



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année univ.: 2023/2024

Analyse Multivoque et Inclusions Différentielles

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques

par

Abdessatar Fliti¹

Sous la direction de

Dr/Mr Berrezoug Halimi

Soutenue le 18/09/2024 devant le jury composé de

M. Kadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
B. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
K. Daoudi	Centre Universitaire - El Bayadh	Examineur

1. e-mail : abdessatar.fliti@gmail.com

Table des matières

1	Quelques notions et résultats préliminaires	8
1.1	Un aperçu historique sur les équations différentielles impulsives	8
1.2	Définitions et notions fondamentales	8
1.3	Théorèmes de point fixe	13
1.4	Quelques définitions d'analyse multivoque	14
2	Fonctions Multivoques ou Multi-applications	18
2.0.1	Distance de Hausdorff.	22
2.0.2	Semi-continuité supérieure.	27
2.0.3	Semi-continuité inférieure.	27
2.0.4	Caractérisations de la s.c.s et la s.c.i.	27
3	Inclusions Différentielles Semi-Linéaires Impulsives	37
3.1	Solutions Faibles	38
3.2	Résultat d'existence	38
4	Un exemple	46

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier **Allah** pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

Je dois beaucoup à mon directeur de thèse **M. Berrezoug HALIMI** qui a su me faire profiter de sa science. Il m'a offert son temps et sa patience. Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été une aide précieuse pour moi. J'ai beaucoup appris à son contact et eu grand plaisir à travailler avec lui. Il m'est très agréable de lui adresser mes vives remerciements et de lui témoigner ma sincère reconnaissance. Merci aussi pour toutes les fois où j'ai fait appel à lui pour une aide, scientifique ou autre, car il n'a jamais ni hésité, ni ménagé sa peine pour répondre à mes sollicitations.

Je tiens également à remercier **M.Mokhtar KADI** qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que **M.Khelifa DAOUDI** pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de Mathématique qui m'ont aidé à m'améliorer durant mon cursus universitaire.

Enfin, merci à mes parents. Sans leurs sacrifices je ne serais pas devenu ce que je suis aujourd'hui.

Dedicace

Je dédie ce travail à mes chers parents,

maman et mon père

à mes frères et soeurs

à tous mes enseignants.

Introduction

L'Analyse Multivoque

L'analyse multivoque, également appelée *analyse des multifonctions*, est une branche des mathématiques modernes qui traite des situations où une correspondance associe à chaque point d'un domaine non pas un unique point, mais un sous-ensemble d'un autre ensemble. Cette approche est cruciale dans des contextes où les solutions d'un problème ne sont pas uniques ou où les relations entre les variables sont complexes.

Principes fondamentaux

1. **Notion de multifonction :** Une *multifonction* (ou *multiapplication*) est une généralisation d'une fonction classique. Elle associe à chaque élément x d'un ensemble X un sous-ensemble $F(x) \subseteq Y$, plutôt qu'un élément unique. *Exemple :* Dans certains problèmes d'optimisation, un paramètre donné peut conduire à plusieurs solutions acceptables, formant un ensemble solution.
2. **Problèmes abordés :**
 - *Problèmes mal posés :* Situations où une solution unique n'existe pas ou n'est pas stable.
 - *Optimisation paramétrée :* Étude des dépendances des solutions par rapport à des paramètres, notamment dans des systèmes dynamiques ou économiques.
3. **Outils utilisés :** L'analyse multivoque adapte les concepts classiques de l'analyse mathématique, tels que :
 - Continuité et compacité pour les multifonctions.
 - Différentiabilité généralisée.
 - Mesure de distance entre ensembles (via la distance de Hausdorff, par exemple).

Applications

- **Biomathématiques :** Modélisation de systèmes biologiques où plusieurs états ou solutions peuvent exister simultanément, comme dans la modélisation écologique ou la dynamique des populations.
- **Physique :** Analyse des systèmes multi-états ou non déterministes.

- **Théorie du contrôle** : Modélisation et optimisation des systèmes où plusieurs stratégies de contrôle sont possibles.
- **Théorie des jeux** : Étude des équilibres dans des jeux où plusieurs solutions (stratégies gagnantes) peuvent exister.
- **Sciences économiques** : Analyse des marchés ou des systèmes avec des équilibres multiples.

Littérature et contributions majeures

Les travaux d'Aubin, Cellina, Frankowska, Burachik et Iusem ont été fondamentaux dans le développement de l'analyse multivoque. Ils ont introduit des concepts cruciaux tels que la viabilité et la régularité dans les multifonctions, et ont contribué à relier l'analyse multivoque à d'autres domaines comme la programmation mathématique et les systèmes dynamiques.

Importance actuelle

L'analyse multivoque reste un domaine actif de recherche, avec des avancées constantes pour résoudre des problèmes de plus en plus complexes dans des domaines variés. Sa puissance réside dans sa capacité à modéliser rigoureusement des systèmes où l'incertitude ou la multiplicité des solutions jouent un rôle central.

Ce mémoire comprend quatre chapitres.

Le premier chapitre intitulé "Preliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude. Il est divisé comme suit :

- Dans la section 1, nous donnons Quelques notions et résultats préliminaires.
- La section 2, Un aperçu historique sur les équations différentielles impulsives
- La section 3, Définitions et notions fondamentales.
- La section 4, Théorèmes de point fixe.

Le deuxième chapitre intitulé "Fonctions Multivoques ou Multi-applications", Ce chapitre est divisé comme suit :

- Dans la section 1, nous donnons la distance de Hausdorff.
- La section 2, semicontinuité supérieure.
- La section 3, semicontinuité inférieure
- La section 4, caractérisations de la s.c.s et la s.c.i.

Le troisième chapitre intitulé "Inclusions différentielles semi-linéaires impulsives", on traitera l'existence des solutions pour le système suivant :

$$x'(t) - A_1x(t) \in F_1(t, x(t), y(t)), \quad y'(t) - A_2y(t) \in F_2(t, x(t), y(t)), \quad t \in [0, b], \quad (1)$$

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) \in I_k(x(t_k)), \quad y(t_k^+) - y(t_k^-) \in \bar{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (3)$$

Où $J := [0, b]$, E est un espace de Banach, $F_1, F_2: J \times E \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ sont des multifonctions, $x_0, y_0 \in E$. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$. Les opérateurs A_i , $i = 1, 2$ sont des générateurs infinitésimaux d'un C_0 -semi-groupe $\{T_i(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach $(E, |\cdot|)$ respectivement, $I_k, \bar{I}_k: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ ($k = 1, \dots, m$), et $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$. Les notations $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k - h)$ représentent les limites à droite et à gauche de la fonction y à $t = t_k$, respectivement.

Le quatrième chapitre intitulé “Un exmple”, Dans cette section, nous présentons un exemple pour illustrer l'utilité et l'applicabilité de nos résultats.

Considérons le système d'inclusions différentielles impulsifs suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t, \xi) \in \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t, \xi) + F(t, u(t, \xi), v(t, \xi)), \quad t \geq 0, \quad t \neq t_k, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \\ v'(t, \xi) \in \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v(t, \xi) + G(t, u(t, \xi), v(t, \xi)), \quad t \geq 0, \quad t \neq t_k, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \\ u(t_k^+, \xi) - u(t_k^-, \xi) = \alpha_k u(t_k^-, \xi), \quad k = 1, \dots, m, \\ v(t_k^+, \xi) - v(t_k^-, \xi) = \bar{\alpha}_k v(t_k^-, \xi), \quad k = 1, \dots, m, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \\ v(0, \xi) = v_0(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \end{array} \right. \quad (4)$$

où $\alpha_k > 0$, et $G, F: [0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ sont des applications multivoques.

Mots clés : Inclusions différentielles Impulsives, multifonction, théoremse du point fixe, espace métrique généralisé.

Notations

Dans tout ce mémoire on désignera par

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^*$: l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^*$: l'ensemble des nombres naturels non nuls.

$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$

$$x(t_j^+) := \lim_{t \rightarrow t_j^+} x(t)$$

$$x(t_j^-) := \lim_{t \rightarrow t_j^-} x(t)$$

Chapitre 1

Quelques notions et résultats préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite.

1.1 Un aperçu historique sur les équations différentielles impulsives

De nos jours, les systèmes impulsifs sont devenus, de plus en plus, importants dans certains processus réels et phénomènes naturels. Par exemple, en physique, en dynamique des populations, en biotechnologie, en économie, etc.

La théorie des équations différentielles impulsives a été initiée par A. Mishkis et V.D. Mil'man en 1960. Le développement de cette théorie était relativement lent à cause de la difficulté de manipulation de telles équations. Après, beaucoup de chercheurs ont participé à l'enrichissement de cette théorie où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors.

1.2 Définitions et notions fondamentales

Soit $J := [0, T]$, $T > 0$ et E un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|$. Notons $C(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \rightarrow E$, muni de la norme

$$\|y\|_{\infty} := \sup\{\|y(t)\|, t \in J\}.$$

Définition 1.2.1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans K

i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.2.2. Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach s'il est complet. Autrement dit, E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Exemple 1.2.1. $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est l'espace de Banach des fonctions continues $y : ([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$, muni de la norme

$$\|y\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} \|y(t)\|.$$

Soit $J = [0, b]$, $L^1(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions mesurables $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont Lebesgue intégrable avec la norme

$$\|x\|_1 = \int_0^b \|x(t)\| ds.$$

On désigne par $AC(J, \mathbb{R})$: l'espace des fonctions absolument continues sur J . Notons $AC^i(J, \mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont i -ème fois différentiables et dont la i -ème dérivée $y^{(i)}$ est absolument continue.

Définition 1.2.3. (Fonction Carathéodory)

Soient X, Y deux espaces de Banach. Une application $f : J \times X \rightarrow Y$ est dite Carathéodory si f vérifie :

(1) $t \rightarrow f(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in X$,

(2) $x \rightarrow f(t, x)$ est continue presque pour tout $t \in J$.

L'application f est dite L^1 - Carathéodory si f est Carathéodory et on a $\forall q > 0, \exists l_q \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$:

$$\|f(t, x)\| \leq l_q(t) \text{ p.p. } t \in J, \forall \|x\| \leq q$$

Exemple 1.2.2. Soient $h : J \rightarrow Y$ une fonction mesurable et $g : X \rightarrow Y$ une fonction continue, alors la fonction $f : J \times X \rightarrow Y$ définie par $f(t, x) = h(t) + g(x)$ est Carathéodory.

Définition 1.2.4. (Fonction localement lipschitzienne)

Soient J un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in J \times D$. Soit $U \subset D$ un voisinage du point y_0 . On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable y dans le voisinage U s'il existe une constante $L > 0$ et il existe un voisinage $V \subset J$ du point t_0 tels que :

$$\|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| \leq L \|y_1(t) - y_2(t)\| \text{ pour } y_1(t), y_2(t) \in U, t \in V.$$

Définition 1.2.5. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Soit k un réel strictement positif. On dit que $f : X \rightarrow Y$ est lipschitzienne de rapport k si

$$\forall x, y \in X : \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Si de plus $k < 1$, on dit que f est contractante.

Exemple 1.2.3. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ :$

$$f(y) = \sqrt{y}$$

n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$.

En effet :

$$\lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \infty$$

Et par conséquent il ne peut pas exister une constante L vérifiant la condition de Lipschitz. Cependant f est Lipschitzienne sur tout intervalle $[a, b]$ avec $b > a > 0$.

En effet pour tout $y_1(t), y_2(t) \in [a, b]$ on a :

$$\frac{|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{|\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}|} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Et donc la condition de Lipschitz est vérifiée avec $L = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Remarque 1.2.1. (1) Si une fonction (d'une variable) est dérivable au voisinage d'un point et la dérivée est bornée dans ce voisinage, alors la fonction est localement lipschitzienne.

La réciproque est fausse : il y a des fonctions lipschitziennes qui ne sont pas dérivables.

(2) Si une fonction est de classe C^1 alors elle est localement lipschitzienne.

Définition 1.2.6. Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F .

Définition 1.2.7. (Opérateur complètement continu).

Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F . On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F .

Définition 1.2.8. (Ensemble uniformément borné).

On dit que $M \subset C(E, F)$ est uniformément borné s'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que :

$$\|x(t)\| \leq c, \forall x \in M$$

Définition 1.2.9. (Partie équicontinue).

Soient (E, d) un espace métrique et F un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $A(E; F)$ est équicontinue si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $f \in A$, on a

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon \text{ pour tout } x, y \in E \text{ et } d(x, y) < \alpha(\epsilon).$$

Définition 1.2.10. (Théorème d'Arzela-Ascoli).

Soient E un espace métrique complet, et J un ensemble compact de $\mathbb{R}$, soit A un sous ensemble de $C(J, E)$, A est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble A est uniformément borné i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A$$

2. L'ensemble A est équicontinu i.e pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A$$

3. Pour tout $x \in A$, l'ensemble $\{f(x); f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 1.2.1. (Convergence dominée de Lebesgue).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω .

ii) Il existe une fonction $g \in L^1$ tel que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω , Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Définition 1.2.11. (Semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés).

Soit $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

• Une famille à un paramètre $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :

(i) $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.

• un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit uniformément continu sur X si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0, \quad (1.1)$$

• L'opérateur linéaire A défini par :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}, \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt} \Big|_{t=0},$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de A .

Définition 1.2.12. (C_0 -semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés).

Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \forall x \in X, \quad (1.2)$$

Un semi-groupe fortement continu sur X est aussi appelé C_0 -semi-groupe sur X .

Théorème 1.2.2. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ C_0 -semi-groupe sur X . Alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.2.3. (Hille-Yosida).

Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire tel que :

- (i) A est fermé et $D(A)$ est dense dans X ,
- (ii) il existe $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tels que

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(\lambda)| > \omega\}$$

et pour $\operatorname{Re} \lambda > \omega, n = 1, 2, \dots$

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$

Définition 1.2.13. (Espace métrique généralisé).

Si $v, r \in \mathbb{R}^m$, $v := (v_1, \dots, v_m)$ et $r := (r_1, \dots, r_m)$ alors $v \leq r$ si $v_i \leq r_i$ pour tous $i = 1, \dots, m$.

Aussi $|v| := (|v_1|, \dots, |v_m|)$ et $\max(u, v) := (\max(u_1, v_1), \dots, \max(u_m, v_m))$. Si $c \in \mathbb{R}$, alors $v \leq c$ si $v_i \leq c$ pour tous $i \in \{1, \dots, m\}$.

Soit X un ensemble non vide et considérons l'espace $\mathbb{R}_+^m$. L'application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ qui vérifie tous les axiomes habituels de la métrique est appelée une métrique **généralisé** au sens de Perov et (X, d) est appelé espace métrique généralisé.

Pour $r := (r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathbb{R}_+^m$, on note par

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\},$$

La boule ouverte centrée en x_0 et de rayon r

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

La boule fermée centrée en x_0 et de rayon r

Les notions de convergence, suite de cauchy et les sous ensembles ouverts et fermés dans le cas des espaces métrique généralisé sont similaires à ceux correspondants dans l'espace métrique habituel.

Définition 1.2.14. (Matrice convergente).

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R}^+)$ de nombres réels est convergente vers zéro si et seulement si $A^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Lemme 1.2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R}^+)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est une matrice convergente vers zéro ;

- les valeurs propres de A sont dans le disque ouvert unité, i.e., $|\lambda| < 1$, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\det(A - \lambda I) = 0$;
- La matrice $(I - A)$ est non-singulière et $(I - A)^{-1}$ a des éléments non négatifs;
- $A^n q \rightarrow 0$ et $qA^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tous $q \in \mathbb{R}^m$.

Exemple 1.2.4. Exemples de matrices qui convergent vers zéro :

1. $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a + b < 1$;
2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a + b < 1$;
3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $\max\{a, c\} < 1$.

Définition 1.2.15. (Opérateur contractif).

Soit (X, d) un espace métrique généralisé. Un opérateur $N : X \rightarrow X$ est contractif s'il existe une matrice convergente vers zéro A tel que

$$d(N(x), N(y)) \leq Ad(x, y), \forall x, y \in X.$$

Théorème 1.2.4. Soit (X, d) un espace métrique généralisé complet et $N : X \rightarrow X$ un opérateur contractif avec la matrice de Lipschitz A . Alors N a un point fixe unique x^* et pour tout $x_0 \in X$ on a

$$d(N^k(x_0), x^*) \leq A^k(I - A)^{-1}d(x_0, N(x_0)) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.

Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.3.1. Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que

$$f(u) = u.$$

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe. Ce théorème prouvé en 1922 par Stefan Banach est basé essentiellement sur les notions d'application Lipschitzienne et d'application contractante.

Théorème 1.3.1. (*Principe de contraction de Banach*)

Soit E un espace métrique complet et soit $F : E \rightarrow E$ une application contractante, alors F possède un point fixe unique.

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énoncer est celui de Schauder.

Théorème 1.3.2. Soit C une partie convexe et fermée d'un espace de Banach E et soit $F : C \rightarrow C$ un opérateur continu et compact. Alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 1.3.3. (*Théorème du point fixe de Brouwer*).

Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C .

Théorème 1.3.4. (*Alternative non linéaire de Leray et Schauder*).

Soit E un e.v.n. et $B := \overline{B}(0, R)$ une boule fermée dans E . Supposons que $f : B \rightarrow E$ est une application continue, compacte. Alors

- (a) Ou bien f possède un point fixe dans B .
- (b) Ou bien il existe $x \in \partial B$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = \lambda f(x)$.

Théorème 1.3.5. [29] (*Théorème du point fixe de Krasnoselskii*).

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermée de E . On suppose que $A, B : M \rightarrow E$ sont deux applications satisfaisant :

- $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$
- A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact,
- B est une contraction.

Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

1.4 Quelques définitions d'analyse multivoque

Pour un espace métrique (X, d) , les notations suivantes seront employées dans tout ce mémoire

- $\mathcal{P}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$
- $\mathcal{P}_f(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ fermé} \}$
- $\mathcal{P}_{cp}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ compact} \}$
- $\mathcal{P}_{cv}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ convexe} \}$, avec X muni d'une structure d'un espace vectoriel.
- $\mathcal{P}_{cv,cp}(X) = \mathcal{P}_{cv}(X) \cap \mathcal{P}_{cp}(X)$

Définition 1.4.1. Une multifonction (ou application multivoque) (ou multi application) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y . On notera $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \rightarrow 2^Y$ et $F : X \rightarrow \circ Y$ sont aussi utilisées dans la littérature)

Définition 1.4.2. On appelle *graphe* de la multifonction F , l'ensemble

$$\text{Graph}(F) = \{(x, y) \in E \times F : y \in F(x)\}$$

F est à *graphe fermé* si $\text{Graph}(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est *fermée*

Définition 1.4.3. On appelle *image* de F l'union des images $F(x)$:

$$\text{Im}(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

et le *domaine* de F , l'ensemble

$$\text{Dom}(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

Définition 1.4.4. Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque. On dira que F est *fortement mesurable* si pour chaque fermé $U \subset Y$, l'ensemble $F^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est mesurable dans X .

Lemme 1.4.1. [14]

Soit X un espace normé séparable. L'application multivoque $F : J \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est mesurable si et seulement si pour chaque $x \in X$, la fonction $\varphi : J \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$\varphi(t) = d(x, F(t)) = \inf\{\|x - y\| : y \in F(t)\}, t \in J$$

est lebesgue mesurable.

Définition 1.4.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $F : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application multivoque. On dit que F a un *point fixe* s'il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$. L'ensemble des *points fixes* de F sera noté par $\text{Fix}(F)$. On dit que F est à *valeurs (fermés) convexes* si $F(x)$ est fermé convexe pour tout $x \in X$ et F est *localement borné* si $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ est borné dans E pour tout ensemble $A \subset E$, c.à.d.

$$\sup_{x \in A} \{\sup\{\|y\|\} : y \in F(x)\} < \infty$$

Définition 1.4.6. Soient (X, d) et (Y, ρ) deux espaces métriques et soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque.

On dit que F est *semi-continu supérieurement (s.c.s)* sur X si pour chaque $x_0 \in X$ l'ensemble $F(x_0)$ est un ensemble non vide, et si pour chaque sous ensemble ouvert N de Y contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage ouvert M de x_0 tel que $F(M) \subset N$. C'est à dire, si l'ensemble $F^-(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$ est fermé pour n'importe quel ensemble fermé V dans Y . D'une manière équivalente, F est s.c.s si l'ensemble $F^+ = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ est ouvert pour chaque ouvert V dans Y .

La fonction F est *semi-continue inférieurement (s.c.i)* si l'image inverse de V par F

$$F^-(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

est ouverte pour chaque ouvert V dans Y . D'une manière équivalente, F est s.c.i si le noyau de V par F

$$F^+(V) = \{x \in X : F(X) \subset V\}$$

est fermé pour n'importe quel ensemble fermé V dans Y .

En conclusion, pour une fonction à valeurs multiples $F : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on prend

$$\|F(t, z)\|_p := \sup\{\|v\|; v \in F(t, z)\}$$

Définition 1.4.7. Une fonction multivoque F est dite Carathéodory si :

(a) la fonction $t \rightarrow F(t, z)$ est mesurable pour chaque $z \in \mathbb{R}^n$;

(b) pour tout $t \in J$ la fonction $z \rightarrow F(t, z)$ est semi-continue supérieurement, p.p.

En outre, elle est L^1 - Carathéodory si F est localement intégrablement bornée, c.à.d. pour chaque nombre réel positif r , il existe $h_r \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|F(t, z)\|_p \leq h_r(t) \text{ p.p } t \in J, \forall \|z\| \leq r$$

Lemme 1.4.2. Soit X un espace de Banach. Soit $F : [0, b] \times X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ une multifonction L^1 -Carathéodory avec $S_{F,y} \neq 0$ et soit Γ un opérateur linéaire continu de $L^1([0, b], X)$ dans $C([0, b], X)$, alors l'opérateur

$$\begin{aligned} \Gamma \circ S_F & : C([0, b], X) \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(C([0, b], X)) \\ y & \mapsto (\Gamma \circ S_F)(y) := \Gamma(S_{F,y}) \end{aligned}$$

est à graphe fermé dans $C([0, b], X) \times C([0, b], X)$, où

$$S_{F,y} = \{v \in L^1([0, b], X) : v(t) \in F(t, y(t)); t \in [0, b]\}$$

Définition 1.4.8. On considère la distance pseudo-métrique de Hausdorf :

$$H_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

définie par

$$H_d(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\}$$

où $d(A, b) = \inf_{a \in A} d(a, b)$, $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$. Donc $(\mathcal{P}_{b,f}(\mathbb{R}^n, H_d)$ est un espace métrique et $(\mathcal{P}_{b,f}(\mathbb{R}^n, H_d)$ est un espace métrique généralisé. D'ailleurs, H_d satisfait l'inégalité triangulaire. Et si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} d(x_0, x) \text{ et } H_d(\{x_0\}, A) = \sup_{x \in A} d(x_0, x)$$

Définition 1.4.9. Une multifonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ s'appelle :

(a) k -Lipschitz s'il existe $k > 0$ telle que

$$H_d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(b) Une contraction si elle est k -Lipschitz avec $k < 1$.

Lemme 1.4.3 (21). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $F : X \rightarrow \mathcal{P}_f(X)$ est contractante, alors $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$.*

Lemme 1.4.4 (21). *Pour une multifonction $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(Y)$ s.c.s. on a*

$$\forall x_0 \in X, \lim_{x \rightarrow x_0} \sup F(x) = F(x_0)$$

Lemme 1.4.5 (21). *Soit $(K_n)_n \subset K$ tel que K est un sous ensemble compact de X , et X est un espace de Banach separable. Alors*

$$\overline{co}(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup K_n) = \cap_{N > 0} \overline{co}(\cup_{N \geq 0} K_n)$$

où co l'enveloppe convexe.

Théorème 1.4.1. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach généralisé, et soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ une application multivoque complètement continue et semi-continue supérieurement. Supposons que l'ensemble*

$$\mathcal{A} = \{x \in X : x \in \lambda F(x) \text{ pour un certain } \lambda \in (0, 1)\}$$

est borné. Alors F admet un point fixe.

Chapitre 2

Fonctions Multivoques ou Multi-applications

Définition 2.0.1. Soient T, X deux ensembles non vides.

• On appelle multi-application (fonction multivoque ou multi-fonction) définie sur T à valeurs dans X , toute application F définie sur T à valeurs dans $V(X)$ (ensemble des parties de X), et on note

$$F : T \rightarrow \mathcal{P}(X) \quad \text{ou} \quad F : T \rightrightarrows X$$

Donc, $\forall t \in T, F(t)$ est un sous ensemble de X .

• On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $\text{dom}(F)$, l'ensemble défini par

$$\text{dom}(F) = \{t \in T / F(t) \neq \emptyset\}$$

• On appelle image de F qu'on note $\text{Im}(F)$, l'ensemble défini par

$$\text{Im}(F) = \{x \in X / \exists t \in T : x \in F(t)\}.$$

Si $A \subset T$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$, l'ensemble défini par

$$F(A) = \bigcup_{t \in A} F(t),$$

ce qui revient à écrire

$$F(A) = \{x \in X / \exists t \in A : x \in F(t)\}$$

ainsi

$$\text{Im}(F) = F(T).$$

• Très souvent nous sommes amenés à considérer la multi-application inverse $F^{-1} : X \rightrightarrows T$ définie par

$$t \in F^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in F(t).$$

Nous avons alors $(F^{-1})^{-1} = F$ et

$$\text{dom}(F^{-1}) = \text{Im}(F) \quad \text{et} \quad \text{Im}(F^{-1}) = \text{dom}(F)$$

- On appelle *graphe* de F qu'on note $\text{gph}(F)$, le sous ensemble de $T \times X$ défini par

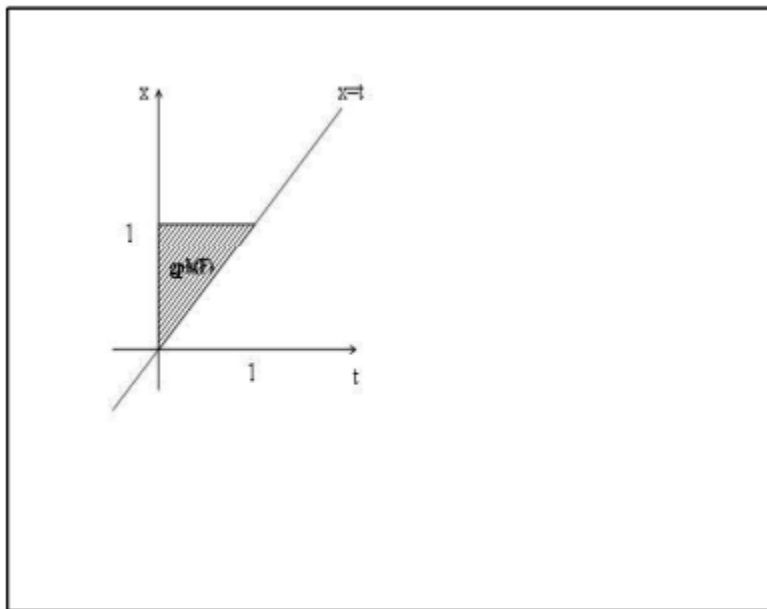
$$\text{gph}(F) = \{(t, x) \in T \times X / x \in F(t)\}.$$

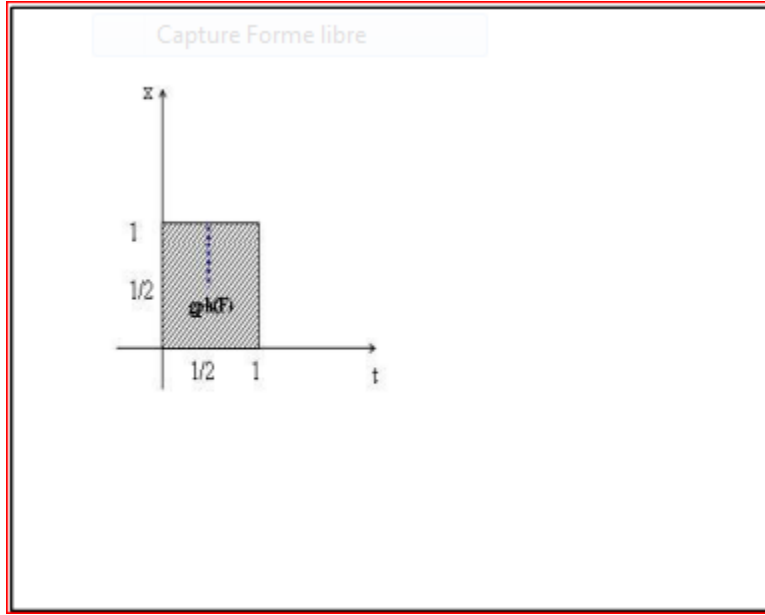
Exemple 2.0.1.

$$F : [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$$

$$t \rightarrow F(t) = [t, 1]$$

$$\text{gph}(F) = \{(t, x) \in [0, 1]^2 / x \in [t, 1]\}.$$





2)

$$F : [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$$

$$t \rightarrow F(t) = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } t \neq \frac{1}{2} \\ [0, 1/2], & \text{si } t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{gph}(F) &= \{(t, x) \in [0, 1]^2 : x \in F(t)\} \\ &= ([0, \frac{1}{2} \cup \frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]) \cup (\frac{1}{2} \times [0, 1]). \end{aligned}$$

Corollaire 2.0.1. *Pour tout $V \subset X$, nous avons*

$$F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Démonstration. $F : T \rightrightarrows X$.

$$\begin{aligned} t_0 \in F^{-1}(V) &\Leftrightarrow \exists x_0 \in V, t_0 \in F^{-1}(x_0) \\ &\Leftrightarrow \exists X_0 \in V, X_0 \in F(t_0) \\ &\Leftrightarrow F(t_0) \cap V \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow t_0 \in \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

D'où $F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\}$.

$F^{-1}(V)$ est appelé l'image réciproque large de V par la multi-application F .

On définit l'image réciproque étroite de V par la multi- application F par

$$F_+^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \subseteq V\}.$$

Nous avons

$$(8.1) \quad T \setminus F_+^{-1}(V) = F^{-1}(X \setminus V) \quad \text{et} \quad T \setminus F^{-1}(V) = F_+^{-1}(X \setminus V). \quad \square$$

Définition 2.0.2. Soient $F : T \rightrightarrows X$ et $G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications, alors on définit l'union :

$$\begin{aligned} F \cup G : T &\rightrightarrows X \\ t &\rightarrow (F \cup G)(t) = F(t) \cup G(t) \end{aligned}$$

l'intersection :

$$\begin{aligned} F \cap G : T &\rightrightarrows X \\ t &\rightarrow (F \cap G)(t) = F(t) \cap G(t) \end{aligned}$$

le produit cartésien :

$$\begin{aligned} F \times G : T &\rightrightarrows X \times X \\ t &\rightarrow (F \times G)(t) = F(t) \times G(t) \end{aligned}$$

Si $F : T \rightrightarrows X$ et $G : X \rightrightarrows Y$, définit la composition :

$$\begin{aligned} G \circ F : T &\rightrightarrows Y \\ t &\rightarrow (F \circ G)(t) = G(F(t)) = \bigcup_{x \in F(t)} G(x) \end{aligned}$$

Lemme 2.0.1. Soient $F : T \rightrightarrows X, G : T \rightrightarrows X$ et $H : T \rightrightarrows Y$ trois multi-applications et soient $V, W \subseteq X$ et $U \subseteq Y$. Alors nous avons les propriétés suivantes

- 1) $(F \cup G)_+^{-1}(V) = F_+^{-1}(V) \cup G_+^{-1}(V).$
- 2) $(F \cup G)^{-1}(V) = F^{-1}(V) \cup G^{-1}(V).$
- 3) $(F \cap G)_+^{-1}(V) \supseteq F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V).$
- 4) $(F \cap G)^{-1}(V) \subseteq F^{-1}(V) \cap G^{-1}(V).$
- 5) $(F \times G)_+^{-1}(V \times W) = F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(W).$
- 6) $(F \times G)^{-1}(V \times W) = F^{-1}(V) \cap G^{-1}(W).$
- 7) $(F \circ G)_+^{-1}(U) = G_+^{-1}(H_+^{-1}(U))$
- 8) $(F \circ G)^{-1}(U) = G^{-1}(H^{-1}(U))$

Remarque 2.0.1. Dans le cas où $f : T \rightarrow X$ est une application univoque, en considérant la multi-application

$$\begin{aligned} F : T &\rightrightarrows X \\ t &\rightarrow F(t) = \{f(t)\} \end{aligned}$$

pour $A \subset T$ et $B \subset X$, nous avons

$$f(A) = F(A), F^{-1}(B) = f^{-1}(B) \text{ et } \text{gph}(F) = \text{gph}(f).$$

Définition 2.0.3. Soient $F : T \rightrightarrows X, G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications et $\alpha : T \rightarrow \mathbb{R}$
On définit
 $F + G : T \rightrightarrows X$

$$t \rightarrow (F + G)(t) = F(t) + G(t) = \{x + y : x \in F(t), y \in G(t)\}.$$

$$\alpha F : T \rightrightarrows X$$

$$t \rightarrow (\alpha F)(t) = \alpha(t).F(t) = \{\alpha(t).x : x \in F(t)\}$$

Nous avons

$$\text{dom}(F + G) = \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G) \quad \text{et} \quad \text{dom}(\alpha F) = \text{dom}(F).$$

2.0.1 Distance de Hausdorff.

Soit (X, d) un espace métrique, supposons dans la suite $d(x, y) < \infty$.

Définition 2.0.4. Soit $A \subset X$, la distance d'un point $x \in X$ à A est donnée par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

• Soient A, B deux sous ensembles de X . On appelle écart entre A et B et on le note $e(A, B)$, la quantité définie par

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} (\inf_{y \in B} d(x, y))$$

avec la convention $\sup \emptyset = 0$ et $\inf \emptyset = \infty$.

• On appelle distance de Hausdorff entre A et F et on la note $h(A, B)$ ou $\mathcal{H}(A, B)$, la quantité définie par

$$h(A, B) = \max(e(A, B), e(B, A)).$$

Proposition 2.0.1. Soient A, B et C des sous ensembles de X alors

(1) $e(A, \emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$.

$$e(\emptyset, B) = 0.$$

(2) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$

$$h(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$$

(3) $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$.

$$h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C).$$

Démonstration.

(1) Si $A \neq \emptyset$

$$e(A, \emptyset) = \sup_{x \in A} d(x, \emptyset) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in \emptyset} d(x, y) = \infty$$

$$e(\emptyset, B) = \sup_{x \in \emptyset} d(x, B) = 0$$

$$(2) e(A, B) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in A} d(x, B) = 0 \Leftrightarrow d(x, B) = 0, \forall x \in A \Leftrightarrow x \in \overline{B}, \forall x \in A \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$$

$$h(A, B) = 0 \Leftrightarrow e(A, B) = 0 \quad \text{et} \quad e(B, A) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \quad \text{et} \quad B \subset \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}.$$

(3) Nous avons, $\forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C$

$$\begin{aligned} d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) &\Rightarrow \inf_{z \in C} d(x, z) \leq d(x, y) + \inf_{x \in z} d(y, z) \\ &\Rightarrow d(x, C) \leq d(x, y) + d(y, C) \\ &\Rightarrow d(x, C) \leq \inf_{y \in B} d(x, y) + d(y, C) \\ &\Rightarrow d(x, C) \leq d(x, B) + \sup_{y \in B} d(y, C) \\ &\Rightarrow \sup_{x \in A} d(x, C) \leq \sup_{x \in A} d(x, B) + e(B, C) \\ &\Rightarrow e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C) \end{aligned}$$

Comme $h(A, C) = \max[e(A, C), e(C, A)]$ alors

$$h(A, C) = e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$$

ou bien

$$h(A, C) = e(C, A) \leq e(C, B) + e(B, A) \leq h(C, B) + h(B, A) = h(A, B) + h(B, C)$$

d'où

$$h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$$

□

Corollaire 2.0.2. *Soit (X, d) un espace métrique et $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble de tous les sous ensembles fermés de X . Alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), h)$ est un espace métrique.*

Démonstration.

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}_{cl}(X)$$

$$(1) h(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B} \Leftrightarrow A = B,$$

$$(2) h(A, B) = h(B, A),$$

$$(3) h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C).$$

□

Proposition 2.0.2. *Soit (X, d) un espace métrique et soient $A, B \subset \mathcal{P}_{cl}(X)$. Alors*

$$h(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset V(B, \epsilon) \text{ et } B \subset V(A, \epsilon)\},$$

$$\text{avec } V(M, \epsilon) = \{x \in X : d(x, M) \leq \epsilon\}, \forall M \in X.$$

Démonstration.

Nous avons

$$A \subset V(B, \epsilon) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in V(B, \epsilon) \Leftrightarrow \forall x \in A, d(x, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in A} d(x, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow e(A, B) \leq \epsilon.$$

De la même manière,

$$B \subset V(B, \epsilon) \Leftrightarrow e(B, A) \leq \epsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \inf\{\epsilon > 0 : A \subset V(B, \epsilon) \text{ et } B \subset V(A, \epsilon)\} \\ &= \inf\{\epsilon > 0 : e(A, B) \leq \epsilon \text{ et } e(B, A) \leq \epsilon\} \\ &= \inf\{\epsilon > 0 : h(A, B) \leq \epsilon\} = h(A, B). \end{aligned}$$

On note par $B(A, r)$, la boule ouverte de rayon r autour de A ,

$$B(A, r) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

Observons que si X est un espace de Banach alors

$$B(A, r) = \overline{A + rB_E}$$

□

Définition 2.0.5. .Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles de (X, d) .

On appelle limite supérieure de la suite $(A_n)_n$, le sous ensemble de X défini par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x, A_n) = 0\}.$$

Et on appelle limite inférieure de la suite $(A_n)_n$, le sous ensemble de X défini par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(x, A_n) = 0\}.$$

On dit que A est limite de la suite (A_n) si

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Proposition 2.0.3. .Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensembles d'un espace métrique (X, d) .

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n$ est l'ensemble des limites des suites $(x_n)_n$ tel que $x_n \in A_n$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n$ est l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_n) tel que $x_n \in A_n$, c'est á dire, l'ensemble des limites des sous suites $(x_{n'})$ tel que $x_{n'} \in A_{n'}$.

Théorème 2.0.1. .Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensembles de (X, d) .

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n &= \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m} = \bigcap_{\epsilon < 0} \left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} B(A_m, \epsilon) \right). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n &= \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{m \geq n} A_m = \bigcap_{\epsilon < 0} \left(\bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{m \geq n} B(A_m, \epsilon) \right). \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
x \in \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x, A_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} d(x, A_m) = 0 \\
&\Leftrightarrow \inf_{m \geq n} d(x, A_m) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists m \geq n / d(x, A_m) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists m \geq n, \exists x_m \in A_m / d(x, x_m) < 2\epsilon, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow d(x, \bigcup_{m \geq n} A_m) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n > 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \bigcap_{n > 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$$

□

Exemple 2.0.2. Soit $(A_n)_n \subset \mathbb{R}^2$, la suite définie par

$$A_n = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-1, 0] & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n = \{0\} \times \{0\} = \{(0, 0)\}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \{0\} \times [-1, 1] = \{(0, x) / -1 < x < 1\}.$$

On note par $\mathcal{P}_k(X)$, la famille de tous les sous ensembles compacts de X .

Proposition 2.0.4. Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), h)$ est complet et $(\mathcal{P}_k(X), h)$ est complet.

Si (X, d) est un espace séparable alors $(\mathcal{P}_k(X), h)$ est séparable.

Définition 2.0.6. 1) Soit (X, d) un espace métrique. On appelle fonction polaire associée à la fonction $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, qu'on note f^* , la fonction définie sur le dual de E par

$$f^* : E' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x' \rightarrow f^*(x') = \sup_{x \in E} [\langle x', x \rangle - f(x)]$$

2) Soit $A \subset E$. On appelle fonction indicatrice de A , qu'on note $\delta(., A)$, la fonction définie par

$$\delta(., A) : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$x \rightarrow \delta(x, A) = \begin{cases} 0, & x \in A; \\ +\infty & x \notin A, \end{cases}$$

3) On appelle fonction support de A , qu'on note $\delta^*(., A)$, la fonction définie sur E' par

$$\delta^*(., A) : E' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$x' \rightarrow \delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle,$$

c'est la fonction polaire associée á $\delta(., A)$.

En effet,

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in E} (\langle x', x \rangle - \delta(x, A)) = \sup_{x \in A} (\langle x', x \rangle - 0)$$

ce qui donne

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle$$

Corollaire 2.0.3. .Soit E un espace vectoriel normé et soit C un sous ensemble convexe fermé de E , alors

$$d(x, C) = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} [\langle x', x \rangle - \delta^*(x', C)]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d(x, C) &= \inf_{y \in C} \|x - y\| \\ &= \inf_{y \in C} (\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \langle x', x - y \rangle) \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (\inf_{y \in C} \langle x', x - y \rangle) \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} \inf_{y \in C} (\langle x', x \rangle - \langle x', y \rangle) \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (\langle x', x \rangle + \inf_{y \in C} (-\langle x', y \rangle)) \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (\langle x', x \rangle - \sup_{y \in C} \langle x', y \rangle) \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (\langle x', x \rangle - \delta^*(x', C)) \end{aligned}$$

Dans le passage de la deuxième égalité á la troisième égalité, nous avons utilisé le théoreme de l'inf-sup, applicable ici, puisque C est un convexe fermé. $\square$

Corollaire 2.0.4. .Soit A et B deux sous ensembles convexes fermés bornés de E , alors

$$e(A, B) = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (\delta^*(x', A) - \delta^*(x', B))$$

$$h(A, B) = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (|\delta^*(x', A) - \delta^*(x', B)|)$$

Démonstration.

Nous avons

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Par le corollaire 1.0.3

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} [\sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (\langle x', x \rangle - \delta^*(x', B)) = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} [\sup_{x \in A} (\langle x', x \rangle - \delta^*(x', B))]$$

et donc

$$e(A, B) = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} [\delta^*(x', A) - \delta^*(x', B)]$$

Par la définition de h , nous avons

$$h(A, B) = \sup_{x' \in \overline{B}_{E'}} (|\delta^*(x', A) - \delta^*(x', B)|)$$

□

2.0.2 Semi-continuité supérieure.

Définition 2.0.7. Soient T et X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $t_0 \in T$, si pour tout ouvert U de X contenant $F(t_0)$ ($F(t_0) \subset U$), il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, c'est à dire $F(z) \subset U, \forall z \in \Omega$.

On dit que F est s.c.s sur T si elle est s.c.s en tout point $t \in T$.

2.0.3 Semi-continuité inférieure.

Définition 2.0.8. On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $t_0 \in T$ si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage ω de t_0 tel que $F(z) \cap U \neq \emptyset, \forall z \in \omega$ (i.e., $F_{-1}(U)$ est un voisinage de t_0).

On dit que F est s.c.i sur T si elle est s.c.i en tout point $t \in T$.

Définition 2.0.9. On dit que F est continue au point t_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point t_0 , et F continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.

2.0.4 Caractérisations de la s.c.s et la s.c.i.

Corollaire 2.0.5. Soit $F : T \rightrightarrows X$. La semicontinuité supérieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes

- a) $F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de T pour tout ouvert V de X .
- b) $F^{-1}(U)$ est un ouvert de T pour tout ouvert U de X .
- c) $\overline{F^{-1}(U)} \subseteq F^{-1}(\overline{U})$ pour tout sous ensemble U de X .

Corollaire 2.0.6. .La semicontinuité inférieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes

- i) $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T pour tout ouvert V de X .
- ii) $F_+^{-1}(U)$ est un fermé de T pour tout fermé U de X .
- iii) $\overline{F_+^{-1}(U)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$ pour tout sous ensemble M de X .

Démonstration.

• $F \text{ s.c.i} \Rightarrow i$).

Soit V un ouvert de X , montrons que $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T .

Pour cela, il suffit de montrer que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de tous ses points.

Soit $t \in F^{-1}(V) \Leftrightarrow F(t) \cap V \neq \emptyset$. V étant un ouvert de X et F est s.c.i au point t , alors il existe Ω un voisinage de t , tel que $\Omega \subset F^{-1}(V)$, ceci implique que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t , donc $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T .

• $i) \Rightarrow ii$)

Soit U un fermé de X . Montrons que $F_+^{-1}(U)$ est un fermé de T .

En utilisant la relation (1.0.1), nous avons

$$\begin{aligned} U \text{ est un ferme de } X &\Leftrightarrow X \setminus U \text{ est un ouvert de } X \\ &\Rightarrow F^{-1}(X \setminus U) \text{ est un ouvert de } T \\ &\Rightarrow T \setminus F_+^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } T \\ &\Leftrightarrow F_+^{-1}(U) \text{ est un ferme de } T \end{aligned}$$

• $ii) \Rightarrow iii$).

Soit $M \subseteq X$, nous avons $F_+^{-1}(M) \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$.

En effet, $\forall t \in F_+^{-1}(M)$

$$F(t) \subseteq M \subseteq \overline{M} \Leftrightarrow t \in F_+^{-1}(\overline{M}).$$

$\overline{M}$ est un fermé de X , alors $F_+^{-1}(\overline{M})$ est un fermé de T contenant $F_+^{-1}(M)$ d'où,

$$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$$

• $iii) \Rightarrow F \text{ s.c.i.}$

Soit $t_o \in T$ et soit V un ouvert de X tel que $F(t_o) \cap V \neq \emptyset$

Montrons que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t_o .

Nous avons,

$$T \setminus F^{-1}(V) = F_+^{-1}(X \setminus V) = \overline{F_+^{-1}(X \setminus V)}$$

et donc, $T \setminus F^{-1}(V)$ est un fermé de T , i.e., $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T , c'est à dire, $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t_o □

Exemple 2.0.3. . Soient

$$F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow F(t) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } t \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow G(t) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } t = 0 \\ \{0\} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que F est s.c.i sur R et qu'elle n'est pas s.c.s au point 0.

Montrer que G est s.c.s sur R et qu'elle n'est pas s.c.i au point 0.

Démonstration.

Soit V un fermé de $\mathbb{R}$. Montrons que F_+^{-1} est un fermé de $\mathbb{R}$.

$$F_+^{-1} = \{t \in \mathbb{R} : F(t) \subseteq V\}.$$

• Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1, 1]$ et contenant 0, alors

$$F_+^{-1}(V) = \{0\}, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

• Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant $[-1, 1]$ alors

$$F_+^{-1}(V) = \mathbb{R}, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

• Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1, 1]$ et 0, alors

$$F_+^{-1}(V) = \emptyset, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

D'où la semicontinuité inférieure de F .

Montrons maintenant que F n'est pas s.c.s au point 0.

En effet, $\exists U =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $F(0) \subset U$, par contre $\forall \epsilon > 0, F(]-\epsilon, +\epsilon)[) = \bigcup_{x \in]-\epsilon, +\epsilon}[F(x) = [-1, +1] \not\subset U$. Donc F n'est pas s.c.s au point 0. $\square$

Théorème 2.0.2. . Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est s.c.i au point x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de X , telle que $x_n \rightarrow x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x_0)$, il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \rightarrow y_0$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ /

Soit $(x_n) \subset X$, telle que $x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists n_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

Soit $y_0 \in F(x_0)$ et soit $U \in \mathcal{V}(y_0)$.

Nous avons $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, comme F est s.c.i,

$$\exists \Omega \in \mathcal{V}(x_0), F(\Omega) \cap U \neq \emptyset, \forall x \in \Omega.$$

$$\Omega \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, x_n \in \Omega \Rightarrow F(x_n) \cap U \neq \emptyset, \forall n > n_0$$

Soit alors $y_n \in F(x_n) \cap U (n > n_0)$, on conclut que

$$\forall U \in \mathcal{V}(y_0), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, y_n \in U \Rightarrow y_n \rightarrow y_0.$$

Par conséquent, $\exists (y_n) \subset Y$ tel que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \rightarrow y_0 \Leftarrow$ / Supposons le contraire, c'est à dire F n'est pas s.c.i au point x_0 . F n'est pas s.c.i au point $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists U \text{ ouvert de } Y \text{ tel que } F(x_0) \cap U \neq \emptyset \text{ et } \forall \Omega \in \mathcal{V}(x_0), \exists z \in \Omega, F(z) \cap U = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}), F(x_n) \cap U = \emptyset.$$

On obtient alors la suite (x_n) avec $x_n \rightarrow x_0$

Par contre, il n'existe pas de suite (y_n) , telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \rightarrow y_0 \in F(x_0) \cap U$, car sinon on aura

$$\forall W \in \mathcal{V}(y_0), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in W.$$

En particulier pour $U = W$, donc $y_n \in U$. Contradiction avec $F(x_n) \cap U = \emptyset$. D'où le résultat. $\square$

Théorème 2.0.3. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé.*

Démonstration.

$$\text{gph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y / y \in F(x)\}.$$

Soit (x_n, y_n) une suite de $\text{gph}(F)$ qui converge vers (x, y) . Montrons que $(x, y) \in \text{gph}(F)$.
 $X \text{ s.c.s} \Rightarrow F \text{ s.c.s}$ au point $x \Rightarrow \forall U$ ouvert de Y tel que $F(x) \subset U, \exists \Omega \in \mathcal{V}(x)$ tel que $F(z) \subset U, \forall z \in \Omega$.

D'autre part, $\Omega \in \mathcal{V}(x)$ et $x_n \rightarrow x \Rightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \Omega \Rightarrow F(x_n) \subset U, \forall n \geq n_0$$

Nous avons alors pour tout voisinage ouvert U de $F(x)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow F(x_n) \subset U.$$

Or,

$$U_n \in F(x_n) \Rightarrow y_n \in U, \forall n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} U_n \in F(x_n) &\Leftrightarrow y_n \in U, \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow W \text{ voisinage de } X(x), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in U \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow d(y_n, X(x)) \leq \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in \overline{F(x)} = F(x) \end{aligned}$$

Comme $y_n \rightarrow y$ et $F(x)$ est fermé, alors $y \in F(x)$ et donc $(x, y) \in \text{gph} F$.

Par conséquent le graphe de F est fermé. $\square$

Théorème 2.0.4. *Soient $F : X \rightrightarrows Y, G : X \rightrightarrows Y$ deux multi-applications telles que, $\forall x \in X, F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$*

On suppose que

i) F est s.c.s au point $x_0 \in X$;

ii) $F(x_0)$ est compact;

iii) le graphe de G est fermé.

Alors, la multi-application $F \cap G$ est s.c.s au point x_0 .

Démonstration.

Soit N un voisinage ouvert de $F(x_0) \cap G(x_0) = (F \cap G)(x_0)$. Trouvons un voisinage V de x_0 tel que $(F \cap G)(x) \subset N, \forall x \in V$. • Si $F(x_0) \subset N$, par la s.c.s de F au point x_0 , $\exists V$ voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V, F(x) \subset N$ et donc $F(x) \cap G(x) \subset N, \forall x \in V$, d'où le résultat. • Si $F(x_0) \not\subset N$, considérons l'ensemble $K = F(x_0) \cap (Y \setminus N)$ qui est compact, puisque $F(x_0)$ est compact et $(Y \setminus N)$ est fermé.

Nous avons, $\forall y \in K, y \notin G(x_0)$ (car si $y \in G(x_0)$ alors $y \in G(x_0) \cap F(x_0) \subset N$, contradiction avec le fait que $y \in (Y \setminus N)$).

$y \notin G(x_0) \Rightarrow (x_0, y) \notin \text{gph}(G)$ qui est fermé.

En posant $H = ((X \times T) \setminus \text{gph}(G))$ on aura $(x_0, y) \in H$ qui est ouvert, et donc il existe $V_{x_0}^y$ un voisinage ouvert de x_0 et il existe W_y un voisinage ouvert de y tels que $(V_{x_0}^y \times W_y) \subset H \Rightarrow (V_{x_0}^y \times W_y) \cap \text{gph}(G) = \emptyset$,

d'où

$$(9.1) \quad V \in (V_{x_0}^y), G(x) \cap W_y = \emptyset \text{ D'une autre part,}$$

$$K = \bigcup_{y \in K} \{y\} \subset \bigcup_{y \in K} W_y$$

$(W_y)_{y \in K}$ est un recouvrement ouvert de K qui est compact, donc on peut lui extraire un sous recouvrement fini

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n W_{y_i} = W,$$

W est un voisinage ouvert de K et $W \cup N$ est un voisinage ouvert de $F(x_0)$. En effet,

$$F(x_0) \subset F(x_0) \cup N = (F(x_0) \cap (Y \setminus N)) \cup N = K \cup N \subset W \cup N.$$

Comme F est s.c.s au point x_0 , il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que

$$(9.1) \quad F(x) \subset W \cup N, \forall x \in V_0. \text{ Soit } V_{x_0} = V_0 \cap (\cap_{i=1}^n V_{x_0}^{y_i}). \text{ Par les relations (9.1)}$$

et (9.2)

$$\begin{aligned} \forall x \in V_{x_0} &\Leftrightarrow x \in V_0 \text{ et } x \in \cap_{i=1}^n V_{x_0}^{y_i} \\ \forall x \in V_{x_0} &\Leftrightarrow \begin{cases} G(x) \cap W_{y_i} = \emptyset, \forall i = \overline{1, n} \text{ et} \\ F(x) \subset W \cup N \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} G(x) \cap W = \emptyset, \text{ et} \\ F(x) \subset W \cup N \end{cases} \\ &\Rightarrow F(x) \cap G(x) \subset (W \cup N) \cap G(x) = N \cap G(x) \subset N. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall x \in V_{x_0}, F(x) \cap G(x) \subset N$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 2.0.7. *Soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact.*

Si le graphe de G est fermé alors G est s.c.s.

Démonstration.

Appliquant le théorème précédent aux multi-applications G et

$$F : X \rightrightarrows Y$$

$$x \rightarrow F(x) = Y.$$

Nous avons,

$$\forall x \in X, F(x) \cap G(x) = y \cap G(x) = G(x) \neq \emptyset$$

Pour tout $x_0 \in G_1$

- 1) $F(x_0) = Y$ est compact ;
- 2) F est *s.c.s* au point x_0 (car F est constante) ;
- 3) $\text{gph}(G)$ est fermé.

Alors, $G = F \cap G$ est *s.c.s* au point x_0 et donc G est *s.c.s* sur X . □

Définition 2.0.10. . Soit $(A, d), (Y, d')$ deux espaces métriques et soit $F : A \rightrightarrows Y$ une multi-application.

On dit que F est $H - \text{s.c.s}$ au point $x_0 \in X$ si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \epsilon) = \{y \in Y : d(x, F(x_0)) \leq \epsilon\}.$$

On dit que F est $H - \text{s.c.s}$ sur A si et seulement si elle est $H - \text{s.c.s}$ en tout point de A .

Corollaire 2.0.8. . Si F est *s.c.s* au point x_0 alors F est $H.\text{s.c.s}$ au point x_0 (L'implication inverse est fausse).

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$ et Soit $U = [V(F(x_0), \epsilon)]^\circ = \{y \in Y, d(y, F(x_0)) < \epsilon\}$.

Nous avons, $F(x_0) \subset U$, or F est *s.c.s* au point $x_0 \Rightarrow \exists O_{x_0}$ voisinage de x_0 tel que $F(x) \subset U, \forall x \in O_{x_0}$.

$$O_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow \exists \delta > 0, B(x_0, \delta) \subset O_{x_0}$$

$$\Rightarrow F(B(x_0, \delta)) \subset F(O_{x_0}) \subset U = [V(F(x_0), \epsilon)]^\circ \subset V(F(x_0), \epsilon).$$

D'où

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \epsilon).$$

Par conséquent, F est $H - \text{s.c.s}$ au point x_0 □

Corollaire 2.0.9. . Si $F(x_0)$ est compact alors la $H - \text{s.c.s}$ de F au point x_0 est équivalente à la *s.c.s* de F au point x_0 .

Démonstration. Nous avons, $F \text{ s.c.s au point } x_0 \Rightarrow F \text{ } H - \text{s.c.s au point } x_0$ (Corollaire 1.0.7).

Montrons maintenant que, $F \text{ } H - \text{s.c.s au point } x_0 \Rightarrow F \text{ s.c.s au point } x_0$.

Soit U un ouvert de Y tel que $F(x_0) \subset U$. Comme $F(x_0)$ est compact alors,

$$\exists \eta > 0 \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad [V(F(x_0), \eta)]^\circ \subset U.$$

D'une autre part,

$$\forall \epsilon \in (0, \eta), V(F_{x_0}, \epsilon) \subset [V(F(x_0), \eta)]^\circ.$$

En effet, $\forall y \in V(F(x_0), \epsilon), d(y, F(x_0)) \leq \epsilon < \eta \Rightarrow y \in [V(F(x_0)), \eta]^\circ$.

F étant $H - s.c.s$ au point x_0 alors

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \epsilon) \subset U$$

D'où, $\forall U$ voisinage ouvert de $F(x_0), \exists \Omega = B(x_0, \delta) \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $F(x) \subset U, \forall x \in \Omega$.

Par conséquent, F est $s.c.s$ au point x_0 . □

Corollaire 2.0.10. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors F est $H - s.c.s$ au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergeant vers x_0 , nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

Démonstration.

$\Rightarrow /$

F $H - s.c.s$ au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \epsilon)$.

Nous avons

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \zeta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \zeta$$

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \zeta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x_0, \zeta).$$

En particulier, pour $\zeta = \delta$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in F(x_0, \delta).$$

D'où

$$F(x_n) \subset F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \epsilon).$$

$$F(x_n) \subset V(F(x_0), \epsilon) \Leftrightarrow$$

$$e(F(x_n), F(x_0)) \leq \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

$\Leftarrow /$ Supposons que F n'est pas $H - s.c.s$ au point $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, F(B(x_0, \delta)) \not\subset V(F(x_0), \epsilon).$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, F(B(x_0, \frac{1}{n})) \not\subset V(F(x_0), \epsilon).$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}), \text{ et } F(x_n) \not\subset V(F(x_0), \epsilon).$$

$\Leftrightarrow$

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} e(F(x_n), F(x_0)) \neq 0.$$

D'où l'équivalence. □

Définition 2.0.11. .Soient $(X, d'), (Y, F)$ deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

On dit que F est $H - s.c.i$ au point $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / F(x_0) \subset [V(F(x), \epsilon)]^\circ, \forall x \in B(x_0, \delta).$$

F est $H - s.c.i$ sur X si elle est $H - s.c.i$ en tout point de X .

Corollaire 2.0.11. .Si F est $H - s.c.i$ au point x_0 alors F est $s.c.i$ au point x_0

Démonstration.

Supposons que F est $H - s.c.i$ au point x_0 et qu'elle n'est pas $s.c.i$ en ce point. Donc nous avons l'existence d'un ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ et $V \in \mathcal{V}(x_0), \exists x' \in V/F(x') \cap U = \emptyset \Leftrightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) / F(x_n) \cap U = \emptyset.$$

D'une autre part, par la $H - s.c.i$ de F au point x_0 nous avons

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow F(x_0) \subset [V(F(x_n), \epsilon)]^\circ.$$

$\Rightarrow$

$$F(x_0) \cap U \subset [V(F(x_n), \epsilon)]^0, \forall n \geq n_0.$$

soit $y \in F(x_n) \cap U \Rightarrow [V(F(x_n), \epsilon)]^\circ \Rightarrow d'(y, F(x_n)) < \epsilon \Rightarrow$

$\inf_{y_n \in F(x_n)} d'(y, y_n) < \epsilon \Rightarrow \forall k > 0, \exists y_k \in F(x_{n_k})$ tel que $d'(y, y_k) < \frac{1}{k}$

Pour k assez grand, on obtient $y_k \in U$, contradiction avec $F(x_n) \cap U = \emptyset$. Par conséquent, F $H - s.c.i \Rightarrow F$ $s.c.i$. $\square$

Corollaire 2.0.12. .Si $F(x_0)$ est compact alors

$$F \text{ } H - s.c.i \text{ au point } x_0 \Leftrightarrow F \text{ } s.c.i \text{ au point } x_0.$$

Démonstration. .Nous avons, F $H - s.c.i$ au point $x_0 \Rightarrow F$ $s.c.i$ au point x_0 (Corollaire 10.13).

Supposons maintenant que F est $s.c.i$ au point x_0 . Nous avons

$$F(x_0) = \bigcup_{y \in F(x_0)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} B(y, \frac{1}{n}\epsilon).$$

Comme $F(x_0)$ est compact, alors on peut extraire un sous recouvrement fini

$$F(x_0) \subset \bigcup_{(i=1)}^m B(y_i, \frac{1}{2}\epsilon).$$

F est $s.c.i$ au point $x_0 \Rightarrow$

$$\exists \delta_i > 0, \forall x \in B(x_0, \delta_i), F(x) \cap B(y_i, \frac{1}{2}\epsilon) \neq \emptyset$$

pour $i = \overline{1, m}$.

Soit $\delta = \inf_{1 \leq i \leq m} \delta_i$ Si , nous obtenons alors, $x \in F(x_0, \delta)$

$$\Rightarrow F(x) \cap B(y_i, \frac{1}{2}\epsilon) \neq \emptyset, \forall i = \overline{1, m}.$$

$$\Rightarrow \exists z \in F(x) \text{ et } d(y_i, z) < \frac{1}{2}\epsilon \Rightarrow y_i \in V(F(x), \frac{1}{2}\epsilon), \forall i = \overline{1, m}.$$

$$\Rightarrow B(y_i, \frac{1}{2}\epsilon) \subset [V(F(x_n), \epsilon)]^\circ, \forall i = 1, \dots, m.$$

En effet, $\forall z' \in B(y_i, \frac{1}{2}\epsilon), d(z', y_i) < \frac{1}{2}\epsilon \Rightarrow$

$$d(z, z') < d(z, y_i) + d(y_i, z') < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \Rightarrow z' \in [V(F(x_n), \epsilon)]^\circ.$$

Par conséquent,

$$F(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \frac{1}{2}\epsilon) \subset [V(F(x_n), \epsilon)]^\circ \subset V(F(x_n), \epsilon), \forall x \in B(x_0, \delta),$$

et donc F est $H - s.c.i.$ au point x_0 . □

Corollaire 2.0.13. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors F est $H-s.c.i$ au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergeant vers x_0 , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(F(x_0), F(x_n)) = 0$$

Corollaire 2.0.14. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors, F est H -continue (continue par rapport à la distance de Hausdorff) si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ convergeant vers x_0 nous avons corollaire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(F(x_n), F(x_0)) = 0$$

Corollaire 2.0.15. La composition de deux multi-applications $s.c.i$ (resp. $s.c.s$) est $s.c.i$ (resp. $s.c.s$).

Proposition 2.0.5. Soient T, X deux espaces topologiques et $F_1, F_2 : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications. Alors,

a) si F_1 et F_2 sont $s.c.i$ au point $t_0 \in T$, alors $t \mapsto F_1(t) \cup F_2(t)$ est $s.c.i$ au point t_0 (ce résultat n'a pas lieu pour l'intersection).

b) Si F_1 et F_2 sont $s.c.s$ au point t_0 , alors $t \mapsto F_1(t) \cup F_2(t)$ est $s.c.s$ au point t_0 .

c) Supposons que X est métrisable. Si F_1, F_2 sont à valeurs fermées et $s.c.s$ au point t_0 , alors $t \mapsto F_1(t) \cap F_2(t)$ est $s.c.s$ au point t_0 .

Proposition 2.0.6. *Soit X un espace localement convexe et soit $\alpha : T \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue au point $t_0 \in T$ et $F_1, F_2 : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications.*

Soit $F(t) = \alpha(t)F_1(t) + F_2(t)$ et $G(t) = \overline{\text{co}}F_1(t)$.

a) Si F_1 et F_2 sont s.c.i au point t_0 , alors F et G sont s.c.i au point t_0 .

b) Si $F_1(t_0)$ et $F_2(t_0)$ sont compacts et si F_1, F_2 sont s.c.s au point t_0 , alors F et G sont s.c.s au point t_0 .

Chapitre 3

Inclusions Différentielles Semi-Linéaires Impulsives

Ce chapitre traite des inclusions différentielles impulsives, il présente des résultats d'existence dans un espace de Banach. Ces résultats s'appuient sur des techniques modernes telles que le théorème du point fixe de Krasnoselskii. L'objectif est de démontrer comment ces théories peuvent s'appliquer à divers problèmes dans les mathématiques appliquées.

$$x'(t) - A_1x(t) \in F_1(t, x(t), y(t)), \quad y'(t) - A_2y(t) \in F_2(t, x(t), y(t)), \quad t \in [0, b], \quad (3.1)$$

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) \in I_k(x(t_k)), \quad y(t_k^+) - y(t_k^-) \in \bar{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (3.3)$$

Où $J := [0, b]$, E est un espace de Banach, $F_1, F_2: J \times E \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ sont des multifonctions, $x_0, y_0 \in E$. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$. Les opérateurs A_i , $i = 1, 2$ sont des générateurs infinitésimaux d'un C_0 -semi-groupe $\{T_i(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach $(E, |\cdot|)$ respectivement, $I_k, \bar{I}_k: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ ($k = 1, \dots, m$), et $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$. Les notations $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k - h)$ représentent les limites à droite et à gauche de la fonction y à $t = t_k$, respectivement.

En l'absence d'impulsions, le système ci-dessus est utilisé pour étudier les problèmes de conditions initiales et les problèmes aux limites pour les systèmes différentielles non linéaires compétitifs ou coopératifs issus de la biologie mathématique [?] et de l'économie mathématique [?].

Dans [18, 26] les auteurs présentent des résultats d'existence et d'unicité pour des systèmes d'équations différentielles semi-linéaires sans impulsions. Récemment, Precup [25] démontré le rôle de la convergence des matrices et des métriques vectorielles dans l'étude des systèmes d'opérateurs semi-linéaires.

3.1 Solutions Faibles

Pour définir des solutions faibles pour le problème (3.1) – (3.3), nous considérons l'espace suivant :

$$PC = \{z: [0, b] \rightarrow E, z_k \in C(J_k, E), k = 0, \dots, m, \text{ tel que } z(t_k^-) \text{ and } z(t_k^+) \text{ existent et vérifient } z(t_k^-) = z(t_k^+) \text{ for } k = 1, \dots, m\}.$$

Cet espace est muni de la norme suivante :

$$\|z\|_{PC} = \max\{\|z_k\|_\infty, k = 0, \dots, m\},$$

PC est un espace de Banach. Dans tout ce chapitre, A est un générateur infinitésimal d'un C_0 – semi-groupe $\{T_i(t)\}_{t \geq 0}, i = 1, 2$ et il existe $M > 0$ tel que

$$\|T_i(t)\| \leq M \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Une fonction $(x, y) \in PC \times PC$ est appelée une solution faible du problème (3.1)-(3.3) s'il existe $v_1, v_2 \in L^1(J, E)$ tel que $v_i(t) \in F_i(t, x(t), y(t))$ $i = 1, 2$ a.e. on J , et $\mathcal{I}_k(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)), \bar{\mathcal{I}}_k(x(t_k)) \in \bar{I}_k(x(t_k)), k = 1, \dots, m$

$$x(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T(t-t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k^-)).$$

and

$$y(t) = T_2(t)y_0 + \int_0^t T_2(t-s)v_2(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_2(t-t_k)\bar{\mathcal{I}}_k(x(t_k^-)).$$

3.2 Résultat d'existence

Soit $(E, |\cdot|)$ un espace de Banach séparable et $F_i: J \times E \times E \rightarrow \mathcal{P}_{cl,b,cv}(E), i = 1, 2$ sont des multi-applications de Carathéodory qui satisfont certaines hypothèses suivantes :

($\mathcal{G}_1$) Il existe une fonction $p_i \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ et une fonction continue croissante $\psi_i: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), i = 1, 2$ tel que

$$\|F_i(t, x, y)\|_{\mathcal{P}} \leq p(t)\psi_i(|x| + |y|) \text{ for a.e. } t \in J \text{ presque partout sur } x, y \in E,$$

avec

$$\int_0^b p_i(s)ds < \int_1^\infty \frac{du}{\psi(u)}.$$

($\mathcal{G}_2$) Les applications $I_k, \bar{I}_k: E \rightarrow \mathcal{P}_{cv}(E), k = 1, \dots, m$ sont fermées. Il existe des constantes $c_k, \bar{c}_k > 0$ et des fonctions continues $\phi_k, \bar{\phi}_k:$

$\mathbb{R}^+ \rightarrow$

$\mathbb{R}^+$ tel que

$$\|I_k(z)\|_{\mathcal{P}} \leq c_k\phi_k(|z|) \text{ for each } z \in E, k = 1, \dots, m$$

et

$$\|\bar{I}_k(z)\|_{\mathcal{P}} \leq \bar{c}_k\bar{\phi}_k(|z|) \text{ for each } z \in E, k = 1, \dots, m.$$

($\mathcal{G}_3$) The semigroup $T_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ is compact for $t > 0$.

Le résultat suivant est connu sous le nom de théorème de Gronwal-Bihari.

Lemme 3.2.1. [7] Soient $u, \bar{g}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues positives. Supposons qu'il existe $c > 0$ et une fonction continue non décroissante $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, +\infty)$ telles que

$$u(t) \leq c + \int_a^t \bar{g}(s)\phi(u(s)) ds, \quad \forall t \in J.$$

Alors

$$u(t) \leq H^{-1} \left(\int_a^t \bar{g}(s) ds \right), \quad \forall t \in J$$

à condition que

$$\int_c^{+\infty} \frac{dy}{\phi(y)} > \int_a^b \bar{g}(s) ds.$$

Ici, H^{-1} désigne l'inverse de la fonction $H(u) = \int_c^u \frac{dy}{\phi(y)}$ pour $u \geq c$.

Théorème 3.2.1. Supposons que F satisfait l'une des conditions ($\mathcal{G}_1$), ($\mathcal{G}_2$) et ($\mathcal{G}_3$). Alors, l'ensemble des solutions du problème (3.1)-(3.3) est non vide.

Démonstration. Considérons l'opérateur $N: PC \times PC \rightarrow \mathcal{P}(PC \times PC)$ défini pour $(x, y) \in PC \times PC$ par

$$N(x, y) = \left\{ (h_1, h_2) \in PC \times PC : (h_1(t), h_2(t)) = \begin{cases} T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_1(s)ds \\ + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)\mathcal{I}_k(y(t_k)), \quad t \in J \\ T_2(t)y_0 + \int_0^t T_2(t-s)v_2(s)ds \\ + \sum_{0 < t_k < t} T_2(t-t_k)\bar{\mathcal{I}}_k(y(t_k)), \quad t \in J \end{cases} \right\},$$

où $v_i \in S_{F_i, x, y} = \{v \in L^1(J, E) : f(t) \in F_i(t, x(t), y(t)), \text{ a.e. } t \in J\}$ et $\mathcal{I}_k(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)), \bar{\mathcal{I}}_k(y(t_k)) \in I_k(y(t_k)), k = 1, \dots, m$.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N sont des solutions du problème (3.1)-(3.3).

Soit

$$N_1(x, y) = \left\{ h_1 \in PC : h_1(t) = \begin{cases} T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_1(s)ds \\ + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)\mathcal{I}_k(y(t_k)), \quad t \in J \end{cases} \right\}$$

et

$$N_2(x, y) = \left\{ h_2 \in PC : h_2(t) = \begin{cases} T_2(t)y_0 + \int_0^t T_2(t-s)v_2(s)ds \\ + \sum_{0 < t_k < t} T_2(t-t_k)\bar{\mathcal{I}}_k(y(t_k)), \quad t \in J \end{cases} \right\}.$$

Ainsi

$$N(x, y) = (N_1(x, y), N_2(x, y)) \quad \text{pour tout } (x, y) \in PC \times PC.$$

Étant donné que, pour chaque $(x, y) \in PC \times PC$, la non-linéarité F prend des valeurs convexes, l'ensemble de sélection $S_{F, x, y}$ est convexe. De plus, par ($\mathcal{G}_2$), N a des valeurs convexes. D'après ($\mathcal{G}_1$) et ($\mathcal{G}_2$), on peut montrer que N applique des ensembles bornés.

Étape 1. N applique des ensembles bornés dans des ensembles équicontinus de $PC \times PC$.

Il suffit de prouver que $N(\mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_q)$ est relativement compact dans $PC \times PC$, où $\mathcal{B}_q = \{z \in PC : \|z\|_{PC} \leq q\}$.

Premièrement, $N(\mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_q)$ est un ensemble équicontinu de $PC \times PC$. Pour le voir, soient $0 < \tau_1 < \tau_2 \leq b$, $(x, y) \in \mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_q$, et $(h_1, h_2) \in N(x, y)$. Alors, il existe $v_i \in S_{F_i, x, y}$, $i = 1, 2$ et $\mathcal{I}_k(x(t_k)) \in \mathcal{I}_k(x(t_k))$, $\bar{\mathcal{I}}_k(y(t_k)) \in \mathcal{I}_k(y(t_k))$, $k = 1, \dots, m$, tels que

$$h_1(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k)), \quad t \in J,$$

et

$$h_2(t) = T_2(t)y_0 + \int_0^t T_2(t-s)v_2(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_2(t-t_k)\bar{\mathcal{I}}_k(y(t_k)), \quad t \in J.$$

En posant $d_k = \sup_{|r| \leq q} \phi_k(r)$ et $\bar{d}_k = \sup_{|r| \leq q} \bar{\phi}_k(r)$, on obtient les estimations

$$\begin{aligned} |h_1(\tau_2) - h_1(\tau_1)| &\leq |T(\tau_2)x_0 - T(\tau_1)x_0| \\ &\quad + \int_0^{\tau_1} \|T_1(\tau_2 - s) - T_1(\tau_1 - s)\|_{B(E)} p_1(s) \psi_1(q) ds \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|T_1(\tau_2 - s)\|_{B(E)} p_1(s) \psi_1(q) ds + \sum_{k=1}^m T_1(\tau_2 - \tau_1) I_k(y_k) \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < \tau_1} d_k \|T_1(\tau_1 - t_k) - T_1(\tau_2 - t_k)\|_{B(E)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |h_1(\tau_2) - h_1(\tau_1)| &\leq \|T_1(\tau_2 - \tau_1) - Id\|_{B(E)} |x_0| \\ &\quad + M_1 \psi_1(q) \|T_1(\tau_2 - \tau_1) - Id\|_{B(E)} \int_0^{\tau_1} p_1(s) ds \\ &\quad + M_1 \psi_1(q) \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_1(s) ds + M_1 \sum_{\tau_1 < t_k < \tau_2} d_k \\ &\quad + \|T_1(\tau_2 - \tau_1) - Id\|_{B(E)} \sum_{0 < t_k < \tau_1} d_k. \end{aligned}$$

Les termes du côté droit tendent vers zéro lorsque $\tau_1 - \tau_2 \rightarrow 0$.

Nous montrons maintenant que

$$H_1(t) = \{N_1(x(t), y(t)) : t \in J, (x, y) \in \mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_q\}$$

est un ensemble précompact dans E . Soient $0 < t \leq b$ et $0 < \epsilon < t$. Alors pour $(x, y) \in \mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_q$, nous avons

$$\begin{aligned} (N_\epsilon(x(t), y(t)))(t) &= \{T_1(t)x_0 + \int_0^{t-\epsilon} T_1(t-s)v_1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k))\} \\ &= T_1(\epsilon)\{T_1(t-\epsilon)x_0 + \int_0^{t-\epsilon} T_1(t-\epsilon-s)v_1(s)ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-\epsilon-t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k))\}. \end{aligned}$$

Comme $T_1(\epsilon)$ est compact, l'ensemble

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\epsilon(t) &= \{N_\epsilon(x(t), y(t)) : (x, y) \in \mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_q\} \\ &= T_1(\epsilon)\{T_1(t-\epsilon)x_0 + \int_0^{t-\epsilon} T_1(t-\epsilon-s)v_1(s)ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-\epsilon-t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k)), \\ &\quad (x, y) \in \mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_q, v_1 \in S_{F, x, y}, \mathcal{I}_k(x(t_k)) \in \mathcal{I}_k(x(t_k))\}, \end{aligned}$$

est précompact dans E . De plus, pour tout $(h_1(t), h_\epsilon(t)) \in N_1(x(t), y(t)) \times N_\epsilon(x(t), y(t))$, tels que

$$h_1(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k)),$$

et

$$h_\epsilon(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^{t-\epsilon} T_1(t-s)v_1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k)),$$

nous avons

$$|h_1(t) - h_\epsilon(t)| \leq M_1 \int_{t-\epsilon}^t p_1(s)\psi(r)ds.$$

Cela tend vers 0 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, il existe des ensembles précompacts arbitrairement proches de l'ensemble $H(t)$. Ainsi, $H(t)$ est précompact dans E . Il est clair que $H(0) = \{u_0\}$ est précompact dans X . Par conséquent, pour chaque $t \in [0, b]$, l'ensemble $H(t)$ est précompact dans E .

Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, nous concluons que $N_i : PC \times PC \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(PC)$ sont des opérateurs complètement continus.

Étape 2 : N a un graphe fermé

Soit $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, $h_n \in N(x_n, y_n)$ et $h_n := (h_n^1, h_n^2) \rightarrow h := (h_1, h_2)$. Nous allons prouver que $h \in N(x, y)$. Maintenant, $h_n \in N(x_n, y_n)$ signifie qu'il existe $v_n^i \in S_{F_i, x_n, y_n}$, $i = 1, 2$ et $\mathcal{I}_k^n(x(t_k)) \in I_k(x_n(t_k))$, $\bar{\mathcal{I}}_k^n(y_n(t_k)) \in I_k(y_n(t_k))$, $k = 1, \dots, m$, tels que

$$h_n^1(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_n^1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)\mathcal{I}_k^n(x_n(t_k)), \quad t \in J,$$

et

$$h_n^2(t) = T_2(t)y_0 + \int_0^t T_2(t-s)v_n^2(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_2(t-t_k)\bar{\mathcal{I}}_k^n(y_n(t_k)), \quad t \in J.$$

En écrivant h_n^1 et h_n^2 sous la forme :

$$h_n^1(t) = \begin{cases} L_0(v_n^1)(t), & \text{si } t \in [0, t_1], \\ L_1(v_n^1)(t), & \text{si } t \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \vdots \\ L_{m-1}(v_n^1)(t), & \text{si } t \in (t_{m-1}, t_m], \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned}
L_0(v_n^1)(t) &= T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_n^1(s)ds, \quad t \in [0, t_1], \\
L_1(v_n^1)(t) &= T_1(t-t_1)[L_0(v_n^1)(t_1) + \mathcal{I}_1^n(L_0(v_n^1)(t_1))] + \int_{t_1}^t v_n^1(s)ds, \quad t \in (t_1, t_2], \\
L_2(v_n^1)(t) &= T_1(t-t_2)[L_1(v_n^1)(t_2) + \mathcal{I}_2^n(L_1(v_n^1)(t_2))] + \int_{t_2}^t v_n^1(s)ds, \quad t \in (t_2, t_3], \\
&\vdots \\
L_{m-1}(v_n^1)(t) &= T_1(t-t_{m-1})[L_{m-2}(v_n^1)(t_{m-1}) + \mathcal{I}_{m-1}^n(L_{m-2}(v_n^1)(t_{m-1}))] \\
&\quad + \int_{t_{m-1}}^t v_n^1(s)ds, \quad t \in (t_{m-1}, t_m].
\end{aligned}$$

et

$$h_n^2(t) = \begin{cases} \bar{L}_0(v_n^2)(t), & \text{si } t \in [0, t_1], \\ \bar{L}_1(v_n^2)(t), & \text{si } t \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \vdots \\ \bar{L}_{m-1}(v_n^2)(t), & \text{si } t \in (t_{m-1}, t_m], \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned}
\bar{L}_0(v_n^2)(t) &= T_2(t)y_0 + \int_0^t T_2(t-s)v_n^2(s)ds, \quad t \in [0, t_1], \\
\bar{L}_1(v_n^2)(t) &= T_2(t-t_1)[L_0(v_n^2)(t_1) + \mathcal{I}_1^n(L_0(v_n^2)(t_1))] + \int_{t_1}^t v_n^2(s)ds, \quad t \in (t_1, t_2], \\
\bar{L}_2(v_n^2)(t) &= T_2(t-t_2)[L_1(v_n^2)(t_2) + \mathcal{I}_2^n(L_1(v_n^2)(t_2))] + \int_{t_2}^t v_n^2(s)ds, \quad t \in (t_2, t_3], \\
&\vdots \\
\bar{L}_{m-1}(v_n^2)(t) &= T_2(t-t_{m-1})[L_{m-2}(v_n^2)(t_{m-1}) + \mathcal{I}_{m-1}^n(L_{m-2}(v_n^2)(t_{m-1}))] \\
&\quad + \int_{t_{m-1}}^t v_n^2(s)ds, \quad t \in (t_{m-1}, t_m].
\end{aligned}$$

Considérons l'opérateur linéaire continu

$$\Gamma_1 : L^1([0, t_1], E) \rightarrow C([0, t_1], E)$$

défini par

$$v \rightarrow \Gamma_1(v)(t) = \int_0^t T_1(t-s)v(s)ds, \quad t \in [0, t_1],$$

et

$$\Gamma_k : L^1([t_k, t_{k+1}], E) \rightarrow C_*([t_k, t_{k+1}], E)$$

défini par

$$v \rightarrow \Gamma_k(v)(t) = \int_{t_k}^t T_1(t-s)v(s)ds, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \dots, m,$$

où

$$C_*([t_k, t_{k+1}], E) = \{y \in C((t_k, t_{k+1}], E) : y(t_k^+) \text{ existe}\}.$$

D'après le Lemme ??, il s'ensuit que $\Gamma_k \circ S_{F_1^k}$ a un graphe fermé, où

$$S_{F_1^k} = \{v \in L^1([t_k, t_{k+1}], E) : v(t) \in F_1(t, x(t), y(t)), \text{ p.p. } t \in [t_k, t_{k+1}]\}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} L_0(v_n^1)(t) - T_1(t)x_0 &\in \Gamma_1 \circ S_{F_1^0, x(t), y(t)}, \\ L_1(v_n^1)(t) - T_1(t-t_1)[L_0(v_n^1)(t_1) + \mathcal{I}_1^n(L_0(v_n^1)(t_1))] &\in \Gamma_1 \circ S_{F_1^1, x(t), y(t)}, \\ L_2(v_n^1)(t) - T_1(t-t_2)[L_1(v_n^1)(t_2) + \mathcal{I}_2^n(L_1(v_n^1)(t_2))] &\in \Gamma_1 \circ S_{F_1^2, x(t), y(t)}, \\ &\vdots \\ L_{m-1}(v_n^1)(t) - T_1(t-t_{m-1})[L_{m-2}(v_n^1)(t_{m-1}) + \mathcal{I}_{m-1}^n(L_{m-2}(v_n^1)(t_{m-1}))] &\in \Gamma_m \circ S_{F_1^m, x(t), y(t)}. \end{aligned}$$

Il existe alors $v_0 \in S_{F_1^0, x, y}$ tel que

$$h_1(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)v_0(s)ds, \quad t \in [0, t_1].$$

En utilisant le fait que $\mathcal{I}_1$ a un graphe fermé, il existe $I_1(x) \in \mathcal{I}_1(x)$ et $v_1 \in S_{F_1^1, x, y}$ tels que

$$h_1(t) = T_1(t-t_1)[L_0(v_0)(t_1) + I_1(L_0(v_0)(t_1))] + \int_{t_1}^t T_1(t-s)v_1(s)ds, \quad t \in (t_1, t_2].$$

En continuant ce processus, nous obtenons

$$\begin{aligned} h_1(t) &= T_1(t-t_{m-1})[L_{m-2}(v_{m-1})(t_{m-1}) + \mathcal{I}_{m-1}(L_{m-2}(v_{m-1})(t_{m-1}))] \\ &\quad + \int_{t_m}^t T_1(t-s)v_m(s)ds, \quad t \in (t_m, b]. \end{aligned}$$

Définissons

$$v(t) = \begin{cases} v_0(t), & t \in [0, t_1], \\ v_1(t), & t \in (t_1, t_2], \\ \vdots & \vdots \\ v_m(t), & t \in (t_m, b]. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$h_1(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^t v(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t-t_k)I_k(x(t_k)), \quad t \in J.$$

De manière similaire, on peut prouver qu'il existe $\bar{v} \in S_{F_2, x, y}$ and $\bar{I}_k(y) \in \mathcal{I}_k(x)$, $k = 1, \dots, m$ tel que

$$h_2(t) = T_2(t)y_0 + \int_0^t \bar{v}(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_2(t - t_k)\bar{I}_k(y(t_k)), \quad t \in J.$$

Ainsi, nous avons $(x, y, h) \in \text{Graph}(N)$.

Step 7. Bornes a priori des solutions

Soit $(x, y) \in PC \times PC$ be such that $(x, y) \in N(x, y)$. Alors, il existe $(v_1, v_2) \in S_{F_1, x, y} \times S_{F_2, x, y}$ et $\mathcal{I}_k(x(t_k)) \in I_k(x(t_k))$, $\bar{\mathcal{I}}_k(y(t_k)) \in I_k(y(t_k))$, $k = 1, \dots, m$, tel que

$$x(t) = T_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t - s)v_1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_1(t - t_k)\mathcal{I}_k(x(t_k)), \quad t \in J$$

et

$$y(t) = T_2(t)y_0 + \int_0^t T_2(t - s)v_2(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} T_2(t - t_k)\bar{\mathcal{I}}_k(y(t_k)), \quad t \in J.$$

- For $t \in [0, t_1]$, nous avons :

$$E|x(t)| \leq M|x_0| + M \int_0^t |v_1(s)|ds.$$

Alors

$$|x(t)| \leq M|x_0| + M \int_0^t p_1(s)\psi_1(|x(s)| + |y(s)|)ds,$$

et

$$|y(t)| \leq M|y_0| + M \int_0^t p_2(s)\psi_2(|x(s)| + |y(s)|)ds.$$

Ainsi,

$$|x(t)| + |y(t)| \leq M|x_0| + M|y_0| + \int_0^t p(s)\phi(|x(s)| + |y(s)|)ds,$$

où

$$\gamma_0 = M(|x_0| + |y_0|), \quad p(t) = p_1(t) + p_2(t), \quad t \in [0, t_1].$$

D'après le Lemme 3.2.1, nous avons

$$|x(t)| + |y(t)| \leq \Psi_0^{-1} \left(\int_0^{t_1} p(s)ds \right) := K_0, \quad \text{for each } t \in [0, t_1],$$

où

$$\Psi_0(z) = \int_{\gamma_0}^z \frac{du}{\psi(u)}.$$

Ainsi,

$$\|x\|_\infty \leq K_0 \quad \text{and} \quad \|y\|_\infty \leq K_0.$$

- For $t \in (t_1, t_2]$, nous avons

$$|x(t)| \leq M \|I_1(x(t_1))\|_{\mathcal{P}} + M \int_{t_1}^t |v_1(s)| ds.$$

Ainsi

$$|x(t)| \leq M \phi_1(K_0) + M \int_{t_1}^t p_1(s) \psi_1(|x(s)| + |y(s)|) ds,$$

et

$$|y(t)| \leq M \bar{\phi}(K_0) + M \int_{t_1}^t p_2(s) \psi_2(|x(s)| + |y(s)|) ds.$$

Donc

$$|x(t)| + |y(t)| \leq \gamma_1 + \int_{t_1}^t p(s) \psi(|x(s)| + |y(s)|) ds,$$

où

$$\gamma_1 = M(\phi_1(K_0) + \bar{\phi}_1(K_0)), \quad p(t) = p_1(t) + p_2(t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Par le lemme 3.2.1, nous avons

$$|x(t)| + |y(t)| \leq \Psi_1^{-1} \left(\int_{t_1}^{t_2} p(s) ds \right) := K_1, \quad \text{for each } t \in [t_1, t_2],$$

où

$$\Psi_1(z) = \int_{\gamma_1}^z \frac{du}{\psi(u)}.$$

Cela implique que

$$\|x\|_{\infty} \leq K_1 \quad \text{and} \quad \|y\|_{\infty} \leq K_1.$$

- Nous continuons ce processus et obtenons

$$|x(t)| + |y(t)| \leq \Psi_m^{-1} \left(\int_{t_m}^b p(s) ds \right) := K_1, \quad \text{for each } t \in [t_m, b],$$

où

$$\Psi_m(z) = \int_{\gamma_m}^z \frac{du}{\psi(u)}, \quad \gamma_m = M(\phi_m(K_{m-1}) + \bar{\phi}_m(K_{m-1})).$$

Ainsi,

$$\|x\|_{\infty} \leq K_m \quad \text{and} \quad \|y\|_{\infty} \leq K_m.$$

Cela montre que

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in PC \times PC : (x, y) \in \lambda N(x, y), \lambda \in (0, 1)\}$$

est borné. En conséquence du théorème 1.4.1, nous déduisons que N admet un point fixe $(x, y) \in PC \times PC$ qui est une solution du problème (3.1)-(3.3). $\square$

Chapitre 4

Un exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple pour illustrer l'utilité et l'applicabilité de nos résultats.

Exemple 4.0.1. *Considérons le système d'inclusions différentielles impulsifs suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t, \xi) \in \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t, \xi) + F(t, u(t, \xi), v(t, \xi)), \quad t \geq 0, \quad t \neq t_k, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \\ v'(t, \xi) \in \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v(t, \xi) + G(t, u(t, \xi), v(t, \xi)), \quad t \geq 0, \quad t \neq t_k, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \\ u(t_k^+, \xi) - u(t_k^-, \xi) = \alpha_k u(t_k^-, \xi), \quad k = 1, \dots, m, \\ v(t_k^+, \xi) - v(t_k^-, \xi) = \bar{\alpha}_k v(t_k^-, \xi), \quad k = 1, \dots, m, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \\ v(0, \xi) = v_0(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où $\alpha_k > 0$, et $G, F : [0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ sont des applications multivoques.

Soit

$$\begin{aligned} x(t)(\xi) &= u(t, \xi), y(t)(\xi) = v(t, \xi) \quad t \in J, \quad \xi \in [0, \pi], \\ I_k(x(t_k))(\xi) &= \alpha_k u(t_k^-, \xi), \bar{I}_k(y(t_k))(\xi) = \bar{\alpha}_k v(t_k^-, \xi) \quad \xi \in [0, \pi], \quad k = 1, \dots, m, \\ f(t, x(t), y(t))(\xi) &= F(t, u(t, \xi), v(t, \xi)), \quad \xi \in [0, \pi], \\ g(t, x(t), y(t))(\xi) &= G(t, u(t, \xi), v(t, \xi)), \quad \xi \in [0, \pi], \\ u_0(\xi) &= u(0, \xi), \quad v_0(\xi) = v(0, \xi) \quad \xi \in [0, \pi], \end{aligned}$$

Prenons $\mathcal{K} = \mathcal{H} = L^2([0, \pi])$. Nous définissons l'opérateur A by $Au = u''$, avec domaine $D(A) = \{u \in \mathcal{H}, u', u'' \in \mathcal{H} \text{ and } u(0) = u(\pi) = 0\}$.

Alors, il est bien connu que

$$Az = - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle z, e_n \rangle e_n, \in \mathcal{H},$$

et A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ on $\mathcal{H}$, qui est donné par

$S(t)u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle u, e_n \rangle e_n$, $u \in \mathcal{H}$, et $e_n(u) = (2/\pi)^{1/2} \sin(nu)$, $n = 1, 2, \dots$, est l'ensemble orthogonal des vecteurs propres de A . Le semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t > 0}$, $t \in J$, est compact et il existe une constante $M \geq 1$ such that $\|S(t)\|^2 \leq M$.

Supposons maintenant que :

(i) Il existe des nombres positifs $d_k, \bar{d}_k$ $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$|I_k(\xi)| \leq d_k, \quad |\bar{I}_k(\xi)| \leq \bar{d}_k$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

(ii) Les fonctions $F, G : [0, T] \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathcal{H})$ définies par $F_*(t, u)(\cdot) = F(t, u(\cdot))$, $G_*(t, u)(\cdot) = G(t, u(\cdot))$, $u(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ are u.s.c. et nous imposons des conditions adéquates sur F and G pour vérifier l'assumption $(\mathcal{G}_1)$.

(iii) Il existe une fonction intégrable $\eta : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$|F(t, x, y)|^2 \leq \eta(t)\psi(|x|^2 + |y|^2), \quad |G(t, x, y)|^2 \leq \eta(t)\psi(|x|^2 + |y|^2)$$

pour tout $t \in [0, T]$ and $x, y \in \mathbb{R}$, où $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ est continue, non décroissante et concave avec

$$\int_1^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)} = +\infty.$$

Ainsi, le problème (4.1) peut être écrit sous la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} x'(t) \in Ax(t) + F(t, x, y), & t \in J := [0, T], \\ y'(t) \in Ay(t) + G(t, x, y), & t \in J := [0, T], \\ x(t_k^+) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, \dots, m; \\ y(t_k^+) - y(t_k) = I_k(y(t_k)), & k = 1, \dots, m; \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Gr  ce à ces hypothèses, il est évident de vérifier que $(\mathcal{G}_1) - (\mathcal{G}_3)$ sont valides. Par conséquent, les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont satisfaites, et nous pouvons conclure que le système (4.1) possède une solution faible sur $[0, T]$.

Conclusion et Perspective

Conclusion axée sur la recherche fondamentale

Ce document a permis de clarifier les fondements théoriques des équations différentielles impulsives dans le cadre multivoque, en proposant des outils et concepts rigoureux tels que la distance de Hausdorff et les théorèmes de point fixe appliqués aux fonctions multivoques. Les résultats obtenus renforcent la compréhension des structures mathématiques sous-jacentes à ces systèmes.

Perspectives

Les travaux futurs pourraient approfondir l'analyse qualitative des solutions, en particulier dans des espaces fonctionnels plus généraux. Une direction prometteuse serait également l'étude des interactions entre dynamique impulsive et processus aléatoires, ce qui ouvrirait de nouvelles pistes pour les systèmes stochastiques impulsifs. Enfin, l'intégration de ces notions dans des cadres computationnels pourrait élargir leur portée.

Bibliographie

- [1] C. Avramescu and C. Vladimirescu, *Fixed point theorems of Krasnoselskii*
- [2] J.P. Aubin and H. Frankowska, *Set Valued Analysis*, Birkhauser Boston, 1990.
- [3] C. Avramescu, A fixed point theorem for multivalued mapping, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* No. **17** (2004), 1-10.
- [4] C. Avramescu, Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires, *Ann. Mat. Pura Appl.* (**81**) (1969), 147–168.
- [5] T.A. Burton, T. Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability. *Nonlinear Anal.*, **49**, (2002), 445-454.
- [6] T. A. Burton, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, *Nonlinear Analysis* **49**(2002)445-454.
- [7] I. Bihari, A generalisation of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 81-94.
- [8] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.
- [9] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, NewYork, 2003.
- [10] L. Gorniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 495 1999.
- [11] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2003.
- [12] J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford Univ. Press, New York, 1985.
- [13] H. Berrezoug, J. Henderson and A. Ouahab , Existence and uniqueness of solutions for a system of impulsive differential equations on the half-line, *J. Nonl. Funct. Anal.*, Vol.2017(2017), Article ID **38**, pp.1-16.
- [14] H. Berrezoug, Stability of impulsive differential equations and inclusions, *Ph.D. thesis.*, University of Sidi Bel Abbes, Algeria, (2018.)
- [15] V. Lakshmikantham, D. Bainov and P.S. Simenov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Syngapore, 1989.
- [16] Y. C. Liu and Z. X. Li, Schaefer type theorem and periodic solutions of evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **316** (2006), 237-255.

- [17] V.D. Milman and A.A. Myshkis, On the stability of motion in the presence of impulses, *Sib. Math. J. (in Russian)*, **1** (1960), 233-237.
- [18] O. Nica and R. Precup, On the nonlocal initial value problem for first order differential systems, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.* **56** (2011), No. 3, 125-137.
- [19] O. Nica, Existence results for second order three point boundary value problems, *Differ. Equ. Appl.* **4** (2012), 547-570.
- [20] O. Nica, Initial-value problems for first-order differential systems with general nonlocal conditions, *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2012 (2012), No. 74, pp. 1-15.
- [21] L. Pan, Existence of periodic solutions for second order delay differential equations with impulses, *Electronic journal of differential equations*, **37** (2011), 1-12.
- [22] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [23] N. Perestyuk, V. Plotnikov, M. Samoilenko and V. Skripnik, *Differential equations with impulse effects : Multivalued right-hand sides with discontinuities*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin/Boston, 2011.
- [24] A.I. Perov and A.V. Kibenko, On a certain general method for investigation of boundary value problems, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **30** (1966), 249-264 (in Russian).
- [25] R. Precup, The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems, *Math. Comp. Modelling* **49** (2009), 703-708.
- [26] R. Precup and A. Viorel, Existence results for systems of nonlinear evolution equations, *Int. J. Pure Appl. Math. IJPAM* **47** (2008), 199-206.
- [27] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, 27. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [28] A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [29] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, London, 1974.
- [30] A. Viorel, *Contributions to the Study of Nonlinear Evolution Equations*, Ph.D. thesis, Babeş-Bolyai University Cluj-Napoca, Department of Mathematics, 2011.
- [31] Xinzhi Liu, Qing Wang, On stability in terms of two measures for impulsive systems of functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **326**(2007)252-265.
- [32] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th ed. Springer-Verlag, Berlin, 1980.