République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Courbes magnétiques dans le groupe d'Heisenberg

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

M^{lle}. **A**mari **F**atima [1]

Sous la direction de

Pr. Fouzi **H**athout

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

Dr. O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Pr. F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. H.M Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. R. Nasri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : amarifatima1997@gmail.com

Table des matières

Introduction

La géométrie différentielle est un domaine très vaste des mathématiques et dont le point de départ est l'étude des variétés différentiables, qui forment une classe d'espaces géométrique réguliers. La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur $\mathbb{R}^n$.

Werner Karl Heisenberg (né le 5 décembre 1901 à Wurtzbourg Allemagne, mort le 1^{er} février 1976 à Munich Allemagne) est un physicien allemand qui est l'un des fondateurs de la mécanique quantique. Il est lauréat du prix Nobel de physique de 1932 ‹‹ pour la création de la mécanique quantique, dont l'application a mené, entre autres, a la découverte des variétés allotropiques de l'hydrogène››. Un de ces travaux est l'ensemble qui porte son nom "le groupe d'Heisenberg" défini par

$$\mathbb{H}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3.\mathbb{R}) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et qui est un groupe de lie de dimension impaire et noté par $\mathbb{H}_3$ (ici il est donnée en dimension trois).

La métrique du groupe Heisenberg est donné dans une variété riemannienne et qui est une variété de contact, par

$$g = dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy)^2$$

(voir [1], [3] et [2]) .

D'autre part, L'étude des champs magnétiques et de leurs courbes magnétiques correspondantes sur différentes variétés est l'un des sujets de recherche importants entre la géométrie différentielle et la physique. Les courbes magnétiques sur les variétés riemanniennes sont des trajectoires de particules chargées se déplaçant dans M sous un champ magnétique. Pendant ce temps, les différents champs magnétiques ont été étendus à différents espaces ambiants correspondants à des forces de Lorentz.

Notre travail est d'étudier les courbes magnétique dans le groupe Heisenberg tridimensionnel $\mathbb{H}_3$ et de donner leurs formes explicites. (voir [5])

Il se compose comme suit :

Au premier chapitre, on rappelle des notions de base sur les variétés (variétés différentiables, variétés Riemannienne et variété de contact) les connexions et le repére de Serret-Frenet.

Dans le deuxième chapitre, on étudiait, plus en détails, l'espace Heisenberg muni d'une structure riemannienne (i.e. trouver les formules générales de connexion associé à la métrique riemannienne et structure de contact sur le groupe Heisenberg).

Finalement, au dernier chapitre, on s'intéresse à étudier les courbes magnétiques et on détermine les formules explicites des courbes magnétique dans le groupe Heisenberg tridimentionnel, et on termine par donner des exemples.

Werner Karl
Heisenberg 1901-1976

Chapitre 1

Généralités sur les variétés

1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1 *On dit que M est une variété topologique de dimension $m \in \mathbb{N}$ si tout point p de M possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ i.e: il existe une application bijective*

$$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow U$$

tel que φ et son inverse φ^{-1} sont continues.

Un point p de U est repéré par les coordonnées $(p_1, \ldots, p_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(p)$. Alors, on dit que U est un ouvert de coordonnées locales de M au voisinage de p. La paire (U, φ) est appelée carte locale et $(p_1, \ldots, p_m) = \varphi^{-1}(p)$ seront les coordonnées locales de p.

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telle que l'intersection U et V soit non vide alors un point $p \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées $(p_1, \ldots, p_m)$ dans U et ses coordonnées $(p'_1, \ldots, p'_m)$ dans V. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & \overset{\psi}{\nearrow} & \\ \psi^{-1}(U \cap V) & & \end{array}$$

est commutatif alors on a

$$(p'_1, \ldots, p'_m) = \psi^{-1} \circ \varphi(p_1, \ldots, p_m)$$

où l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée changement de coordonnées de la carte (U, φ) vers la carte (V, ψ).

On appelle atlas définissant M la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et pour chaque $i \in I$, d'un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow U_i$; un tel objet sera toujours noté $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$.

Définition 1.2 *On dira que M est une variété différentiable si elle est une variété topologique et l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \varphi$ est de classe C^∞.*

1.2 Espace et fibré tangent

On considère par la suite M une variété différentiable de dimension finie m.

1.2.1 Espace tangent

Définition 1.3 *Soient M une variété différentiable et p un point de M.*
1. Un germe de fonction en p est une classe d'équivalence des fonctions définies dans des voisinages ouvertes de p, où on considère f et g comme d'équivalentes si elles sont égales dans une voisinage de p comprise dans le domaine de définition de f et de g.
2. Un germe de courbe en p est une classe d'équivalence des courbes passant par p, où on considère deux courbes $\gamma_1 :]-a, a[\longrightarrow M$, $\gamma_1(0) = p$ et $\gamma_2 :]-a', a'[\longrightarrow M$, $\gamma_2(0) = p$ comme équivalentes si $\gamma_1 = \gamma_2$ sur une voisinage de 0.

On désigne le germe d'une fonction f par $[f]$ et la germe d'une courbe γ par $[\gamma]$.

On dit que deux courbes γ_1 et γ_2 passant par p définissent la même tangente en p si pour tout fonction définie dans un voisinage de p et dérivable en p on a:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)|_0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2)|_0.$$

En fait, cette notion ne dépend que des germes $[f]$, $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ et sur les germes de courbes passant par p cela définit une relation d'équivalence.

Remarque 1.4 *Soient $(p_1, \ldots, p_m)$ des coordonnées locales autour de p. Une courbe $x(t)$ est déterminée par son vecteur $X(t)$ de coordonnés $(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ et le vecteur tangent associé*

$x'(0)$ *est uniquement déterminé par le vecteur*

$$X(0) = x'(0) = (x_1'(0), \ldots, x_m'(0)).$$

L'ensemble des vecteurs tangents en p est un espace vectoriel de dimension m. On désigne par $\frac{\partial}{\partial x_k}$ le vecteur tangent qui correspond au $k-$ième vecteur unité. Chaque vecteur tangent s'écrit comme suit

$$X(0) = \sum_k x_k'(0) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

où $\frac{\partial}{\partial x_k}$ désigne la base de l'espace vectoriel de dimension m.

Définition 1.5 *On note par T_pM, l'ensemble des vecteurs tangents en p qui est un espace vectoriel de dimension m.*

Si ξ est le vecteur tangent défini par la courbe γ, alors pour chaque fonction f dérivable autour de p, l'expression

$$X_\xi(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_0$$

dépend que du vecteur tangent défini par γ et s'appelle la dérivation de f dans la direction de ξ. On peut donc identifier un vecteur tangent avec sa dérivation directionnelle associée.

X_ξ est une application linéaire

$$\{\text{germes en } p \text{ de fonctions dérivables}\} \xrightarrow{X_\xi} \mathbb{R},$$

qui obéit la règle de Leibnitz

$$X_\xi(f.g) = X_\xi(f)g(p) + f(p)X_\xi(g).$$

Une telle application s'appelle dérivation en p.

La remarque précédente montre qu'on peut identifier les vecteurs tangents en p avec (certaines) dérivations en p. En effet, toutes ces dérivations peuvent être obtenues comme une dérivation directionnelle.

1.2.2 Fibré tangent

Les espaces tangents T_pM où p parcourt la variété M forment une variété différentiable définie par la définition suivante.

Définition 1.6 *On définit le fibré tangent par*

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

TM est une variété différentiable de dimension $2m$. Un élément de TM est un couple $(p;u)$ où p est un point de M et u est un vecteur tangent à M en p.
L'application $\pi : (p;u) \in TM \longrightarrow p \in M$ est différentiable appelée la projection canonique du fibré tangent TM.

1.2.3 Champ de vecteurs

Soit M une variété différentiable de dimension finie m.

Définition 1.7 *On appelle un champ de vecteurs sur M toute section C^∞ de TM i.e.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "Id"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

telle que $\pi \circ X = Id$.

Le champ de vecteurs X en tout point $p \in M$ est un vecteur $X(p)$ tangent à M en p de façon à ce que la variation de $X(p)$ (en fonction de p) soit différentiable.
L'ensemble $\Gamma(TM)$ est l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Soit $\gamma : I \to M$ une courbe sur la variété M.

Définition 1.8 ***Remarque 1.9*** *Un champ de vecteurs le long de γ est une application différentiable $V : I \to TM$ telle que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in I$.*

L'exemple le plus simple de champ de vecteurs le long de γ est le champ de vecteur vitesse $\gamma : I \to M$.

Localement, pour que $X_1, \ldots, X_m$ soit une base de $\Gamma(M)$ il faut que $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ soit une base de T_pM donc $\partial_1, \ldots, \partial_m$ est une base de $\Gamma(TM)$ tel que

$$\begin{aligned} \partial_i : M &\longrightarrow \quad TM \\ p &\longmapsto \quad (\partial_i)_p = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \end{aligned}$$

Un champ de vecteur définit aussi une dérivation sur $C^\infty(M)$ il s'écrit localement par

$$X(p) = \sum_{i=1}^{m} X_i(p)(\partial_i)_p$$

Un champ de vecteurs v (de classe C^∞)sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$est une correspondence qui à tout $a \in U$ associé un vecteur $v(a) \in T_a\mathbb{R}^n$ dont les composantes $v_1(a), ..., v_n(a)$ sont fonctions de C^∞ de a.

Tous les champs de vecteurs seront désormis supposés C^∞.

Définition 1.10 *L'expression locale du crochet de lie est :*

$$[X, Y] = (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On remarque que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$. Ceci est une caractéristique des dérivations le long de coordonnées.

1.3 Espace et Fibré cotangent

1.3.1 Espace cotangent

Définition 1.11 *Soient M une variété différentiable et $f \in C_p^\infty(M)$ une fonction différentiable en $p \in M$, alors*

$$\begin{aligned} df_p \quad &: \quad T_pM \to \mathbb{R} \\ v \quad &\mapsto \quad df_p(v) = v(f) \end{aligned}$$

et $df_p \in T_p^*M$ (dual de T_pM).

On appelle T_p^*M l'espace cotangent de M en p. Si $(U, \phi), x = (x^1, ..., x^n)$ est une carte en p

et $((\partial_1)_p, ..., (\partial_n)_p)$ *est la base de* T_pM*, la différentielle* dx^i_p*,* $i = 1, ..., n$*, des fonctions* x^i *en* p *forme une base duale de* T^*_pM*, i.e* $df_p = (\partial_i)_p(f)dx^i_p$.

1.3.2 Fibré cotangent

Définition 1.12 *Soit* M *une variété différentiable. On définit le fibré cotangent de* M *par*

$$T^*M = \bigcup_{p\in M} T^*_pM$$

tel que

$$\begin{aligned} \pi \quad &: \quad T^*M \to M \\ \omega \quad &\in \quad T^*_pM : \pi(\omega, p) = p \in M \end{aligned}$$

est la projection canonique, et une section (champs covecteurs sur M *ou 1-forme différentielle), une application*

$$\omega : M \to T^*M$$

avec $\pi \circ \omega = id$.
On note par $\Gamma^1(M)$*(ou* $\Gamma^1_0(M), \Gamma^*(M), \Gamma^{0,1}(M)$*)l'ensemble des champs covecteurs sur* M.
Si(U, ϕ) *est une carte et* ω *un champ covecteur sur* U*, alors il existe des fonctions*

$$\omega_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$$

tel que

$$\omega = \omega_i dx^i.$$

1.3.3 1-formes différentielles

Définition 1.13 *Soient* M *une variété différentielle et* T^*M *le fibré cotangent de* M*, une section de classe* C^∞ *de ce fibré*

$$\alpha : M \to T^*M$$

est appelée une 1-forme différentielle sur M. c'est donc une application qui à tout $p \in M$ associe un élément $\alpha_{|p}$ de T_p^*M.

On note $\Omega^1(M)$ l'espace vectoriel des 1-formes différentielles sur M. Ainsi, si $f \in \mathcal{F}(M)$, on a $df \in \Omega^1(M)$ telle que

$$df : p \to df_{|p} \in T_p^*M$$

Localement, au dessus d'un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ) de M, on écrit

$$\alpha = \alpha_i dx^i$$

avec $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ fonction C^∞. Le couplage avec un champ de vecteurs X s'écrit

$$\langle \alpha, X \rangle = \alpha_i X^i$$

Par recollement sur tous les ouverts des cartes locales, ce couplage donne une fonction C^∞ sur M :

$$\langle \alpha, X \rangle (p) = \left\langle \alpha_{|p}, X_{|p} \right\rangle \in \mathbb{R}$$

1.3.4 Connexion

On introduire maintenant une nouvelle structure sur une variété M. Cette structure définit une nouvelle dérivation, la dérivation covariante. Cette dérivation agira sur les champs de vecteurs en général.

Définition 1.14 *Soit M une variété différentiable. Une connexion linéaire sur M est une application*

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

telle que

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

vérifiants les propriétés :

(a) $\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X :

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \qquad f, g \in C^\infty(M)$$

(b) $\nabla_X Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à Y :

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \qquad\qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(c) vérifie la régle de Leibniz :

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y, \qquad\qquad f \in C^\infty(M)$$

$\nabla_X Y$ est appelée la dérivée covariante de Y dans la direction de X .
pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

Définition 1.15 *Soient ∇ une connexion sur M et (U, ϕ) une carte sur M de coordonnées locales $(x_1, x_2, ..., x_n)$. On définit les fonctions différentiables $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appelée les symboles de Christoffel.
En générale,

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est la dérivée covariante associé à la connexion linéaire ∇.

Exemple 1.16 *1/ Une connexion affine est une dérivée directionnelle de champs de vecteurs sur une variété. Imaginez un champ de vecteurs V sur $\mathbb{R}^n$ (qui est une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). Prenez un point et choisissez un vecteur tangent $X \in T_p\, \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.*
On note $\nabla_X V$ la dérivée covariante de V en p dans la direction X. On écrit $X = a^i \frac{d}{dx^i}$.
Alors

$$\nabla_X V = a^i \frac{dV}{dx^i} \in T_p\mathbb{R}^n$$

2/ On peut voir la connexion canonique sur $\mathbb{R}^n$ comme

$$\nabla_X Y = X(Y^j) \frac{d}{dx^i} = X^i \frac{dY^j}{dx^i} \frac{d}{dx^i}$$

Les symboles de christoffel Γ_{ij}^k de la connexion par rapport à la base $\frac{d}{dx^i}$ sont identiquement nuls.

Définition 1.17 *Soit* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ *une courbe différentiable.* γ *est dite une géodésique si et seulement si* $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$

Définition 1.18 *Soit* ∇ *une connexion sur une variété différentiable* M*. Alors,*
Le tenseur de torsion de ∇ *est une application*

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

tel que

$$T : (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Proposition 1.19 *Les tenseurs* T *et* R *sont linéaires et on a*
1/ $T(X, Y) = -T(Y, X)$
2/ $R(X, Y)Z = R(Y, X)Z$
3/ si $T = 0$, *alors* $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ *qu'est appelée l'identité de Bianchi.*
4/ Si on pose $\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i,\ i = 1, ..., n$ *où* $x^1, ..., x^n$ *sont les coordonnées locales de la carte* (U, ϕ) *sur* M, *alors*

$$R(X^i, Y^j)X^k = \sum_{i=1}^{n} R^l_{ijk} X^l$$

où

$$R^l_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}) + X^i(\Gamma^l_{jk}) - X^j(\Gamma^l_{ik}).$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ *on a*

1.4 Métriques Riemanniennes

Soit M une variété différentiable de dimension finie m. Une métrique Riemannienne sur M est la donnée, pour tout point $p \in M$, d'un produit scalaire g sur l'espace tangent T_pM tel que, pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs locaux sur M, la fonction $p \mapsto g_p(X, Y)$ est différentiable.

Définition 1.20 *Une métrique Riemannienne* g *définie sur une variété* M *est une application,*

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$C^\infty(M)$-bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive i.e
1. $g(X,Y) = g(Y,X)$, (symétrique)
2. $g(X,X) = 0 \implies X = 0$, (non dégénérée)
3. $g(X,X) \geq 0$, (définie positive)
pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Sur une variété riemannienne il existe une connexion naturelle compatible avec la métrique riemannienne. Le lemme suivant explique ce que pourra signifier la compatibilité, entre une métrique et une connexion.

Lemme 1.21 *Soit ∇ une connexion sur une variété riemannienne (M,g). Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. g est compatible avec ∇ i.e pour tout X, Y, Z on a

$$X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

2. Si V, W sont deux champs de vecteurs le long de la courbe γ

$$\frac{d}{dt} g(V,W) = g(D_\gamma V, W) + g(V, D_\gamma W)$$

3. Si V, W sont deux champs de vecteurs paralléle long d'une courbe γ, alors $g(V,W)$ est constante.
4. Le transport paralléle $P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ est une isométrie

Théorème 1.22 *Soit (M,g) une variété riemannienne. Alors il existe une unique connexion sur M compatiple avec g et sans torsion i.e*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

Cette connexion est appelée la connexion de Levi-Civita associé à la métrique g.

Une variété M munie d'une métrique riemannienne g est dite variété riemannienne et est notée (M,g). Sur une variété riemannienne (M,g), il existe une et une seule connexion affine dite connexion de Levi-Civita, qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \text{ (i.e la torsion est nulle)} \\ Zg(X,Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = 0 \text{ (i.e } \nabla_{Xg} = 0 \text{ donc } g \text{ est parallèle)} \end{aligned}$$

Si (U,φ) est une carte sur M et $(\partial_i)_{i=1,\dots,m}$ la base locale associée, alors g est donnée localement par

$$g = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{1.1}$$

où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appellé composantes de la métrique relativement á la carte (U,φ).
Localement, si $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ on a

$$g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j.$$

Pour tout $p \in M$ on a

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où T_pM désigne l'espace tangent au point p.

Exemple 1.23 *Si (U,x) une carte sur M, alors $(\partial_1,\dots,\partial_m)$ forme une base pour T_pM sa base duale est $dx_{i,j=1,\dots,m}$, alors la métrique g est donnée par $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j = g_{ij}dx^idx^j$.*

1.5 Connexion Riemannienne

Soit M une variété différentiable de dimension finie m.

Définition 1.24 *Soit g une métrique Riemannienne sur M. On dit que la métrique g est compatible avec la connexion ∇ (ou parallèle), si*

$$\nabla g = 0 \tag{1.2}$$

$i.e$

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = 0$$

où

$$X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{1.3}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.25 *Si* (M,g) *est une variété Riemannienne. On appel une connexion Riemannienne ou de Levi-Civita toute connexion compatible avec* g *et sans torsion i.e*

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X,Y] = 0$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.26 *La formule de* KOSZUL *est donnée par*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]), \end{aligned} \tag{1.4}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.27 *Soit* $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ *un chemin de classe* C^k. *On appelle champ de vecteurs le long de la courbe* γ *un chemin* $X : [a,b] \longrightarrow TM$ *relevant* γ *i.e* $\pi(X(t)) = c(t)$, $\forall\ t \in [a,b]$.

Définition 1.28 *Une section* $Y \in \Gamma(TM)$ *est dite parallèle par rapport à la connexion* ∇ *si*

$$\nabla_X Y = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Exemple 1.29 $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ *est un champ de vecteurs le long de la courbe* γ.

Proposition 1.30 *Soient* M *une variété différentiable munie d'une connexion affine* ∇, $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ *une courbe de classe* C^k *dans* M *et* X *un champ de vecteurs le long de* γ. *Alors on peut définir un champ de vecteurs de classe* C^{k-1} *le long de* γ, *noté* $D_t X$ *appelé dérivée covariante de* X *satisfaisant à*

1. D_t *est* $\mathbb{R}-$*linéaire, i.e* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \Gamma(\gamma)$, $D_t(aX + bY) = aD_t X + bD_t Y$.

2. $D_t(fX) = \frac{df}{dt}X + fD_t X$, $\forall f \in C^\infty(I)(I \subseteq \mathbb{R})$

3. Pour tout $Y \in \Gamma(M)$ *et* $X(t) = Y(\gamma(t))$, *on a:* $D_t X = \nabla_{\gamma'(t)} Y$.

Définition 1.31 *Un champ de vecteurs X le long de γ est dit parallèle pour la connexion ∇ si $D_t X \equiv 0$. Un chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ est appelé une géodésique Riemannienne si son champ tangent est parallèle.*

1.6 Repère de Serret-Frenet dans M^3

Soit M une variété riemannenne et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc s. On supposera ici les courbes paramétrées bi-régulières, i.e. γ' et γ'' linéairement indépendants en tout point. Puisque γ est paramétrée par sa longueur d'arc, le vecteur tangent est unitaire i.e.

$$T(s) = \gamma'(s), \; \|T(s)\| = 1$$

qui donne

$$< T(s), T(s) >= 1$$

et

$$\nabla_T < T(s), T(s) >= 2 < \nabla_T T(s), T(s) >= 0$$

d'où les vecteurs $\nabla_T T(s)$ et $T(s)$ sont orthogonaux et on a la définition

Définition 1.32 *Le vecteur normal unitaire (appelé aussi vecteur normal principal) et la courbure sont définis par*

$$N(s) = \frac{\nabla_T T(s)}{\|\nabla_T T(s)\|} \text{ et } \kappa(s) = \|\nabla_T T(s)\|.$$

Remarque 1.33 *On a donc, comme pour les courbes planes*

$$\nabla_T T(s) = \kappa(s) N(s), \tag{1.5}$$

mais ici la courbure est par définition, positive et le vecteur unitaire normal est orienté dans la même direction que $\nabla_T T(s)$.

Définition 1.34 *On définit ensuite le vecteur binomiale unitaire $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ qui complète la paire de vecteur en une base orthonormée directe $\{T, N, B\}$ appelé repère de Frenet.*

On considére $\nabla_T B(s)$, c'est un vecteur orthogonal à $B(s)$ mais aussi à $T(s)$ car

$$\nabla_T B(s) = \nabla_T T(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge \nabla_T N(s) = T(s) \wedge \nabla_T N(s)$$

donc $\nabla_T B(s)$ est colinéaire avec $N(s)$ et on peut définir un fonction en s appelée la tortion notée par τ, définie par l'équation suivante

$$\nabla_T B(s) = -\tau(s) N(s). \tag{1.6}$$

Certain auteurs définissent la torion par

$$\nabla_T B(s) = \tau(s) N(s).$$

Remarque 1.35 *La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit trois fois dérivable, ensuite que la courbe soit bi-régulière au point où l'on veut définir la torsion (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire, en un point non bi-régulier, on ne peut pas définir le vecteur normal unitaire car $T'(s) = 0$). On observera aussi que la condition de bi-régularité impose que la courbure ne s'annule pas.*

On calcule maintenant les coordonnées de $\nabla_T N$ dans la base $\{T, N, B\}$. On a

$$\nabla_T N = aT + bN + cB.$$

où a, b et c sont des fonctions en s. Utilisant Eq.(1.33), on obtient

$$a = \langle T, \nabla_T N \rangle = -\langle \nabla_T T, N \rangle = -\kappa,$$

et

$$b = \langle N, \nabla_T N \rangle = 0$$

de plus

$$c = \langle B, \nabla_T N \rangle = -\langle \nabla_T B, N \rangle = \tau,$$

d'où

$$\nabla_T N = -\kappa(s) T + \tau(s) B. \tag{1.7}$$

On a les définitionss pour des cas de la courbes γ :

Définition 1.36 *1. Une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M^3$ est dite osculatrice d'ordre 1 si $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$,* *ce qui signifie que γ est une géodésique.*

2. γ est dite une courbe osculatrice d'ordre 2 si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

dans ce cas c'est une courbe plan.

3. γ est dite une courbe osculatrice d'ordre 3, si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Exemple 1.37 *Un cercle est une courbe de Frenet d'ordre osculateur 2 telle que κ est une constante positive non nulle.*

Définition 1.38 *Une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M^3$ paramétrée par la longueur d'arc est dite oblique ou slant si son vecteur vitesse T fait un angle constante avec tout vecteur X parallèle le long de la courbe γ(i.e $\nabla_T X = 0$), par*

$$\langle T, X \rangle = c \text{ constant}$$

si c=0 γ est dite courbe de Legendre.

Proposition 1.39 (Théorème de Lancret) *Une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M^3$est dite oblique si et seulement si*

$$\frac{\tau}{\kappa} \text{ est constant}$$

Exemple 1.40 *Une hélice dans $(\mathbb{R}^3, g_{euc})$ est une courbe oblique et de Frenet d'ordre osculateur 3 telle que κ et τ sont des constantes non nulles.*

1.7 Variétés de contacts

1.7.1 Variétés de contacts

Définition 1.41 *Une variété différentiable M de dimension $2n+1$ est dite variété de contact si elle admet une 1-forme η telle que*

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

pour tout point dans M.

Proposition 1.42 *Pour une forme de contact η il existe un champ de vecteurs unique ξ tel que*

$$\eta(\xi) = 1$$

et

$$d\eta(\xi, X) = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

1.7.2 Structure presque contact

Définition 1.43 *Une variété différentiable M est dite a une (φ, ξ, η)-structure si et seulement si elle admet d'endomorphismes φ, un champ de vecteurs ξ et une 1-forme η tels que*

$$\eta(\xi) = 1 \tag{1.8}$$

et

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \tag{1.9}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$

Proposition 1.44 *Soit M une variété différentiable avec (φ, ξ, η)-structure . Alors*

$$\varphi\xi = 0 \tag{1.10}$$

et

$$\eta \circ \varphi = 0 \tag{1.11}$$

De plus, l'endomorphisme φ a un rang égale $2n$.

Preuve. Supposons que Eq.(1.8) et Eq.(1.9) sont données. Dans Eq.(1.9) on remplace X par ξ donc on a

$$\begin{aligned} \varphi^2\xi &= -\xi + \eta(\xi)\xi \\ &= -\xi + \xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où $\varphi\xi = 0$ ou bien $\varphi\xi$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 0.

Aussi par Eq.(1.9) on trouve

$$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi,$$

mais $\varphi^2(\varphi\xi) = \varphi(\varphi^2\xi)$ et $\varphi\xi = 0$, donc

$$0 = \varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi,$$

d'où

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi.$$

Si $\varphi\xi$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 0 alors $\eta(\varphi\xi) \neq 0$.

On a

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi,$$

alors,

$$\varphi(\varphi\xi) = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi,$$

donc,

$$0 = \varphi^2\xi = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi,$$

d'où

$$0 = \varphi^2\xi = (\eta(\varphi\xi))^2\xi \neq 0,$$

contradiction avec $\varphi\xi = 0$, donc $\varphi\xi = 0$.

Maintenant, on prouve que $\eta \circ \varphi = 0$, d'aprés la formule Eq.(1.9) on a

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi,$$

remplaçant X par φX alors,

$$\varphi^2(\varphi X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,$$

donc

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi^2(\varphi X) + \varphi X, \tag{1.12}$$

l'équation Eq.(1.12) donne,

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi^3(X) + \varphi X,$$

mais,

$$\begin{aligned} \varphi^3(X) &= \varphi(\varphi^2 X) = \varphi(-X + \eta(X)\xi) \\ &= -\varphi(X) + \varphi(\eta(X))\xi, \end{aligned}$$

l'équation Eq.(1.12) devient,

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi(\eta(X))\xi = \eta(X)\varphi\xi,$$

puisque $\varphi\xi = 0$ donc $\eta \circ \varphi = 0$. ■

Définition 1.45 *Soient M une variété différentiable avec (φ, ξ, η) structure, g une métrique riemannienne sur M telle que*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. On dit que M a (φ, ξ, η, g) structure ou une structure presque contact métrique, g est appellée une métrique compatible. Si on pose $Y = \xi$ alors

$$\eta(X) = g(\xi, X).$$

Proposition 1.46 *Si M est une variété avec une (φ, ξ, η) structure, alors M admet une métrique Riemannienne g telle que*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \tag{1.13}$$

Preuve. Soit h' une métrique Riemannienne sur M. On définit h par

$$h(X, Y) = h'(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

on a

$$\begin{aligned} h(\xi, X) &= h'(\varphi^2 \xi, \varphi^2 X) + \eta(\xi)\eta(X). \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

Aussi h est une métrique Riemannienne. Maintenant on définit g par

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}(h(X, Y) + h(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)),$$

g est métrique Riemanninne il reste de prouver qu'elle vérifie la condition 1.13

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(\varphi^2 \xi, \varphi^2 X) + \eta(\varphi X)\eta(\varphi Y)) \\ &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)) \\ &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - h(X, \eta(Y)\xi) - h(Y, \eta(X)\xi) + \eta(X)\eta(Y)h(\xi, \xi)) \\ &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - \eta(Y)\eta(X) - \eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

■

1.7.3 Structure contact métrique

Définition 1.47 *On dit qu'une variété différentiable M a une structure presque contact si elle admet une 1-forme η et 2-forme Φ tels que*

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0,$$

pour tout point dans M.

Définition 1.48 *Soient M une variété différentiable muni d'une structure presque contact (φ, ξ, η) et d'une métrique g compatible. Alors on définit la 2-forme Φ sur M par*

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

On dit que Φ la 2-forme fondamentale de structure presque contact métrique (φ, ξ, η, g).

Définition 1.49 *Une variété M muni d'une structure de contact (φ, ξ, η) est dite une variété de contact.*

Proposition 1.50 *Soient M une variété différentiable avec 1-forme η et 2-forme Φ tel que $\eta \wedge \Phi \neq 0$. Alors M admet une structure presque contact. Si M est une variété de contact avec la forme de contact η alors il existe une structure presque contact métrique(φ, ξ, η, g) telle que la 2-forme fondamentale Φ égale $d\eta$.*

Définition 1.51 *Une structure presque de contact métrique avec $\Phi = d\eta$ est appellée une structure presque de contact métrique associée.*

Chapitre 2

Structure de contact métrique du groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_3$

2.1 Espace d'Heisenberg $\mathbb{H}_3$

L'espace d'Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de $\mathbb{R}$ est sous-groupe du groupe linéaire $GL\,(3.\mathbb{R})$

$$\mathbb{H}_3\,(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL\,(3.\mathbb{R}) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$\mathbb{H}_3$ peut être vu comme l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$ doté de la multiplication

$$(x, y, z)(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{x}y - \frac{1}{2}\tilde{y}x)$$

2.2 Métrique de $\mathbb{H}_3$

On définit la métrique riemannienne g de $\mathbb{H}_3$ par

$$g = dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy)^2. \tag{2.1}$$

matriciellement, elle est donnée par

$$g : \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{4}y^2 & -\frac{1}{4}xy & -\frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{4}xy & 1+\frac{1}{4}x^2 & \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix}$$

quelle est induite de

$$g = C^T I C$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix};$$

et la matrice définissent la translation est

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quand on calcule avec la métrique riemannienne g, on emploi parfois $\langle .,. \rangle$, alors

$$g(.,.) = \langle .,. \rangle.$$

Le produit intérieur des vecteurs $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i X_i$ et $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i X_i$ dans $T\mathbb{H}_3$ est

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

La norme d'un vecteur a est donnée par

$$\|\vec{a}\| = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

La métrique g est invariante par rapport aux translations à gauche correspondant à la multiplication.

2.3 Connexion

On détermine la connexion de Levi-Civita ∇ associé à la métrique g par rapport à la base orthonormée invariante à gauche par

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.2}$$

de dual

$$\theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy, \quad \theta^3 = dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy.$$

avec

$$\theta^i(e_j) = \delta^{ij}; i, j = \overline{1,3}$$

Proposition 2.1 *Le crochet de Lie des vecteurs* $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ *est*

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_3, e_1] = [e_3, e_2] = 0.$$

Preuve. Pour les vecteurs e_3 et e_1, d'après 2.2, on a

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= e_1e_2 - e_2e_1 \\
&= (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}) - (\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} = e_{3;} \\
[e_3, e_1] &= e_3e_1 - e_1e_3 \\
&= (\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}) - (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial}{\partial z}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

la preuve est la même pour le crochet $[e_3, e_2]$. ■

Proposition 2.2 *La connexion de Levi-Civita* ∇ *associé à la métrique* g *est donnée par*

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
\nabla_{e_1}e_1 & = & 0, & \nabla_{e_1}e_2 & = & \frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1}e_3 & = & -\frac{1}{2}e_2, \\
\nabla_{e_2}e_1 & = & -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_2}e_2 & = & 0, & \nabla_{e_2}e_3 & = & \frac{1}{2}e_1, \\
\nabla_{e_3}e_1 & = & -\frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3}e_2 & = & \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3}e_3 & = & 0.
\end{array}\right. \tag{2.3}$$

Preuve. On utilisons la formule de KOSUL suivante

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle\},$$

Pour la base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ la formule de KOSUL se réduit à

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle = -\frac{1}{2}\{\langle e_k, [e_j, e_i]\rangle + \langle e_i, [e_j, e_k]\rangle + \langle e_j, [e_i, e_k]\rangle\}; i, j, k = \overline{1, 3}.$$

On fait le calcul pour $\nabla_{e_3} e_1$,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_3} e_1, e_1\rangle &= -\frac{1}{2}\{\langle e_1, [e_1, e_3]\rangle + \langle e_3, [e_1, e_1]\rangle + \langle e_1, [e_3, e_1]\rangle\} = 0,\\
\langle \nabla_{e_3} e_1, e_2\rangle &= -\frac{1}{2}\{\langle e_2, [e_1, e_3]\rangle + \langle e_3, [e_1, e_2]\rangle + \langle e_1, [e_3, e_2]\rangle\} = -\frac{1}{2},\\
\langle \nabla_{e_3} e_1, e_3\rangle &= -\frac{1}{2}\{\langle e_3, [e_1, e_3]\rangle + \langle e_3, [e_1, e_3]\rangle + \langle e_1, [e_3, e_3]\rangle\} = 0,
\end{aligned}$$

alors

$$\nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2$$

de la même méthode on obtient les autres formules de connexions. ■

2.4 Structure de contact sur $\mathbb{H}_3$

La métrique riemannienne g de $\mathbb{H}_3$ peut être écrite comme

$$g = dx^2 + dy^2 + \eta \otimes \eta, \tag{2.4}$$

où

$$\eta = dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy),$$

La 1-forme η satisfait

$$d\eta \wedge \eta = -\lambda dx \wedge dy \wedge dz.$$

Soit l'endormorphisme φ définit par

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = -e_1 \quad et \quad \varphi(e_3) = 0.$$

suivant la base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$.

Lemme 2.3 *La* 1*-forme* η *et l'endormorphisme* φ *vérifient*

$$\begin{aligned}
\eta(e_3) &= 1, \\
\varphi^2(X) &= -X + \eta(X)e_3, \\
g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

et on a

$$d\eta(X,Y) = \frac{\lambda}{2} g(X, \varphi Y)$$

pour tout X,$Y \in \Gamma(TM)$.

De la Section 1.7, du Lemme 2.3 et en posons $\xi = e_3$, on aura la proposition suivante.

Proposition 2.4 *Le groupe* $(\mathbb{H}_3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété de contact pour* $\lambda = 2$.

Chapitre 3

Courbes magnétiques dans $\mathbb{H}_3$

3.1 Champ magnétique

Soit (M, g) une variété Riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita associée. Les courbes magnétiques représentent en physique, les trajectoires de particules chargées se déplaçant sur une variété Riemannienne sous l'action de champs magnétiques

Définition 3.1 *Un champ magnétique sur (M, g) est une 2-forme fermée notée F et la force de* Lorentz *ϕ correspondante à F est endormorphisme antisymétrique tel que*

$$F(X, Y) = g(\phi X, Y)$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

3.2 Courbes magnétiques

Définition 3.2 *Une courbe différentiable $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ est appelée une courbe magnétique, ou un trajectoire du champ magnétique F si elle est une solution de l'équation de* Lorentz *ou de* Newton*, suivante*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \phi(\gamma')$$

Alors en absence du magnétisme, les particules se déplacent le long des géodésiques.

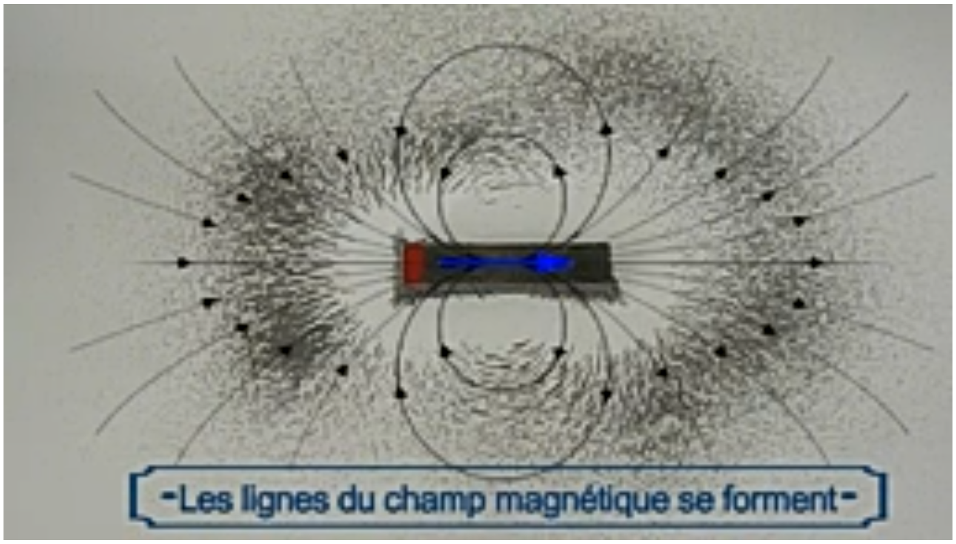

FIG. 3-1 – les lignes de champ magnétique

Définition 3.3 *Un champ magnetique F est dit uniforme si*

$$\nabla F = 0$$

Proposition 3.4 *Une courbe magnétique $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ a un vecteur vitesse constant.*

Preuve. De la Défnition 3.1, on a l'antisymétrie de la force de LORENTZ $g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)$,

$$\frac{d}{dt} g(\gamma', \gamma') = \nabla_{\gamma'} g(\gamma', \gamma') = g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma') + g(\gamma', \nabla_{\gamma'}\gamma') = 2g(\phi(\gamma'), \gamma') = 0$$

alors la courbe γ a une vitesse constante $\|\gamma'\| = c$. ∎

Définition 3.5 *Si la courbe magnétique est paramétrée par la longueur d'arc (i.e. $\|\gamma'\| = 1$), elle est dite normale.*

Remarque 3.6 *La courbe magnétique paramétrée par la longueur d'arc, généralise une géodésique pour la force de* LORENTZ *nulle.*

Le champ pententiel sur la variété M est un 1-forme $A \in \Omega^1(M)$, tel que le champ magnétique est $F = dA \in \Omega^2(M)$.

La trajéctoire magnétique de F (ou la courbe magnétique associé à F) est une courbe lisse γ sur M, satisfaisant l'équation de LORENTZ (appelée aussi NEWTON,ou équation de LANDAU-HALL) :

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \phi(\gamma') \tag{3.1}$$

où ∇ est la connexion de LEVI-CIVITA de g, et q est la charge de la particule.

Remarque 3.7 *Ces définisions nous aménent aux conséquences suivantes :*
1. *Pour le champ magnétique trivial $F = 0 \Longleftrightarrow \phi = 0$, l'équation de Landou Hall pour les courbes magnétiques est $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, ce qui signifie que les courbes magnétiques deviennent des géodésiques de (M, g). Par conséquent, sur toute variété Riemannienne (M, g) par l' absence électriques et magnétiques, les particules se déplacent le long des géodésiques.*
2. *Les courbes magnétiques satisfont à la loi de conservation suivante : les particules évaluent à vitesse constante, et donc à énergie constante le long des trajectoires magnétiques. En fait, à partir de (3.1) nous avons $g(\Phi X, Y) = -g(X, \Phi Y)$, puis*

$$\frac{d}{dt}g(\gamma', \gamma') = \nabla_{\gamma'}g(\gamma', \gamma') = g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma') + g(\gamma', \nabla_{\gamma'}\gamma') = 2g(\Phi(\gamma'), \gamma') = 0$$

En raison de l'antisymétrie de la force de LORENTZ*, les trajectoires magnétiques ont une vitesse constante $v(t) = \|\gamma'\|$. Lorsque la courbe magnétique $\gamma(t)$ est paramétrée par la longueur d'arc $(v_0 = 1)$, γ est appelée courbe magnétique normale.*

3.2.1 Champs magnétiques sur (M, g)

Lemme 3.8 *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $X \in \Gamma(M)$, alors X^b est défini comme étant la forme unique donnée par*

$$X^b(Y) = g(X, Y)$$

pour tous $Y \in \Gamma(M)$. L'application de X vers X^b est un isomorphisme entre $\Gamma(M)$ et $\Gamma^*(M)$. De plus, cet isomorphisme est linéaire sur les fonctions. En particulier, pour un 1-forme η, il y a donc un unique $X \in \Gamma(M)$ telle que $X^b = \eta$. Le champ de vecteur X est noté $\eta^\sharp$

Lemme 3.9 *Si dv est une forme volume sur M alors $\mathcal{L}_X(dv) = (\operatorname{div} X)dv_g$*

a/ Les champs magnétiques désignent des champs vectoriels sans divergence. On sait que la dérivée de Lie et la forme volume vérifie que

$$L_V\Omega_3 = d(i_V\Omega_3) = \mathrm{div}(V)\Omega_3$$

Ainsi, la forme $*V^b = i_V\Omega_3$ est fermée si et seulement si $\mathrm{div}\, V = 0$, c'est-à-dire que l'élément de volume est invariant par les flux locaux de V. Cela nous permettra de considérer les champs magnétiques de la dimension 3 comme des champs vectoriels sans divergence.

En conséquence de la bijectivité entre les champs de vecteurs U sans divergence et les champs magnétiques $F_U = i_U dv_g$ sur les variétés Riemannienne, nous considérons le champ magnétique comme étant soit U, soit F_U.

b/ On peut définir le produit vectoriel $X \wedge Y$ de deux champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(M)$ quelconques dans une variété Riemannienne orientée de dimension 3, comme suit :

$$g(X \wedge Y, Z) = \Omega_3(X, Y, Z)$$

Théorème 3.10 *L'équation de* LANDAU-HALL *sur* (M, g) *peut etre écrite sous la forme*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = U \wedge \gamma'.$$

Preuve. La force de LORENTZ Φ associé au champ magnétique, $F_U = i_U dv_g$ satisfait

$$g(\Phi(X), Y) = F_U(X, Y) = (i_U dv_g)(X, Y) = dv_g(U, X, Y) = g(U \wedge X, Y)$$

danc nous avons

$$\Phi(\gamma') = U \wedge \gamma'$$

pour tous $X \in \Gamma(M)$, et par conséquent, l'équation de la force de LORENTZ, qui fournit le champ magnétique, peut étre écrit comme

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \Phi(\gamma') = U \wedge \gamma'$$

■

3.3 Courbes magnétiques dans $\mathbb{H}_3$

Soit $(\mathbb{H}_3, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique de contact et Ω 2-forme fondamontale définie par

$$\Omega(X,Y) = g(\varphi X, Y) \tag{3.2}$$

Puisque $\Omega = d\eta$ on définie un champ magnétique sur $\mathbb{H}_3$ par

$$F_q(X,Y) = -q\Omega(X,Y) \tag{3.3}$$

où $X, Y \in \Gamma(\mathbb{H}_3)$ et q est une constante réelle. Nous appelons F_q le champ magnétique de contact avec la force q. Si $q = 0$, alors le champ magnétique de contact est l'identique et les courbes magnétiques sont les géodésiques de $\mathbb{H}_3$.

Dans la suite, on suppose $q \neq 0$.

La force de LORENTZ ϕ_q associée au champ magnétique de contact F_q, peut être facilement déterminée en combinant Eq.(3.21) et Eq.(3.1) c'est-à-dire

$$\phi_q = q\varphi \tag{3.4}$$

où φ est le champ d'endomorphismes de la structure métrique de contact.

Dans ce cadre, l'équation de LORENTZ Eq.(3.21) peut s'écrire

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = q\varphi\gamma' \tag{3.5}$$

où $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{H}_3$ est une courbe lisse paramétrée par sa longueur d'arc. Les solutions de 3.25 sont appelées courbes ou trajectoires magnétiques normales pour F_q.

Théorème 3.11 *Soit $(\mathbb{H}_3, \varphi, \xi, \eta, g)$ le groupe d'Heisenberg et considérons le champ magnétique de contact F_q, pour $q \neq 0$ sur $\mathbb{H}_3$. Alors γ est une courbe magnétique normale associée à F_q dans $\mathbb{H}_3$ si et seulement si γ satisfait l'une des assertions suivantes :*

1. *γ est une géodésique obtenue sous la forme d'une courbe intégrale de e_3.*

2. *γ est un cercle non-Legendre de courbure $\kappa = |q|\sin\alpha$ et d'angle de contact constant $\alpha = \arccos(-\frac{\lambda}{2q})$, où $-\frac{\lambda}{2q} \in [-1, 1]$.*

3. *γ est une hélice de Legendre avec $\kappa = |q|$ et $\tau = \frac{\lambda}{2}$.*

4. γ *est un hélice oblique avec* $\kappa = |q|\sin\alpha$ *et* $\tau = \frac{\lambda}{2} + q\cos\alpha$*, où* α *est une constante telle que* $\alpha \in (0, \pi)$.

Preuve. Si la courbe magnétique γ est une géodésique, alors $\varphi T = 0$, ce qui signifie que T est colinéaire à e_3, puis étant unitaire, on doit avoir $T = \pm e_3$. Donc γ est une géodésique obtenue sous la forme de courbe intégrale de $\xi = e_3$.
Puisque γ est paramétrée par la longueur d'arc, nous pouvons écrire

$$T = \sin\alpha\cos\beta e_1 + \sin\alpha\sin\beta e_2 + \cos\alpha e_3, \tag{3.6}$$

où $\alpha = \alpha(s)$ et $\beta = \beta(s)$.
En utilisant Eq.(**??**) on a

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (\alpha'\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta(\beta' - \lambda\cos\alpha))e_1 \\ &\quad +(\alpha'\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta(\beta' - \lambda\cos\alpha))e_2 \\ &\quad -\alpha'\sin\alpha e_3. \end{aligned} \tag{3.7}$$

d'autre part, si on utilisent Eq.(3.6) il s'ensuit que

$$\varphi T = -\sin\alpha\sin\beta e_1 + \sin\alpha\cos\beta e_2. \tag{3.8}$$

Puisque γ est une courbe magnétique

$$\nabla_T T = q\varphi(T),$$

ce qui nous donne

$$\alpha'\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta(\beta' - \lambda\cos\alpha) = -q\sin\alpha\sin\beta, \tag{3.9}$$

$$\alpha'\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta(\beta' - \lambda\cos\alpha) = q\sin\alpha\cos\beta, \tag{3.10}$$

$$\alpha'\sin\alpha = 0. \tag{3.11}$$

A partir de Eq.(3.11) nous trouvons $\alpha' = 0$ ou $\sin\alpha = 0$.
Si $\sin\alpha = 0$, alors $\varphi T = 0$. Donc par la discussion du début de la preuve, il s'ensuit que γ est

une géodésique obtenue sous forme de courbe intégrale de e_3.

Si $\alpha' = 0$, alors α est une constante, cela signifie que γ est une courbe oblique. on suppose que $\sin\alpha > 0$, ce qui signifie que $\alpha \in (0, \pi)$.

Puisque α est une constante, de Eq.(3.9) ou Eq.(3.10), on obtient $\beta' - \lambda\cos\alpha = q$.donc

$$\beta(s) = (\lambda\cos\alpha + q)s + c, \tag{3.12}$$

où c est nombre réel arbitraire.

En remplace $\alpha' = 0$ et $\beta' - \lambda\cos\alpha = q$, dans Eq.(3.7), on trouve

$$\nabla_T T = -q\sin\alpha\sin\beta e_1 + q\sin\alpha\cos\beta e_2. \tag{3.13}$$

Soit maintenant T, N, B le cadre de Frenet de γ. Puisque $\nabla_T T = \kappa N$, Eq.(3.13) on obtient

$$\kappa = |q|\sin\alpha = constant. \tag{3.14}$$

Par Eq.(3.13) et Eq.(3.14) il s'ensuit que

$$N = sgn(q)(-\sin\beta e_1 + \cos\beta e_2). \tag{3.15}$$

Ensuite, en utilisant Eq.(3.15), Eq.(**??**) et $\beta' - \lambda\cos\alpha = q$, on trouve

$$\nabla_T N = sgn(q)\left(-\cos\beta\left(\frac{\lambda}{2}\cos\alpha + q\right)e_1 - \sin\beta\left(\frac{\lambda}{2}\cos\alpha + q\right)e_2 + \frac{\lambda}{2}\sin\alpha e_3\right).$$

Maintenant on définit le produit croisé $\times$ par $e_1 \times e_2 = e_3$ et nous calculons $B = T \times N$. Alors on obtient

$$B = sgn(q)(-\cos\alpha\cos\beta e_1 - \cos\alpha\sin\beta e_2 + \sin\alpha e_3). \tag{3.16}$$

Puisque $\nabla_T N = -\kappa T + \tau B$, on trouve

$$\frac{\lambda}{2}sgn(q) = -|q|\cos\alpha + sgn(q)\tau. \tag{3.17}$$

Si γ est de Legendre alors de Eq.(3.17), c'est une hélice de Legendre avec $\kappa = |q|$ et $\tau = \frac{\lambda}{2}$.

Si γ est non- de Legendre alors de Eq.(3.17), c'est une hélice inclinée avec $\kappa = |q|\sin\alpha$ et

$\tau = \dfrac{\lambda}{2} + q\cos\alpha$.

Si l'ordre osculateur est 2 (plane dans l'espace), alors à partir de Eq.(3.17) , $\cos\alpha = -\frac{\lambda}{2q}$. donc γ est une cercle avec $\kappa = |q|\sin\alpha$ et d'angle de contact constant $\alpha = \arccos(-\frac{\lambda}{2q})$, où $-\frac{\lambda}{2q} \in [-1, 1]$. Inversement, supposons que γ est une hélice oblique avec $\kappa = |q|\sin\alpha$ et $\tau = \dfrac{\lambda}{2} + q\cos\alpha$, où α est l'angle de contact entre γ et e_3. Alors $\cos\alpha = g(T, e_3)$. Donc T est de la forme Eq.(3.6). En prenant la covariante de Eq.(3.6) par rapport à T, puisque α est une constante, on a

$$\nabla_T T = (\beta' - \lambda\cos\alpha)[-\sin\alpha\sin\beta e_1 + \sin\alpha\cos\beta e_2] = \kappa N$$

Donc on trouve $g(e_3, N) = 0$. Par conséquent, e_3 peut être écrit comme

$$e_3 = \cos\alpha T + \mu B, \tag{3.18}$$

où $\mu = \mp\sin\alpha$ est une constante réelle puisque $e_3 = 1$. par 3.18, par différenciation covariante, on a

$$\frac{\lambda}{2}\varphi T = (\tau\mu - \kappa\cos\alpha)N, \tag{3.19}$$

qui donnée

$$\frac{\lambda^2}{4}g(\varphi T, \varphi T) = \frac{\lambda^2}{4}\sin^2\alpha = (\tau\mu - \kappa\cos\alpha)^2. \tag{3.20}$$

Puisque $\kappa = |q|\sin\alpha$ et $\tau = \dfrac{\lambda}{2} + q\cos\alpha$, alors l'égalité 3.20,se transforme en $\mu = sgn(q)\sin\alpha$.à partir de l'équation 3.19, on trouve

$$\varphi T = sgn(q)\sin\alpha N.$$

On utilise la formule de Frenet

$$\nabla_T T = \kappa N = |q|\sin\alpha N = q\varphi T$$

L'équation de LORENTZ 3.5 est alors satisfaite. Donc γ est une courbe magnétique. Si γ est une hélice de Legendre avec $\kappa = |q|$ et $\tau = \frac{\lambda}{2}$, cas ci-dessus, on a

$$\varphi T = sgn(q)N$$

et

$$\nabla_T T = \kappa N = |q|N = q\varphi T,$$

ce qui signifie que γ est une courbe magnétique.
Si γ est un cercle non-Legendre de courbure $\kappa = |q| \sin\alpha$ et d'angle de contact constant $\alpha = \arccos(-\frac{\lambda}{2q})$, puis en prenant $\tau = 0$ et $\cos\alpha = -\frac{\lambda}{2q}$ encore $\nabla_T T = q\varphi T$. Cela implique que γ est une courbe magnétique. ■

3.4 Formule explicite des courbes magnétiques dans $\mathbb{H}_3$

Théorème 3.12 *Les courbes magnétiques oblique normales sur $\mathbb{H}_3$, décrites par la Définition 3.2 ont les formes paramétriques données par :*
a)

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{v}\sin\alpha\sin(vs+c) + d_1, \\ y(s) = -\frac{1}{v}\sin\alpha\cos(vs+c) + d_2, \\ z(s) = (\cos\alpha + \frac{\lambda}{2v}\sin^2\alpha)s - \frac{\lambda}{2v}d_1\sin\alpha\cos(vs+c) - \frac{\lambda}{2v}d_2\sin\alpha\sin(vs+c) + d_3, \end{cases}$$

où $v = \lambda\cos\alpha + q \neq 0$ et c, d_1, d_2, d_3 sont des nombres réels et α désigne l'angle de contact qui est une constante telle que $\alpha \in (0, \pi)$.
b)

$$\begin{cases} x(s) = (\sin\alpha\cos c)s + d_4, \\ y(s) = (\sin\alpha\sin c)s + d_5, \\ z(s) = (-\frac{q}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}\sin\alpha(d_4\sin c - d_5\cos c))s + d_6, \end{cases}$$

où c, d_4, d_5, d_6 sont des nombres réels et α désigne l'angle de contact qui est une constante telle que $\alpha = \arccos(-\frac{q}{\lambda})$, où $-\frac{q}{\lambda} \in [-1, 1]$.

Preuve. *Soit $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc dans $\mathbb{H}_3$.*

En suite, en utilisant les équations Eq.(2.3), l'équation Eq.(3.6)peut être écrite comme

$$\begin{aligned} T &= \sin\alpha\cos\beta(s)(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\lambda y}{2}\frac{\partial}{\partial z}) + \sin\alpha\sin\beta(s)(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\lambda x}{2}\frac{\partial}{\partial z}) + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial z} \\ &= (\sin\alpha\cos\beta(s))\frac{\partial}{\partial x} + (\sin\alpha\sin\beta(s))\frac{\partial}{\partial y} + (\frac{\lambda}{2}x(s)\sin\alpha\sin\beta(s) \\ &\quad -\frac{\lambda}{2}y(s)\sin\alpha\cos\beta(s) + \cos\alpha)\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

tel que $\beta(s) = (\lambda\cos\alpha + q)s + c$.pour trouver les équations explicites, on intégre $\frac{dy}{ds} = T$. Puis en utilisant Eq.(3.21), on obtient

$$\frac{dx}{ds} = \sin\alpha\cos(vs + c), \tag{3.22}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\alpha\sin(vs + c), \tag{3.23}$$

$$\frac{dz}{ds} = (\cos\alpha + \frac{\lambda}{2}x(s)\sin\alpha\sin(vs + c) - \frac{\lambda}{2}y(s)\sin\alpha\cos(vs + c)), \tag{3.24}$$

où $v = \lambda\cos\alpha + q$.

Supposons que $v \neq 0$. Ainsi, l'intégration des équations Eq.(3.22) et Eq.(3.23) se donne

$$x(s) = \frac{1}{v}\sin\alpha\sin(vs + c) + d_1 \tag{3.25}$$

$$y(s) = -\frac{1}{v}\sin\alpha\cos(vs + c) + d_2, \tag{3.26}$$

où $d_1$et $d_2$sont des constants réels. Puis en substituant les équations Eq.(3.25) et Eq.(3.26) dans Eq.(3.24) on obtient

$$\frac{dz}{ds} = \cos\alpha + \frac{\lambda}{2v}\sin^2\alpha + \frac{\lambda}{2}d_1\sin\alpha\sin(vs + c) - \frac{\lambda}{2}d_2\sin\alpha\sin(vs + c).$$

D'où la solution de derniére équation différentielle

$$z(s) = (\cos\alpha + \frac{\lambda}{2v}\sin^2\alpha)s - \frac{\lambda}{2v}d_1\sin\alpha\cos(vs + c) - \frac{\lambda}{2v}d_2\sin\alpha\sin(vs + c) + d_3,$$

tel que d_3 est un constante réelle.

Supposons maintenant que $v = \lambda\cos\alpha + q = 0$. Alors $\alpha = \arccos(-\frac{q}{\lambda})$, où $-\frac{q}{\lambda} \in [-1, 1]$. Donc *à partir des Eq.(3.22), Eq.(3.23) et Eq.(3.24), on a*

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \sin\alpha\cos c, \\
\frac{dy}{ds} &= \sin\alpha\sin c \\
\frac{dz}{ds} &= (-\frac{q}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}x(s)\sin\alpha\sin c - \frac{\lambda}{2}y(s)\sin\alpha\cos c).
\end{aligned}$$

Similaire à la solution du cas précédent, on trouve

$$\begin{aligned}
x(s) &= (\sin\alpha\cos c)s + d_4, \\
y(s) &= (\sin\alpha\sin c)s + d_5, \\
z(s) &= (-\frac{q}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}\sin\alpha(d_4\sin c - d_5\cos c))s + d_6,
\end{aligned}$$

où d_4, d_5 *et* d_6 *sont des constantes réelles.* $\blacksquare$

Exemple 3.13 *Avec les conditions du Théorème 3.12 et* $q = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$ *où* $\alpha = \arccos(-\frac{\lambda}{2q})$ *et* $-\frac{\lambda}{2q} \in [-1,1]$ *on a la formule explicite d'une courbe magnétique dans* $\mathbb{H}_3$ *donnée par*

a)

$$\begin{cases} x(s) = \sqrt{2}\sin(\frac{s}{2}), \\ y(s) = -\sqrt{2}\cos(\frac{s}{2}), \\ z(s) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{1}{2})s, \end{cases}$$

où $v = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 0$ *et* $c = d_1 = d_2 = d_3 = 0$

b)

$$\begin{cases} x(s) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2})s + 1, \\ y(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}}s + 1, \\ z(s) = -s\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{1}{16}\right), \end{cases}$$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}s + 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}s + 1, -s\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{1}{16}\right)\right)$ *où* $c = \frac{\pi}{6}, d_4 = d_5 = 1, d_6 = 0$ *sont des nombres réels et* α *désigne l'angle de contact qui est une constante telle que* $\alpha = \arccos(-\frac{q}{\lambda})$, *où* $-\frac{q}{\lambda} \in [-1,1]$. *(voir les figures 3.2 et 3.3)*

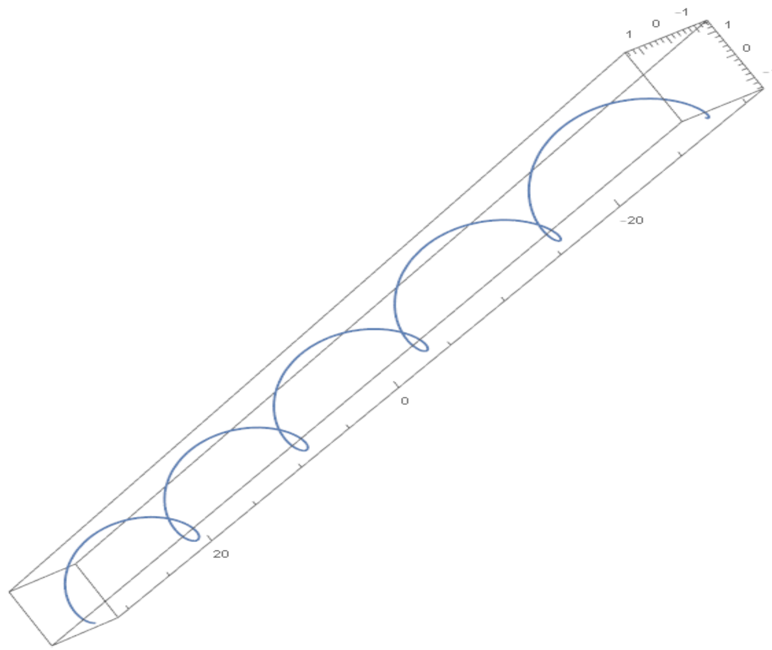

FIG. 3-2 – Courbe magnetique type (a) de $\mathbb{H}_3$ dans $(\mathbb{R}^3, g_{euc})$

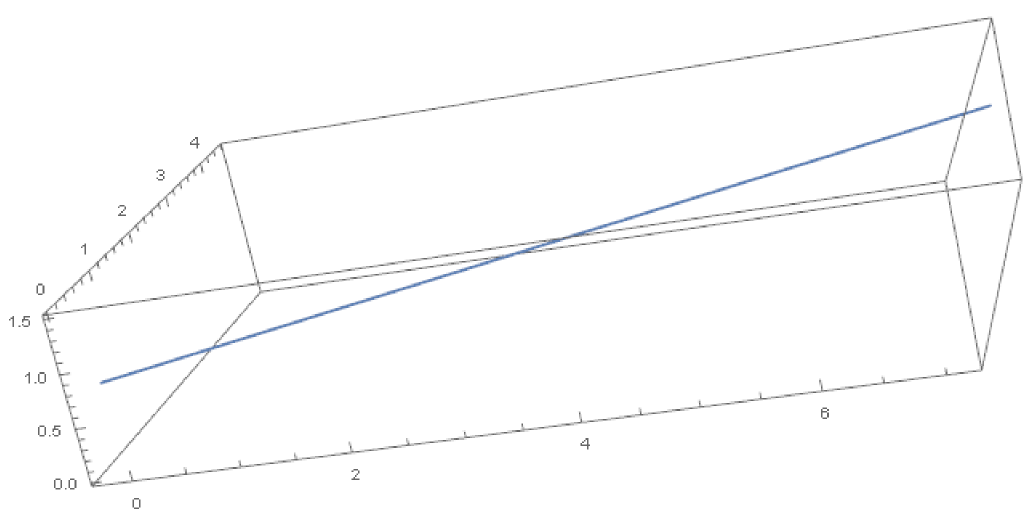

FIG. 3-3 – Courbe magnetique type (b) de $\mathbb{H}_3$ dans $(\mathbb{R}^3, g_{euc})$

Conclusion

Les courbes magnétique dans $\mathbb{H}_3$ sont une généralisation des hélices, d'aprés l'étude qu'on a fait ci dessus à chaque fois qu'on donne deux nombres réels q et α une valeur fixée nous obtenons les équations paramétriques de ces courbes, et nous conclu que les courbes magnétique dans le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_3$ sont soit une géodésique obtenue sous la forme d'une courbe intégral de e_3 ou d'une cercle oblique non-Legendre ou d'une hélice de Legendre ou d'un hélice oblique.

Bibliographie

[1] C. Albert. Le groupe d'Heisenberg et les variétés de contact riemanniennes, Bull. Sci. math., 126, 2002 ; 97-113.

[2] D.E. Blair. Riemannian Geometry of contact and symplectic Manifolds, Progress in Mathematics, vol.203, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2002.

[3] L. Capogna, D. Danielli, S. D. Paules et J. T. Tyson. An introduction to the Heisenberg Group and the Sud-Riemannian Isoperimetric problem, Progress in Mathematics 259, 2007.

[4] E. Cartan. Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier Villars, Paris, 1946.

[5] C. Özgür. On magnetic curve in the 3- dimensional Heisenberg group. Proceedings of the institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of sciences of Azerbaijan 43(2), 2017 ; 278-286.