement $SU(n)$) dans $U(n+1)$ (respectivement $SU(n+1)$) définie par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de groupes de Lie de $U(n)$ (respectivement $SU(n)$) sur le stabilisateur du point $(1, 0, ..., 0)$, par lequel nous identifions $U(n)$ (respectivement $SU(n)$) avec son image. Donc les applications orbitales en $(1, 0, ..., 0)$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{S}_{2n+1} \simeq U(n+1)/U(n) \simeq SU(n+1)/SU(n).$$

2.4.2 Variétés quotients.

Dans ce paragraphe, notons G un groupe de Lie, X une variété C^∞ munie d'une action C^∞ de G, $\pi : X \longrightarrow G/X$ la projection canonique et $\mathcal{R} \subset X \times X$ la relation d'équivalence « être dans la même orbite ». Le résultat suivant, qui implique le théorème 2.3.1, est démontré dans [1] .

Théorème 2.4.2.1. *Si $\mathcal{R}$ est une sous-variété fermée de classe C^∞ de $X \times X$, alors il existe une et une seule structure de variété différentielle de classe C^∞ sur l'espace topologique quotient G/X, telle que π soit une submersion C^∞. Lorsqu'elle existe, cette structure est appelée la structure de variété quotient de X par l'action de G.*

Remarque. *L'hypothèse que $\mathcal{R}$ soit une sous-variété fermée est nécessaire pour l'existence de cette variété quotient. En effet, $\pi \times \pi : (X \times X) \longrightarrow (G/X \times G/X)$ est une submersion car π l'est. La diagonale Δ de $G/X \times G/X$ est une sous-variété C^∞, fermée, de $G/X \times G/X$. Donc $\mathcal{R} = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta)$ est une sous-variété C^∞, fermée, de $X \times X$.*

2.5 Espaces homogènes réducteurs.

Soit G/H un espace homogène et rappelons la projection $\pi : G \longrightarrow G/H$, $\pi(g) = gH$. On va calculer le différentiel $d\pi_e : \mathfrak{g} \longrightarrow T_o(G/H)$, où $o = \pi(e) =$

H. Soit $X \in \mathfrak{g}$ et $\exp tX$ le sous-groupe correspondant à un paramètre. alors

$$d\pi_e(X) = \frac{d}{dt}(\pi \circ \exp tX)|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\exp tX)H)|_{t=0}$$

À partir nous obtenons que $d\pi_e(\mathfrak{l}) = 0$, c'est-à-dire $ker d\pi_e = \mathfrak{l}$, nous obtenons l'isomorphisme canonique

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{l} \cong T_o(G/H)$$

En général, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on peut définir un champ vectoriel X^* sur G/H par la formule

$$X^*_{gH} = \frac{d}{dt}(\exp tX)gH|_{t=0}$$

Noter la formule $[X^*, Y^*] = -[X, Y]^*$
Maintenant, nous allons considérer le cas spécial important suivant. Soit $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{l}$ désignent les algèbres de Lie de G et H respectivement.

Définition 2.5.1. *Un espace homogène est appelé réducteur s'il existe un sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l}$ et $Ad(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ pour tout $h \in H$, c'est-à-dire que $\mathfrak{m}$ est Ad(H)-invariant .*
La condition $Ad(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ implique que $[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. L'inverse est vrai si H est connecté. Notez que $\mathfrak{m}$ n'a pas besoin d'être fermé sous crochet, comme $\mathfrak{l}$. Donc, en conséquence immédiate de l'isomorphisme ci-dessus, si G/H est réducteur, nous avons l'isomorphisme canonique

$$\mathfrak{m} \cong T_o(G/H)$$

Par exemple, si G est un groupe de Lie compact, alors G/H est réducteur, car on peut prendre $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}^\perp$ par rapport à un produit interne ad-invariant sur $\mathfrak{g}$. En fait, il peut être montré que la définition ci-dessus n'est pas très restrictive : tout espace homogène qui admet une métrique G-invariant est réducteur. Nous nous référons à [9] pour une preuve détaillée de cela.

Exemple 7. • *soit $G/H = SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1))$. La forme de Killing de $\mathfrak{su}(3)$ est $B(X, Y) = 6trXY$, et $\mathfrak{l}$ l'ensemble $\{diag(ia, ib, ic) : a + b + c = 0\}$. Alors, par rapport à B, le sous-espace $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}^\perp$ est l'ensemble*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ -a_1 + ib_1 & 0 & a_3 + ib_3 \\ -a_2 + ib_2 & -a_3 + ib_3 & 0 \end{pmatrix} \quad a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ABOUQATEB : Une introduction à la géométrie des fibrés principaux, Mini-cours dans le cadre de l'école EMA - Rabat - 25 Juin au 07 juillet 2018.

[2] A. Arvanitoyeorgos : An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces.

[3] A. Besse : Einstein Manifolds, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[4] A. Moreau : Algèbres de Lie semi-simples : représentations et éléments nilpotents, Université de Lille Master de Mathématiques 2018-2019

[5] B. Keller : Introduction aux groupes et algèbres de Lie Cours de Bernhard Keller Décembre 2001.

[6] F. Paulin : Géométrie différentielle élémentaire, Cours de première année de mastère École Normale Supérieure, Année 2006-2007.

[7] J. François : Groupes et Algèbres de Lie, 2009-2010.

[8] J. Dieudonné, Éléments d'analyse t. 3, Gauthier-Villars, 2e éd. 1974.

[9] O. Kowalski and J. Szenthe : On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds, Geom. Ded.