République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supèrieure et de la recherche scientifique

N? Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Sur l'existance des solutions périodiques pour une équation différentielle à retard dépendant de l'etat

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saîda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analys Mathématiques

par

Boutouizgha fatima zohra [1]

Sous la direction de

Mr A.Halimi

Soutenue le 16 septembre 2020 devant le jury composé de

F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Président
A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail :fatimazohra.boutouizgha@gmail.com

Dédicaces

Je rends grâce a notre dieu le tout misécorde de m'avoir donné la force et la savoir pour pouvoire venir a bout de ce travail je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments d'humit et de gratitude à :

Mes parents, les êtres les plus chers a mon cur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.

Ma trés chère frère **Mohamed**, mes trés chères sur et toute ma famille.

Mon cher ami et mon compagnon dans ma carrière universitaire **Karima** ***M***es amies et tous les étudiants de Math , et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.

Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Tous ceux qui m'on aide a la réalisation de ce modeste travail et tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer reconnaissance envers sa grand générosité.Dieu m'a donné la volonté ,la patient, la santé et la confiance durant tout mes années d'etudes.

Je remercie mes parents d'étre si patients,si généreux et tellement mervilleux, ils ent toujours été une de motivation, d'encouragement et de boucoup de bonheur.

En effet, je voudrai remercier mon université **Dr**.**M**oulay **T**aher, ma famille,mon encadreur et caux qui on participé de prés ou de loin à la realisation de mon mémoire.

Je tiens à remercier sincèrment Monsieur **A**.**H**alimi, qui en tant que mon encadreur, s'est toujours montré à l'écoute tout au long pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Merci à mes professeurs et enseignants d'avoire été là, de nous avoir énormément appris par la qaualité des enseignements qu'ils nous ont prodigués.

J'adresse mes remerciments aussi à notre chef de département de Mathématiques **Mr D**jabouri
je remercie egalement mes camarades de Master et mes amis du
département pour leur conseils et leurs idées.

Enfin, j'adresse mes plus sincéres remerciments à tous mes proches et amis qui mon toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles ordinaires où les équations faisant intervenir une fonction et sa dérivée exprimées aux même temps, ont toujours joué un rôle important dans la modélisation de déférents phénomènes. L'étude de certains problèmes existe la tenue en compte de leurs situation (x) à des instants antérieurs. De telles situations donnent naissance à des équations faisont intervenir non seulement l'état au même temps t mais aussi à des instant antérieurs qu'on notera $t - \tau$. de plus si le retard τ ne dépend pas seulement du temps t mais aussi de l'état x, ce genre d'équations est appelée équation différentielle à retard dépend de l'état . Ces équations se formalisent de la forme suivante

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(x(t))))$$

De telles équations s'appellent équations différentielles à retard dépend de létat. Pour plus de détails nous renvoyons à [10], [15].
Dans ce travail on s'intéresse a l'existence de solution périodique d'une équation différentielle à retard dépend de l'état .

Ce mémoire est consacré à l'étude des équations différentielles à retard et plus particulièrement des équations différentielles à retard dépendant de l'état et il est organisé comme suit :

Le premier chapitre, on rappelle quelques définiton et préliminares consernant les équations différentilles à retard.

Dans le second chapitre, qui est consacré à l'étude des équations différentielle à retard dépendant de l'état. On lance dans un premier temps les définitions et théorèmes nécessaires pour la démonstration de l'existence et d'unicité des solutions. Nous entamons par suite la linéarisation de ces équations.

Le troisième chapitre, on s'intéresse Éxistence de solutions périodiques pour une équation différentielle a retard dépendant de l'état

Dans l'appendice on trouve les outils classiques utilisés dans ce trvail

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Équations différentilles ordinaires

1.1.1 Définition générale

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel normé, une équation différentielle ordinaire voir [10] est une équation dont l'inconnue est une fonction x exprimé sous la forme :

$$F(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{n}) = g(t) \tag{1.1}$$

où F est une fonction continue sur un ouvert $\mathbf{U} \times \mathbf{E^{n+1}}$ appelé domaine.On pratique on préféré travailler avec des équations plus particulières dites explicites i.e :

$$x^{n} = G(t, x, x^{'}, ..., x^{n-1}) \tag{1.2}$$

Toute équation différentielle d'ordre $K, K > 1$ on peut la rendre aux équations différentielles d'ordre 1 en faisant le changement de variable suivant : $\begin{pmatrix} y & = & x^{'} \\ y^{'} & = & x^{''} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ y^{n-1} & = & x^{n} \end{pmatrix}$

Définition 1.1.1. *Soit $f : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert non vide* $\mathbf{U}$ *de $\mathbb{R}^n$ telle qu :*

$$x^{'} = f(t, x) \tag{1.3}$$

On dit que la fonction $x : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définie sur* I, *intervalle de* $\mathbb{R}$, *est une solution de l'équation* 1.3 *si elle est dérivable sur* I *et vérife* $\forall t \in I, (t, x(t)) \in \mathbf{U}$ *et* $x^{'} = f(t, x)$.

Définition 1.1.2. *Soit* $x : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $\tilde{x} : \tilde{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *des solutions de problème* 1.3, *on dit que* $\tilde{x}$ *est un prolongement de* x *si* :$\mathrm{I} \in \tilde{\mathrm{I}}$ *et* $\tilde{x}_{/\mathrm{I}} = x$

Définition 1.1.3. *On dit que une solution* x *est maximale si* y *n'admet pas de prolongement* $\tilde{x}$, *telle que* $\mathrm{I} \subset \tilde{I}$.

Définition 1.1.4. *Toute solution* (I, x) *de* 1.3 *définie sur l'intervalle* $\mathrm{I} = \tilde{\mathrm{I}}$ *toute entier est dite globale*

Lemme 1.1.1. *si* f *est de classe* C^n *sur* $\mathrm{I} \times \mathbb{R}^n$ *alors tout solution de*1.3 *est de class* C^{n+1}

1.1.2 Éxistence et unicité de solution

Définition 1.1.5. *(Fonction lipschitzienne)*

1. *On dit que la fonction* $f : \mathrm{I} \times \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est globalement lipschitzienne par rapport à* x *s'il existe* $L \geq 0$ *telle que* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I$, *on a*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

2. *On dit que* f *est localement lipschitzienne par rapport à* x *s'il existe un voisinage* V *de* (t_0, x_0) *et une constante* $L \geq 0$ *telle que* $\forall (t, X_1) \in V, \forall (t, X_2) \in V$ *,on a*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L(t_0, x_0)\|x_1 - x_2\|$$

3. *si* $0 \leq L \leq 1$ *on dit que* f *est contractante.*

Remarque 1.1.1. .

1. *Si* f *est de classe* C^1 *alors elle est localement lipschitzienne.*
2. *Si* f *est continue et linéaire alors elles localement lipschitzienne.*

Lemme 1.1.2. ***(Lemme de Gronwall)***
Soit $u \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$. *Supposons qu'il existe deux fonctions* a *et* b *dans* $C([0, T], \mathbb{R}_+)$ *telles que pour tout* $t \in [0, T]$ *si :*

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau$$

alors

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau)\exp(\int_\tau^t a(s)ds)d\tau$$

Théorème 1.1.1. ***(Cauchy-Lipschitz)***
Soit $f : \mathrm{I} \times \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application continue et localement lipschitzienne par rapport à* x *alors* $\forall (t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbf{U}$ *il existe une unique solution* $x \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau)]$ *avec* $\tau \geq 0$ *du problème 1.3 avec la condition initiale* $x(t_0) = x_0 \quad \forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$

Théorème 1.1.2. ***(Existence globale)***
On suppose $f \in C(\mathrm{I} \times \mathbf{U}, \mathbb{R}^n)$ *est globalement lipschitzienne par rapport à* x *alors* $\forall (t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbf{U}$ *il existe un unique* $x \in C^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ *solution de 1.3.*

Théorème 1.1.3. ***(Unicité globale)***
Soient x_1 *et* x_2 *deux solutions de 1.3 définies de* I *à valeur dans* $\mathbb{R}^n$ *avec* f *est localement lipschitzienne. si* x_1 *et* x_2 *coïncident en un point de* I *alors* $x_1 = x_2$

1.2 Équations différentielle à retard constant

Définition 1.2.1. *On appelle équation différentielle à retard constant, une équation différentielle de la forme*

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \tag{1.4}$$

où$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, et τ un nombre réel strictement positif que l'on appelle le retard.

Remarque 1.2.1. *: Pour déterminer la solution de l'équation différentielle sur un intervalle* $[t_0, t_0 + \tau]$*, il faut connaître* $x(t)$ *sur un intervalle antérieur* $[t_0 - \tau, t_0]$*. Soit . une fonction continue sur l'intervalle* $[t_0 - \tau, t_0]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

1.3 Équation différentièlle à retard dépendant de l'état :

Définition 1.3.1. *On appelle équation différentièlle à retard dépendant de l'état,une équation de la forme :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(x(t)))), & \text{pour tout} \quad t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & \forall t \in [-\sigma, 0] \end{cases} \tag{1.5}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,*fonction continue et* $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty), \sigma = \max_{x \in \mathbb{R}} \tau(x)$ *et* $\phi \in C([-\sigma, 0], R)$.

Remarque 1.3.1. *On remarque que* τ *est fonction de* $x(t)$.

1.4 Èquation différentielle à retard variable de type neutre

Définition 1.4.1. *On appelle une équation différentielle a retard variable de type neutre,une équation différentielle de la forme*

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x((t - \tau(t)), x^{'}(t - \tau(t))) \tag{1.6}$$

ou $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\tau(t) > 0$ *pour tout* t*§§§§§§§*

1.5 Solution d'une équation à retard dépend de l'état

Définition 1.5.1. *On dit que la fonction* x *est une solution de l'équation si il éxiste* $\delta > 0, A > 0$ *telle que* x *est continument différentiable sur l'intervalle* $[\delta - \tau, \delta + A]$ *est satisfait l'équation pour* $t \in [\delta, \delta + A]$

1.6 Solution périodique

Définition 1.6.1. *une solution* x *est dit périodique de périod* $\tau > 0$ *si elle vérifie de plus*

$$x(t + \tau) = x(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Dans ce travail on s'intéresse aux équation différentielle à retard*

1.7 Quelques méthodes de résolution des EDR

Contrairement aux équations différentielles ordinaires,la condition initiale d'une équation ne suffit pas pour trouver une solution ; il faut y ajouter une infinité des points qui décrivent un segment particulier de largeur du retard étudié, c'est à dire le segment $[-1, 0]$ de longueur 1. C'est en cela que les systèmes à retard font partie de classe plus générale des système à dimension infinie ce qui rend complexe leur étude. Dans cette partie nous entamons la résolution de cette équation par une méthode analytique dite "pas à pas" et deux autres numériques, de Belman et d'Euler.

1.7.1 Résolution par méthode pas à pas

Considérons le système à retard suivant :

$$\begin{cases} x^{'} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \\ x_{t_0} = \varphi, \end{cases} \tag{1.7}$$

où φ est un élément de C.

On se ramène à la résolution d'une équation différentielle ordinaire, pour cela pour t appartenant au segment $[t_0, t_0+\tau]$ on remplace $x(t-\tau)$ dans 1.7 par $\varphi(t-t_0+\tau)$. Ce qui réduit le problème à la détermination de la solution de l'équation

$$\begin{cases} x^{'} = f(t, x(t), \varphi(t-t_0-\tau)), \\ x_{t_0} = \varphi(0), \end{cases}$$

La solution étant définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$ ce processus peut être réitéré pour les intervalle $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau], [t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ et ainsi de suite jusqu'à définir complètement la solution $x(t)$ Par cette méthode l'équation $f(tx(t), y(t-\tau))$ admet les solutions suivantes sur les différents intervalles où segments.

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \forall t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ x_1(t) & \forall t \in [t_0, t_0 - \tau] \\ x_2(t) & \forall t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau] \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) & \forall t \in [t_0 + (n-1), t_0 + n\tau] \end{cases}$$

où $x_1, x_2........., x_n$ représentent les solutions locales constantes de problème, avec la solution globale est donnée comme suit :

$$x(t) = \varphi(t) + \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

De ce qui précède on déduit que, la méthode des pas nous donne l'existence de solutions et ceci nous mène à énoncer les définitions suivantes :

Définition 1.7.1. *Par la méthode des pas, tout fonction φ continue sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ définit une solution de l'équation 1.4.*

Définition 1.7.2. *Si de plus f est localement lipschitzienne par rapport à la troisième argument "$x(t - \tau)$", alors la solution est unique.*

Exemple 1.7.1. *Considérons l'exemple biologique de taille $P(t)$ à l'instant t, soumise à des processus de reproduction ou de disparition avec que $P^{'}(t)$ représente la vitesse de croissance. Cette population sera gouvernée par l'équation différentielle à retard suivante :*

$$P^{'}(t) = K\left[1 - \frac{P(t-\tau)}{\rho}\right]P(t) \tag{1.8}$$

où le facteur $1 - \frac{P(t-\tau)}{\rho}$, joue le rôle de régulateur. Passant à l'intégration de l'équation 1.8 qui s'écrira sous la forme intégrale suivante :

$$\int_0^t \frac{P^{'}(s)}{P(s)}ds = \int_0^t K\left[1 - \frac{P(t-\tau)}{\rho}\right]ds \tag{1.9}$$

Remarquons que pour résoudre cette équation sur l'intervalle $[0, \tau]$, il faut connaitre $P(t)$ sur $[-\tau, 0]$.
Ainsi, on considère une fonction θ, continue sur $[0, \tau]$ et on pose comme condition initiale $P(t) = \theta(t)$ sur l'intervalle $[0, \tau]$. Posons le changement de variable $u = s - \tau$, pour $t \in [0, \tau]$ alors 1.9 devient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{P^{'}(s)}{P(s)} &= \int_{-\tau}^{t-\tau} K\left[1 - \frac{P(u)}{\rho}\right]du \\
&= \int_{-\tau}^{t-\tau} K\left[1 - \frac{\theta(u)}{\rho}\right]du
\end{aligned}$$

donc la solution sur $[0,\tau]$ est donnée par :

$$P_1(t) = P_0 \exp\left(\int_{-\tau}^{t-\tau} K\left[1 - \frac{\theta(u)}{u}\right] du\right), \quad avect \in [0,\tau]$$

On refait l'opération sur $[\tau, 2\tau]$ on considérons la condition initiale $P(t) = P_1(t)1$ sur $[0,\tau]$ et ainsi de suite.

Exemple 1.7.2. *On propose un exemple plus spécifque sur lequel on applique la méthode des pas.*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = x(t-1) \\ x(t) = a \end{cases}$$

▷ La résolution sur $[0,1]$

Soit $t \in [0,1]$

$$\int_0^1 x^{'}(s)ds = \int_0^1 x(s-1)ds$$

Posons $u = s-1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{'}(s)ds &= \int_{-1}^{t-1} x(u)du \\ &= \int_{-1}^{t-1} adu \\ &= at \end{aligned}$$

donc

$$x(t) = at + x(0) = at + a$$

posons $x_1(t) = at + a$ sur $[0,1]$

▷ La résolution sur $[1,2]$

On considère la condition initiale :$x_{[0,1]} = x_1$ Pour $t \in [1,2]$ on obtient :

$$\int_1^t x^{'}(s)ds = \int_1^t x(s-1)ds$$

en posant $u = s - 1$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_1^t x^{'}(s)ds &= \int_0^{t-1} x(u)du \\
&= \int_0^{t-1} x_1(u)du \\
&= \int_0^{t-1} (au + u)du \\
&= \left[\frac{au^2}{2} + au\right]_0^{t-1}
\end{aligned}$$

il s'en suit que, $x(t) - x(1) = \frac{a}{2}(t^2 - 1)$ or $x(1) = x_1(t) = 2a$
alors

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}$$

posons $x_2(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}$ pour n'importe quel $t \in [1, 2]$

▷ La résolution sur $[2, 3]$

On considère la condition $x_{[1,2]} = x_2, \forall t \in [2, 3]$ on a :

$$\int_2^t x^{'}(s)ds = \int_2^t x(s-1)ds$$

Gardons le même changement de variable on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_2^t x^{'}(s)ds &= \int_1^{t-1} x(u)du \\
&= \int_1^{t-1} x_2(u)du \\
&= \int_1^{t-1} (\frac{a}{6}u^3 - \frac{3}{2}au)du \\
&= \left[\frac{a}{6}u^3 - \frac{3}{2}au\right]_1^{t-1} \\
&= \frac{a}{6}((t^3) - 3t^2 - 1) + \frac{3a}{2}(t-1) - \frac{5a}{3} \\
&= \frac{a^3}{6} - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a
\end{aligned}$$

On a alors :

$$x(t) - x(2) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a$$

or $x(2) = \frac{7}{2}$ alors $x(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a$
Posons $x_3(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a$, $\forall t \in [2,3]$

L'objective de la partie qui suit est de présenter quelques méthodes d'analyse numérique pour les équations différentielles à retards. On considère les équations à retard unique et constant.

1.7.2 Méthode de Belman

On considère l'équation munie de la condition initiale :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \\ x_{t_0} = \varphi, \in C \end{cases} \tag{1.10}$$

Soit : $x_{(i+1)}(\theta) = x(t_0 + \tau(\theta + i))$ avec $0 \leq \theta \leq 1$; et $i = -1, 0, 1, 2, ...$; La variable θ correspond donc à un changement qui normalise le retard à $\tau = 1$.
Pour $i = -1$,on trouve la condition initiale :$x_0(\theta) = \varphi(\tau(\theta - 1))$,avec $\theta \in [0,1]$ Selon le principe de méthode pas-à-pas, la fonction x_{i+1} (pour $i = 0, 1, ...$) est solution de l'équation

$$x'_{(i+1)}(\theta) = \tau f(t_0 + \tau(\theta + i), x_{i+1}(\theta), x_i(\theta)) \tag{1.11}$$

$$x_{(i+1)}(0) = x_i(1) \qquad 0 \leq \theta \leq 1 \tag{1.12}$$

Ce problème peut être résolu en utilisant n'importe quelle méthode pour les équations différentielles ordinaires. Il y a cependant deux inconvénients majeurs à cette approche. Premi èrement les valeurs calculées de $x_{(i)}$ doivent être gardées en mémoire jusqu'à la fin du calcule de $x_{(i+1)}$, deuxièmement on ait besoin d'une valeur de $x_{(i)}$ en un point que l'on n'a pas calculé. En effet les algorithmes les plus efficaces de résolution numériques d'une équation différentielle sont à pas variable. Dans un tel cas, la valeur désirée est obtenue par interpolation.

Pour remédier à ces inconvénients,Belman(1961) à proposé la technique suivante : Comme précédemment, x_1 est déterminé numériquement à partir du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_{(1)}(\theta) = \tau f(t_0 + \tau(\theta + i), x_{(1)}(\theta), \varphi(\theta - 1))) \\ x_1(0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{1.13}$$

Puis les fonctions $x_{(1)}$ et $x_{(2)}$ sont déterminées simultanément en résolvant le système formé par les deux premiers équations (1.11) , avec valeurs initiales
$x_{(1)}(0) = \varphi(0); x_{(2)}(0) = \tilde{x}_1(1)$ et $x_{(3)}(0) = \tilde{x}_2(1)$.

En procédant de cette façon, la suite complète $x(1), x(2), \ldots$, est obtenue. Cet algorithme est bien évidemment couteux en temps de calcule, mais il permet de résoudre les problèmes pré- sentant des discontinuités dans les conditions et de ce fait, il peut être employer pour initialiser une autre méthode plus simple et efficace.

1.7.3 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la plus simple de toutes les méthodes numérique à retards. Pour un pas constant h de la forme τ/m, où m est un entier, la solution approchée x est générée par l'équation aux différences.

$$\tilde{x}(t_{n+1)} = \tilde{x}(t_n) + hf(t_n, \tilde{x}(t_{(n)}), \tilde{x}(t_{n-m}))$$

$$\tilde{x}(t_{n)} = \varphi(nh) \quad \text{pour} - m \leq n \leq 0$$

où $t_n = t_0 + nh$

Remarque 1.7.1. *Cette méthode est d'ordre* 1*, sous certaines hypothèses sur* f*.*

1.8 Théorèmes de point fixe

Comme l'attestent les très nombreux travaux paraissant aujourd'hui au niveau international, les théorèmes de point fixe sont des outils précieux et très intéressants en mathématiques, surtout pour la résolution des équations différentielles non linéaires. Pour résoudre un problème par la technique du point fixe, nous avons besoin d'une application appropriée, d'un ensemble convenable apte pour contenir les solutions du problème et d'un théorème de point fixe qui donne certaines conditions sous lesquelles cette application ad- met au moins un point fixe. On va voir maintenant trois théorèmes de point fixe, le théorème de point fixe de Banach qui donne un critère général dans les espaces métriques complets, celui de Schauder qui est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet au moins un point fixe et finalement, le théorème Brouwer.

Définition 1.8.1. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace de Banach,* $T : E \longrightarrow E$ *une application. On appelle point fixe de* T *tout point* $x \in E$ *tel que* $T(x) - x = x$ *Ce qui est équivalent à dire que l'équation* $T(x) - x = 0$ *possède une solution*

Définition 1.8.2. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $T : E \longrightarrow F$ *une application. On dit que* T *est lipschitzienne de rapport* $k \geq 0$ *sur* E *si*

$$\|T_x - T_y\|_F \leq k\|x - y\|_E \tag{1.14}$$

En particulier, si $1 > k \geq 0, T$ *est dite contraction ou application contractante de rapport* k.

1.8.1 Théorème de point fixe de Banach

En 1922; le mathématicien polonais Stefan Banach a prouvé son célèbre théorème (connu aussi sous le nom de théorème de l'application contractante ou théorème de Banach) qui garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une application contractante d'un espace métrique complet dans luimême. En outre, il est basé sur un processus itératif assurant que ce point fixe peut être obtenu comme limite d.une suite itérée et qu'il est possible d'estimer la précision avec laquelle cette limite est atteinte.

Théorème 1.8.1. *voir[4]*
Soit $(E, \|.\|_E)$ *un espace de Banach et* $T : E \longrightarrow E$ *une application contractante de constante* $k \in [0, 1[$. *Alors il existe un point unique* $x \in E$ *tel que* $T(x) = x$.

1.8.2 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder élaboré en 1930. assure l'existence d'au moins un point fixe pour une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 1.8.2. *Soit M un sous ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach E et $T : M \longrightarrow E$ une application compacte. Alors T possède un point fixe.*

Remarque 1.8.1. *Si M est compact et convexe, il suffit que T soit continue pour avoir un point fixe pour T.*

1.8.3 Théorème de point fixe de Brouwer

Théorème 1.8.3. *(Théoréme de Brouwer(1910)[3]) Soit C un compact.convex non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \longrightarrow C$ une application continue.Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Chapitre 2

Équations différentielles à retard dépendant de l'état

On s'intéresse maintenant aux équations à retard dépendant de l'état, où l'évolution de la variable x à l'instant t dépend de la valeurs de x à l'instant $t - \tau(x(t))$ et le retard dépend également de la valeur de x. Une telle équation s'écrit sous la forme :

$$x^{'} = f(t, x(t), x(t - \tau(x(t)) \tag{2.1}$$

Ces équations posent des nombreux problèmes théoriques sur quel intervalle défnir la condition initiale,par exemple pour une équation à retard discret τ , la condition initiale doit être définie sur un intervalle de longeur τ typiquement $[-\tau, 0]$. Pour un équation à retard dépendant à l'état en $t = 0$ il est nécessaire d'accéder à la valeurs $x(-\tau(x(0)))$.
On pourrait donc considérer une condition initiale φ définit sur l'intervalle $[-\tau(\varphi(0)), 0]$. Si la fonction τ est supposée croissante, alors en $t = \varepsilon$ il faut accéder à la valeur $x(\varepsilon - \tau(x(\varepsilon)))$ et il se peut que :$\varepsilon - \tau(x(\varepsilon)) < -\tau(x(0)) = -\tau(\varphi(0))$. C'est à dire :

$$\frac{\tau \circ x(\varepsilon) - (\tau \circ x)(0)}{\varepsilon} > 1$$

Ainsi, si la fonction $\tau \circ x$ est fortement croissante en $t = 0$, on peut même faire face à un problème de définition de la condition initiale. On est rapidement amène à considérer des fonctions τ bornées et des conditions suffisamment régulières.

Les premiers travaux notables sur les équations diférentielles à retard dépendant de l'état ont été réalisés dans les années 1960, Driver étudié l'existence, l'unicité et la dépendance aux conditions initiales des solutions, un travail complète par la suite par des nombreux auteurs qui se sont intéressés à l'existence de solutions périodiques pour ces équations.

On a eu reccours pour ce chapitre aux ouvrages suivants :[11],[7], [1],[12].

2.1 Équations différentielles à retard dépendant de l'état

Définition 2.1.1. *On appelle équation diférentièlle à retard dépendant de l'état ;une équation de la forme :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(x(t)))), & \textit{pour tout} \quad t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & \forall t \in [-\sigma, 0] \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,*fonction continue et* $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty), \sigma = \max_{x \in \mathbb{R}} \tau(x)$ *et* $\phi \in C([-\sigma, 0], R)$.

2.2 Éxemple et commentaires :

Citons l'exemple suivant qui à été proposé récemment par Arino, Hbid et Bravo [13], comme modèle décrivant l'évolution d'une population de poissons dont les larves consomment une nourriture, supposée limitée. Le modèle est sous la forme suivant

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))) \\ \tau^{'}(t) = h(x(t-\tau(t))) \end{cases}$$

où x est le nombre total de la population et τ représente la durée nécessaire, pour que les larves deviennent des juvéniles, la deuxième équation différentielle ordinaire, elle dépend de la variable x, c'est pourquoi l'équation est dite, équation différentielle à retard dépendant de l'etat. Ces dernières années, ces équations ont fait l'objet de plusieurs études, voir par exemple Kuang et Smith [14], Mallet-Aret et Nussbaum [11] qui ont étudié les équations de la forme

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))), t \geq 0$$

2.3 Éxistences et unicité de la solution :

Soit l'équation différentielle à retard dépendant de l'état :

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(x(t)))), & \text{pour tout} \quad t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & \forall t \in [-\sigma, 0] \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,fonction continue et $r : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty), \sigma = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} \tau(x)$ et $\phi \in C([-\sigma, 0], R)$.

Supposons que f et τ vérifient les hypothèses suivantes

1. f est localement lipschitzienne, par rapport à $x(t)$ et $x(t-\tau(x(t)))$.
2. τ est localement lipschitzienne
3. f est bornée sur les bornes

Pour un nombre positif T, soit X l'ensemble des fonctions continues de $[-\sigma, T]$ à valeurs réelles, muni de la norme du sup, X est un espace de Banach pour ω et p, deux réels positifs, soit C_ϕ le sous ensemble de X, définit par :

$$C_{\phi,T} = \begin{cases} x \in X, x(s) = \phi(s) & \forall s \in [-\sigma, 0] \\ \|s\| \leq p, \quad et \quad |x(t) - x(s)| \leq \omega|t-s| & \forall t \in [-\sigma, T] \end{cases}$$

Proposition 2.3.1. *$C_{\phi,T}$ est compact.*

preuve :

a/ Montrons d'abord que $C_{\phi,T}$ est relativement compact, pour cela, il suffit d'aprés le théorème d'Ascoli soit borné et uniformément equicontinu.

i/ Il est clair que $C_{\phi,T}$ est bornée par construction

ii/ Pour tout $t, s \in [-\sigma, \tau]$ et pour tout $x \in C_{\phi,T}$ on a

$$|x(t) - x(s)| \leq \omega|t-s| \tag{2.3}$$

pour $\epsilon \geq 0$, pour $|t-s| \leq \frac{\epsilon}{\omega}$,2.3 donne $|x(t) - x(s)| \leq \epsilon$ ce qui prouve que $C_{\phi,T}$ est relativement compact.

b/ Montrons maintenant que $C_{\phi,T}$ est fermé.

Prenons donc, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $C_{\phi,T}$, telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$ et montrons que $x(t) \in C_{\phi,T}$

D'une part, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n(s) = \phi(s); \forall s \in [-\sigma, 0]$:
En passant à la limite, on trouve :
$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \phi(t) \quad \forall s \in [-\sigma, 0]$:

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x_n(n)| + |x_n(s) - x_n(t)| + |x_n(t) - x(t)| \tag{2.4}$$

D'après la définition de la limite , 2.4 devient :

$$|x(s) - x(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} + u|s - t| + \frac{\omega}{2} = \epsilon + R|s - t|, \forall \epsilon \geq 0, \quad R \geq 0$$

Ainsi :

$$|x(s) - x(t)| \leq \omega|s - t|$$

c/ $\|x\| = \| \lim_{n\to\infty} x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \rho$.

Alors $x \in C_{\phi,T}$ et par consequent $C_{\phi,T}$ est fermé ; on conclut que $C_{\phi,T}$ est compact.

Théorème 2.3.1. *Supposons que les hypothèses* 1,2 *et* 3 *sont vérifiées, alors pour toute fonction ϕ dérivable avec $|\phi'(t)| \leq R, (R > 0)$, alors le problème* 2.3 *admet une solution unique $x(t)$.*

Preuve : Pour la démonstration, on applique le théorème du point fixe.

1. Soit N la borne de ϕ, M la borne de f, supposons que $R \geq M$ Pour $\omega = R$ et $p = N + TM$, on définit,$C_{\phi,T}$.
   D'aprés la proposition, précédente, $C_{\phi,T}$ est compact.
2. Montrons qu'il est convexe :
   a/ soit $\alpha \in [0, 1]$ et $x, y \in C_{\phi,T}$:

$$\begin{aligned} \alpha x(s) + (1-\alpha)y(s) &= \alpha\phi(s) + (1-\alpha)\phi(s), \forall s \in [-\sigma, 0] \\ &= \phi(s), \forall s \in [-\sigma, 0] \end{aligned}$$

   b/ Pour tout $t, s \in [-\sigma, T]$ on a :

$$\begin{aligned} |\alpha x(s) + (1-\alpha)y(s) - \alpha x(t) + (1-\alpha)y(t)| &\leq |\alpha(x(s) - x(t)) + (1-\alpha)(y(s) - y(t)| \\ &\leq \alpha|(x(s) - x(t))| + (1-\alpha)|(y(s) - y(t))| \\ &\leq \alpha R|s - t| + (1-\alpha)R|s - t| \\ &\leq R|s - t| \end{aligned}$$

   Alors $\alpha x + (1-\alpha)y$ est lipschitzienne sur $[-\sigma, T]$, avec la constante de lipschitz.

c/ x et y sont bornées par p, alors :

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leq p$$

Donc $\alpha x + (1-\alpha)y \in C_{\phi,T}$ et par suite $C_{\phi,T}$ est convexe.

3. Posons $J = [-\sigma, T]$ et considérons l'application :
$F : C_{\phi,T} \to X$, définie par :

$$(Fx)(t) = \begin{cases} \phi(t) & -\sigma \leq t \leq 0 \\ \phi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s-\tau(x(s)))ds, & \forall 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

si F est complétement continue et $F(C_{\phi,T}) \subset C_{\phi,T}$; Alors F admet un point fixe . Ce point fixe est une solution de l'équation 2.3

$\triangleright$ Montrons que $F(C_{\phi,T}) \subset C_{\phi,T}$.

On sait que$(Fx)(t) = \phi(t)$ pour $\forall -\sigma \leq t \leq 0$ comme ϕ est une fonction bornée par N et R lipschitzienne alors $F(C_{\phi,T}) \subset C_{\phi,T}$

a/ Si $x \in C_{\phi,T}$, on a pour $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq |\Phi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s-\tau(x(s))))ds| \\ &\leq |\Phi(0)| + \int_0^t M ds \\ &\leq |\Phi(0)| + TM \\ &\leq N + TM \\ &= \rho \end{aligned}$$

Donc F est bornée

b/ Pour prouver que $F(x)$ est R-lipschitzienne, il suffit de montrer que $|(F(x)(t))'|$ est bornée par R

En effet :

$$(F(x)(t))' = f(t, x(t), x(t-\tau(x(t))))$$

$\|(F(x)(t))'\| \leq M$ d'aprés l'hypothése(3).

$$\|(F(x)(t))'\| \leq M \leq R$$

4. Montrons maintenant que F est complètement continue

a/ Supposons que $x_j \in C_{\phi,T}$ et$\|x_j - x\|_\infty \to 0$.

Notons par $\rho_j(s) = \tau(x_j(s)), p(s) = \tau(x(s))$,$l$ la constante de lipschitz de τ et k la constante de lipschitz de f.

Donc pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$
\begin{aligned}
|(Fx_j)(t) - (Fx)(t)| &\leq |\int_0^t f(s, x_j(s), x_j(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho(s)))|ds \\
&\leq \int_0^t |f(s, x_j(s), x_j(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho(s)))|ds \\
&\leq \int_0^t |f(s, x_j(s), x_j(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho_j(s)))|ds \\
&+ \int_0^t |f(s, x(s), x(s - \rho_j(s))) - f(s, x(s), x(s - \rho(s)))|ds \\
&\leq k \int_0^t k \sup\{\sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s) - x(s)| \\
&, \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho_j(s))|\}ds \\
&+ k \int_0^t k \sup\{\sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s) - x(s)| \\
&, \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho(s))\}ds \\
&\leq \int_0^t k \sup\{\|x_j - x\|_\infty, \|x_j - x\|_\infty\}ds \\
&+ \int_0^t k \sup\{0, \sup_{s\in[\sigma,T]} |x(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho(s))|\}ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t k \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s - \rho_j(s)) - x(s - \rho(s))|ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t k \sup_{s\in[-\sigma,T]} R|s - \rho_j(s) - s - \rho(s)|ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t kR \sup_{s\in[-\sigma,T]} |\rho_j(s) - \rho(s)|ds \\
&\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t kRl \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x_j(s) - x(s)|ds
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} |F_j(x)(t) - F(x)(t)| &\leq T[k\|x_j - x\|_\infty + kRl\|x_j - x\|_\infty] \\ &\leq Tk[1 + Rl]\|x_j - x\|_\infty \end{aligned}$$

Donc F est lipschitzienne $C_{\phi,T}$ et par conséquent elle est continue.

b/ F est compact, en effet :

Soit B un ensemble borné de $C_{\phi,T}$.

$\overline{F(B)}$; un fermé inclu dans $C_{\phi,T}$ qui est compact par conséquent, $\overline{F(B)}$ est compact. Ainsi F est complètement continue.

Le théorème du point fixe, nous donne.

Pour tout nombre $T \geq 0$, il existe une fonction $x \in C_{\phi,T}$,tel que

$(Fx)(t) = x(t)$, pour tout $t \in [0, T]$

Dans ce qui suit, on montre, l'unicité de la solution.

On procède par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux solutions $x(t)$, $y(t)$; pour $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |\int_0^t (f(s, x(s), x(s - \tau(s))) - f(s, y(s), y(s - \tau(s))))ds| \\ &\leq \int_0^t |(f(s, x(s), x(s - \rho(s))) - f(s, y(s), y(s - \rho(s))))ds| \\ &\leq \int_0^t k\|x_j - x\|_\infty ds + \int_0^t kRl \sup_{s\in[-\sigma,T]} |x(s) - y(s)|ds \\ &\leq (1 - p)k[1 + Rl]\|x - y\|_\infty \\ &\leq Tk[1 + Rl]\|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

pour $T \leq \frac{1}{k[1+Rl]}$ on obtient :

$$|x(t) - y(t)| < \|x - y\|_\infty$$

contradiction, et par conséquent,on a :

$x(s) = y(s)$ pour $s \in [0, T]$.

Exemple 2.3.1. *Considérons l'équation suivante :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = -2\sin(x(t - \frac{(-x+1)}{2})), & t \geq 0 \\ x(t) = e^{-t}, & t \leq 0 \end{cases}$$

$\tau(x(t)) = \frac{(-x+1)}{2}$,$f(t, x(t), x(t - \tau(x(t)))) = -2\sin(x(t - \frac{(-x+1)}{2}))$
et $\phi(t) = e^{-t}$

Il est clair que τ est une fonction lipschitzienne, f est de classe C^1, par rapport à x, donc elle est localement lipschitzienne et comme la fonction $sin(x)$ est bornée par 1 pout tout x, alors f est bornée par 2.
de même ϕ est une fonction de classe C^1 et sa dérivée est bornée par 1. Alors toutes les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, donc cette équation, admet une solution unique.

2.4 Solution constante d'une équation différentielle à retard dépendant de l'état non linéaire :

2.4.1 Principaux résultats :

Considérons l'équation à retard dépendant de l'état non linéaire suivante :

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t), \tau(x(t))), & t \geq 0 \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \varphi \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{2.5}$$

Si $x(t) = \overline{x(t)} = x$ est solution constante de (2.5) tel que
$x : [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}$, alors on obtient :

$$\begin{cases} f(t, \overline{x}, \overline{x}), & t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t) = \overline{x}, & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{2.6}$$

Soient les données suivantes :
$\overline{x_t}(s) = \overline{x}(t+s) = \overline{x_t}$, pour $s \in [-\tau, 0]$, l'espace de Banach des fonctions continues $\overline{x_t} : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$ muni de la norme :$\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| \,;\, \text{pour } s \in [-\tau, 0]\} = \|\overline{x}\|$ dénoté par $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$.
Un voisinage fermé de rayon Q, d'un ensemble A dans un espace de Banach X est dénoté par $B_X(A; \theta) = \{x.X; |x - a|_X \leq Q, \quad pour \quad a \in A\}$, notons par $|.|$ la norme de $\mathbb{R}, \mathcal{L}(C, \mathbb{R})$ désigne l'espace des applications de C dans $\mathbb{R}$.
Soient les hypothèses suivantes :

H_1 $f : [0, \infty) \times \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, continûment différentielle ; où Ω_1, Ω_2 sont des intervalles de $\mathbb{R}$

H_2 **i/** $\tau : [0, \infty) \times \Omega_3 \to [0, \tau]$ continûment différentielle ; où Ω_3 est un sous-ensemble ouvert de C

ii/ τ est localement, continue, lipschitzienne dans le sens suivant

Pour chaque sous-ensemble, fermé et borné M de C, il existe une constante $L_1 = L_1(M) \geq 0$ telle que

$|\tau(t,\overline{\psi_1}) - \tau(t,\psi_2)| \leq \|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|, \quad t \in [0,T]$ et $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in M$.

$\overline{x} : [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}$, solution constante de (2.5), la réstriction de $\overline{x}$ sur l'intervalle $[-\tau, 0]$ est notée par $\overline{x_0}$, i.e. que $\overline{x}$ est la solution de (2.5) correspondante à la condition initiale $\overline{x_0}$.

On remarque que la continuité de la condition initiale n'est pas suffisante pour l'unicité de la solution.

Pour avoir l'unicité de la solution, il faut que la condition initiale soit au moins localement lipschitzienne, ce qui est le cas pour les conditions initiales de classes C^1 (voir[6]).

On notera ; par $x(t,\varphi)$ n'importe qu'elle solution de (2.5) correspondante à la fonction initiale $\varphi \in C$ et par $\varepsilon(t) = x(t-\tau(t,x_t)), \overline{\varepsilon} = \overline{x}(t-\tau(t,x_t)) = \overline{x}$ on déffinit, donc les ensembles suivants associés à la solution constante $\overline{x}$

$A_1 = x(t); t \in [0,T] = \overline{x}, A_2 = \overline{\varepsilon}(t); t \in [0,T] = \overline{x}$ et $A_1 = \overline{x}(t); t \in [0,T]$, on remarque que $A_1 = A_2$

A_1, A_2 et A_3 sont des sous ensembles compactes d'espaces respectifs $\mathbb{R}$ et C. Puisque $\overline{x}$ est continue, les ensembles Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont des sous ensembles ouverts des espaces $\mathbb{R}$ et C respectivement.

Donc il existe des constantes positives Q_1, Q_2 et Q_3 tel que

$B_{\mathbb{R}}(A_1, Q_1) \subset \Omega_1, B_{\mathbb{R}}(A_2, Q_2) \subset \Omega_2$ et $B_{\mathbb{R}}(A_3, Q_3) \subset \Omega_3$.

Puisque f est continûment différentiable par rapport à son second et troisième argument, il existe une constante $N_1 > 0$ tel que :

$|D_2 f(t, \overline{x}, \overline{x}| \leq N_1$ et $|D_3 f(t, \overline{x}, \overline{x}| \leq N_1$ pour $t \geq 0$.

Lemme 2.4.1. *Considérons (H_1) et soit $x[-\tau, \infty) \to \mathbb{R}$, solution constante de (2.5), pour n'importe qu'elle $s > 0$; $|\varepsilon(t) - \overline{\varepsilon}(t)| \leq \|x_t - \overline{x_t}\|$, pour $t \in [0,s]$ et pour n'importe qu'elle fonction continue $x : [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfaisant $x_t \in B_C(A_3, \theta_3)$ pour $t \in [0,s]$.*

Preuve 2.4.1. *Soit L_1 ; la constante de (H_2) (ii), associé à l'ensemble $B_c(A_3, \theta_3)$; en utilisant la définition de ε et $\overline{\varepsilon}$, l'inégalité triangulaire et le théorème de la valeur* *moyenne ; on obtient :*

$$\begin{aligned}|\varepsilon(t)-\overline{\varepsilon}(t)| &= |x(t-\tau(t,x_t))-\overline{x}(t-\tau(t,\overline{x}_t))| \\ &= |x(t-\tau(t,x_t))-\overline{x}(t-\tau(t,\overline{x}_t))+\overline{x}(t-\tau(t,\overline{x}_t))-\overline{x}(t-\tau(t,\overline{x}_t))| \\ &\leq |x(t-\tau(t,x_t))-\overline{x}(t-\tau(t,\overline{x}_t))|+|\overline{x}(t-\tau(t,\overline{x}_t))-\overline{x}(t-\tau(t,\overline{x}_t))|\end{aligned}$$

on a $\tau\in[0,r]\Rightarrow-\tau\in[-r,0]$, *prenons comme* $-\tau(t,x_t)=\theta$ *; on obtient*

$$\begin{aligned}|\varepsilon(t)-\overline{\varepsilon}(t)| &= \sup_{\theta\in[-r,0]}|x(t+\theta)-\overline{x}(t+\theta)|+\|\overline{x}\||\tau(t,x_t)-\tau(t,x_t)| \\ &= \sup_{\theta\in[-r,0]}|x_t(\theta)-\overline{x}_t(\theta)| \\ &= \|x_t-\overline{x}_t\|\end{aligned}$$

Pour $\overline{x}$ *; solution constante de (2.5) et pour n'importe quel* t *fixé* ≥ 0 *; on définit l'opérateur linéaire* $F(t)$ *tel que* $F(t):C\to\mathbb{R}$, *défini comme suit :*

$$F(t)\psi=D_2f(t,\overline{x},\overline{x})\psi(0)+D_3f(t,\overline{x},\overline{x})\psi(-\tau(t,\overline{x}_t))$$

et la fonction g *: tel que :*
$g:[0,\infty)\times\Omega_3\to\mathbb{R}$ *et* $g(t,\psi)=f(t,\psi(0),\psi(-\tau(t,\psi)))-F(t)\psi$
Il est evident que l'opérateur linéaire $F(t)$ *soit borné, puisque par* (H_2), *il satisfait*

$$|F(t)\psi|\leq\left(\max_{t\in[0,T]}|D_2f(t,\overline{x},\overline{x})|+\max_{t\in[0,T]}|D_3f(t,\overline{x},\overline{x})|)\|\psi\|\right)$$

pour ces notations ; on peut réecrire

$$x^{'}=F(t)x_t+g(t,x_t),t\geq 0 \tag{2.7}$$

qui se traduit aussi par l'équation :

$$y^{'}(t)=F(t)y_t,t\geq 0 \tag{2.8}$$

qui se traduit aussi par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,s)=F(t)u(t,s),t\geq s \tag{2.9}$$

$$\begin{cases}1, & si;t=s\\ 0, & t<s\end{cases} \tag{2.10}$$

Il est comme (voir eq [8]) que la stabilité asymptotique de la solution zéro (trivial) de (2.4 x(s)) est équivalente à sa stabilité exponentielle, i.e. qu'il existe des constantes $K_0 \geq 1$ *et*$\alpha_0 > 0$ *tel que*

$$|u(t,s)| \leq K_0 e^{-\alpha(t-s)}, t \geq s \tag{2.11}$$

La preuve de notre principal théorème sera basée sur la serie de lemmes suivant :

Lemme 2.4.2. *En tenant compte des hypothèse* (H_1) *et* (H_2) *et soit* $\overline{x} : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$*, solution constante correspondante à la fonction initiale* $\overline{x_0}$*, alors il existe une constante* $N_4 > 0$*, tel que pour n'importe qu'elle* $s > 0$

$$|x^{'}(t)| \leq N_4 \|x_t - \overline{x}_t\|, \qquad t \in [0, s] \tag{2.12}$$

et

$$\|x_t - \overline{x}_t\| \leq e^{N_4 t} \|\varphi - \overline{x_0}\|, \qquad t \in [0, s] \tag{2.13}$$

pour n'importe qu'elle solution x de (2.5) satisfaisant

$$t \in B_C(A_3, \theta_3) \tag{2.14}$$

Chapitre 3

L'éxistence d'une s.p pour une E.D.R dépendant de l'état

Dans ce chapitre on résume les résultats du travail d'Arino et Al [15] sur les solutions périodiques non triviales du problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & -f(x(t-\tau(t))) \qquad (3.1-1), \\ \dot{\tau}(t) & = & h(x(t),\tau(t)) \qquad (3.1-2). \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tel que $f(0) = 0$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $h : \mathbb{R} \times [\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}$ telle que $h \in C^1(\mathbb{R} \times [\tau_1, \tau_2], \mathbb{R})$ avec $0 < \tau_1 < \tau_2$.
Ces hypothèses sont supposées satisfaites dans tout le reste de ce chapitre.
Si τ^* est la valeur unique de τ dans $[\tau_1, \tau_2]$ tel que : $h(0, \tau^*) = 0$, le point $(0, \tau^*)$ est un point d'équilibre de 3.1.
Une condition initiale pour le problème 3.1 en $t = 0$ est le couple $(\varphi, \tau_0) \in C([-\tau_2, 0], \mathbb{R}) \times [\tau_1, \tau_2]$.

Définition 3.0.1. *On dit que les couples $(x(t), \tau(t))$ sont solutions du problème 3.1 si et seulement si :*
1)$x(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [-\tau_2, 0]$ et $\tau(0) = \tau_0$,
2)les fonctions x est τ sont continument diférentiables pour $t \geq 0$,
3) les couples $(x(t), \tau(t))$ satisfaisant 3.1.

Définition 3.0.2. *La solution $x(t)$ de l'équation $(3.1-1)$ est dit oscillante si elle admet arbitrairement un grand nombre de zéros.*

Définition 3.0.3. *La solution $x(t)$ de l'équation $(3.1-1)$ est dite lentement oscillante si la distance qui sépare tous deux zéros successifs de la solution x est plus grand que $\max_{t\in\mathbb{R}} \tau$.*

L'idée est basée sur la construction d'un opérateur de type Poincaré dont un point fixe nous donne une solution périodique lentement oscillante du problème 3.1.
Dans la suite on considère les ensembles suivants :

$E = \{(\varphi, \tau_0) \in Lip([-\tau_2, 0], \mathbb{R}) \times [\tau_1, \tau_2] \ \textit{tel que} : \varphi(-\tau_0) = 0 \ \textit{et} \ \varphi \ \textit{est non dcroissante sur} \ [-\tau_0, 0]\}$,

où :

$Lip([-\tau_2, 0], \mathbb{R}) = \{\varphi \in C([-\tau_2, 0], \mathbb{R}) : |\varphi(t) - \varphi(s)| \leq k|t-s| \quad \forall t, s \in [-\tau_2, 0] \ \textit{et} \ k > 0\}$.

3.1 L'éxistence d'une solution lentement oscillante

En plus des hypothèses initiales sur f et h, nous supposons les hypothèses suivantes :
$H_1)$ $\exists L > 0, \forall (x, \tau) \in \mathbb{R} \times [\tau_1, \tau_2]\,;\ h(x, \tau) < \frac{L}{L+1}$,
$H_2)$ $h(x, \tau_1) > 0 \ \textit{et} \ h(x, \tau_2) < 0; \ \forall (x, \tau) \in \mathbb{R} \times [\tau_1, \tau_2]$.
D'aprés la proposition 2 dans [15] le problème 3.1 sous les hyphothèses (H_1) *et* (H_2) admet une solution unique $(x(t), \tau(t))$ pour chaque $(\varphi, \tau_0) \in E$,
i.e $x(t) = \varphi(t)$ sur $[-\tau_2, 0]$ et $\tau(0) = \tau_0$, les équations 3.1 sont satisfaites pour $t \geq 0$.
Cette solution on la note par $(x(\varphi, \tau_0)(t), \tau(\varphi, \tau_0)(t))$. De plus $\tau(t) \in [\tau_1, \tau_2]$ pour chaque $t \geq 0$ et $t - \tau(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 3.1.1. *La propriéte $t - \tau(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ est fondamentale dans la suite de notre travail.*

Lemme 3.1.1. *[15] Si en plus des hypotèses sur f et h, les hypothéses (H_1) et (H_2) sont satisfaites, on a pour $(\varphi, \tau_0) \in E$:*

$$(x(\varphi, \tau_0)(t), \tau(\varphi, \tau_0)(t)) = (x(\varphi^+, \tau_0)(t), \tau(\varphi^+, \tau_0)(t)) \qquad \forall t \geq 0$$

où :

$$\varphi^+(s) = \begin{cases} \varphi(s), & \forall s \in [-\tau_0, 0], \\ 0 & \forall s \in [-\tau_2, -\tau_0]. \end{cases}$$

Preuve :

La fonction $t-\tau(t)$ est croissante d'aprés la remarque 3.1.1, on a :

Pour $t \in [0,\tau_1]$ on a :

$$0-\tau(0) \leq -\tau_0 \leq t-\tau(t) \leq 0,$$

d'où :

$$\varphi(t-\tau(t)) = \varphi^+(t-\tau(t)) \qquad pour \quad t \in [0,\tau_1].$$

D'aprés l'écriture intégrale de3.1 on a :

$$\begin{array}{rcl} x(\varphi,\tau_0)(t) & = & \varphi(0) - \int_0^t f(\varphi(s-\tau(\varphi,\tau_0)(s))ds, \\ & = & \varphi^+(0) - \int_0^t f(\varphi^+(s-\tau(\varphi,\tau_0)(s))ds, \\ & = & x(\varphi^+,\tau_0)(t), \end{array} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \tau(\varphi,\tau_0)(t) & = & \tau_0 + \int_0^t h(x(\varphi,\tau_0)(s),\tau(\varphi,\tau_0)(s))ds, \\ & = & \tau_0 + \int_0^t h(x(\varphi^+,\tau_0)(s),\tau(\varphi^+,\tau_0)(s))ds, \\ & = & \tau(\varphi^+,\tau_0)(t) \end{array} \tag{3.3}$$

De l'unicité de la solution on a :

$$(x(\varphi,\tau_0)(t),\tau(\varphi,\tau_0)(t)) = (x(\varphi^+,\tau_0)(t),\tau(\varphi^+,\tau_0)(t)) \;\; \forall t \in [0,\tau_1].$$

Supposons que l'égalité est vraie pour $t \in [0,k\tau_1]$, et montrons la pour $t \in [0,(k+1)\tau_1]$.
Soit $t \in [0,(k+1)\tau_1]$, on a :

$$0-\tau(0) \leq -\tau_0 \leq t-\tau(t) \leq (k+1)\tau_1 - \tau((k+1)\tau_1),$$

il suit que

$$-\tau_0 \leq t-\tau(t) \leq (k\tau_1 + \tau_1 - \tau((k+1)\tau_1),$$

or $\tau_1 - \tau((k+1)\tau_1) \leq 0$, d'où

$$-\tau_0 \leq t-\tau(t) \leq k\tau_1,$$

donc l'inégalité est vraie pour $t \in [0,(k+1)\tau_1]$.
De l'unicité de la solution on a :

$$(x(\varphi,\tau_0)(t),\tau(\varphi,\tau_0)(t)) = (x(\varphi^+,\tau_0)(t),\tau(\varphi^+,\tau_0)(t)) \;\; \forall t \in [0,k\tau_1] \quad k \geq 1.$$

Remarque 3.1.2. *D'aprés ce lemme on voit que la solution ne dépend que des valeurs de φ sur $[-\tau_0,0] \subset [-\tau_2,0]$, si $(\varphi,\tau_0) \in E$.*

Si de plus on suppose :
$H_3)$: $xf(x) > 0$, pour tout $x \neq 0$,
$H_4)$: $\exists r > 0, \ \ \exists \delta > \frac{1}{\tau_1}$, *telle que* $|f(x)| \geq \delta(x)$ *pour* $|x| < r$.
Pour $t_0 = -\tau_0, \ \ t_0^* = 0$ et $t_1(\varphi, \tau_0) = \inf\{t > 0 : \ \ x(\varphi, \tau_0)(t) = 0\}$, on a :

Lemme 3.1.2. *[15] : Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$*, pour chaque* $(\varphi, \tau_0) \in E$*, si* $\varphi(0) \leq R$ *(avec* $R \geq r$*) on a :* $t_1(\varphi, \tau_0) \leq T(R)$*, o* $T(R) = 3\tau_2 + \frac{R-r}{C_{r,R}}$*,* *et* $C_{r,R} = \inf\{f(s); s \in [r, R]\} > 0$*.*

Lemme 3.1.3. *(théorème 4 dans [15]) Supposons que les hypothéses* $(H_1) - (H_4)$ *sont satisfaites, et soit* $(x(t), \tau(t))$*, la solution de l'équation 3.1) avec* $(\varepsilon\varphi, \tau_0) \in E$ *comme condition initiale, et* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ *Alors :*
(1) il éxiste deux suites réelles $(t_i^*)_{i \geq 0}$ *et* $(t_i)_{i \geq 0}$ *tel que :*

$$\forall i \geq 0; \ \ t_0 = -\tau_0, \ \ t_0^* = 0, \ \ t_i^* \leq t_{i+1}, \ \ \textit{et} \ \ t_i = t_i^* - \tau(t_i^*),$$

(2) $\varepsilon(-1)^{i+1}x(t)$ *est non croissante sur* $[t_i^*, t_{i+1}^*]$ *avec* $x(t_i) = 0$ *et* $x(t_i^*) \neq 0$ *si* $\varphi(0) \neq 0$*.*
(3)

$$\forall i \geq 0; \ \ (\varepsilon(-1)^{i+1}x_{t_i^*}, \tau(t_i^*)) \in E$$

.
Si de plus on a :$(\tau_1 - \tau_2)|f(x)| \leq |x|, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$*, et* $\varphi(0) \neq 0$ *alors* x *est lentement oscillante*

Proposition 3.1.1. *Soit la suite* $(t_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ *définit dans le lemme 3.1.3,*
si $t_{i+1}^* - t_i^* \leq t_1^*$*, alors* $t_i^* \leq i(\tau_2 + T(R))$*,* *avec* $i \in \mathbb{N}$*.*

Preuve :
On a d'aprés le résultat présédent, $t_1 \leq T(r)$, comme $t_1 = t_1^* - \tau(t_1^*)$, il suit que

$$t_1^* \leq \tau_2 + T(R).$$

Supposons la suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définit par

$$u_i = t_i^* - t_{i-1}^*,$$

d'aprés la condition suivante $t_{i+1}^* - t_i^* \leq t_1^*$, on a :

$$u_i \leq t_1^* \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{i} u_i = t_i^* \leq i(\tau_2 + T(R)).$$

3.2 la construction de l'opérateur de Poincaré

Dans cette partie on utilise les résultats des lemmes 3.1.1 et 3.1.2 pour la construction d'un opérateur de type Poincaré.
- On définit l'application G_α par

$$G_\alpha \quad E \to Lip([-\tau_2, 0], \mathbb{R}) \times [\tau_1, \tau_2]$$

et

$$G_\alpha(\varphi, \tau_0) = (x_\alpha(\varphi, \tau_0), \tau(\varphi, \tau_0)(\alpha)),$$

où $\alpha > 0$.
d'aprés le résultat (3) du lemme 3.1.2 on conclut que si $\alpha = t^*_{2p_0}$ ou $p_0 \in \mathbb{N}$, alors G_α est à valeur dans E.

Proposition 3.2.1. *La solution $(x(t), \tau(t))$ est une solution périodique de 3.1 ayant pour condition initiale $(\varphi, \tau_0) \in E$, si et seulement si :*
$\exists \alpha > 0$;

$$G_\alpha(\varphi, \tau_0) = (\varphi, \tau_0).$$

De cette proposition, on déduit que trouver une solution périodique non trivial de l'équation 3.1 de période α revient à trouver $(\varphi, \tau_0) \in E$, avec $\varphi(0) > 0$, satisfaisant :

$$\begin{cases} \varphi(s) &= x_\alpha(\varphi, \tau_0)(s), \quad \forall s \in [-\tau_0, 0] \\ \tau_0 &= \tau(\varphi, \tau_0)(\alpha), \end{cases} \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.1. *Une solution du problème 3.1 est de classe C^1 pour $t \geq 0$.*
Le couple (φ, τ_0) défini une solution périodique si $G_\alpha(\varphi, \tau_0) = (\varphi, \tau_0)$, comme $G_\alpha(\varphi, \tau_0)$ est de classe C^1 donc (φ, τ_0) doit être de classe C^1.

Soit $X_0 = C^1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}) \times [\tau_1, \tau_2]$, est un éspace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|(\varphi, \tau_0)\|_0 = \|\varphi\|_{\infty,[-\tau_2,0]} + \|\dot\varphi\|_{\infty,[-\tau_2,0]} + |\tau_0|, \quad \forall (\varphi, \tau_0) \in X_0.$$

Donc la recherche d'une telle solution doit se faire dans un sous ensemble E_0 de X_0 défini par :

$$E_0 = \{(\varphi, \tau_0) \in X_0 : \quad \varphi'(s) \geq 0, \quad \forall s \in [-\tau_0, 0], \quad \varphi(-\tau_0) = 0 \quad et \quad \varphi'(0) = 0\},$$

et on note par

$$E_0^- = \{(\varphi, \tau_0) \in X_0 : \quad (-\varphi, \tau_0) \in E_0\}.$$

On a $E_0 \subset E$ et a l'aide des résultats du lemme 3.1.3, on peut définit l'opérateur P_j qui représente la réstriction de G_α sur E_0 par :

$$P_j : \quad E_0 \to X_0,$$

$$P_j(\varphi, \tau_0) = (x_{t_j^*}(\varphi, \tau_0), \tau(\varphi, \tau_0)(t_j^*)).$$

et

$$P_j^+ : \quad E_0 \to X_0,$$

$$P_j^+(\varphi, \tau_0) = ((-1)^j x_{t_j^*}(\varphi, \tau_0), \tau(\varphi, \tau_0)(t_j^*)),$$

On remarque que, si $j = 2k$ alors $P_j^+(\varphi, \tau_0) = P_j(\varphi, \tau_0)$.

Proposition 3.2.2. *Si $(\varphi, \tau_0) \in E_0$, alors $x(\varphi, \tau_0)(t)$ est continûment dérivable sur $[-\tau_2, +\infty[$.*

Preuve :
Par construction la composante $x(\varphi, \tau_0)$ est continûment dérivable sur $[-\tau_2, +\infty[$, en effet le seul point où on peut avoir des problèmes est $t = 0$, or en $t = 0$ on a :

$$\varphi'_-(0) = 0, \quad et \quad x'_+(\varphi, \tau_0)(0) = -f(\varphi(-\tau_0)) = 0$$

.
De cette remarque et du résultat $(\forall i \geq 0; \quad (\varepsilon(-1)^{i+1} x_{t_i^*}, \tau(t_i^*)) \in E)$ du lemme 3.1.3, on déduit que :

$$P_{p_0}^+ : E_0 \to E_0, \quad pour \quad p_0 \geq 1.$$

D'où en particulier : $P_{2p_0} : E_0 \to E_0, \quad pour \quad p_0 \geq 1.$
Chercher une solution périodique revient a appliqué le théorème de point fixe à l'application P_{2p_0}.

Proposition 3.2.3. E_0 *fermé.*

Preuve :

E_0 **est fermé :**

Soit $(\varphi_n, \tau_{n,0})$ une suite de E_0 qui converge vers (φ, τ_0), montrons que $(\varphi, \tau_0) \in E_0$,

i) on a $\varphi'(s) = \lim_{n \to +\infty} \varphi'_n(s)$ et $\varphi'_n(s) \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $\varphi'(s) \geq 0$ $\forall s \in [-\tau_2, 0]$.

ii) On a :

$$\varphi(-\tau_0) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(-\tau_{n,0}) = 0,$$

iii) on a :

$$\varphi'(0) = \lim_{n \to +\infty} \varphi'_n(0) = 0,$$

de i), ii) et iii) on déduit que E_0 est fermé.

Remarque 3.2.2. E_0 *n'est pas convexe à cause de la condition* $\varphi(-\tau_0)$.

En effet pour deux données initiales $(\varphi, \tilde{\tau}_0)$ *et* $(\psi, \bar{\tau}_0)$ on aura :

$$(\phi, \tau_0) = [(1 - \lambda)(\varphi, \tilde{\tau}_0) + \lambda(\psi, \bar{\tau}_0)], \quad tel \quad que : \lambda \in [0, 1],$$

d'où :

$$(\phi, \tau_0) = ((1 - \lambda)\varphi + \lambda\psi, (1 - \lambda)\tilde{\tau}_0 + \lambda\bar{\tau}_0),$$

puisque

$$\varphi(-\tau_0) = \varphi((1 - \lambda)\tilde{\tau}_0 + \lambda\bar{\tau}_0) \neq 0,$$

et

$$\psi(-\tau_0) = \psi((1 - \lambda)\tilde{\tau}_0 + \lambda\bar{\tau}_0) \neq 0,$$

on a

$$\phi(-\tau_0) = [(1 - \lambda)\varphi(-\tau_0) + \lambda\psi(-\tau_0)] \neq 0,$$

donc E_0 est non convexe.

Pour surmonter cette déficulté on identifie X_0 avec X_1 et E_0 avec E_1 où :

$X_1 = C^1([-1, 0], \mathbb{R}) \times [\tau_1, \tau_2]$, est un éspace de Banach muni de la norme :

$$\|(\psi, \tau_0)\|_1 = \|\psi\|_{\infty,[-1,0]} + \|\dot{\psi}\|_{\infty,[-1,0]} + |\tau_0|, \quad \forall(\psi, \tau_0) \in X_1,$$

où E_1 est un sous ensemble de X_1 définit par

$$E_1 = \{(\psi, \tau_0) \in X_1 : \quad \psi'(s) \geq 0, \quad \forall s \in [-1, 0], \quad \psi(-1) = 0, \quad et \quad \psi'(0) = 0\},$$

et on note par

$$E_1^- = \{(\psi, \tau_0) \in X_1 : \quad (-\psi, \tau_0) \in E_1\},$$

on défini deux applications Q et L de la façon suivante :

$$Q : X_1 \to X_0,$$

tel que :

$$(\psi, \tau_0) \to Q(\psi, \tau_0) = (\varphi, \tau_0),$$

où

$$\varphi(s) = \begin{cases} \psi(\dfrac{s}{\tau_0}), & \forall s \in [-\tau_0, 0], \\ \varphi'_+(-\tau_0)(s - \tau_0) = \frac{\psi'_+(-1)}{\tau_0}(s - \tau_0), & \forall s \in [-\tau_2, -\tau_0]. \end{cases}$$

et

$$L : X_0 \to X_1,$$

$$(\varphi, \tau_0) \to (\psi, \tau_0),$$

tel que :

$$L(\varphi, \tau_0) = (\psi, \tau_0) \quad avec \quad \psi(s) = \varphi(s\tau_0), \quad \forall s \in [-1, 0],$$

il suit que :

$$Q(E_1) \subset E_0, \quad Q(E_1^-) \subset E_0^-, \quad et \quad L(E_0) \subset E_1, \quad L(E_0^-) \subset E_1^-.$$

Proposition 3.2.4. $Q \circ L = I_{E_0}$.

Preuve :
Soit $(\varphi, \tau_0) \in E_0$, pour $s \in [-\tau_0, 0]$ on a :

$$\begin{aligned} Q \circ L(\varphi, \tau_0)(s) &= Q[L(\varphi, \tau_0)(s)], \\ &= Q(\psi, \tau_0)(s), \\ &= (\varphi, \tau_0)(s). \end{aligned}$$

d'où $Q \circ L = I_{E_0}$.
Posons maintenant

$$F_k = L \circ P_k \circ Q; \qquad k \in \mathbb{N}^*,$$

donc la recherche d'une solution périodique revient à trouver $(\psi, \tau_0) \in E_1$, avec $\psi(0) > 0$ et qui satisfait :

$$(\psi, \tau_0) = F_{2p_0}(\psi, \tau_0), \quad pour \quad certain \quad p_0 \geq 1, \tag{3.5}$$

Lemme 3.2.1. *[15] : On a*

$$F_k = F_1^k,$$

tel que $F_1^{k+1} = F_1 \circ F_1 \circ ... \circ F_1$, *k fois* *pour* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $F_1^1 = F_1 = L \circ P_1 \circ Q$.

Preuve : ce résultat découle dirèctement du lemme 3.1.1 et d'aprés les définitions de $F_k, \quad L \quad et \quad Q$, et en utilisant le raisonement par récurence :
- pour $k = 1$ on a :

$$F_1 = F_1^1 = L \circ P_1 \circ Q$$

. - Supposons que $F_k = F_1^k = L \circ P_k \circ Q$ et montrons que$F_{k+1} = F_1^{k+1} = L \circ P_{k+1} \circ Q$, on a :

$$F_1^{k+1} = F_1 \circ F_1^k,$$

et par suite

$$F_1^{k+1} = F_1 \circ (L \circ P_k \circ Q),$$

d'où

$$F_1^{k+1} = (L \circ P_1 \circ Q) \circ (L \circ P_k \circ Q),$$

d'aprés l'associativité de l'opération de composition et puisque $Q \circ L = I_{E_0}$ on a :

$$F_1^{k+1} = (L \circ (P_1 \circ P_k) \circ Q),$$

donc

$$F_1^{k+1} = (L \circ P_{k+1} \circ Q),$$

d'où

$$F_{k+1} = F_1^{k+1} = L \circ P_{k+1} \circ Q.$$

Remarque 3.2.3. *pour $k = 2p_0$ on a :*

$$F_{2p_0} : E_1 \to E_1,$$

pour $k = 2p_0 + 1$ on a :

$$F_{2p_0+1} : E_1 \to E_1^-,$$

a)L'application F_{2p_0} est complètement continue :

On suppose les hypothèses suivantes :

$H_5) : \ \exists m > 0, \ \exists G \geq 0 : \ \frac{\partial h}{\partial \tau}(0, \tau) \leq -m; \ \ et \ \ |\frac{\partial h}{\partial x}(x, \tau)| \leq G; \ \ \forall (x, \tau) \in \mathbb{R} \times [\tau_1, \tau_2],$

$H_6) : \ \exists M > 0, \exists M' > 0 : \ \|f(x)\|_\infty \leq M, \ \ \|f'(x)\|_\infty \leq M'; \ \ \forall x \in \mathbb{R},$

Proposition 3.2.5. *: Sous les hypothéses $(H_1)-(H_6)$, on a $F_{2p_0}(E_1)$ est relativement compacte dans E_1.*

Preuve :

1) Montrons que $F_{2p_0}(E_1)$ est borné :

Soit $(\psi, \tau_0) \in F_{2p_0}(E_1)$, donc il existe $(\phi, \tau_0) \in E_1$ telle que $(\psi, \tau_0) = F_{2p_0}(\phi, \tau_0)$.

On note $Q(\phi, \tau_0) = (\varphi, \tau_0)$, pour $s \in [-1, 0]$ on a :

$$\psi(s) = x(\varphi, \tau_0)(s\tau_0 + t^*_{2p_0}).$$

et

$$\dot{\psi}(s) = \tau_0 \dot{x}(\varphi, \tau_0)(s\tau_0 + t^*_{2p_0}),$$

d'où

$$\psi(0) - \psi(-1) = -\tau_0 \int_{-1}^{0} f(x(\tau_0 s + t^*_{2p_0} - \tau(\tau_0 s + t^*_{2p_0})))ds,$$

or

$$\psi(-1) = 0,$$

puisque $\dot{\psi}(s) \geq 0$ sur $[-1, 0]$ et $\dot{\psi}(0) = 0$, donc

$$\|\psi\|_{\infty,[-1,0]} = |\psi(0)|$$

comme

$$\tau_0 \leq \tau_2,$$

il suit que

$$\|\psi\|_{\infty,[-1,0]} \leq \tau_2 M,$$

ainsi

$$\exists \tau_2 M \in \mathbb{R}_+, \forall \psi \in C^1([-1,0],\mathbb{R}) : \|\psi\|_{\infty,[-1,0]} \leq \tau_2 M,$$

d'où ; $F_{2p_0}(E_1)$ est borné.

2) Montrons que $F_{2p_0}(E_1)$ est équicontinu :

Pour le faire on montre que $\forall(\psi,\tau_0) \in F_{2p_0}(E_1)$, ψ et $\dot{\psi}$ sont Lipshitziènnes.

Soit $(\psi,\tau_0) = F_{2p_0}(\phi,\tilde{\tau_0})$,

i) Montrons que ψ est Lipshitzienne.

on a :

$$\begin{cases} \psi(s) &= x_{t^*_{2p_0}}(\phi,\tilde{\tau_0})(s) \quad sur \quad [-1,0] \\ \tau_0 &= \tau(\phi,\tilde{\tau_0})(t^*_{2p_0}), , \end{cases}$$

on note $(\varphi,\tilde{\tau_0}) = L(\phi,\tilde{\tau_0})$, d'où

$$\begin{cases} \psi(s) &= x(\varphi,\tilde{\tau_0})(\tau_0 s + t^*_{2p_0}) \quad sur \quad [-1,0] \\ \tau_0 &= \tau(\varphi,\tilde{\tau_0})(t^*_{2p_0}) \end{cases}$$

il suit que

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(s) &= \tau_0 \dot{x}(\tau_0 s + t^*_{2p_0}), \\ &= -\tau_0 f(x(\tau_0 s + t^*_{2p_0} - \tau(\tau_0 s + t^*_{2p_0}))), \end{aligned}$$

comme

$$\tau_0 \leq \tau_2 \quad et \quad \|f\|_\infty < M,$$

on a :

$$\|\dot{\psi}\|_{\infty,[-1,0]} \leq \tau_2 M,$$

donc ψ est Lipshitzienne.

ii) Montrons que $\dot{\psi}$ est lipshitzienne.

D'aprés le résultat (1) du lemme 3.1.3 on a :

$$t_{2p_0-1} = t^*_{2p_0-1} - \tau(t^*_{2p_0-1}) \quad et \quad t_{2p_0} = t^*_{2p_0} - \tau(t^*_{2p_0}), \quad avec \;\; x(t_{2p_0-1}) = x(t_{2p_0}) = 0,$$

et comme $t^*_{2p_0-1} < t_{2p_0}$ on déduit d'aprés la monotonicité de $t - \tau(t)$ que :

$$\begin{aligned} t^*_{2p_0-1} < t < t^*_{2p_0} \quad &\Rightarrow \quad t^*_{2p_0-1} - \tau(t^*_{2p_0-1}) < t - \tau(t) < t^*_{2p_0} - \tau(t^*_{2p_0}), \\ &\Rightarrow \quad t_{2p_0-1} < t - \tau(t) < t_{2p_0}, \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{x}(t-\tau(t)) = -f(x(t-\tau(t)-\tau(t-\tau(t)))), \quad \forall t \in [t_{2p_0}, t^*_{2p_0}],$$

donc $\dot{x}$ est une fonction dérivable car elle est la composition de deux fonctions dérivables f et x et par concéquent $\dot{\psi}$ est dérivable car $\dot{\psi}(s) = \tau_0 \dot{x}(\tau_0 s + t^*_{2p_0}), \quad \forall t \in [t_{2p_0}, t^*_{2p_0}]$,

calculons $\ddot{\psi}$,

posons $y(s) = \tau_0 s + t^*_{2p_0} - \tau(\tau_0 s + t^*_{2p_0})$,

on a :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(s) &= \tau_0 \dot{x}(\tau_0 s + t^*_{2p_0}), \\ &= -\tau_0 f(x(y(s))), \end{aligned}$$

il suit que

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}(s) &= - \quad \tau_0 \dot{y}(s) \dot{x}(y(s)) \dot{f}(x(y(s))), \\ &= \quad \tau_0(\tau_0 - \dot{\tau}(\tau_0 s + t^*_{2p_0})) f(x(y(s))) \dot{f}(x(y(s))), \\ &= \quad \tau_0(\tau_0 - \tau_0 \dot{\tau}(\tau_0 s + t^*_{2p_0})) f(x(y(s))) \dot{f}(x(y(s))), \\ &= \quad \tau_0^2(1 - h(x(\tau_0 s + t^*_{2p_0}), \tau(\tau_0 s + t^*_{2p_0}))) f(x(y(s))) \dot{f}(x(y(s))), \end{aligned}$$

d'aprés (H_1) et (H_6) on a :

$$\|\ddot{\psi}\|_{\infty,[-1,0]} \leq (\tau_2)^2 M M' \sup_{|y| \leq \tau_2 M, \tau \in [\tau_1, \tau_2]} |1 - h(x,\tau)|,$$

D'où $\dot{\psi}$ est Lipshitzienne.

De i) et ii) On déduit que $F_{2p_0}(E_1)$ est équicontinu.

b) L'étude de la continuité de F_{2p_0} sur E_1 :

1) Pour $(\psi, \tilde{\tau}_0) \in E_1 - \{(0, \tilde{\tau}_0)\}$,

Lemme 3.2.2. *Les opérateurs L et Q sont continus respèctivement sur E_0 et E_1.*

Lemme 3.2.3. *Sous les hypothéses $(H_1) - (H_6)$, soit $t^* > 0$ et $(\tilde{\varphi}, \tilde{\tau}_0) \in E_0 - \{(0, \tilde{\tau}_0)\}$,*

alors on a pour tout

$\varepsilon > 0,$ *il xiste* $\eta > 0,$ *tel que :* $\|(\varphi,\tau_0)-(\tilde{\varphi},\tilde{\tau}_0)\|_0 \leq \eta,\$$ *implique que :*

$\|x(\varphi,\tau_0)-x(\tilde{\varphi},\tilde{\tau}_0)\|_{\infty,[0,t^*]}+\|\dot{x}(\varphi,\tau_0)-\dot{x}(\tilde{\varphi},\tilde{\tau}_0)\|_{\infty,[0,t^*]}+\|\tau(\varphi,\tau_0)-\tau(\tilde{\varphi},\tilde{\tau}_0)\|_{\infty,[0,t^*]} \leq \varepsilon.$

Preuve : (Voir[15])

Lemme 3.2.4. *Sous les hypothéses* $(H_1)-(H_6)$*, soit* $(\tilde{\psi},\tilde{\tau}_0) \in E_1-\{(0,\tilde{\tau}_0)\}$*,*
et notons $(\tilde{\varphi},\tilde{\tau}_0) = Q(\tilde{\psi},\tilde{\tau}_0)$.
Si :

$$t_i^*(\varphi,\tau_0) \to t_i^*(\tilde{\varphi},\tilde{\tau}_0), \quad lorsque; \quad (\varphi,\tau_0) \to (\tilde{\varphi},\tilde{\tau}_0),$$

alors F_2 *est continu en tout point* $(\tilde{\psi},\tilde{\tau}_0)$.

Preuve : Ce résultat est une conséquence directe de la dépendance continue des solutions des conditions initiales.

Proposition 3.2.6. *[15] : Sous les hypothéses* $(H_1)-(H_6)$*, l'opérateur* F_{2p_0} *est continu*
en $(\tilde{\psi},\tilde{\tau}_0) \in E_1-\{(0,\tilde{\tau}_0)\}$ *ou ;* $\tilde{\psi}(0) > 0$.

Preuve :D'aprés les lemmes 3.2.1 et 3.2.2, F_{2p_0} est continue en $(\tilde{\psi},\tilde{\tau}_0) \in E_1-\{(0,\tilde{\tau}_0)\}$ tel que ; $\tilde{\psi}(0) > 0$.
2) Pour $(\psi,\tilde{\tau}_0) = (0,\tilde{\tau}_0)$, on a un probléme de continuité de F_{2p_0} pour la seconde composante de F_{2p_0}, car on ne sait pas si $\lim\limits_{(\psi,\tau_0)\to(0,\tilde{\tau}_0)} t_{2p_0}^*(\varphi,\tau_0)$ existe ou $\tilde{\tau}_0 \neq \tau^*$.

Pour surmonter cette difficulté, on va écrire l'opérateur F_{2p_0} de la façon suivante :

$$F_{2p_0}(\psi,\tau_0) = (F_{2p_0}^1(\psi,\tau_0), F_{2p_0}^2(\psi,\tau_0)), \quad \forall(\psi,\tau_0) \in E_1,$$

avec

$$F_{2p_0}^1(\psi,\tau_0)(s) = x_{t_{2p_0}^*}(\varphi,\tau_0)(\tau(t_{2p_0}^*)s), \quad sur \quad [-1,0]$$

et

$$F_{2p_0}^2(\psi,\tau_0) = \tau(\varphi,\tau_0)(t_{2p_0}^*),$$

ou $\quad (\varphi,\tau_0) = Q(\psi,\tau_0)$.

Lemme 3.2.5. *[15] : Sous les hypothéses* $(H_1)-(H_6)$*, on a :*

$$1) \lim_{(\psi,\tau_0)\to(0,\tilde{\tau}_0)} \|F_{2p_0}^1(\psi,\tau_0)\|_{1,[-1,0]} = 0,$$

et

$$2)\lim_{(\psi,\tau_0)\to(0,\tau^*)} F^2_{2p_0}(\psi,\tau_0)=\tau^*.$$

Preuve :

1) Soit $\{(\psi^n,\tau_0^n)\}_{n\geq 0}$ une suite de E_1, qui converge vert $(0,\tilde{\tau}_0)\in E_1$ *lorsque* $n\to+\infty$.

On note $(\varphi^n,\tau_0^n)=Q(\psi^n,\tau_0^n)$,

ainsi

$$F^1_{2p_0}(\psi^n,\tau_0^n)=x_{t^*_{2p_0}(\varphi,\tau_0)}(\varphi^n,\tau_0^n)\tau(\varphi^n,\tau_0^n)(t^*_{2p_0})s)|_{[-1,0]},$$

et comme Q est continue on a : $\|\varphi^n\|_{1,[-\tau_2,0]}\to 0$.

D'aprés la proposition 3.1.1, on a pour $t^*_{i+1}-t^*_i\leq t^*_1$, et pour un certain $R>r$,

$$t^*_{2p_0}(\varphi,\tau_0)\leq 2p_0(\tau_2+T(R))=t^*,$$

et

$$\|F^1_{2p_0}(\psi^n,\tau_0^n)\|_{\infty,[-1,0]}\leq\|x_{t^*_{2p_0}(\varphi,\tau_0)}(\varphi^n,\tau_0^n)\|_{\infty,[0,t^*]}.$$

Donc, d'aprés le lemme 3.2.2, on a :

$$\lim_{(\psi,\tau_0)\to(0,\tilde{\tau}_0)}\|x_{t^*_{2p_0}(\varphi,\tau_0)}(\varphi^n,\tau_0^n)\|_{\infty,[0,t^*]}=0.$$

De plus

$$\|\dot{x}_{t^*_{2p_0}}(\varphi^n,\tau_0^n)\tau(\varphi^n,\tau_0^n)(t^*_{2p_0}).)\|_{\infty,[-1,0]}\leq\tau_2M'\|x_{t^*_2(\varphi,\tau_0)}(\varphi^n,\tau_0^n)\|_{\infty,[-\tau_2,t^*]}.$$

d'où, d'aprés le lemme 3.2.2, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_{t^*_{2p_0}(\varphi,\tau_0)}(\varphi^n,\tau_0^n)\|_{\infty,[-\tau_2,t^*]}=0.$$

Et on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\|F^1_{2p_0}(\psi^n,\tau_0^n)\|_{1,[-1,0]}=0,$$

2) pour la deuxieme limite, on note $\tau(0,\tau^*)(t)=\tau^*$,

$\forall t\geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}|\tau^*-\tau(\varphi^n,\tau_0^n)(t^*_{2p_0}(\varphi^n,\tau_0^n))| &\leq |\tau(0,\tau^*)(t^*_{2p_0}(\varphi^n,\tau_0^n))-\tau(\varphi^n,\tau_0^n)(t^*_{2p_0}(\varphi^n,\tau_0^n))|\\ &\leq \|\tau(0,\tau^*)-\tau(\varphi^n,\tau_0^n)\|_{\infty,[0,t^*]},\end{aligned}$$

et d'aprés le lemme 3.2.2 on conclut que :

$$\tau(\varphi^n,\tau_0^n)(t^*_{2p_0}(\varphi^n,\tau_0^n)) \to \tau^* \quad lorsque \quad n \to +\infty.$$

d'où :

$$\lim_{(\psi,\tau_0)\to(0,\tau^*)} F^2_{2p_0}(\psi,\tau_0) = \tau^*.$$

- $Notons \;\; pour \;\; \varepsilon > 0, \quad \tilde{F}_{2p_0,\varepsilon} : E_1 \to E_1$ l'opérateur qui définit par :

$$\tilde{F}_{2p_0,\varepsilon}(\psi,\tau_0) = (F^1_{2p_0}(\psi,\tau_0), \tilde{F^2}_{2p_0,\varepsilon}(\psi,\tau_0)), \quad \forall(\psi,\tau_0) \in E_1,$$

tel que :

$$\tilde{F^2}_{2p_0,\varepsilon}(\psi,\tau_0) = \begin{cases} \phi(\dfrac{\|\psi\|_1}{\varepsilon|\tau_0-\tau^*|})F^2_{2p_0}(\psi,\tau_0) + (1-\phi(\dfrac{\|\psi\|_1}{\varepsilon|\tau_0-\tau^*|}))\tau^*, & si \quad \tau_0 \neq \tau^*, \\ \tau^* \quad si \quad \tau_0 = \tau^* \end{cases}$$

avec : $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue, et satisfait :

$$\phi(s) = 1, \quad \forall s \geq 1, \quad \phi(s) \in [0,1], \quad \forall s \in [0,1], \quad \phi(0) = 0.$$

D'où, on a :

Théorème 3.2.1. *[15] : Sous les hypothéses $(H_1)-(H_6)$, pour chaque $\varepsilon > 0$ l'opérateur :*
$\tilde{F}_{2p_0,\varepsilon} : E_1 \to E_1$ est complètement continue, et $\tilde{F}_{2p_0,\varepsilon}(E_1)$ est relativement compact.

Puisque E_1 est fermé et convexe, et $\tilde{F}_{2p_0,\varepsilon}(E_1) \subset E_1$ et de plus, $\tilde{F}_{2p_0,\varepsilon} : E_1 \to E_1$ est complètement continue, cela confirme l'éxistence d'un point fixe du problème 3.5 précédent, c'est-à-dire la solution de du problème 3.1 ce problème est une solution périodique lentement oscillante.

3.3 Application

Soit le problème particulier suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -f(x(t-\tau(t))) \\ \dot{\tau}(t) &= g(x(t)) - \tau(t). \end{cases} \tag{3.6}$$

telle que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifie (H_3), (H_4) et (H_6), et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$,
et supposons aussi les conditions suivantes :
$C_1)$ $\exists L > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) < \frac{L(\tau_2+1)+\tau_2}{L+1}$,
$C_2)\forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) \in [\tau_1, \tau_2]$,
$C_3)$ $\exists M'' > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \dot{g}(x) \leq M''$.
Pour montrer que le problème 3.6 admet une solution périodique lentement oscillante, il suffit de montrer que g satisfait (H_1), (H_2) et (H_5).
1) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'aprés (C_1) sur g on a :

$$g(x) < \frac{L(\tau_2 + 1) + \tau_2}{L + 1},$$

d'où

$$g(x) < \frac{L}{L + 1} + \tau_2,$$

comme $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ on a

$$g(x) - \tau < \frac{L}{L + 1},$$

donc (H_1) est satisfaite.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'aprés (C_2) on a :

$$g(x) \in [\tau_1, \tau_2],$$

d'où

$$g(x) \geq \tau_1 \quad et \quad g(x) \leq \tau_2,$$

il suit que

$$g(x) - \tau_1 \geq 0 \quad et \quad g(x) - \tau_2 \leq 0,$$

donc (H_2) est satisfaite.
3)Soit $(x, \tau) \in \mathbb{R} \times [\tau_1, \tau_2]$, d'aprés (C_3) on a :
D'une part on a

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}(0, \tau) = \frac{\partial g(x)}{\partial \tau}(0, \tau) - \frac{\partial \tau}{\partial \tau} = -1,$$

d'où il éxiste $m = 1$ tel que : $\frac{\partial h}{\partial \tau}(0, \tau) < -m \qquad (1)$.
D'autre part on a

$$\exists M'' > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \dot{g}(x) \leq M'',$$

calculons $\frac{\partial h}{\partial x}(x,\tau)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,\tau) &= \frac{\partial h}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x},\\ &= \frac{1}{\dot{x}(t)}[\dot{x}(t)\dot{g}(x(t)) - \dot{\tau}(t)],\\ &= \dot{g}(x(t)) - \frac{\dot{\tau}(t)}{\dot{x}(t)},\end{aligned}$$

ainsi ;

$$\begin{aligned}|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\tau)| &= |\dot{g}(x(t)) - \frac{\dot{\tau}(t)}{\dot{x}(t)}|,\\ &\leq |\dot{g}(x(t))| + |\frac{\dot{\tau}(t)}{\dot{x}(t)}|,\\ &\leq |\dot{g}(x(t))| + |\frac{g(x(t))-\tau(t)}{f(x(t-\tau(t)))}|,\\ &\leq G,\end{aligned}$$

comme $\dot{g}(x) \leq M''$, et $|\frac{g(x(t))-\tau(t)}{f(x(t-\tau(t)))}| \leq \frac{L}{2(L+1)M}$,

si on pose

$$G = M'' + \frac{L}{2(L+1)M},$$

alors

$$\exists G > 0, \quad \forall (x,\tau) \in \mathbb{R} \times [\tau_1, \tau_2] \ \ \|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\tau)| < G, \qquad (2)$$

de (1) et (2) on déduit que (H_5) est satisfaite.

Puisque les hypothéses (H_1)-(H_6) sont vérifies d'aprés le théorème 3.2.1, le problème 3.6 admet un point fixe dans E_1 c'est-à-dire que la solution de ce problème est une solution périodique lentement oscillante.

Annexe

Définition 3.3.1. *[2] on dit qu'un ensemble est relativement compact si sa fermeture est compacte.*

Définition 3.3.2. *[5] soient E et F deux espaces normés , $T : E \longrightarrow F$ est appelé opérateur compact s'il transforme tout ensemble borné de E en un ensemble relativement compact*
de F .

Définition 3.3.3. *[5] on dit qu'un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est de rang fini si la dimension de $T(E)$ est finie*

Proposition 3.3.1. *[5] un opérateur continu de rang fini est compact*

Définition 3.3.4. *[15] Soient E et F deux éspaces de Banach, et f est une application de E dans F et compacte si :*
1) f est continue,
2) $f(E)$ est relativement compact.

Définition 3.3.5. *[15] Soit B un ensemble borné d'un espace de Banach E, f une application de E dans F est dit complètement continue si :*
1) f est continue,
2) $f(B)$ est relativement compact.

Théorème 3.3.1. *[2] :**(Théorème de point fixe)***
Soient X un éspace de Banach,U un fermé, borné et convexe de X et $F : U \to U$ un opérateur complètement continue alors F a un point fixe dans U.

Théorème d'Ascoli

Définition 3.3.6. *[9] Soient $B_0(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur E et à valeur dans F, H une partie de $B_0(E, F)$ et $x_0 \in E$.On dit que H est équicontinue en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E; d_E(x_0, x) \leq \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon, \forall f \in H.$$

Théorème 3.3.2. *[9] :**(Théorème d'Ascoli,version** 1**)***
Soient E un espace metrique compact , F un espace metrique complet et soit H un sous ensemble de $C(E, F)$ alors

$$H \text{ est relativement compact} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \ H \text{ est equicontinue} \\ 2) \ \forall x \in E, H(x) = \{f(x), f \in H\} \text{ est} \\ \quad \text{relativement compact dans } F \end{cases}$$

Théorème 3.3.3. *[9] :**(Théorème d'Ascoli, Version 2)***
Soit K un espace métrique compact , H un sous ensemble borné de $C(K)$. On suppose que H est uniformément equicontinue , c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in K, d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2| < \varepsilon, \forall f \in H.$$

alors H est relativement compact dans $C(K)$

Théorème 3.3.4. *[2] :(d'inversibilité de l'opérateur $I - G$) :*
Soient un éspace de Banach X et un opérateur $G \in \mathfrak{L}(X)$ tel que $\|G\| < 1$, alors l'opérateur $I - G$ est inversible et vérifie la majoration suivante :

$$\|(I - G)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|G\|}.$$

Bibliographie

[1] Adulte-juvénile avec retard. 2001

[2] A.Mostefai "Cours de Topologie", Office Des Pulications Universitaires (O.P.U). theory of differentiel delay equation, SIAM Rev.13,1971,55-80

[3] D.R. Smart, Fixed Point Theorem, Cambridge Tracts in Mathematics, No.66, Cam- bridge University Press, London.New York,1974.

[4] D.S. Smart, Fixed point theorems, Cambridge Tracts in Mathematics,No. 66. Cambridge University Press, London-New York, 1974.

[5] Djebali, cours "Le degré topologique : Théorie et applications", Kouba, Algérie, (2006).

[6] F. Hartung, J. Turi, Stability in a class of functional different equation with stat-dependent delay in. C. Corduneanu (Ed). Qualitative problem for differential equation and control theory. World Scientific, Singapore 1995, pp15-31.

[7] Ferenc Hartung and Janos Turi. On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations. journal of differential equations, 135(2) :192-237, 1997 Meriem HELLAL. Modèle

[8] H.P. Krishnan, Existence of unstable manifolds for a certain class of delay differential equation, Elector J. Differential equation. 32 (2002), 1-13.

[9] H.Brizis Analise fonctionnelle, Théorie et Applications, Massan, Paris (1983).

[10] Ismail Achouri and Redouane Benkhaled.Equations différentielles ordinaires et applications. PhD thesis, 2014.

[11] J. Mallet-Paret, R.D Nussbaum, P. Paraskevopoulos, Periodic solutions for functional differential equation with state-dependent time lags, topological method in nonlinear analysis, J ; Julianusz Schauder center. 3 (1994), 101-162

[12] Kenneth L Cooke and Wenzhang Huang. On the problem of linearization for state dependent delay differential equations. Proceedings of the American Mathematical Society, pages 1417-1426, 1996.

[13] Mohamed Yahiaoui. Les Equations différentielles à retard dépendant de l'état. **PhD** thesis, 2014.

[14] O. Arino, M.L, Hbid, R. Bravo de la Parra, A mathematic model of growth of population of fish in the larval stage : density-dependence effects, Math. Biosci 150 (1), (1998). 1-120.

[15] O.Arino et Al, Existence of periodic solutions for a state dependent delay differential equation (1999).