



---

---

FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & HYDRAULIQUE

---

---

MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN GENIE CIVIL  
OPTION : STRUCTURES

THEME :

# ÉTUDE DE L'EFFET DE CISAILLEMENT TRANSVERSE SUR LE COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX COMPOSITES

Présenté par :

M.Bekkouche Nasreddine    M. Kheddaoui Mustapha

Membres du jury

Université Dr. TAHAR Moulay de Saida  
Université Dr. TAHAR Moulay de Saida  
Université Dr. TAHAR Moulay de Saida

**Président**  
**Examineur**  
**Encadreur**

M.Yeghnem.R  
Mme.Benguediab.S  
M.Rezgani .L

Année Universitaire : 2017– 2018

# Dédicace

---

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labour qu'on dédie  
Du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant  
La gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence.

Je dédie ce modeste travail à mes parents qui ont été présent à chaque  
moment de ma vie avec leur soutien, et leur sacrifice juste pour me voir réussir  
et opter pour le mieux. «Mes parents» : dire merci c'est  
trop peu, Alors je vous dois toute ma vie.

A tous mes amis. A tous mes camarades de promotion qui m'ont  
accompagné durant ces années d'études.

Et je remercie mon dieu de tout mon cœur d'avoir été honoré par  
l'encadrement de **Mr. Rezgani** Laid m'a offert toutes les  
possibilités pour réaliser ce travail.

Et je n'oublie pas tous mes enseignants qui m'ont formé dans le chemin d'étude  
,et je remercie ma belle famille pour leurs  
contribution et leurs soutien moral et physique.

Je veux vous remercier pour tout ce que vous avez fait pour moi, je n'ai pas  
trouvé des mots pour refléter votre valeur.  
Enfin, je dédie ce travail à tous les encouragements et contribué à ce travail de  
près et de loin.

---

## Résumé

Le matériau composite est très utilisé ces derniers années dans plusieurs domaines à savoir génie civil, aéronautique....etc. La prise en compte du cisaillement transverse dans l'étude des matériaux composites peut s'avérer prépondérante pour obtenir des résultats cohérents et exploitables. Ce phénomène a été étudié longtemps par les scientifiques et plusieurs niveaux de complexité se distinguent. L'objectif de ce mémoire consiste à étudier l'effet de cisaillement transverse sur le comportement mécanique des poutres en composite par la méthode des éléments finis tridimensionnels en utilisant le code de calcul Abaqus. L'analyse du champ de déplacement transversal de la poutre soumise à la flexion trois points, nous a permis d'évaluer le taux de gauchissement de la section l'influence plusieurs paramètres seront mis en évidence tel que : la longueur de la poutre, la hauteur de la poutre, la séquence d'empilement des couches de composite et la charge appliquée.

**Mots clés :** matériaux composite – cisaillement transverse -simulation numérique-élément finis.

## Abstract

The composite material is widely used in recent years in several fields namely civil engineering, aeronautics .... etc. The consideration of transverse shear in the study of composite materials can be preponderant to obtain consistent and exploitable results. This phenomenon has been studied for a long time by scientists and several levels of complexity are distinguished. The objective of this thesis is to study the transverse shear effect on the mechanical behavior of composite beams by the three-dimensional finite element method using the Abaqus code. The analysis of the transverse displacement field of the beam subjected to the three-point bending, allowed us to evaluate the rate of warping of the section the influence several parameters will be highlighted such as: the length of the beam, the height of the beam, the stacking sequence of the composite layers and the applied load.

**Key words:** composite materials - transverse shear - digital simulation - finite element.

## ملخص

تستخدم المواد المركبة في السنوات الأخيرة في العديد من المجالات على نطاق واسع ومن بينها الهندسة المدنية، الطيران... إلخ. يمكن النظر من دراسة القص المستعرض في المواد المركبة لتكون راجحة للحصول على نتائج متسقة وقابلة للاستغلال. هذه الظاهرة قد درست من قبل العلماء منذ فترة طويلة و عدة مستويات من التعقيد، يبرز الهدف من دراسة تأثير القص العرضي على السلوك الميكانيكي للعارضة المركبة من خلال طريقة العناصر المحددة ثلاثية الأبعاد باستخدام برنامج حساب (Abaqus). من خلال تحليل حقل الإزاحة العرضي للعارضة الخاضعة لثلاث نقاط، سمح لنا بتقييم معدل التواء المساحة التأثير على جميع الخصائص سيتم تمييزها مثل: طول العارضة، ارتفاع العارضة، تسلسل التراص للطبقات المركبة والحمل المطبق عليها.

**المصطلحات الأساسية:** المواد المركبة - القص المستعرض - المحاكاة الرقمية - العناصر المحددة

# Sommaire

---

## Introduction générale

### I. Généralité sur les matériaux composites

I.1	Introduction:.....	3
I.2	Composition des matériaux composites: .....	3
I.2.1	Matrices .....	3
I.2.1.1	Matrices thermodurcissable .....	4
I.2.1.2	Matrices thermoplastique.....	5
I.2.2	Renfort.....	5
I.2.3	Choix du renfort :.....	8
I.2.4	Architecture des renforts: .....	8
I.2.5	Les charges : .....	10
I.2.6	Les additifs :.....	10
I.2.7	L'interface :.....	10
I.3	Les types des matériaux composite :.....	10
I.3.1	Les grandes diffusion : .....	10
I.3.2	Les hautes performance :.....	10
I.3.3	Interaction Fibre/Matrice :.....	11
I.4	Classification :.....	12
I.4.1	Classification par les formes des renforts :.....	12
I.4.2	Classification par la nature des matrices : .....	13
I.5	Caractéristiques du matériaux composites:.....	14
I.6	Architecture des matériaux composites .....	15
I.6.1	Monocouche :.....	15
I.6.2	Stratifié : .....	15
I.6.3	composites sandwiches:.....	16
I.7	Les domaines d'application des composites :.....	18
I.7.1	Les composites dans la construction civile :.....	18
I.7.2	Les composites dans le secteur médical : .....	18
I.7.3	Les composites dans les produits aéronautiques :.....	18
I.7.4	Les composites dans les produits militaires :.....	19
I.7.5	Les composites dans les produits spatiaux (satellites) : .....	19
I.8	Les avantages et les inconvénients des matériaux composites sont:.....	19
I.9	Conclusion : .....	20

# Sommaire

---

<b>II</b>	<b>Initiation sur le Comportement mécanique et endommagement des matériaux composites</b>	
II.1	Introduction .....	21
II.2	Etat de contraintes et de déformations dans un solide .....	21
II.2.1	Tenseur des contraintes .....	21
II.2.2	Tenseur des déformations: .....	21
II.2.3	Equations de Compatibilité .....	22
II.2.4	Matrice de Rigidité .....	22
II.2.5	Matrice de Souplesse (ou de complaisance) .....	23
II.3	Matériaux Anisotropes .....	24
II.3.1	Matériau Monoclinique .....	24
II.3.2	Matériau orthotrope .....	24
II.3.3	Matériau isotrope transverse .....	26
II.4	Matériaux Isotropes .....	27
II.5	Comportement mécanique d'un matériaux composite .....	28
II.5.1	Loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel (UD) .....	28
II.5.2	Equation de comportement mécanique d'un pli composite .....	28
II.5.3	Théorie classique simplifiée des stratifiés .....	32
II.5.3.1	Déformations en membrane .....	34
II.5.3.2	Déformations en flexion et torsion .....	34
II.5.3.3	Déformations en cisaillement .....	35
II.5.3.4	Champ de contraintes pour une couche k .....	35
II.5.4	Loi de comportement d'un matériau composite Stratifié .....	36
II.5.4.1	Comportement en Membrane .....	36
II.5.4.2	Comportement en flexion et torsion .....	38
II.5.4.2.1	Résultantes en flexion.....	38
II.5.4.2.2	Résultantes en cisaillement.....	39
II.6	Mécanismes de rupture dans les matériaux composites .....	40
II.6.1	Définition .....	41
II.6.2	Mode de rupture .....	42
II.6.3	Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel .....	42
II.6.3.1	Fissuration matricielle .....	43
II.6.3.2	Décohésion fibre-matrice .....	44
II.6.4	Comportement d'un composite unidirectionnel .....	44
II.6.4.1	Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale .....	46
II.6.4.2	Composite unidirectionnel soumis à une traction transversale .....	47
II.6.5	L'endommagement des stratifiés .....	48
II.6.5.1	Fissuration matricielle .....	48

# Sommaire

---

II.6.5.2	Décohésion fibre-matrice .....	48
II.6.5.3	Rupture de fibres .....	49
II.6.5.4	Délaminage .....	49
II.7	Conclusion .....	49
<b>III Etude des poutres composites en flexion</b>		
III.1	Introduction.....	50
III.1.1	Comportement en flexion des poutres composites sans considération de l'effet du cisaillement transverse.....	50
III.1.2	Equations de comportement en flexion de poutres composites Stratifiés :.....	50
III.1.2.1	Types de poutres.....	51
III.1.2.2	Types de charges .....	52
III.1.2.3	Lois de comportement.....	53
III.1.3	Moments de flexion .....	53
III.1.4	Contraintes et Déformations:.....	54
III.1.4.1	Flexion 3-Points .....	58
III.2	Comportement en flexion des poutres composites avec considération de l'effet du cisaillement transverse.....	59
III.2.1	Equations de comportement en flexion en tenant compte du cisaillement transverse: ...	60
III.2.1.1	Relation Contrainte-Déformation .....	60
III.2.1.2	Résultantes en moment fléchissant .....	61
III.2.1.3	Résultantes en Cisaillement .....	61
III.2.1.4	Contraintes de flexion.....	63
III.2.1.5	Contraintes de cisaillement: .....	64
III.2.2	Flexion 3-Points .....	65
III.3	Conclusion: .....	65
<b>IV Analyse numérique du l'effet du cisaillement</b>		
IV.1	Introduction .....	66
IV.2	Modèle géométriques.....	69
IV.3	Résultats et analyses .....	71
IV.3.1	Influence de type de matériaux.....	72
IV.3.2	Influence de la hauteur de la poutre.....	73
IV.3.3	Influence de chargements .....	77
IV.3.4	Influence de la longueur entre appuis.....	94
IV.3.5	Influence de l'empilement de couche.....	93
IV.4	Conclusion .....	95
<b>Conclusion générale</b>		

## **Chapitre I: Généralité sur les matériaux composites**

Figure.1 : Représentation schématique d'un matériau composite .....	3
Figure I.2 : Les différents nature des renforts .....	6
Figure I.3 : Bobine fibre de verre .....	6
Figure I.4 : Bobine fibre de carbone .....	7
Figure I.5 : Structure de la fibre de carbone .....	7
Figure I.6 : Bobine fibre de Kevlar .....	7
Figure I.7 : Armure unidirectionnelle .....	8
Figure I.8 : Armure taffetas .....	9
Figure I.9: Armure Serge.....	9
Figure I.10 : Armure Satin.....	9
Figure I.11 : structures tricotées 3D.....	9
Figure I.12 : L'interphase d'un composite.....	12
Figure I.13 : Classification des matériaux composites .....	12
Figure I.14 : Schéma de monocouche .....	15
Figure I.15 : Composite stratifié .....	15
Figure I.16 : Quelques exemples d'empilement. ....	16
Figure I.17 : Matériaux sandwiches à âmes plein .....	17
Figure I.18 : Matériaux sandwiches à âmes creuse.....	17

## **Chapitre II: Initiation sur le Comportement mécanique et endommagement des matériaux composites**

Figure. II.1 : Plan de symétrie .....	24
Figure. II.2 : Plan d'orthotropie.....	25
Figure. II.3 : Plan d'isotropie.....	26
Figure II.3 :Pli à Renforcement unidirectionnel.....	28
Figure II.4: Cellule élémentaire.....	29
Figure II.5 Pli composite UD en-dehors de ses axes principaux.....	31
Figure II.6 Schématisation des déformations dans le cas de La théorie classique des stratifiés .....	33
Figure II.7 Efforts de membrane appliqués sur un stratifié.....	37
Figure II.8 Géométrie des N-couches du stratifié .....	37
Figure II.9 Schématisation des moments de flexion et de torsion .....	39
Figure II.10: Schématisation des résultantes en cisaillement .....	39
Figure II.11: les modes de rupture.....	42

Figure II.12: Rupture de fibre.....	43
Figure II.13 : Rupture transverse de la matrice.....	43
Figure II.14 : Rupture longitudinale de la matrice .....	43
Figure II.15 : Décohésion fibre-matrice. ....	44
Figure II.16 : Modes d'endommagement.....	45
Figure II.17: courbe contrainte/déformation d'un composite soumis à une traction longitudinale( $\epsilon_{fu} < \epsilon_{mu}$ ) .....	46
Figure II.18: courbe contrainte/déformation d'un composite soumis à une traction longitudinale ( $\epsilon_{fu} > \epsilon_{mu}$ ) [24].....	47
Figure II.19 : Rupture d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transversale.....	48
Figure II.20.: Exemple de types d'endommagement d'un stratifié .....	48
 <b>Chapitre III : Etude des poutres composites en flexion</b>	
Figure III.1: machine pour configuration expérimentale pour les mesures de résistance à la traction et compression .....	50
Figure.III.2: Cas d'une Poutre Simple .....	51
Figure.III.3:Cas d'une Poutre Console .....	51
Figure.III.4:Cas d'une Poutre avec Porte à Faux .....	51
Figure.III.5: Cas d'une Poutre Encastree et Supportee .....	52
Figure.III.6: Cas d'une Poutre Continue .....	52
Figure.III.7:Cas d'une Poutre à Double Encastrement .....	52
Figure.III.8:Cas d'une Poutre Supportee à Double Encastrement.....	52
Figure.III.9: Elément Poutre.....	53
Figure.III.10:Sollicitation d'une poutre en flexion 3-points .....	58
 <b>Chapitre IV: Analyse numérique du l'effet du cisaillement</b>	
Figure IV.1: Définition de la structure poutre étudiée.....	66
Figure IV.2: Représentation des catégories de théories a la prise en compte du cisaillement transverse.....	67
Figure IV.3: exemple des fonctions de cisaillement transverse .....	67
Figure IV.4 :Modèle géométrique analysé .....	70
Figure IV.5: variation du déplacement $u_1$ dans la section de la poutre pour différentes matériaux.....	72
Figure IV.6: variation du déplacement $u_2$ (la flèche) pour différentes matériaux.....	72
Figure IV.7: champ de déplacement pour différentes hauteur (H).....	73
Figure IV.8: variation du déplacement $u_2$ (la flèche) pour déféré hauteur	

des poutres (a-b-c-d) .	74
Figure IV.9: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) pour un hauteur de la poutre $h=30\text{mm}$	75
Figure IV.10: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) dans la section de la poutre $h=20\text{mm}$	75
Figure IV.11: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) pour un hauteur de la poutre $h=10\text{mm}$ .	76
Figure IV.12: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) pour un hauteur de la poutre $h=5\text{mm}$	76
Figure IV.13: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) de composite unidirectionnel en fonction de chargement dans la section de la poutre	77
Figure IV.14: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) de composite stratifié en fonction de chargement dans la section de la poutre	77
Figure IV.15: champ de déplacement pour différentes longueurs entre appuis (l)	78
Figure IV.16: variation de déplacement $u_1$ dans la section de la poutre pour différentes longueur entre appuis	78
Figure IV.17: les plis du stratifié avec différentes orientations des fibres.	79
Figure IV.18: variation du déplacement $u_1$ dans la section de la poutre stratifié pour différentes types de stratifié	79
Figure IV.19: variation du déplacement $u_1$ dans la section de la poutre $h=30\text{mm}$ pour deux types de stratifiés $(0^\circ/90)_s$ et $(0^\circ/90)_{30}$	80
Figure IV.20: variation du déplacement $u_1$ dans la section de la poutre $h=30\text{mm}$ pour deux types de stratifiés $(0^\circ/45^\circ/90)_s$ et $(0^\circ/45^\circ/90)_{10}$ .	80
Figure IV.21: Histogramme montre le déplacement maximale $u_1$ dans la section de la poutre $h=30\text{mm}$ pour différentes types stratifiés	81

## Listes des tableaux

---

<b>Les tableaux</b>	<b>Les pages</b>
<b>Tableau I.1:</b> Les différences fondamentales entre TP et TD.....	4
<b>Tableau IV.1:</b> Configurations géométriques des poutres .....	70
<b>Tableau IV.2</b> propriétés mécaniques du matériaux (acier).....	70
<b>Tableau IV.3:</b> propriétés mécaniques en fonction de l'orientation des fibres de matériaux graphite époxy LM de la structure modélisée.....	71

# Les symboles

---

$\{ \}$ : Vecteur colonne

$[ \ ]$ : Matrice

$\sigma_{ij}$  : les contraintes

$\epsilon_{ij}$  : les déplacements

$\gamma_{ij}$  : Déformations de cisaillement transverse

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$  : Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche k

$\nu_{ij}$   $G_{ij}$   $E_{ij}$  : module d'ingénieur (élastique)

$\mu$   $\lambda$  : coefficient de lamé

$[C_{ij}]$ : matrice de rigidité

$[S_{ij}]$ : matrice de souplesse

$[T_{\square}]$ : matrice de transformation du contrainte

$[T_{\epsilon}]$ : matrice de transformation du déformation

$[Q_{ij}]$ : matrice réduite

$h_z$ : partie supérieur de l'épaisseur de la poutre stratifié

$h_{z-1}$ : partie inférieur de l'épaisseur de la poutre stratifié

$h/2$  : la moitié de l'auteur de stratifié

$k$  : nom de couche

$e_k$ : épaisseur de la couche K

$u, v, w$  : Les champs de déplacement du point  $M$

$\varphi_x$   $\varphi_y$  : Rotation de la section à la ligne moyenne

# Les symboles

---

$k_x, k_y, k_{xy}$  : déformation de flexion torsion

$\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_z^0$  : déformation membrane

$\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  : résultante de cisaillement

$N_x, N_y, N_z$  : Efforts normaux

$M_x, M_y, M_z$  : Moments de flexion

$P_x, P_y, P_z$  : Les forces

$Q_{xz}, Q_{yz}$  : Effort de cisaillement

[ $A_{ij}$ ] : Termes de rigidité en membrane de la plaque

[ $B_{ij}$ ] : Termes de rigidité de couplage de la plaque

[ $D_{ij}$ ] : Termes de rigidité de flexion de la plaque

[ $F_{ij}$ ] : Termes Rigidité en cisaillement

[ $F^*_{ij}$ ] : Termes inverse de rigidité en cisaillement

[ $D^*_{ij}$ ] : Termes inverse de matrice [ $D_{ij}$ ]

$I$  : Moment quadratique de la section droite de la poutre

$M$  : Moment en flexion

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  : contrainte membrane

$k$  : une couche stratifié

$\epsilon_m$  : déformation membrane

$\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$  : La déformation en cisaillement moyenne

[ $\bar{C}_{ij}$ ] : coefficient de cisaillement transverse

$\epsilon_{fu}$  : déformation à la rupture du fibre

# Les symboles

---

$\varepsilon_{mu}$  : déformation a la rupture d'une matrice

$\sigma_m$  : Contrainte de traction de matrice

$\sigma_{mu}$  : contrainte à la rupture d'une matrice

$\sigma_f$  : Contrainte de traction de fibre

$\sigma_{fu}$  : contrainte à la rupture des fibres

$\sigma_d$  : Contrainte de décohésion

$E_f$  : Module d'Young de fibre

$\sigma_{cu}$  : contrainte à la rupture du composite

$V_f$  : Coefficient de poisson

## Introduction générale:

Les matériaux composites jouent un rôle majeur dans notre vie actuelle qui a été témoin des derniers développements dans divers domaines (construction civile, sports et loisirs, espace, équipement médical, , construction marine, industrie électrique, forfaitaire ). Les matériaux composites sont caractérisés par les caractéristiques du produit chimique et mécanique, y compris la capacité de résister à de grands facteurs thermiques et atmosphériques tels que la corrosion et les produits chimiques. Il est également caractérisé par son poids léger sans affecter les propriétés de la rigidité Les matériaux composites subissent des modifications physiques et chimiques par des forces (traction et compression) externes qui leur sont appliquées sur la surface du matériau (contraintes) accompagnées par des moments .Ce qui entraîne des déformations (cisaillement , torsion, flexion, flambement) Dans notre recherche, nous examinerons l'impact de cisaillement transversale sur le comportement des structures dans les matériaux composites .

Les poutres en composite stratifiées se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie. De plus en plus utilisés dans la conception et la fabrication de pièces mécaniques pour les structures aéronautiques, aérospatiales, maritime, et génie civil .... grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques, sont soumis à des sollicitations mécanique et/ou thermique sévères. Bezazi et al. [1] ont réussi de mettre en évidence l'influence du type de renfort sur les valeurs de la charge et du déplacement à la rupture des stratifiés croisés et l'endommagement au cours du chargement en flexion 3-points en statique et en fatigue de ses stratifiés croisés constituées de fibres de verre, de Kevlar et résine époxyde, ainsi que l'analyse des résultats des essais de fatigue menés sur trois types de stratifiés montre l'influence de la séquence d'empilement et de l'amplitude sur le comportement et la durée de vie du matériau. Un modèle de durabilité permettant de prédire la cinétique de perte de raideur de poutres composites à renfort verre soumises à des sollicitations de flexion en environnement humide a été développée et validé par Pauchard et al. [2].

Le cisaillement transverse est un phénomène propre aux matériaux présentant des propriétés mécaniques anisotropes. Ainsi, plus l'anisotropie est élevée, plus les effets du cisaillement transverse sont importants. Ce phénomène est provoqué lors de fortes sollicitations engendrant des contraintes de cisaillement prépondérantes dans la structure.

# Introduction générale

---

Un de ces effets est le gauchissement des sections induit par des contraintes de cisaillement transverse importantes. Le gauchissement des sections entraîne une augmentation de l'amplitude des déplacements dans la structure, et peut entraîner une rupture mécanique anticipée. Ainsi, en fonction de la sollicitation considérée, il peut s'avérer indispensable de prendre en compte le cisaillement transverse dans le dimensionnement mécanique de pièces composites.

Il existe beaucoup de méthodes numériques pour analyser, expliquer et comprendre le comportement mécanique des structures, parmi ces méthodes numériques la méthode des éléments finis tridimensionnel qui a été développée au cours de ces dernières années grâce à l'amélioration des performances des moyens informatiques et des codes de calcul (Abaqus, ANSYS....etc) et elle permet de modéliser des géométries complexes

L'objectif de notre mémoire est d'analyser par la méthode des éléments finis tridimensionnels en utilisant le code de calcul (Abaqus) l'effet de cisaillement transverse sur le comportement des matériaux composites, Ce manuscrit est structuré en quatre chapitres :

dans le 1er chapitre nous allons discuter sur les détails des matériaux composites en termes de composition et les types et diverses utilisations .

Le 2eme chapitre va expliquer les lois de comportement et l'endommagement des matériaux composites.

Le 3eme chapitre présentera une étude des poutres composites en flexion 3points

le 4eme chapitre est consacré à l'étude numérique de l'effet de cisaillement transverse sur le comportement mécanique des poutres en composite, soumise en flexion trois points évaluant le champ de déplacement transversal dans la section de la poutre par l'utilisation de code de calcul (Abaqus) .L'influence des paramètres géométrique et de matériaux , a été mise en évidence dans l'analyse de l'effet de cisaillement

# **Chapitre I**

## **Généralité sur les matériaux composites**

## I.1 Introduction:

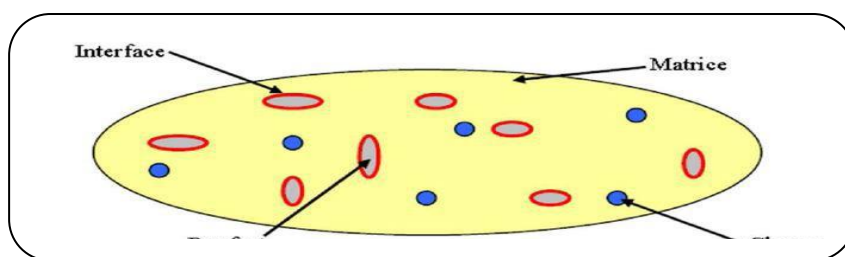
Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux ou plus de natures différentes. Se complétant et permettant d'aboutir à un matériau hétérogène dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Le principal intérêt de l'utilisation des matériaux composites provient de ses excellentes caractéristiques. Ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels.

## I.2 Composition des matériaux composites:

Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de maintenir les fibres en place, leur transmettre les sollicitations mécaniques extérieures et de les protéger vis-à-vis des agressions extérieures .

Le renfort et la matrice doivent être compatibles entre eux et se solidariser. Pour cela, un agent de liaison, appelé interface, est nécessaire (Figure I.1 ). Des charges et des additifs peuvent être ajoutés au composite sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, afin de modifier une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, la résistance au feu...)

La combinaison fibre-résine aboutit tout naturellement à un matériau ayant une bonne résistance mécanique, une grande rigidité et une bonne résistance chimique. En outre, ce composite est doté d'un module spécifique (module par unité de poids) et d'une résistance spécifique qui les rendent très compétitifs, vis-à-vis des métaux, dans les applications où le poids est un facteur déterminant .



**Figure I.1 :** Représentation schématique d'un matériau composite [3]

### I.2.1 Matrices :

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres. Elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique des fibres. Utilisation actuelle ,des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement.

Il est important de bien situer les différences fondamentales de ces deux types de matrices (Tableau I.1) :

La structure des TP se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible.

La structure des TD a la forme d'un réseau tridimensionnel qui se ponte (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'un échauffement. La transformation est donc irréversible

<b>Matrices</b>	<b>Thermoplastiques TP</b>	<b>Thermodurcissables TD</b>
Etat de base	Solide prêt a l'emploi	Liquide visqueux a polymériser
Stockage	Illimite	Réduit
Mouillabilité des renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage +refroidissement	Chauffage contenu
Cycle	Court	Long
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite	Bonne
Chutes des déchets	Recyclables	Perdu ou recycles en charges
Condition de travail	Propreté	Emanation pour "méthode humide"

**Tableau I.1:** Les différences fondamentales entre TP et TD..4

### **I.2.1.1 Matrice thermodurcissable :**

Les résines thermodurcissables sont des polymères, qui, après un traitement thermique ou physico-chimique (catalyseur, durcisseur), se transforment en des produits essentiellement infusibles et insolubles. Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois [4]. Les résines thermodurcissables principalement utilisées actuellement sont :

- **Résines polyesters :**

Les polyesters insaturés sont les résines les plus utilisées dans les applications GD. Elles se présentent sous la forme d'une solution polyacide plus polyalcool qui se rigidifie sous l'action d'un

catalyseur et de l'action de la chaleur. Elles présentent le grand défaut d'émettre des vapeurs de styrène au cours de la polymérisation et d'être difficiles à stocker [5].

- **Résine époxyde :**

C'est la plus utilisée dans l'aéronautique ; elle présente un bon accrochage sur les fibres et de bonnes propriétés mécaniques. Elle possède de bonnes propriétés jusqu'à une température de 170°C mais elle est plus coûteuse que la résine polyesters [6]

- **Résine phénolique :**

Les résines phénoliques sont obtenues par la polycondensation du phénol et du formol , elles présentent une très bonne tenue au feu, sans fumée (d'où leur utilisation dans le ferroviaire). Elles sont fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à mettre en œuvre . [7-8]

- **Résine vinylesters :**

Les vinylesters sont des dérivés de polyesters et d'acide acrylique ; ils ont une bonne tenue à la fatigue et un bon comportement à la corrosion mais sont combustibles . les thermodurcissables couvrant environ 70 à 75 % des besoins dans les composites HP. [9]

### **I.2.1.2 Matrice thermoplastique :**

Les résines thermoplastiques sont des solides généralement solubles, formés de chaînes distinctes bien compactées, liées entre elles par des seules liaisons secondaires (force de van der Waals, liaisons d'hydrogène) et mis en forme par chauffage et refroidissement [10]

Le rôle de la matrice est:

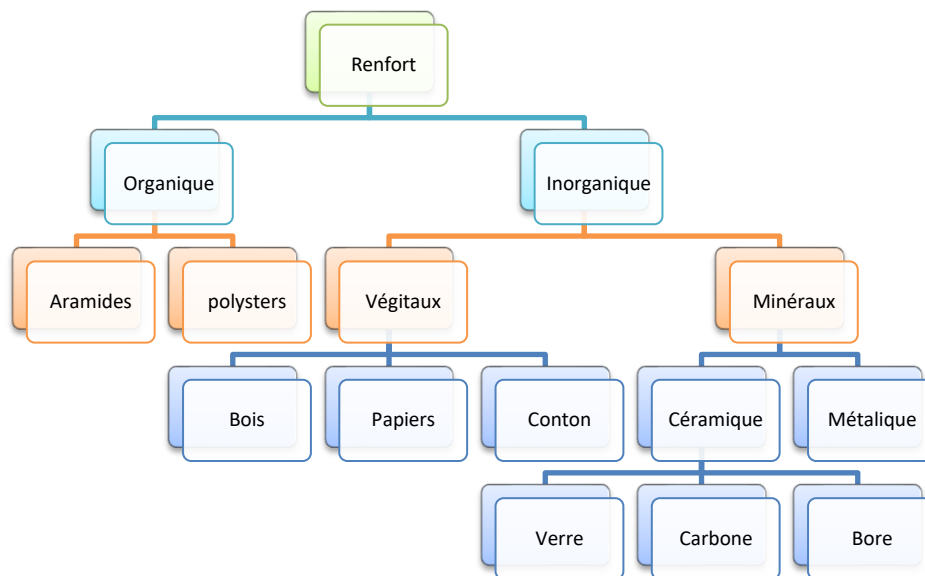
de maintenir les fibres et de jouer le rôle de liant dans le composite, elle assure le transfert de charges entre les fibres tout en les maintenant dans leur position et leur orientation. La matrice protège également le composite contre les agressions extérieures (comme les produits chimiques et l'humidité ...etc.) et détermine la température maximale d'utilisation .

### **I.2.2 Renfort :**

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique à la traction et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques)

Les renforts confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines propriétés physiques:

Les renforts sont tout produit qui permet d'améliorer les propriétés de la matrice (mécanique, thermique, chimique...) ,assurent une part importante de la tenue mécanique (rigidité et résistance) du composite. Les différents classements des renforts sont indiqués dans la figures et les fibres les plus utilisées dans l'industrie :



**Figure I.2 :** Les différents nature des renforts

Les fibres les plus utilisées dans l'industrie:

### I.2.2.1 Fibre de verre:

obtenue à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1500°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues de 3 à 20mm. Suivant l'application auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

1. **verre E** : usage général, bonnes propriétés électriques pour les composites grandes diffusions (GD)
  2. **verre D** : hautes propriétés diélectriques pour les applications dans la construction électrique
  3. **verre C** : bonne résistance chimique ;
- verres R ou S** : haute résistance mécanique pour les composites hautes performances (HP)..

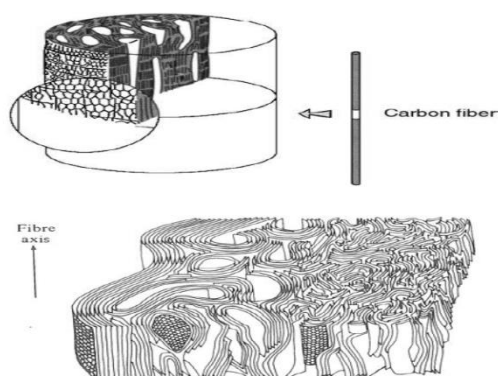


**Figure I.3 :** Bobine fibre de verre [11]

### I.2.2.2 Fibre de Carbone :

les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (spécialement une excellente tenue en température), une faible masse volumique, et une bonne conductibilité. L'utilisation de la fibre de carbone reste limitée aux secteurs de l'aéronautique et des sports et loisirs, à cause du prix. Cependant, les fibres de carbone souffrent aussi de certains handicaps techniques qui limitent également leur utilisation pour des structures composites tels que:

l'allongement à la rupture est insuffisant (inférieur à 2%) comparé à celui des fibres de verre et d'aramide (3 à 4%) ; et aussi une caractérisation encore insuffisante pour permettre une conception fiable à Prix modéré.



**Figure I.4 :** Bobine fibre de carbone [12]      **Figure I.5 :** Structure de la fibre de carbone [11]

### I.2.2.3 Fibre Aramide (Kevlar) :

ces fibres sont des Polyamides aromatiques, ces fibres ont une mauvaise tenue en compression, mais une bonne résistance au choc et à la fatigue. La fibre d'aramide (on la nomme souvent «Kevlar », qui est la marque de son créateur, (Dupont de Nemours.) utilisée dans les protections balistiques gilets pare-balles.

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Des produits chimiques (charges et additifs) entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de la structure composite.



**Figure I.6 :** Bobine fibre de Kevlar [11]

### I.2.2.4 Fibres céramiques:

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

( fibres de Carbure de Silicium - fibres de Bore - fibres de Bore carbure de silicium )

### I.2.3 Choix du renfort :

Un renfort alliant rigidité, légèreté ainsi que d'excellentes propriétés mécaniques est recherché. Le choix de la fibre est fait parmi les trois matériaux suivants : verre, carbone et aramide. Leur résistance à la rupture en traction se situe, de manière générale, entre 2000 et 5000MPa. La valeur du module de Young de ces fibres est très différente. Elle varie dans une proportion de 1 à 7 entre la fibre de verre et la fibre de carbone haut module. Cette caractéristique est directement liée à l'élongation à rupture des fibres.

Compte tenu du cahier des charges et plus particulièrement des exigences en termes de propriétés mécaniques en température et conditions humides, d'usinabilité, de densité et dans la comparaison avec un matériau connu, la fibre de carbone présente le meilleur compromis.

### I.2.4 Architecture des renforts:

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée.

Il existe différentes géométries et textures de renforts :

#### I.2.4.1 Les unidirectionnels (UD) :

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.

Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise.

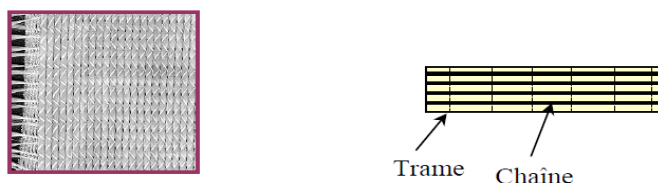


Figure I.7 : Armure unidirectionnelle

### I.2.4.2 Toile ou taffetas :

Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.

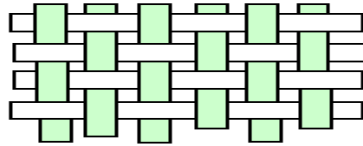


Figure I.8 : Armure taffetas

### I.2.4.3 Serge :

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils. Ci-contre, un sergé 2/2.

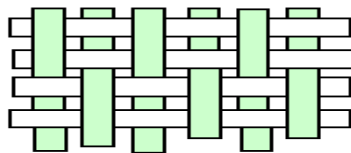


Figure I.9: Armure Serge

### I.2.4.4 Satin :

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n-1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique.

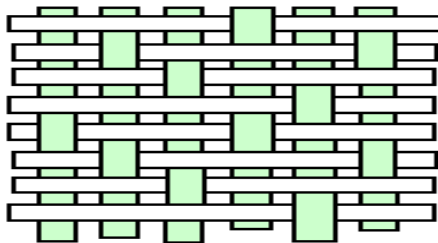
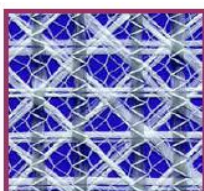


Figure I.10 : Armure Satin

Comme un tissu est difficilement déformable sur une surface gauche, on réalise également pour des utilisations spécifiques des armures bi ou tridimensionnelles.



*Tissu multiaxial*



*Tissu 3D ou tresse*

Figure I.11 : structures tricotées 3D

### **I.2.5 Les charges :**

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre). Les principales charges utilisées sont :

- ✓ microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...)
- ✓ des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...)
- ✓ des particules de carbone (noir de carbone)

### **I.2.6 Les additifs :**

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés. Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

( lubrifiants et agents de démoulage - pigments et colorants - agents anti-retraits-agents anti-ultraviolets - accélérateur - catalyseur. )

### **I.2.7 L'interface :**

En plus de ces fibres et la matrice, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Des produits chimiques entre aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. qui peut jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

## **I.3 Les types des matériaux composite :**

On distingue deux types de composites: les composites grande diffusion (GD) et les composites haute performance (HP)

### **I.3.1 Les grandes diffusion :**

Représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30% dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

### **I.3.2 Les hautes performance :**

Principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût.

Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP. On utilisera des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures, capotages on utilisera des plastiques renforcés [10]

### I.3.3 Interaction Fibre/Matrice :

La nature de l'adhésion fibre/matrice inclut le verrouillage mécanique, l'attraction électrostatique, l'enchevêtrement moléculaire, et la réaction chimique.

L'interphase est constituée de la surface de contact (interface) fibre/matrice ainsi que de la région d'un volume fini prolongée dans la matrice. Elle peut être considérée comme un constituant du composite car elle possède des propriétés chimiques, physiques, et mécaniques différentes de celles de la fibre et de la matrice. [13]

De nombreux travaux [14 -15-16-17] montrent que l'étude des interfaces est un facteur clé pour comprendre les propriétés des composites. La qualité du matériau dépend de l'adhésion entre la matrice et les charges. Que ces travaux soient de nature expérimentale ou théorique, ils portent sur un grand nombre de paramètres, tels que la géométrie des renforts, le facteur de forme, le traitement de surface, la fraction volumique de renfort. Les différents rôles de l'interphase sont :

#### ➤ Rôle protecteur contre le vieillissement :

L'interphase assure la continuité physique dans le matériau pour empêcher la formation de porosités ou l'accumulation d'humidité et protéger l'une ou l'autre des phases.

Les fissures peuvent être déviées ou stoppées et l'humidité arrêtée par l'ensimage pour éviter la corrosion des fibres de verre, évitant ainsi l'infiltration de l'eau entre fibre et matrice.

#### ➤ Transfert de charge:

Le chargement subi par le composite est transféré au renfort au niveau de l'interphase, le rôle des fibres étant de supporter la majeure partie de la contrainte et la matrice étant là pour répartir les efforts.

Le transfert de charge, prépondérant pour les performances finales du composite, est généralement évalué par des tests micromécaniques consistant à étudier une fibre unique enrobée de matrice. [18]

#### ➤ Contraintes thermiques:

L'origine des contraintes résiduelles est double. Elles proviennent d'une part de la différence de coefficients de dilatation thermique du renfort et de la résine ; d'autre part, du retrait de la matrice qui contribue à une concentration de ces contraintes au niveau de l'interphase. Les contraintes résiduelles interviennent sur le plan mécanique par la création d'une zone de matrice perturbée.

Elles vont effectivement modifier le comportement de la zone interrassiale, car cette dernière sera soumise à ces contraintes internes. En outre, ces contraintes sont parfois suffisantes pour produire des microfissures, même en l'absence de contraintes externes.



Figure I.12 : L'interphase d'un composite

## I.4 Classification :

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons, suivant la forme ou suivant la nature de constituant :

Classification suivante la forme de constituant

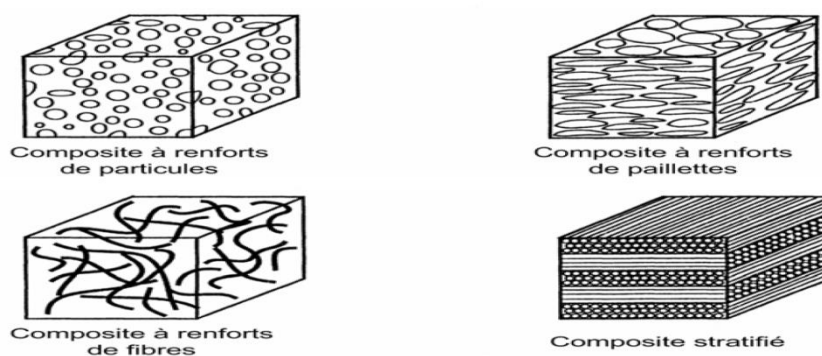


Figure I.13 : Classification des matériaux composites

### I.4.1 Classification par les formes des renforts :

#### I.4.1.1 renforts de particules :

Le renfort est considéré comme une particule si toutes ses dimensions sont approximativement égales et petites devant les autres dimensions du matériau. Les particules dures sont dispersées aléatoirement dans la matrice moins rigide.

#### I.4.1.2 renforts de paillettes :

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

#### I.4.1.3 renforts de fibres :

Une fibre a une longueur bien supérieure aux dimensions de la section transversale. Ce type de composites peut être divisé selon les renforts : en fibres discontinues (courtes) ou en fibres continues (longues).

#### **I.4.1.4 stratifiés :**

Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.

#### **I.4.2 Classification par la nature des matrices :**

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices, parmi ces composites.

##### **I.4.2.1 Composites à matrice organique CMO :**

###### **a) Description :**

Les polymères sont caractérisés par une faible densité, une résistance mécanique relativement faible, et une grande déformation à rupture. Les avantages principaux sont le procédé de fabrication relativement mature et le poids faible. Ce type de composites a été développé surtout pour les applications aéronautiques où la réduction de poids est essentielle.

###### **b) Fibre associé:**

- ✓ des fibres minérales: verre, carbone, etc.
- ✓ des fibres organiques: Kevlar, polyamides, etc.
- ✓ des fibres métalliques: bore, aluminium, etc.

##### **I.4.2.2 Composites à matrice métallique CMM :**

###### **a) Description :**

Dans ces composites, des matériaux métallique comme l'aluminium et le titane sont renforcés par des renforts généralement non-métalliques, souvent des céramiques. De par la nature même du composite, les composites à matrice métallique ont des propriétés mécaniques meilleures ou plus adaptables au chargement que leurs matrices monolithiques. Leurs applications dans les moteurs d'automobile sont bien établies

###### **b) Fibre associé :**

- ✓ des fibres minérales: carbone, carbure de silicium (SiC)
- ✓ des fibres métalliques: bore
- ✓ des fibres métallo-minérales: fibres de bore revêtues de carbure de silicium (B SiC)

### I.4.2.3 Composites à matrice céramique CMC :

#### a) Description :

Des matrices céramiques telles que le verre et le carbure de silicium (SiC) peuvent être associées aux renforts comme des métaux, le carbone, et des céramiques. Leur développement a pour but d'améliorer les propriétés mécaniques telles que ténacité et résistance au choc thermique des céramiques monolithiques. Ces composites sont utilisés dans des environnements sévères, par exemple les moteurs de fusées, les boucliers thermiques, ou les turbines à gaz.

#### b) Fibre associé :

- ✓ des fibres métalliques: bore
- ✓ des particules métalliques: cermets
- ✓ des particules minérales: carbures, nitrures, oxydes réfractaires.

### I.5 Caractéristiques du matériaux composites:

Les propriétés des matériaux composites dépendent de beaucoup de facteurs et sont différentes selon les divers types de matériaux composites. Ces propriétés résultent :

- ✓ des propriétés, de la nature et de la quantité des matériaux constitutifs.
- ✓ des constituants, de la géométrie et de la distribution du renfort
- ✓ de leurs interactions, de la nature de l'interface matrice-renfort, etc.

Les principales caractéristiques des pièces fabriquées en matériaux composites sont :

- ✓ le gain de masse
- ✓ la bonne tenue en fatigue (durée de vie augmentée)
- ✓ l'absence de corrosion
- ✓ l'absence de plasticité (leur limite élastique correspond à la limite de rupture)
- ✓ le vieillissement sous l'action de l'humidité et de la chaleur
- ✓ l'insensibilités à certains produits chimiques courants(solvants,peinture,huiles, pétroles,... )
- ✓ tenue aux impacts et aux chocs très moyenne
- ✓ très forte anisotropie.

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- ✓ des propriétés des matériaux constituants

- ✓ de leur distribution géométrique
- ✓ de leur interaction.

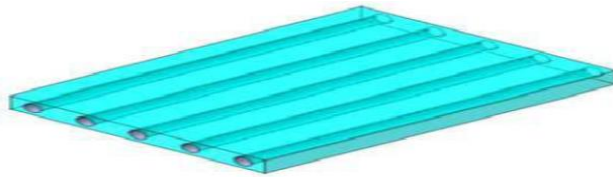
Pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier:

- ✓ la nature des constituants et leurs propriétés - la géométrie du renfort, sa distribution;
- ✓ la nature de l'interface matrice-renfort.

## I.6 Architecture des matériaux composites

### I.6.1 Monocouche :

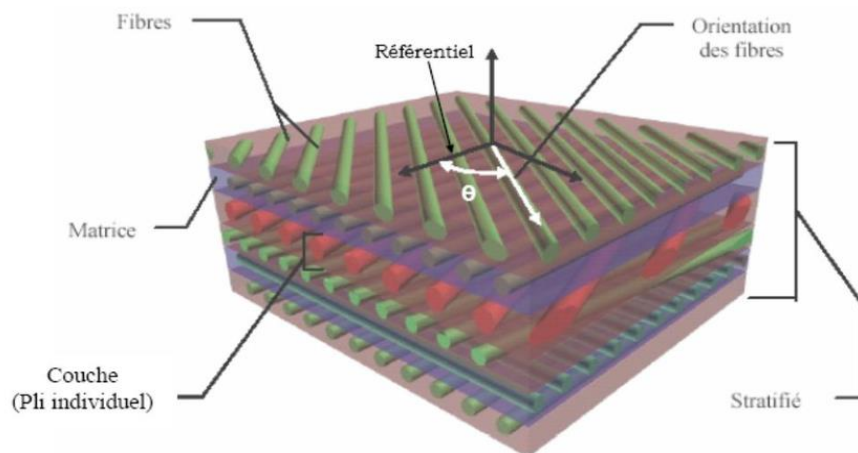
Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles 1D, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.



**Figure I.14** : Schéma de monocouche [19]

### I.6.2 Stratifié :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On distingue différents types des stratifiés



**Figure I.15** : Composite stratifié [20]

### I.6.2.1 Stratifiés symétriques:

un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives. Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique. (EX:  $[0/45/90]_s = [0/45/90/90/45/0]$ ); Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée. Ex:  $[0/45/90]_s = [0/45/90/45/0]$

### I.6.2.2 Stratifiés symétriques miroir.

### I.6.2.3 Séquences:

la répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée.

### I.6.2.4 Stratifiés hybrides:

les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes (nécessaire de les mentionner dans la désignation)

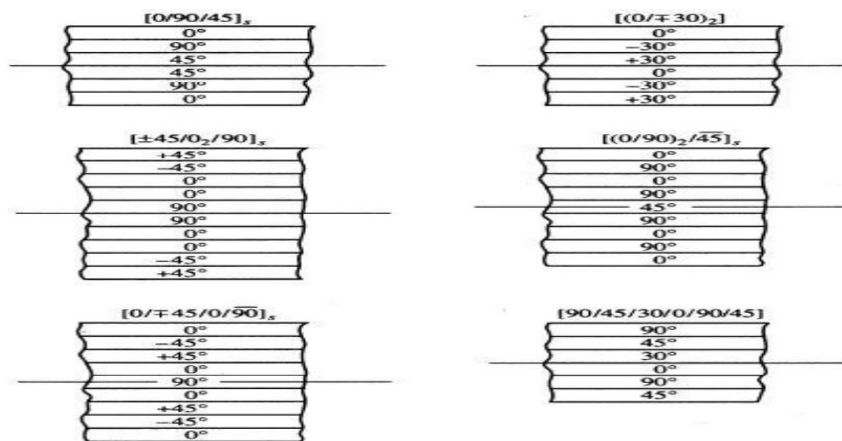


Figure I.16 : Quelques exemples d'empilement.

### I.6.3 composites sandwichs:

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux "feuilles", appelées peaux, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité. Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.). Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

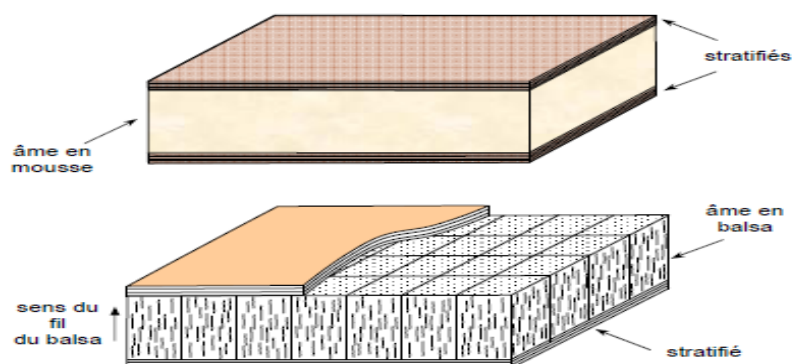
pour les âmes pleines (figure I.17)

- ✓ le balsa ou bois cellulaire
- ✓ diverses mousses cellulaires
- ✓ des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques

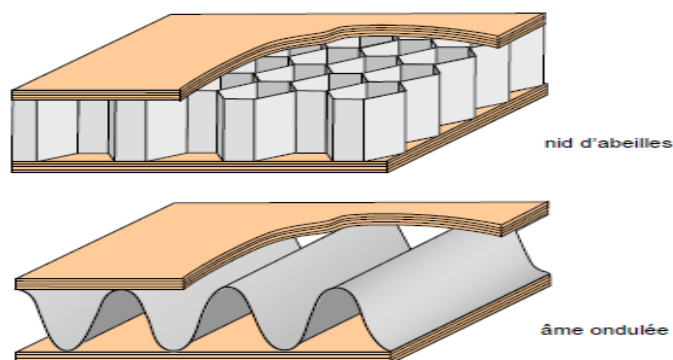
pour les âmes creuses (figure I.18), essentiellement nid d'abeilles et profilés :

- ✓ des alliages métalliques légers
- ✓ du papier kraft (enduit ou non de résine);
- ✓ du papier polyamide, type papier Nomex; etc.
- ✓ Des âmes mixtes peuvent être utilisées.

Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles d'alliages légers. Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.



**Figure I.17 :** Matériaux sandwichs à âmes pleines



**Figure I.18 :** Matériaux sandwichs à âmes creuses

## **I.7 Les domaines d'application des composites :**

### **I.7.1 Les composites dans la construction civile :**

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. L'handicap majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile. [21]. Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes. L'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité.

### **I.7.2 Les composites dans le secteur médical :**

Les composites TD et TP ont investi récemment le secteur médical et de la sécurité, comme ils ont investi auparavant les autres secteurs. Il s'agit surtout des composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part. L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards). Le médical reste attaché à l'utilisation des aciers spéciaux reste bien au dessous de celui des composites HP.

### **I.7.3 Les composites dans les produits aéronautiques :**

La principale motivation dans l'utilisation des matériaux composites pour la réalisation des structures aéronautiques est essentiellement le gain de masse apporté tout en conservant d'excellentes caractéristiques mécaniques. Les matériaux composites présentent aussi un quasi insensibilité à la fatigue, en comparaison aux matériaux métalliques qui nécessitent une maintenance et un suivi régulier de la propagation des fissures. Ils ne sont pas aussi sujets à la corrosion, mais ils nécessitent une bonne isolation électrique lors des assemblages avec des pièces en alliages légers entre le composite et le métal pour éviter la corrosion galvanique de l'aluminium (si la fibre de renfort est en carbone par exemple). Les techniques de fabrication utilisées permettent l'obtention de formes complexes directement par moulage avec possibilité de réaliser en une seule pièce un ensemble, qui réalisé en métallique, nécessite plusieurs sous éléments. Ceci permet de réduire les coûts d'assemblage de façon importante.

### **I.7.4 Les composites dans les produits militaires :**

Pour les produits militaires (missiles), le premier avantage, c'est la performance des matériaux composites, ensuite l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage de missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale à cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent foudre dans certaines conditions et le missiles poursuit sa trajectoire sans contrôle ce qui entraîne une perte précis de tir.

### **I.7.5 Les composites dans les produits spatiaux (satellites) :**

Les déformations de la structure peuvent avoir une origine thermique avec des expositions en température pouvant varier entre  $-180^{\circ}\text{C}$  lorsque le satellite est dans l'ombre et  $+160^{\circ}\text{C}$  lorsque le satellite est exposé au soleil. De plus, sur la même structure, entre la face éclairée et la face à l'ombre, le gradient de température peut être important. Les structures en matériaux composites à matrice organique peuvent, avec une orientation optimisée des différentes couches constituant la structure, présenter globalement un coefficient de dilatation thermique proche de zéro pour l'ensemble de la structure.

La stabilité géométrique de la structure aussi apportée par la raideur globale de la structure. L'utilisation des fibres de carbone à très haut module sur les composites permet de répondre à cette préoccupation. Le principal inconvénient des composites à matrices organiques pour les applications satellites est sans aucun doute la reprise d'humidité, pendant les opérations d'assemblage et pendant le stockage avant lancement. [22]

## **I.8 Les avantages et les inconvénients des matériaux composites sont:**

### **➤ Avantages :**

- ✓ Gain de masse : légèreté .
- ✓ Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) .
- ✓ Grande résistance à la fatigue .
- ✓ Insensibles aux produits chimiques "mécaniques" ( comme les graisses huiles liquides hydrauliques peintures, solvants, pétrole).
- ✓ liberté de formes.
- ✓ maintenance réduite.
- ✓ Une bonne isolation électrique.
- ✓ Leur faible taux d'utilisation vient de leur coût.

**➤ Inconvénients :**

- ✓ Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- ✓ Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes
- ✓ Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- ✓ Meilleure tenue au feu (classement M) que les alliages légers mais émission de fumées (classement F) parfois toxiques pour certaines matrices
- ✓ Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.

**I.9 Conclusion :**

Ce chapitre a fait l'objet de généralités sur les matériaux composites, leurs propriétés physiques et mécaniques, leur utilisation dans le secteur civil et industriel tel que l'automobile, le sport et l'aéronautique...etc. Par ailleurs, nous avons décrit les différents types de matériaux et résines les plus utilisées dans l'industrie.

## **Chapitre II**

# **Initiation sur le comportement et endommagement des matériaux composites**

## II.1 Introduction :

L'étude du comportement mécanique des matériaux composites a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée les variables mises en jeu dans ce domaine sont :

le tenseur des contraintes ( $\sigma$ ) et le tenseur des déformations ( $\epsilon$ ). Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont pour une température donnée et dans un intervalle donné de déformation un comportement élastique linéaire. Dans le domaine de linéarité et en admettant que la température est uniforme dans tout le volume considéré, les matériaux composites se déforment comme les autres matériaux traditionnels.

## II.2 Etat de contraintes et de déformations dans un solide :

La notion de déformation d'un milieu continu naît de la comparaison entre une configuration dite « initiale » et une configuration qualifiée de « finale ». Ce chapitre présente quelques notions générales portant sur les lois de comportement des milieux anisotropes et plus particulièrement des matériaux orthotropes et isotropes transverses parmi lesquels figurent les composites unidirectionnels.

### II.2.1 Tenseur des contraintes :

En tout point P d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté  $\sigma_{ij}$  et représenté par la matrice :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{II.1}$$

Par définition le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  est symétrique c.à.d.

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad , \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \quad , \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

### II.2.2 Tenseur des déformations :

Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique défini par la théorie de linéarité (dite des petites déformations) par la formule :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{II.2}$$

D'où :  $\vec{u}(p)$  est le vecteur de déplacement du point p.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{II.3}$$

### II.2.3 Equations de Compatibilité :

Le champ des déplacements correspondant à un état de déformation donné est obtenu par intégration des équations données par la relation (II.2). Soit au total six équations pour déterminer les trois composantes ( $u_1, u_2, u_3$ ) du vecteur de déplacement. Pour que la solution soit unique, les composantes du tenseur des déformations doivent vérifier les six relations de compatibilité [23] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &= 0 & i \neq j \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) &= 0 & i \neq j \neq k \end{aligned} \quad \text{II.4}$$

avec  $i, j, k=1, 2, 3$

### II.2.4 Matrice de Rigidité :

La relation d'élasticité linéaire est décrite par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \varepsilon_{kl} \quad \text{II.5}$$

Elle s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{II.6}$$

$C_{ijkl} = C_{klij}$  quand l'énergie de déformation est considérée D'où :  $C = [C_{ij}]$  est la matrice de Rigidité symétrique de 21 composantes indépendantes, exprimée dans la base  $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Dans le cas de changement de base, la matrice de rigidité C devient  $C' = C'_{ij}$

exprimée dans la nouvelle base  $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$

Donc :

Dans la base e :  $\sigma = C \varepsilon$ . **II.7**

Dans la base e' :  $\sigma' = C' \varepsilon'$ . **II.8**

Sachant que :  $\sigma' = T_\sigma \sigma$  et  $\varepsilon' = T_\varepsilon \varepsilon$  **II.9**

D'où :  $T_\sigma$  et  $T_\varepsilon$  sont respectivement les matrices de changement de base (appelé aussi matrice de transformation) des contraintes et des déformations.

$$\sigma' = T_\sigma \sigma = T_\sigma C \varepsilon = T_\sigma C T_\varepsilon^{-1} \varepsilon' \tag{II.10}$$

A partir des deux relations (2.7) et (2.9), on peut exprimer le changement de base de la matrice de rigidité :

$$C' = T_\sigma C T_\varepsilon^{-1} \tag{II.11}$$

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \tag{II.12}$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \tag{II.13}$$

**II.2.5 Matrice de Souplesse (ou de complaisance) :**

La relation d'élasticité linéaire (II.4) peut être écrite sous la forme inverse, comme :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \text{ ou } \varepsilon = S \sigma \tag{II.14}$$

La matrice S est la matrice inverse de la matrice de rigidité C, et s'écrit dans le cas général comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{II.15}$$

Avec :  $S = C^{-1}$  II.16

Les coefficients  $S_{ij}$  sont appelés constantes de souplesse ou de complaisance. La relation de changement de base de la matrice de souplesse s'exprime par :

$$S' = T_{\varepsilon} S T_{\sigma}^{-1} \quad \text{II.17}$$

### II.3 Matériaux Anisotropes

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou matériau anisotrope.

#### II.3.1 Matériau Monoclinique :

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie.

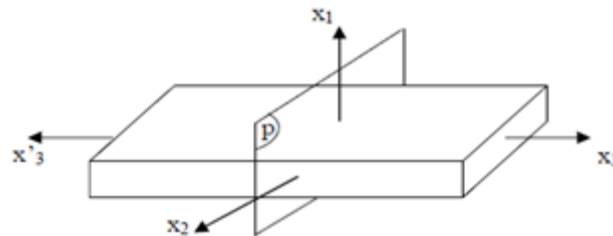


Figure (II.1) : Plan de symétrie

La forme de la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{II.18}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

#### II.3.2 Matériau orthotrope :

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième.

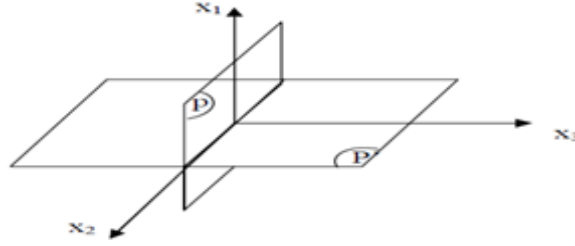


Figure. (II.2) : Plan d'orthotropie

La forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{II.19}$$

avec:

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \quad C_{13} = \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

et

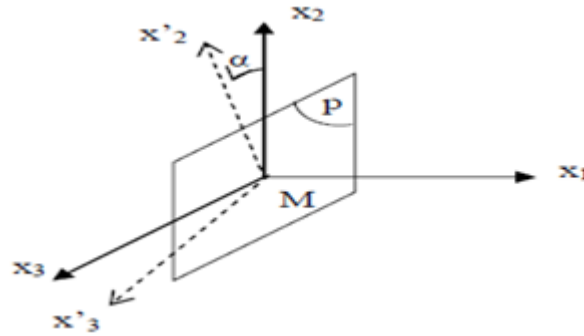
$$C_{44} = 2G_{23} \quad C_{55} = 2G_{13} \quad C_{66} = 2G_{12}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad \text{II.20}$$

**II.3.3 Matériau isotrope transverse:**

Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou souplesse).



**Figure (II.3) :** Plan d'isotropie

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{II.21}$$

avec:

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_2 \Delta} \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} - \nu_{21}\nu_{23}}{E_2 E_2 \Delta} \quad C_{13} = \frac{\nu_{21} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_2 \Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{12}}{E_1 E_2 E_2}$$

$$C_{44} = C_{22} - C_{23} = \frac{E_2}{1 + \nu_{23}} \quad , \quad C_{55} = C_{66} = 2G_{12}$$

Les propriétés du matériau orthotrope à isotrope transverse sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes. La matrice de souplesse a la même forme:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad \text{II.22}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad \text{II.23}$$

### II.4 Matériaux Isotropes :

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{II.24}$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la Généralement, les constante de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :  $C_{11} = \lambda + 2\mu$  ,  $C_{12} = \lambda$

La matrice de souplesse a la même forme. les constantes d'ingénieurs deviennent :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E ; G_{12} = G_{23} = G_{13} = G ; \nu_{12} = \nu_{22} = \nu_{13} = \nu$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

II.25

avec :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

## II.5 Comportement mécanique d'un matériaux composite:

Les recherches menées durant les vingt dernières années permettent de mieux décrire le comportement des matériaux composites à matrice céramique ou organique. De nouvelles lois de comportements permettent de prendre en compte l'évolution de l'endommagement dans les structures industrielles et donc de prévoir leurs défaillances

### II.5.1 Loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel (UD) :

Un composite à renfort unidirectionnel est constitué de fibres parallèles continues orientées dans une direction (sens longitudinal) afin de supporter des efforts importants. Lorsque les fibres sont disposées dans un plan (Figure II.3), elles constituent un pli (ou monocouche, ou strate, ou encore nappe). Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude.

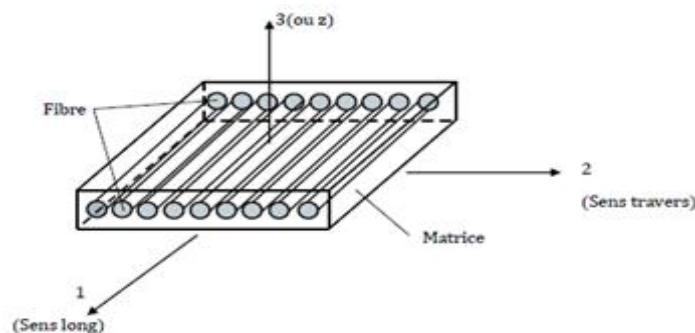


Figure II.3 :Pli à Renforcement unidirectionnel

### II.5.2 Equation de comportement mécanique d'un pli composite:

On prend une cellule élémentaire constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (Figure II.4), le composite est considéré comme étant isotrope transverse

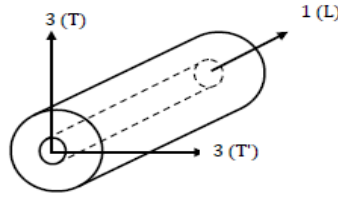


Figure II.4: Cellule élémentaire

Le comportement élastique d'un matériau composite UD est décrit par la relation (II.21) à (II.22) Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un matériau composite UD est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

$$C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}, C_{66} \quad \text{Ou} \quad S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{23}, S_{66}$$

Ces constantes de rigidité et de souplesse sont interprétées par les modules de l'ingénieur : les modules d'Young  $E_{11}$ , et  $E_{22}$ , le module de cisaillement  $G_{12}$  et les coefficients de poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{23}$  qui sont mesurés dans des essais simples tels que : les essais de traction uni axiale, ou de cisaillement pur. Les coefficients de souplesse sont liés aux constantes de l'ingénieur par des relations plus simples que celles exprimant les constantes de rigidité, d'où les lois de comportement des matériaux composites sont basées sur l'utilisation des constantes de souplesse dont les relations s'écrivent :

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{22}}, \quad S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} \tag{II.26}$$

$$S_{12} = \frac{-E_{12}}{E_{11}} = \frac{-\nu_{21}}{E_{22}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Ce type de matériau est isotrope dans le plan normal à la direction des fibres. Il se comporte comme un matériau isotrope transverse pour lequel tout plan passant par un axe privilégié est un plan de symétrie mécanique. La loi de comportement s'écrit en fonction des modules de l'ingénieur comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \tag{II.27}$$

C'est pour le cas d'un état de contraintes planes appliqué à La première étape de la modélisation du comportement mécanique d'une structure composite est l'étude du comportement de la monocouche.

En supposant que le matériau est orthotrope, on veut déterminer les constantes élastiques d'un pli orthotrope unidirectionnel défini dans le plan 1-2, comme indiqué sur la (Figure II.5) Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.28}$$

Ou bien:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & 0 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\sigma_i = 0 \text{ si } i = 3,4,5 \quad \sigma_i \neq 0 \text{ si } i = 1,2,6$$

Des hypothèses simplificatrices suivantes permettent d'éliminer certains coefficients de la matrice de rigidité:

La plaque étant de faible épaisseur, la troisième direction est abandonnée.

La loi de comportement de la monocouche dans le repère local (1, 2) s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{II.29}$$

Les constantes de rigidité réduites  $Q_{ij}$  sont exprimées les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{E_{11} \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad \text{II.30}$$

$$Q_{21} = \frac{E_{22} \nu_{12}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad , \quad Q_{66} = G_{12}$$

Avant d'effectuer un calcul sur une plaque composée de plusieurs couches d'orientations diverses, il faut ramener tous les couches dans le repère global de la plaque (Figure. II.5).

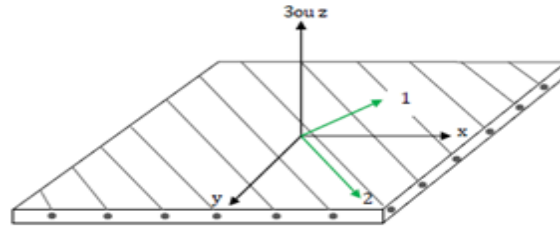


Figure II.5 Pli composite UD en-dehors de ses axes principaux

Pour cela, il faut effectuer un changement de repère de toutes les matrices de la relation de comportement de la couche, c'est à dire passer du repère local (x, y) au repère global (1,2) Les coordonnées d'un vecteur dans les deux repères s'écrit :

$$\vec{V} = v_x \vec{x} + v_y \vec{y} = v_1 \vec{1} + v_2 \vec{2} \tag{II.31}$$

Les coordonnées d'un vecteur dans les deux repères s'écrit :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \tag{II.32}$$

avec:

$$[P] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \text{ c'est la matrice de passage, et: } C = \cos(\theta), S = \sin(\theta)$$

La relation entre les coordonnées locales et globales s'écrit :

$$[v]_{xy} = [T][v]_{12} \tag{II.33}$$

avec:  $[T] = [P]^t [P]$  et  $[P]^t$  est la matrice transposée de  $[P]$  Lorsque l'orientation des fibres ne coïncide pas avec le système d'axe de symétrie matérielle du composite x et y (Figure II.5), les états de contraintes et de déformations sur deux repères orthonormés différents seront définis par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta^2 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta^2 & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{II.34}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta^2 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta^2 & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{II.35}$$

Les équations de transformation de base des contraintes (II.34) et des déformations (II.35) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]_{\sigma}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{II.36}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]_{\varepsilon}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{II.37}$$

La substitution de la relation (II.34) et (II.35) dans les équations contraintes déformations(II.29), permet d'exprimer la loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel dans le système d'axes arbitraires x et y.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.38}$$

avec :  $Q = [T]_{\sigma}^{-1} Q [T]_{\varepsilon}$

La relation (II.38) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.39}$$

Par inversion, on peut déterminer la matrice de souplesses transformées  $S$  exprimée toujours dans le système d'axes arbitraires x et y.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{II.40}$$

### II.5.3 Théorie classique simplifiée des stratifiés :

L'hypothèse de base de la théorie classique des stratifiés est appliquée aux plaques par l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z), sous la forme de polynôme en z, généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y). Le champ des déplacements simplifié (donné par la théorie de Kirchhoff-Love).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y),$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y), \quad \text{II.41}$$

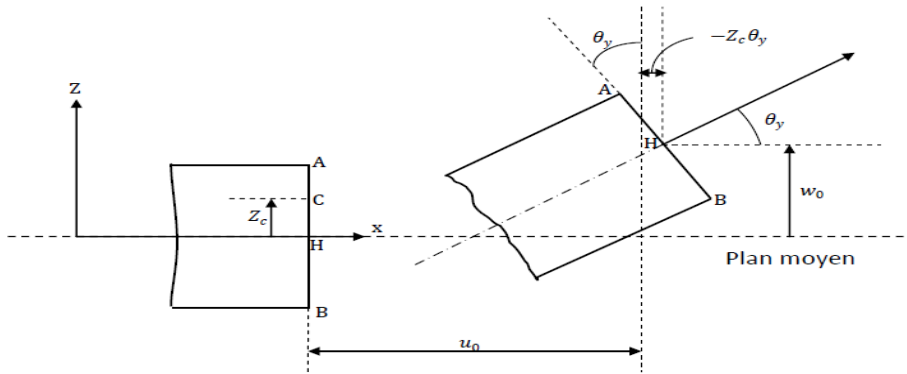
$$w(x, y, z) = w_0(x, y, 0),$$

Sachant que les coordonnées  $u_0, v_0$  et  $w_0$  est Le champ de déplacement du point  $M_0$  x, y, z, Le champ des déformations est exprimé en coordonnées cartésiennes par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} ; \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad \text{II.42}$$

Ce champ de déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse. La théorie classique simplifiée des stratifiés fait l'hypothèse que la déformation est continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre. Le stratifié se comporte comme une seule couche (afin d'éviter le délaminage) mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales. Alors toute droite normale à la surface moyenne avant déformation restera droite et normale et gardera une longueur constante après déformation, on ignore donc les distorsions angulaires (Figure II.6):

$$Y_{xz} = 0 \text{ et } Y_{yz} = 0$$



**Figure II.6** Schématisation des déformations dans le cas de La théorie classique des stratifiés

Cette hypothèse implique que:

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

En tenant compte de ces deux relations, Le champ des déformations sera alors exprimé par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_{xx} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) ; \quad \varepsilon_{yy} = \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) ; \quad \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad \text{II.43}$$

Qui peuvent être réécrites sous la forme matricielle suivante :

$$(\varepsilon) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{II.44}$$

L'état de déformation , en tout point du stratifié, peut être calculé à partir de la déformation plane ( $\varepsilon^0$ ) et de la courbure ( $k$ ) du plan moyen.

$$(\varepsilon) = (\varepsilon^0) + z (k) \quad \text{II.45}$$

le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$(\gamma_c) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix} \quad \text{II.46}$$

Le champ de déformations est la superposition de :

### II.5.3.1 Déformations en membrane :

Les déformations en membranes obtenues de la relation (II.43) ne dépendent que des coordonnées ( $x, y$ ) du point H du plan moyen du stratifié:

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_z^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{II.47}$$

S'expriment exclusivement en fonction des déplacements ( $u_0, v_0$ ) dans le plan (Oxy) des points de ce plan.

### II.5.3.2 Déformations en flexion et torsion :

Les déformations en flexion et torsion ou courbures sont aussi obtenues de la relation (II.42), et ne dépendent que des coordonnées ( $x, y$ ) du point H du plan moyen du stratifié:

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{II.48}$$

S'expriment en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M. La matrice  $k_x, y$  est appelée matrice des courbures de la poutre sollicitée en flexion. Le champ des déformations s'écrit alors :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M)$$

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y)$$

$$\text{ou: } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.49}$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\varepsilon(M) = (\varepsilon, \gamma) = \varepsilon_m(x, y) + zk(x, y) \quad \text{II.50}$$

Les déformations en membrane  $\varepsilon_m, x, y$  et courbures  $k, x, y$  ne dépendent que des coordonnées  $(x, y)$  du point  $H$  du plan moyen du stratifié.

### II.5.3.3 Déformations en cisaillement:

Le champ des déformations en cisaillement varie a priori d'une couche à l'autre. Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes  $\gamma_{yz}$  et  $\gamma_{xz}$  du stratifié, soit :

$$\gamma_c(M) = \varepsilon(x, y, z) = \gamma^0(x, y) \quad \text{II.51}$$

$$(\gamma_c) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{yz} \\ 0 \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

### II.5.3.4 Champ de contraintes pour une couche k :

Les contraintes dans la couche k s'expriment par la relation générale (II.39) sous la forme

$$\text{suivante : } \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad \text{II.52}$$

L'utilisation des relations (II.49) et (II.52), nous aide à récrire cette dernière expression sous une forme plus explicite (II.53):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad \text{II.53}$$

Ou bien:

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon^0(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y). \quad \text{II.54}$$

Dont les rigidités réduites transformées  $Q_{ij}$  sont données par:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\bar{Q}_{66} = [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + 2Q_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)]$$

La matrice  $\sigma_k M$  représente la matrice des contraintes dans la couche  $k$  :

$h_{k-1} \leq z \leq h_k$  . la matrice de rigidité réduite  $\bar{Q}_k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

Ces expressions semblables aux relations (II.53) et (II.54) de la théorie classique des stratifiés en diffèrent par les expressions des courbures (II.49). Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{II.55}$$

Ou bien:

$$\sigma(x, y) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{C}_k \gamma^0(x, y)$$

$C_{ij}$  sont données par :

$$\bar{C}_{44} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta$$

$$\bar{C}_{45} = (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta$$

$$\bar{C}_{55} = C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta$$

## II.5.4 Loi de comportement d'un matériau composite Stratifié :

Le comportement élastique d'un pli constitue la base avec laquelle le comportement du stratifié est décrit, en tenant compte des caractéristiques indépendantes de chaque pli. Dans ce paragraphe, on va étudier le comportement du stratifié lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, cette étude est indispensable si l'on désire que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles

### II.5.4.1 Comportement en Membrane :

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan pourvu de la symétrie miroir. L'épaisseur totale du stratifié est noté  $h$ . il est constitué de  $n$  plis. Le pli numéro  $k$  a une épaisseur notée  $e$  . Le plan  $(x-y)$  est le plan de symétrie (ou plan moyen).

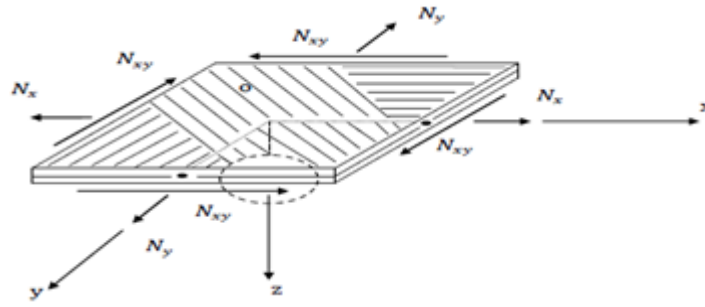


Figure II.7 Efforts de membrane appliqués sur un stratifié

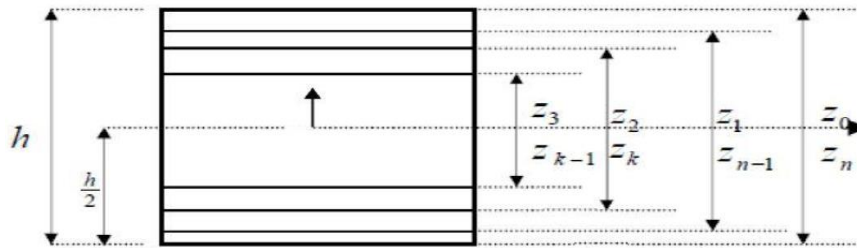


Figure II.8 Géométrie des N-couches du stratifié

Le composite stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont notées  $N$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  (ou  $N_{yx}$ ) par unité d'envergure suivant la direction  $y$  ou la direction  $x$  (Figure II.7). Il s'agit là d'efforts dits de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié. Les efforts de membrane sont obtenus par intégration des contraintes par unité d'envergure de chaque couche à travers l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{II.56}$$

$N_x$  : Effort résultant dans la direction  $x$  par unité de longueur suivant  $y$ .

$N_y$  : Effort résultant dans la direction  $y$  par unité de longueur suivant  $x$ .

$N_{xy}$  : Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction  $y$ .

Dans le cas du stratifié, on a une répartition continue des contraintes dans une couche, mais discontinue d'une couche à une autre. Les efforts en membranes seront exprimés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{II.57}$$

Où  $z_{k-1}$  et  $z_k$  sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre  $k$  et  $k-1$  dans la direction perpendiculaire au stratifié définies par la Figure (II.8).

La substitution de l'équation (II.53) dans l'équation (II.58) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{II.58}$$

Puisque la matrice  $[\bar{Q}]_k$  n'étant pas en fonction de la distance  $z$ ,  $[\varepsilon^0]$  et  $[k]$  sont indépendantes de  $z$  et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (II.57) peut alors être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.59}$$

Dont les coefficients  $A_{ij}$  sont appelés les rigidités de membrane :

$$A = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{Q}_k$$

$$A = [A_{ij}] \quad ; \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k \quad \text{II.60}$$

Les coefficients  $B_{ij}$  sont appelés les rigidités de couplage (flexion-torsion) :

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{Q}_k$$

$$B = [B_{ij}] \quad ; \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k z_k \quad \text{II.61}$$

## II.5.4.2 Comportement en flexion et torsion :

### II.5.4.2.1 Résultantes en flexion :

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z^{k-1}}^{z^k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad \text{II.62}$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure (II.9)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z^{k-1}}^{z^k} z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{II.63}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.64}$$

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k k(x, y)] dz$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k$$

Dont les coefficients  $D_{ij}$  sont appelés les rigidités en flexion:

$$D = [D_{ij}] \quad ; \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad \text{II.65}$$

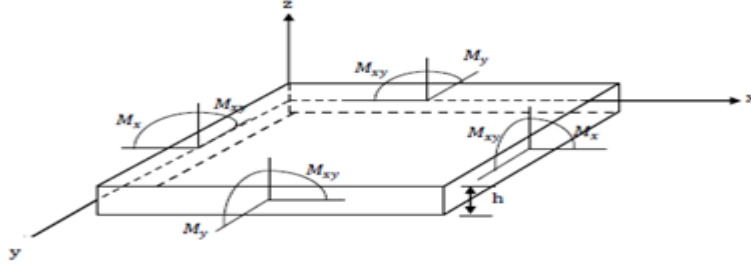


Figure II.9 Schématisation des moments de flexion et de torsion

### II.5.4.2.2 Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad \text{II.66}$$

A partir de l'équation II.55 on peut écrire résultante de cisaillement comme suite :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} dz \quad \text{II.67}$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [z \bar{Q}_k \gamma(x, y)] dz$$

Compte tenu des expressions (II.55) et (II.67), l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad \text{II.68}$$

$$F = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{C}_k$$

Dont les coefficients  $F_{ij}$  sont appelés les rigidités de cisaillement .:

$$F = [F_{ij}] \quad ; \quad F_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{C}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{C}_{ij})_k e_k \quad \text{II.69}$$

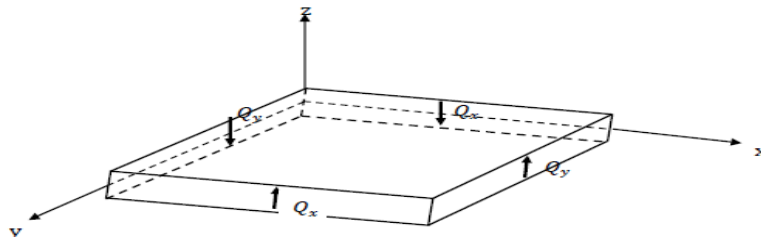


Figure II.10: Schématisation des résultantes en cisaillement

Les coefficients  $F_{ij}$  ont même forme que les coefficients  $A_{ij}$  Ils en diffèrent par l'utilisation des coefficients  $C_{ij}$  de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients  $Q_{ij}$  de rigidité L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad \text{II.70}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec : } \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & , & \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} & , & \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ k_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & , & \quad k_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & , & \quad k_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y & , & \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{aligned} \right\} \quad \text{II.71}$$

L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant :

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M_f \\ \dots \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & \vdots & [B] & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [B] & \vdots & [D] & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & [F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \dots \\ k \\ \dots \\ \gamma_c \end{bmatrix} \quad \text{II.72}$$

Les coefficients des matrices sont exprimés par :

$$\left. \begin{aligned} A &= [A_{ij}] & ; & \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{Q}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k \\ B &= [B_{ij}] & ; & \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{Q}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k z_k \\ D &= [D_{ij}] & ; & \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \\ F &= [F_{ij}] & ; & \quad F_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{C}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{C}_{ij})_k e_k \end{aligned} \right\} \quad \text{II.73}$$

## II.6 Mécanismes de rupture dans les matériaux composites :

la rupture est un problème d'une grande importance quels ingénieurs se plaignent lors de la mise en place de structures complexes Lié au progrès technologique qui poussez-les pour trouver des techniques plus précisément au milieu du 20e siècle pour prévenir le risque de rupture cependant,

certain mécanismes de rupture encore inconnu lorsque de nouveaux matériaux sont utilisés où il a été distingué deux catégories de rupture des structures:

- soit une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure
- soit l'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue.

Dans le premier cas, le risque de rupture peut être évité dès lors que la structure est bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et que les chargements sont correctement évalués.

Dans le deuxième cas, la prévention de la rupture est plus délicate. Lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours car la mise en œuvre de nouvelles techniques, bien qu'elle procure des avantages, conduit inévitablement à des problèmes potentiels. Un exemple bien connu du deuxième cas est la rupture de ce qu'on appelait les bateaux de la liberté pendant la deuxième guerre mondiale. Ces bateaux, dont la coque était assemblée par soudage et non par rivetage, coûtaient moins chers et étaient fabriqués plus rapidement. Ce changement de procédé de fabrication qui constituait un progrès indéniable, conduisait cependant à des ruptures catastrophiques qui se développaient dans les joints de soudure. Aujourd'hui, la plupart des bateaux sont assemblés par soudage mais le progrès des connaissances et l'utilisation des doubles coques en aciers plus adaptés permettent de mieux maîtriser ce risque de rupture.

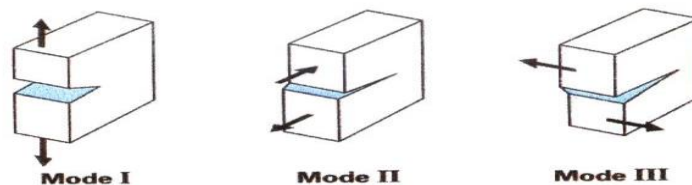
### II.6.1 Définition :

Le mécanisme de rupture est un processus mécanique produisant au sein d'un matériau une discontinuité locale de matière appelée fissure. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. Par rapport au facteur temps. On distingue deux types de rupture :

- **rupture fragile** : la rupture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique, et donc par la propagation très rapide possible des fissures (consommation d'énergie faible).
- **rupture ductile** : la rupture ductile semble liée essentiellement à la présence d'inclusion ou de précipités. Dans ce mode de rupture, la déformation plastique macroscopique est en général importante (consommation d'énergie grande)

## II.6.2 Mode de rupture :

la propagation d'une fissure peut se faire suivant trois modes de déplacement des faces de la fissure dans un plan défini. Elle peut aussi se faire suivant des modes mixte qui les combinent tous les trois. La figure (II.11) illustre les trois modes de rupture.



**Figure II.11:** les modes de rupture.

- **Mode I** : les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre, c'est le mode par ouverture.
- **Mode II** : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, et dans une direction perpendiculaire au front de fissure. Il est appelé aussi mode par glissement droit.
- **Mode III** : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure, c'est le mode de glissement vis.

Le mode I est considéré comme le plus dangereux en raison de l'ouverture par traction qui favorise l'initiation et la propagation des fissures. C'est le type le plus répandu dans le cas des matériaux fragiles. Par conséquent, il est le plus étudié.

## II.6.3 Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel:

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- ✓ la rupture des fibres,
- ✓ la rupture transverse de la matrice,
- ✓ la rupture longitudinale de la matrice,
- ✓ la rupture de l'interface fibre-matrice.

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction  $\sigma_f$  dans une fibre atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{fu}$  de la fibre (figure. II.12). La rupture de la fibre produit une

concentration de contraintes au voisinage de la rupture. La redistribution de ces contraintes, et par conséquent le processus de rupture résultant, dépend principalement :

- de la contrainte à la rupture des fibres.
- de la capacité de la matrice à absorber l'énergie a libéré.
- des propriétés de l'interface de fibre-matrice, etc.

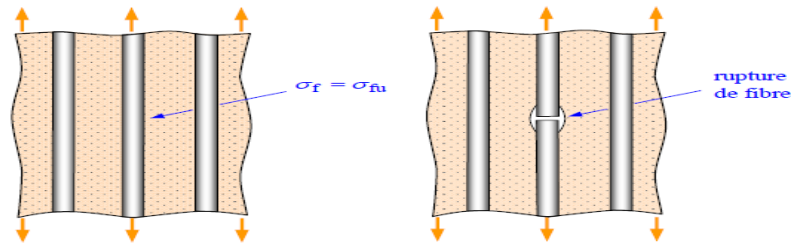


Figure II.12: Rupture de fibre.

### II.6.3.1 Fissuration matricielle :

La fissuration de la matrice peut se produire, soit par fissuration (figure. II.13), lorsque la contrainte en traction  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, soit par fissuration longitudinal (la figure. II.14) lorsque la contrainte de cisaillement  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture  $\sigma_{mu}$ , généralement au voisinage d'une fibre. Ce dernier mode de rupture, appelé « splitting » : par les Anglo-saxons, se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice:

$\sigma_d < \sigma_{mu}$  Dans le cas contraire ou  $\sigma_d > \sigma_{mu}$  il se produit une rupture par décohésion de l'interface fibre-matrice (figure. II.14).

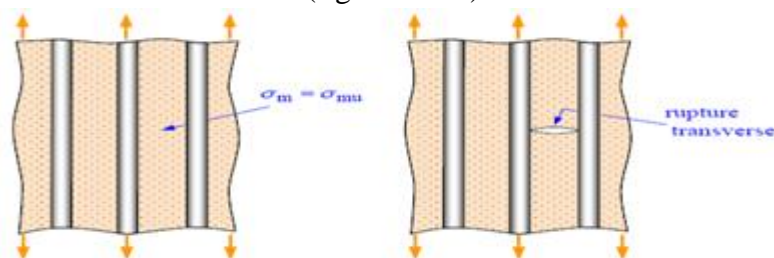


Figure II.13 : Rupture transverse de la matrice.[11]

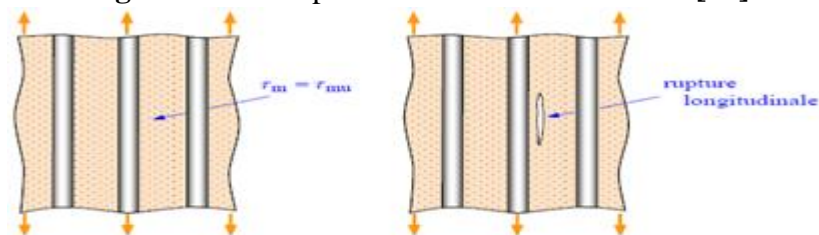
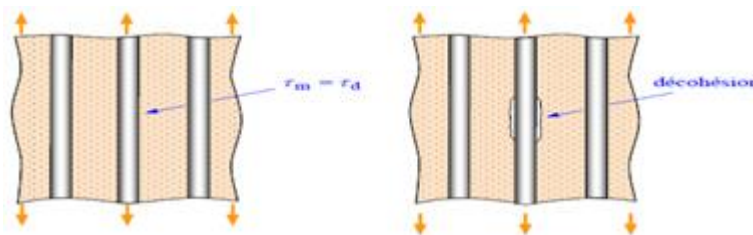


Figure II.14 : Rupture longitudinale de la matrice

### II.6.3.2 Décohésion fibre-matrice :

La rupture finale d'un matériau composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires. L'initiation, puis la propagation de la rupture dépendent:

- des propriétés des fibres et de la matrice.
- de l'interface fibre-matrice.
- de la fraction volumique des fibres.
- de l'état et des conditions de sollicitations mécaniques imposées.



**Figure II.15** : Décohésion fibre-matrice. [24]

Dans le cas d'un composite à fibres unidirectionnelles sollicité parallèlement aux fibres, on peut distinguer les cas suivants :

**1. Cas d'une interface très forte :** Si l'adhérence entre fibres et matrice est très forte, on aura une propagation de la fissure initiée soit par rupture de fibres, soit par rupture de la matrice comme si elle n'avait rencontré aucun obstacle, la rupture observée sera de type fragile.

**2. Cas d'une interface très faible :**

la fissuration matricielle est déviée à l'interface, la décohésion fibre-matrice s'étend sur une très grande distance.

**3. Cas d'une interface ayant des propriétés intermédiaires :**

la fissure au contact d'une fibre se dévie dans un plan perpendiculaire en provoquant un décollement de la matrice au niveau de l'interface.

### II.6.4 Comportement d'un composite unidirectionnel :

Dans un composite thermoplastique unidirectionnel sollicité parallèlement aux fibres, le comportement à rupture peut être imaginé comme étant constitué des séquences suivantes: [25]

**- Cas des fibres et matrice subissent la même déformation :**

Le composite possède donc un comportement linéaire élastique jusqu'à l'apparition d'une première fissure matricielle.

Cette fissure se propage et s'approche d'une fibre, ensuite on peut distinguer les cas suivants:

### 1. Cas d'une interface très forte:

Si l'adhérence entre fibres et matrice est très forte, la fissure continue sa propagation comme si elle n'avait rencontré aucun obstacle, mode I (mode d'ouverture). Cela entraîne aussi des concentrations de contraintes sur les fibres voisines et provoque la rupture catastrophique du composite. Le comportement du composite est celui d'un matériau fragile et les fibres n'exercent aucun effet de renforcement sauf éventuellement par leur énergie de rupture. Qui ne peut plus jouer son rôle de renfort. Ce type de matériau possède un comportement fragile, comme une céramique monolithique. Alors la déformation des deux constituants est élastique. Il n'y a aucun déplacement relatif entre fibre et matrice, le transfert de charge s'effectue par l'intermédiaire d'une forte contrainte de cisaillement dans la matrice, dont l'intensité décroît lorsqu'on s'éloigne radialement de la fibre (figure. II.16).

### 2. Cas d'une interface très faible:

Si l'interface est trop faible, la fissure matricielle est bien déviée à l'interface, mais la décohésion entre fibres et matrice s'étend sur une très grande distance sur laquelle la matrice n'intervient donc plus. Là également, la résistance du composite est très faible, mode II et III

### 3. Cas d'une interface relativement faible:

Si l'adhérence entre fibres et matrice est relativement faible, la fissure au contact d'une fibre se dévie dans un plan perpendiculaire (mode II de la rupture) en provoquant un décollement de la matrice au niveau de l'interface. Le mode II, ou mode de glissement droit, est la situation recherchée dans la déviation de fissure, avec le mode III (glissement vis). En

règle générale, la propagation de la fissure est en mode mixte combinant le mode I et les deux autres modes (II et III) voir figure. II.16.

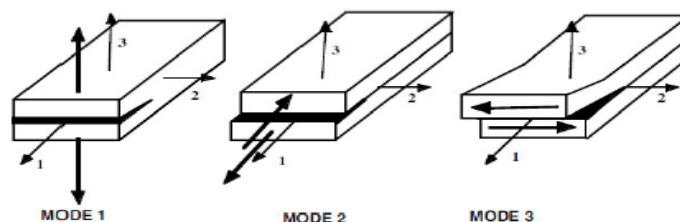


Figure II.16 : Modes d'endommagement.

### II.6.4.1 Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale :

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, l'initiation de la rupture se produit généralement soit par rupture des fibres lorsque la déformation à la rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice  $\sigma_{fu} < \sigma_{mu}$  soit par rupture transverse de la matrice dans le cas contraire.

Dans le cas les courbes contrainte-déformations sont représentés sur la figure II.7. En admettant l'égalité des déformations dans la fibre et dans la matrice, la relation de contrainte à la rupture du composite  $\sigma_{cu}$  s'écrit au moment de la rupture:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m) \varepsilon_{fu}(1 - V_f) \quad \text{II.74}$$

Où  $\sigma_{fu}$  la contrainte à la rupture des fibres et la contrainte dans la matrice

pour une déformation égale à la déformation  $\varepsilon_{fu}$  à la rupture des fibres. La contrainte

$\sigma_m \varepsilon_{fu}$  est inférieure à la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, d'où:

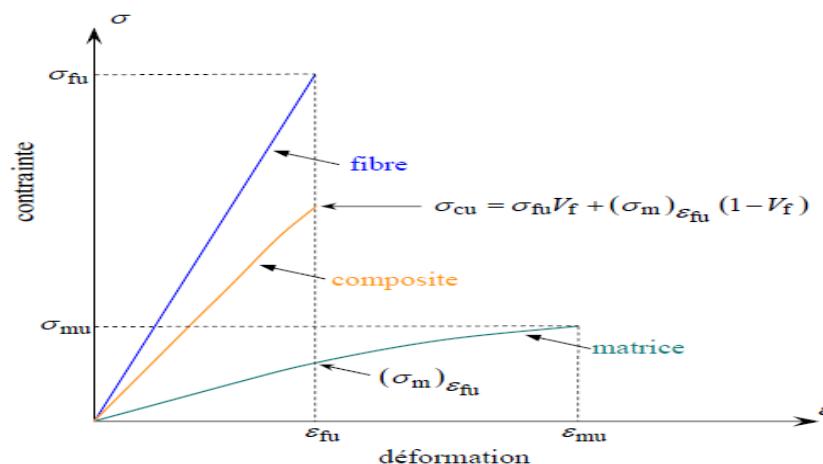
$$\sigma_{cu} \leq \sigma_{fu} V_f + \sigma_m(1 - V_f) \quad \text{II.75}$$

Généralement, l'expression retenue pour la contrainte à la rupture du composite est la loi des mélanges:

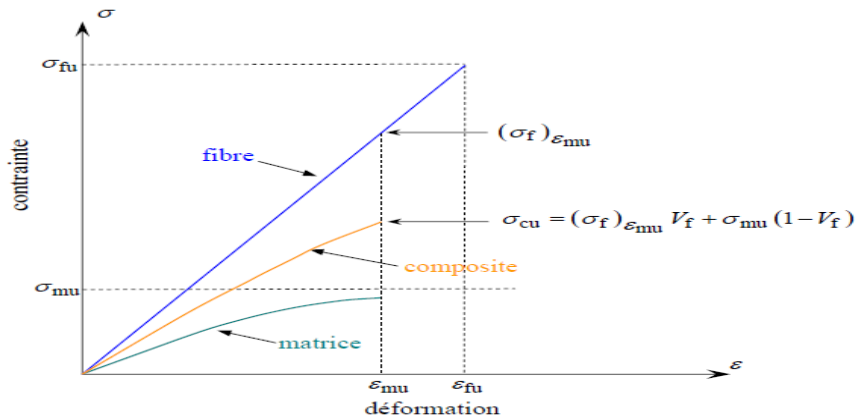
$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + \sigma_m(1 - V_f) \quad \text{II.76}$$

Avec pour les fractions usuelles de fibres:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f \quad \text{II.77}$$



**Figure II.17:** courbe contrainte/déformation d'un composite soumis à une traction longitudinale  
( $\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$ ) [24]



**Figure II.18:** courbe contrainte/déformation d'un composite soumis à une traction longitudinale ( $\epsilon_{fu} > \epsilon_{mu}$ ) [24]

Dans le cas où la déformation à la rupture de la matrice est inférieure à celle des fibres figure II.18, la contrainte à la rupture est donnée par l'expression :

$$\sigma_{cu} = \sigma_f \epsilon_{mu} V_f + (\sigma_m)(1 - V_f) \quad \text{II.78}$$

Où  $\sigma_f \epsilon_{mu}$  est la contrainte dans la fibre au moment de la rupture de la matrice.

La valeur est alors bien inférieure à celle donnée par l'expression (II.74). La matrice ne permet pas dans ce cas de bénéficier totalement du renfort des fibres. Les caractéristiques mécaniques des fibres usuelles sont:

- pour les fibres de carbone:

$$E_f = 231 \text{ GPa} \quad \sigma_{fu} = 3000 \text{ à } 4000 \text{ MPa} \quad \text{soit} \quad \epsilon_{fu} = 1.4 \text{ à } 1.8 \%$$

-pour les fibres de Graphite -E :

$$E_f = 4.025 \text{ à } 4.41 \text{ GPa} \quad \sigma_{fu} \sim 50 \text{ à } 90 \text{ MPa} \quad \text{soit} \quad \epsilon_{fu} = 0 \text{ à } 3 \%$$

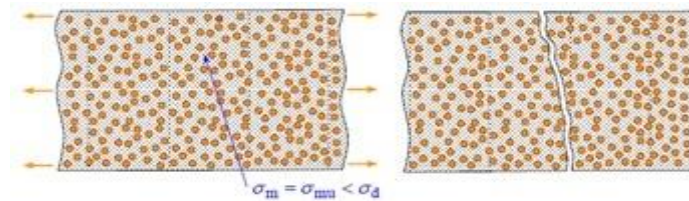
-L'allongement à la rupture des résines usuelles est:

- pour les résines époxydes:  $\epsilon_{mu} = 2 \text{ à } 5 \%$

#### II.6.4.2 Composite unidirectionnel soumis à une traction transversale :

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transversale, la rupture se produit soit par rupture de la matrice, soit par décohésion de l'interface fibre matrice. La rupture de la matrice se produit lorsque la contrainte en traction ( $\sigma_m$ ) dans la matrice atteint la contrainte à la rupture ( $\sigma_{mu}$ ) de la matrice (figure II.19). Ce processus intervient lorsque la contrainte à la rupture de la matrice est inférieure à la contrainte de décohésion  $\sigma_d$  en traction

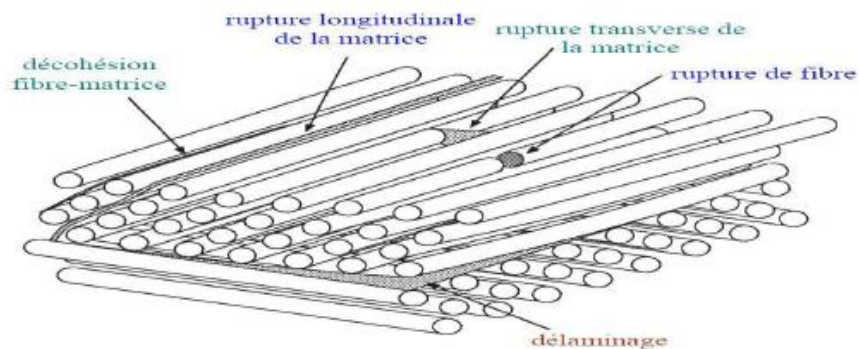
de l'interface fibre-matrice. Dans le cas contraire ( $\sigma_{mu} > \sigma_d$ ) la rupture du composite se produit par rupture de l'interface fibre- matrice



**Figure II.19 :** Rupture d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transversale.

### II.6.5 L'endommagement des stratifiés :

les matériaux composites subissent divers types d'endommagements. Ces mécanismes d'endommagement typiques des stratifiés tels que la fissuration matricielle, la décohésion fibres-matrice, le délaminage et la rupture de fibres (Figure II.20) .



**Figure II.20.:** Exemple de types d'endommagement d'un stratifié .

#### II.6.5.1 Fissuration matricielle :

La fissuration matricielle est l'apparition de microfissures dans les zones où l'hétérogénéité du milieu est importante ou en présence d'inclusions. Ces inclusions ont tendance à créer des zones de concentration de contraintes depuis lesquelles la matrice va commencer à se fissurer. Suivant la direction de la sollicitation, elles peuvent se propager dans le sens transversal ou longitudinal des fibres . Les fissures dans le sens transversal traversent les plis ayant les fibres les plus désorientées par rapport à l'axe de sollicitation. Quant aux fissures longitudinales, elles sont perpendiculaires à la surface inter-plis et traversent l'épaisseur des plis orientés dans l'axe de sollicitation par exemple dans le cas de cisaillement .

#### II.6.5.2 Décohésion fibre-matrice :

La décohésion fibre-matrice se produit dans la zone de transfert des charges entre le renfort et la matrice et dépend de la résistance relative de chaque composant . Suite à l'apparition de

microfissures dans la matrice, elles vont se propager et arriver jusqu'à l'interface fibre-matrice. Suivant l'adhérence de l'interface, différents évènements peuvent survenir :

- si l'adhérence est très faible, la fissuration matricielle est déviée à l'interface et la décohésion fibre-matrice se propage sur une grande distance
- si l'adhérence est très forte, il y aura une propagation de la fissure qui sera initiée soit par rupture de fibres, soit par rupture de la matrice.

### **II.6.5.3 Rupture de fibres :**

La rupture de fibres intervient généralement à un stade avancé de l'endommagement dans les plis orientés suivant l'axe de sollicitation. Ce type d'endommagement survient lorsque l'on atteint la limite de rupture des fibres. Une accumulation de multiples ruptures de fibres dans le matériau peut entraîner une instabilité et surtout une perte de résistance globale du matériau, ce qui conduit à la ruine de la structure et à la rupture .

### **II.6.5.4 Délaminage :**

Le délaminage est la séparation de deux couches du composite, ce qui rend le défaut visible à l'œil nu dans plusieurs cas contrairement aux modes d'endommagement précédents.

Il est un mécanisme particulièrement endommageant qui peut conduire rapidement à la ruine totale par une perte considérable de rigidité de la structure.

Il se produit principalement dans les stratifiés à empilement de plis croisés du au fait de la différence de module entre les couches . Cette séparation des couches se produit dans les bords des structures et près des discontinuités géométriques où les gradients de contraintes sont plus forts et conduisent à des contraintes hors plan (de stratification)

## **II.7 Conclusion :**

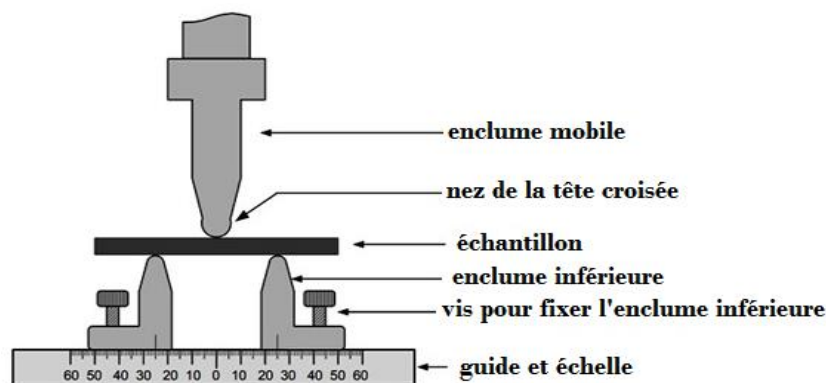
L'objectif de cette partie est de présenté les théories du comportement mécanique des matériaux composites ,unidirectionnel stratifié et différentes mécanisme de rupture et d'endommagement .

## **Chapitre III**

# **Etude des Poutres composites en flexion**

### III.1 Introduction:

Dans l'essai de flexion trois points, l'éprouvette est placée sur deux appuis, puis centrée sur un poinçon de flexion. l'écartement entre appuis est réglable figure (III.1).L'essai est particulièrement approprié pour étudier le comportement des matériaux composite à partir de rupture et l'endommagement des matériaux et l'influence de cisaillement des poutres composites pour différentes hauteurs, dans ce chapitre nous avons présenté deux comportements en flexion avec l'effet de cisaillement et sans l'effet de cisaillement. La résistance à la flexion, résistance à la rupture, tendance à la rupture sont autant d'indications utiles pour le développement de vos matériaux. Grâce au dispositif pour essai de flexion trois points.



**Figure III.1:** machine pour configuration expérimentale pour les mesures de résistance à la traction et compression

#### III.1.1 Comportement en flexion des poutres composites sans considération de l'effet du cisaillement transverse:

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans rigidité que résistance, qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme élément de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés et à partir d'essais de flexion réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres. [26]

#### III.1.2 Equations de comportement en flexion de poutres composites Stratifiés :

Une poutre est une membrane mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre. On

appelle effort tranchant  $T$  la force interne transversale et moment fléchissant  $M$  le moment interne. Dans ce chapitre, nous étudierons ces forces et ces moments; nous allons voir de quelle façon ils varient d'une zone à l'autre le long de la poutre et où sont situées les zones les plus sollicitées afin de pouvoir déterminer le type de poutre à utiliser.

### III.1.2.1 Types de poutres:

#### Poutre simple:

C'est une poutre reposant sur deux supports; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion. La figure III.1 montre une poutre simple.

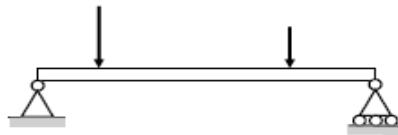


Figure.III.2: Cas d'une Poutre Simple

#### ➤ Poutre console:

C'est une poutre encastree dans un mur à une l'extrémité. L'extrémité encastree ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastree à une extrémité. La figure III.3 montre une poutre console.

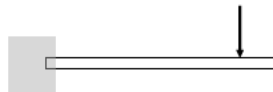


Figure.III.3: Cas d'une Poutre Console

#### ➤ Poutre avec porte-à-faux:

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). On appelle aussi cette poutre; poutre en porte-à-faux (Figure.III.4).

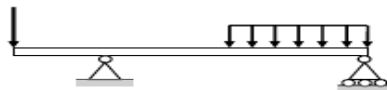


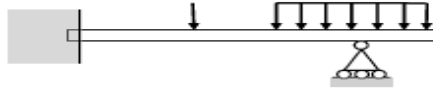
Figure.III.4: Cas d'une Poutre avec Porte à Faux

Les Poutres sont classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même aux trois équations d'équilibre[21].

#### ➤ Poutre encastree et supportée:

C'est une combinaison des types A et B. On note que la poutre est liée quatre fois (4 inconnues), c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

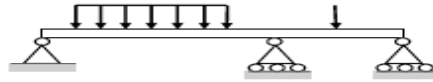
La figure.III.5 nous présente une poutre encastree et supportee.



**Figure.III.5:** Cas d'une Poutre Encastree et Supportee

➤ **Poutre continue:**

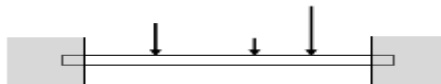
C'est une poutre supportee par plus de deux supports, c'est donc une poutre en e'quilibre hyperstatique. La figure.III.6: nous montre une poutre continue.



**Figure.III.6:** Cas d'une Poutre Continue

➤ **Poutre à double encastrement:**

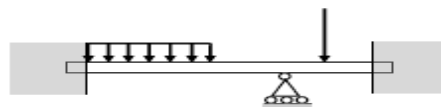
C'est une poutre supportee par deux encastrement, c'est donc une poutre en e'quilibre hyperstatique. La figure.III.7 nous schematise une poutre à double encastrement.



**Figure.III.7:** Cas d'une Poutre à Double Encastrement

➤ **Poutre supportee à double encastrement:**

C'est une poutre soutenue par deux encastrement et supportee par un ou plusieurs supports, c'est donc une poutre en e'quilibre hyperstatique. La figure.III.8 nous montre une poutre supportee à double encastrement.



**Figure.III.8:** Cas d'une Poutre Supportee à Double Encastrement

Les poutres D à G sont des poutres hyperstatiques. Elles ont plus de fixations ou supports que necessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacite portante de la poutre. Les equations de la statique ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On a recourt à différentes methodes.

### III.1.2.2 Types de charges:

On peut distinguer les différentes charges suivantes :

- Charge concentree
- Charge uniformement repartie
- Charge non uniformement repartie
- Couples

Dans les charges concentrées, il y a aussi les charges axiales et les charges obliques ou inclinées par rapport à l'axe. Dans la pratique, on peut rencontrer l'un ou l'autre des types de charges ou une combinaison de plusieurs types de charges. Il est bon de pouvoir les reconnaître et les identifier. [26]

**III.1.2.3 Lois de comportement:**

On a besoin de revoir les concepts et relations données par la résistance des matériaux appliquées aux poutres isotropes (en matériaux classiques), La théorie des poutres considère que la longueur L de la poutre est très supérieure à sa largeur b. [27]

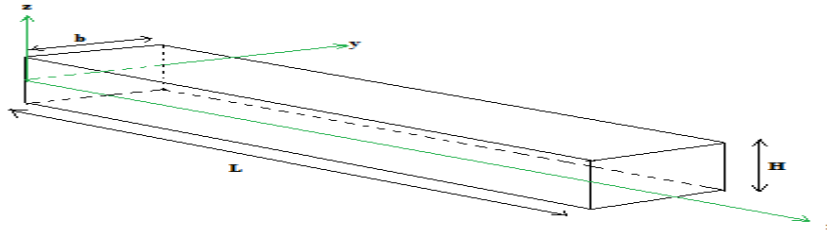


Figure.III.9: Élément Poutre

L’objectif de ce chapitre est de schématiser le comportement mécanique des poutres stratifiées sollicitées à la flexion pure, pour simplifier au mieux l’analyse de la structure, nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimension (x, y) de difficulté moindre.

**III.1.3 Moments de flexion:**

Le champ des moments s’explique en introduisant l’expression (II.52) des contraintes dans la relation (II.61), soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ z \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \tag{III.1}$$

Puisque la matrice  $Q_k$  n’étant pas en fonction de la distance Z,  $[\epsilon^0]$  et  $[K]$  sont indépendantes de z et de l’ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (III.1) peut alors être écrite comme :

$$M_f(x, y) = \frac{1}{2} [\sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{Q}_k] \epsilon^0(x, y) + \frac{1}{3} [\sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k] k(x, y) \tag{III.2}$$

La matrice des moments de flexion s’écrit donc suivant :

$$M_f(x, y) = \mathbf{B} \epsilon^0(x, y) + \mathbf{D} \mathbf{k}(x, y) \tag{III.3}$$

En introduisant les matrices de rigidité en flexion D et la matrice de couplage membrane flexion-torsion B :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k$$

$$D = [D_{ij}]; D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12}) \tag{III.4}$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.5}$$

Les moments de flexion et de torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membranes.

### III.1.4 Contraintes et Déformations:

Un stratifié est dit symétrique si le plan moyen est un plan de symétrie. Deux couches symétriques ont :

- La même matrice de rigidité  $[Q_{ij}]_k$
- La même épaisseur  $e_k$
- Des cotes opposées  $z_k$  et  $-z_k$

Il en résulte que les coefficients  $B_{ij}$  de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls. L'équation (III.5) se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.6}$$

Il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion dans le cas des stratifiés symétriques. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane en flexion/ torsion. En outre, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux. [27]

Les poutres stratifiées symétriques sont donc largement utilisés, à moins que des conditions spécifiques nécessitent un stratifié non symétrique. Par exemple, en stratifié utilisé comme bouclier thermique, et exposé à une source thermique sur une seule de ses faces, sera conçu suivant une structure non symétrique. comme :  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_{xy}$  sont définis dans les relations (II.47):

$$\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial^2 W_0(x,y)}{\partial x^2} \\ k_y &= -\frac{\partial^2 W_0(x,y)}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 W_0(x,y)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad \text{III.7}$$

L'équation (III.6) peut être écrite sous la forme inverse suivante :

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.8}$$

Où  $D_{ij}^*$  :sont les éléments de la matrice inverse de  $[D_{ij}]$  matrice de rigidité en flexion donnés par la relation (III.6) :

$$D_{11}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{22}D_{66} - D_{26}^2) ; D_{12}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{66} - D_{16}D_{26}) ; D_{16}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})$$

$$D_{22}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{66} - D_{16}^2) ; D_{26}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{26} - D_{16}D_{12}) ; D_{66}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)$$

$\Delta$  est le déterminant de la matrice  $D_{ij}$  :

$$\Delta = D_{12}D_{22}D_{66} - 2D_{12}D_{16}D_{26} - D_{11}D_{26}^2 - D_{22}D_{16}^2 - D_{12}D_{66}^2$$

Dans le cas d'une flexion suivant l'axe x, les moments de flexion et de torsion  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont supposés nuls. Ainsi que la flèche  $w_0$  ne dépend que de  $x$  :

$$M_y = 0, M_{xy} = 0 \quad \text{III.9}$$

$$w_0 = w_0(x) \quad \text{III.10}$$

Donc les équations (III.7) et (III.8) conduisent à :

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} = D_{11}^* M_x$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial y^2} = D_{12}^* M_x \quad \text{III.11}$$

$$k_x = -2\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x \partial y} = D_{16}^* M_x$$

L'équation (III.11) montre que les courbures  $k_y$  et  $k_{xy}$  sont fonctions du moment de flexion  $M_x$ , et ce qui explique aussi que la flèche  $w_0$  dépend a priori de la variable  $y$ . Cet effet est particulièrement important dans le cas d'éprouvettes de flexion de laboratoire, de forme plus proche d'une lame que d'une poutre. Il en résulte que la flexion et la torsion induites par les termes  $D_{12}^*$  et  $D_{16}^*$  dans les équations (III.11) tendent à produire un décollement partiel de la poutre sur ses supports.[28]

Cet effet est toutefois négligeable dans le cas où le rapport longueur sur largeur ( $L/b$ ) est suffisamment élevé. Suite à l'hypothèse (III.10), les équations (III.11) s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_x \quad \text{III.12}$$

Connaissant la formule de la flèche d'une poutre en flexion:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{M}{E_x I_{xy}} \quad \text{III.13}$$

En introduisant la formule du module d'élasticité longitudinale  $E_x$

$$D_{11} = \frac{h^3 E_x}{12} = \frac{1}{D_{11}^*} \quad \text{III.14}$$

$$E_x = \frac{12}{D_{11}^* h^3}$$

Le moment quadratique  $I$  de la section droite de la poutre par rapport au plan (x,y) :

$$I = I_{xy} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{III.15}$$

Le moment de flexion total  $M$  (par unité de largeur  $b$ ) :

$$M = bM_x \quad \text{III.16}$$

l'équation de flexion des poutres :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad \text{III.17}$$

Compte tenu des hypothèses faites, l'équation (III.17) de flexion des poutres sans l'effet de cisaillement transverse et dans le cas des problèmes de statique se réduit à :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q = 0 \quad \text{III.18}$$

En tenant compte de (III.12) et (III.13), cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = - D^*_{11} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = D^*_{11} q \quad \text{III.19}$$

En posant :

$$p = bq$$

On a :

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = \frac{p}{E_x l} \quad \text{III.20}$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces :

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad \text{III.21}$$

ou bien:

$$\frac{dM}{dx^4} = Q \quad \text{III.22}$$

En posant :

$$Q = bQ_x$$

Les contraintes dans la couche  $k$  du stratifié s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.23}$$

C'est à dire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k &= z(\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*)M_x \\ \sigma_{xy}^k &= z(\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*)M_x \\ \sigma_{yy}^k &= z(\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*)M_x\end{aligned}\quad \text{III.24}$$

Sachant que :

$$M_x = \frac{M}{b}$$

$$b = \frac{12I}{h^3} \quad \text{alors} \quad M_x = \frac{h^3 M}{12I} \quad \text{III.25}$$

Les expressions de ces contraintes peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*) \frac{M}{I} z \\ \sigma_{xy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*) \\ \sigma_{yy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*) \frac{M}{I} z\end{aligned}\quad \text{III.26}$$

En posant :

$$\begin{aligned}a_{xx}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*) \\ a_{xy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*) \\ a_{yy}^k &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*)\end{aligned}$$

Les équations (III.25) deviennent :

$$\sigma_{xx}^k = a_{xx}^k \frac{M}{I} z \quad \text{III.27}$$

$$\sigma_{xy}^k = a_{xy}^k \frac{M}{I} z \quad \text{III.28}$$

$$\sigma_{yy}^k = a_{yy}^k \frac{M}{I} z \quad \text{III.29}$$

Les expressions précédentes des contraintes ne sont correctes qu'à une distance assez éloignée ( $>h$ ) des bords de la poutre. Ils ne sont donc applicables qu'au cas de poutres ayant un rapport  $b/h$  assez élevé. Puisque la poutre est supposée de longueur  $L$  assez élevé par rapport à sa largeur  $b$ , on peut négliger la déformation dans la direction  $y$ , soit :

$$\varepsilon_{yy} = 0, \gamma_{xy} = 0, \gamma_{yz} = 0.$$

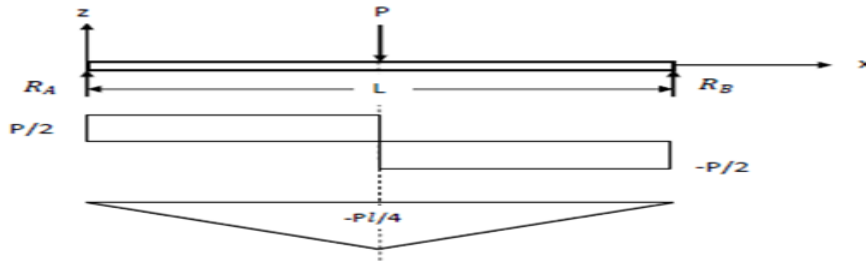
D'autre part, les contraintes, déformations et déplacements ne sont fonction que de  $x$  et  $z$ .

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = 0 \quad \text{III.30}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où :} \quad \frac{d\sigma_{xz}^k}{dz} &= -\frac{d\sigma_{xx}^k}{dx} = -a_{xx}^k \frac{1}{l} \frac{dM}{dx} z \\ \sigma_{xz}^k &= a_{xx}^k \frac{Q}{2I} (z^2 + c_k)\end{aligned}\quad \text{III.31}$$

Les constantes  $C_k$  dans chaque couche sont déterminées en annulant  $\sigma_{xz}$  sur les faces supérieures et inférieures, et en assurant la continuité de  $\sigma_{xz}$  entre chaque couche. Dans le cas de la flexion des poutres, la prise en compte du cisaillement transverse ne modifie pas la répartition des contraintes dans le stratifié.

**III.1.4.1 Flexion 3-Points :**



**Figure.III.10:** Sollicitation d’une poutre en flexion 3-points

Nous considérons une poutre en flexion 3-points. La symétrie du problème conduit à ne considérer qu’une moitié de poutre. Le moment de flexion s’exprime comme suit :

**1-Détermination des Réactions aux Appuis :**

$$\sum M_A = 0 : R_B = \frac{p}{2}$$

$$\sum M_B = 0 : R_A = \frac{p}{2}$$

On va considérer le tronçon  $0 \leq x \leq l/2$

$$M + R_A x = 0 \quad M = -R_B x$$

$$M = -\frac{px}{2} \tag{III.32}$$

Où  $P$  est la charge totale exercée au milieu de la poutre. En reportant cette dernière expression dans (III.13), il vient :

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{M}{E_x I} = \frac{px}{2E_x I} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \tag{III.33}$$

Dans le cas des appuis simples, les conditions aux frontières sont pour  $x=0$  :

$$M = 0$$

$$w_0 = 0 \tag{III.34}$$

D’autre part, la symétrie impose que, pour  $x = l/2$  :

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \tag{III.35}$$

On intègre la relation (III.33) pour obtenir la flèche

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \int \frac{px}{2E_x I} dx = \frac{px^2}{4E_x I} + c_1$$

$$w_0 = \int \left( \frac{px^2}{4E_x I} + c_1 \right) dx \tag{III.36}$$

$$w_0 = \frac{px^3}{12E_x I} + c_1 x + c_2$$

Pour déterminer les constantes  $C_1$  et  $C_2$ , on applique les conditions aux limites (III.34) et (III.35):

pour  $x = 0$

$$w_0 = \frac{px^3}{12E_x I} + C_1 x + C_2 = 0 \quad C_2 = 0$$

pour  $x = \frac{l}{2}$

$$\frac{dw_0}{dx} = \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)^2}{4E_x I} + C_1 = 0 \quad C_1 = -\frac{pl^2}{16E_x I}$$

## 2-Détermination de la flèche :

La flèche  $w_0$  s'écrit :

$$w_0 = \frac{px^3}{12E_x I} - \frac{pl^2}{16E_x I} x = \frac{pl^2}{48E_x I} x \left[ 3 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2 \right] \quad \text{III.37}$$

La flèche maximum  $w_{max}$  de la poutre est déterminée pour  $x = l/2$  :

$$w_{max} = \frac{pl^3}{48E_x I} = \frac{pl^3}{48b} D_{11}^* \quad \text{III.38}$$

Cette relation peut être utilisée pour déterminer soit le module de flexion de la poutre, soit le coefficient  $D_{11}$ , connaissant la flèche  $w_{max}$  au centre pour une charge imposée  $P$  :

$$E_x = \frac{pl^3}{48lw_{max}} = \frac{pl^3}{48bh^3w_{max}} \quad \text{III.39}$$

$$D_{11}^* = \frac{48bw_{max}}{pl^3} \quad \text{III.40}$$

## 3-Détermination des Contraintes :

Les contraintes dans la couche  $k$  s'écrivent d'après (III.27) à (III.29) :

$$\sigma_{xx}^k = -6a_{xx}^k \frac{px}{bh^3} z$$

$$\sigma_{yy}^k = -6a_{yy}^k \frac{px}{bh^3} z \quad \text{III.41}$$

$$\sigma_{xy}^k = -6a_{xy}^k \frac{px}{bh^3} z$$

Ces contraintes sont maximales pour  $x = l/2$ , soit :

$$\sigma_{xx}^k = -3a_{xx}^k \frac{px}{bh^3} z$$

$$\sigma_{yy}^k = -3a_{yy}^k \frac{px}{bh^3} z \quad \text{III.42}$$

$$\sigma_{xy}^k = -3a_{xy}^k \frac{px}{bh^3} z$$

## III.2 Comportement en flexion des poutres composites avec considération de l'effet du cisaillement transverse:

Dans la partie précédente, on a pu décrire les champs de contraintes et déformations dans les poutres composites stratifiées peu épaisses, excepté dans les régions peu étendues près des bords des stratifiés. Dans le cas d'une structure sollicitée en flexion, la rigidité et la résistance en flexion

augmentent rapidement avec l'épaisseur des stratifiés constituant la structure. Toutefois, pratiquement seules les couches externes supportent les charges imposées à la structure. Par contre dans le cas des stratifiés épais (rapport largeur sur épaisseur inférieur à 10), la théorie des poutres Euler-Bernoulli devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique : flèche du stratifié, répartition des contraintes, etc. Dans le cas où le cisaillement transverse est pris en compte, une introduction des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse du stratifié devient nécessaire. Cette analyse a été initialement développée par la théorie de Timoshenko.[29]

### III.2.1 Equations de comportement en flexion en tenant compte du cisaillement transverse:

#### III.2.1.1 Relation Contrainte-Déformation :

La relation entre les contraintes et les déformations dans une couche k s'exprime comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{44} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.43}$$

Le champ des contraintes est constitué des contraintes en membrane :  $\sigma_{xx}$  ,  $\sigma_{yy}$  ,  $\tau_{xy}$  et des contraintes en cisaillement transverse :  $\tau_{yz}$  ,  $\tau_{xz}$  , et on peut aussi remarquer à partir de la relation (III.43) que ces deux champ sont découplés. Les rigidités réduites transformées  $Q_{ij}$  sont données par la relation (II.51) et les coefficients  $\bar{C}_{ij}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{C}_{44} &= c_{44} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ \bar{C}_{45} &= (c_{55} - c_{44}) \sin \theta + \cos \theta \\ \bar{C}_{55} &= c_{44} \sin^2 \theta + c_{55} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad \text{III.44}$$

Les contraintes en membrane dans la couche k sont données par la même relation (II.56):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche k s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.45}$$

### III.2.1.2 Résultantes en moment fléchissant :

L'équation constitutive d'un stratifié symétrique en flexion pure, tenant compte du cisaillement transverse s'écrit sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.46}$$

Les coefficients  $D_{ij}$  ont été introduit dans la théorie classique des stratifiés par la relation (III.21).

L'équation des moments (III.46) a une forme identique à celle des moments (III.23) de la théorie classique des stratifiés, d'où les expressions des courbures:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ k_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ k_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{aligned} \quad \text{III.47}$$

L'équation des moments(III.46) peut être écrite sous la forme inverse suivante :

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.48}$$

Où les coefficients  $D_{ij}^*$  sont les éléments de la matrice inverse de  $D_{ij}$  donnés par la relation (III.26).La déformation en flexion  $\varepsilon_{xx}$  est donnée par :

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{d\varphi_x}{dx} \quad \text{III.49}$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où les fonctions  $\varphi_x$  et  $w_0$  sont indépendantes de la variable  $y$ , c'est-à-dire :

$$\varphi_x = \varphi_x(x) \quad w_0 = w_0(x) \quad \text{III.50}$$

De l'équation (III.48) , nous tirons la relation donnant le moment  $M_x$  :

$$K_x = \frac{d\varphi_x}{dx} = D_{11}^* M_x \quad \text{III.51}$$

L'hypothèse (III.9) de la flexion des poutres est également appliquée à la théorie prenant en compte le cisaillement transverse.

$$M_y = 0 \quad M_{xy} = 0 \quad \text{III.52}$$

### III.2.1.3 Résultantes en Cisaillement :

Compte tenu des expressions (II.65) et (III.45) l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.53}$$

avec :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})(C'_{ij})_{k'} \quad i,j=4,5 \quad \text{III.54}$$

Les coefficients  $F_{ij}$  ont la même forme que les coefficients  $A_{ij}$  (III.34). Ils sont différents par l'utilisation des coefficients  $\bar{C}_{ij}$  de rigidité en cisaillement transverse au lieu des coefficients  $Q_{ij}$  de rigidité réduite (III.13). Les déformations en cisaillement transverse sont données par la relation:

$$\gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y$$

$$\gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x$$

L'équations des résultantes en cisaillement (III.48) est découplée, et peut être écrite sous la forme inverse suivante :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44}^* & F_{45}^* \\ F_{45}^* & F_{55}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} \quad \text{III.55}$$

Où les coefficients  $F_{ij}^*$  sont exprimés dans le cadre de la théorie initiale du cisaillement transverse:

$$F_{44}^* = \frac{F_{55}}{\Delta F} \quad F_{45}^* = \frac{F_{45}}{\Delta F} \quad F_{55}^* = \frac{F_{44}}{\Delta F} \quad \text{III.56}$$

avec :  $\Delta F = F_{44}F_{55} - F_{45}^2$

La déformation en cisaillement moyenne  $\gamma_{xz}^0$  sont alors données par les expressions :

$$\gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{III.57}$$

les relations fondamentales des plaques:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + p_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + p_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

Dans le cas d'une flexion pure, les relations fondamentales des plaques se réduisent à

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad \text{III.58}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad \text{III.59}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad \text{III.60}$$

En reportant la relation (III.52) dans l'équation d'équilibre (III.60) nous trouvons que la résultante en cisaillement  $Q_y$  est nulle :

$$Q_y = 0 \quad \text{III.61}$$

De l'équation (III.54) nous tirons

$$\gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = F_{55}^* Q_x \quad \text{III.62}$$

En reportant les expressions (III.51) et (III.62) dans l'équation (III.59) nous obtenons :

$$\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - \frac{D_{11}^*}{D_{55}^*} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0 \quad \text{III.63}$$

En introduisant le module de Young  $E_x$  de la poutre :

$$E_x = \frac{12}{D_{11}^* h^3}$$

Et le module de cisaillement  $G_{xz}$  de la poutre sera exprimé par:

$$G_{xz} = \frac{1}{h F_{55}^*} \quad \text{III.64}$$

L'équation (III.77) devient alors:

$$\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - \frac{bh}{I} \frac{G_{xz}}{E_x} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0 \quad \text{III.65}$$

De même, en reportant l'expression (III.65) dans l'équation (III.58), nous obtenons :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{d\varphi_x}{dx} + F_{55}^* q = 0 \quad \text{III.66}$$

En prenant compte de la relation (III.55) et de la charge :  $p = bq$ , on aura :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{1}{h G_{xy}} p = 0 \quad \text{III.67}$$

On peut conclure que les équations (III.63) et (III.66), ou (III.65) et (III.67) constituent les équations fondamentales des poutres en flexion de stratifiés symétriques, tenant compte de la déformation en cisaillement. Comme le moment de flexion total  $M$  (par unité de largeur  $b$ ) est donné par la relation (III.33) :

$M = bM$ , la relation (5.8) s'écrit comme:

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = D_{11}^* M_x = \frac{M}{E_x I} \quad \text{III.68}$$

Après avoir reporté l'équation (III.64) dans l'équation (III.65). On compare la dérivée de l'équation (III.68) avec l'équation (III.69) afin d'obtenir une nouvelle équation fondamentale des poutres en flexion de stratifiés symétriques, tenant compte de la déformation en cisaillement:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{F_{55}^*} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad \text{III.69}$$

ou bien:

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = bh G_{xz} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad \text{III.70}$$

### III.2.1.4 Contraintes de flexion:

Les contraintes dans la couche  $k$  du stratifié s'écrivent :

Ou sous la forme explicite:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.71}$$

D'où

$$\sigma_{xx}^k = z(\bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^*) M_x$$

$$\sigma_{xy}^k = z(\bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^*) M_x \quad \text{III.72}$$

$$\sigma_{yy}^k = z(\bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^*) M_x$$

Les expressions de ces contraintes peuvent être réécrites, en introduisant M, I et les relations (III.68) donnant  $a_{xx}$

$$\sigma_{xx}^k = a_{xx}^k \frac{M}{I} z \quad \text{III.73}$$

$$\sigma_{yy}^k = a_{yy}^k \frac{M}{I} z \quad \text{III.74}$$

$$\sigma_{zz}^k = a_{zz}^k \frac{M}{I} z \quad \text{III.75}$$

Il en résulte que les expressions des contraintes dans la couche k du stratifié où le cisaillement transverse est pris en compte sont les mêmes obtenues avec la théorie classique des stratifiés en flexion pure.

### III.2.1.5 Contraintes de cisaillement:

La contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  dans les couches se déduit des relations fondamentales des poutres soit :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = 0 \quad \text{III.76} \quad , \quad \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial z} = 0 \quad \text{III.77}$$

D'où :

$$\frac{d\sigma_{xz}^k}{dz} = -\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} = -a_{xx}^k \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} z \quad \text{III.78}$$

$$\frac{d\sigma_{yz}^k}{dz} = -\frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} = -a_{yy}^k \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} z \quad \text{III.79}$$

$$\sigma_{xz}^k = -a_{xx}^k \frac{Q}{2I} (z^2 + c_k) \quad \text{III.80}$$

$$\sigma_{yz}^k = -a_{yy}^k \frac{Q}{2I} (z^2 + \bar{c}_k) \quad \text{III.81}$$

Les constantes  $C_k$  et  $\bar{c}_k$  dans chaque couche sont déterminées en annulant  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sur les faces supérieures et inférieures, et en assurant la continuité de  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  entre chaque couche. Dans le cas de la flexion des poutres, la prise en compte du cisaillement transverse ne modifie pas la répartition des contraintes normales ou de flexion dans le stratifié.

**III.2.2 Flexion 3-Points :**

Dans le cas d'une poutre en flexion 3-points, le moment de flexion est exprimé par la relation (4.46). En reportant cette expression dans la relation (III.51), nous obtenons :

$$\varphi_x = -\frac{p}{6E_x I} x^2 + c \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad \text{III.82}$$

La symétrie du chargement implique que  $u(l/2) = 0$ .

$$\varphi_x \left( \frac{l}{2} \right) = 0 \quad \text{III.83}$$

Cette condition introduite dans (III.82) conduit à :

$$\varphi_x = \frac{pl^2}{16E_x I} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad \text{III.84}$$

ou

$$\varphi_x = \frac{pl^2}{16b} D_{11}^* \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad \text{III.85}$$

En reportant l'expression (III.34) du moment  $M$  dans l'équation (III.57), nous en déduisons l'expression de la flèche  $w_0$  en fonction de  $\varphi_x$ , soit :

$$\frac{dw_0}{dx} = - \left( \varphi_x + \frac{p}{2bhG_{xz}} \right) \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad \text{III.86}$$

Il est intéressant de noter que, d'après ce résultat, la pente de la déformée ne s'annule pas au centre de la poutre. En effet puisque  $\varphi_x(l/2) = 0$ , elle vaut :

$$\frac{dw_0}{dx} \left( \frac{l}{2} \right) = -\frac{p}{2bhG_{xz}} \quad \text{III.87}$$

Après substitution de  $\varphi$ , l'intégration de l'équation (III.52) conduit en tenant compte de  $w_0(0) = 0$  à:

$$w_c = \frac{pl^2}{4bh^3 E_x} x \left[ 4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 - 3 - 2S \right] \quad \text{III.88}$$

On peut aussi définir le coefficient de cisaillement  $S$  par :

$$S = \frac{E_x}{G_{xz}} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \quad \text{III.89}$$

A partir duquel, on peut remarquer que l'effet de la déformation en cisaillement transverse dépend donc du rapport d'élancement  $l/h$  de la poutre, et du rapport  $E_x/G_{xz}$  des modules de la poutre

**III.3 Conclusion:**

Ce chapitre a fait l'objet pour avoir le comportements des matériaux composites avec effet de cisaillement et sans l'effet de cisaillement a partir de l'essais de flexion trois points, nous avons décrit les différents sollicitation et différents types des poutres de matériaux

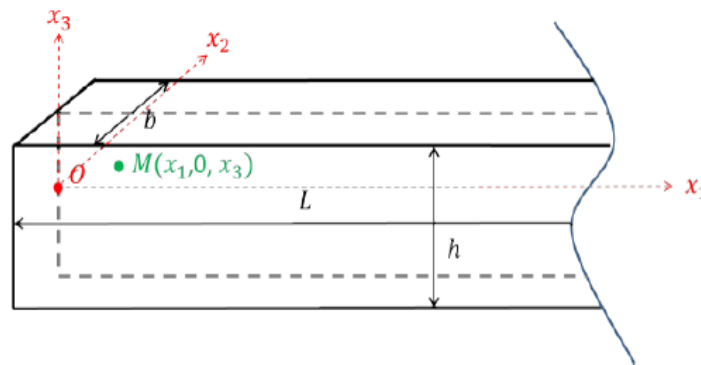
# **Chapitre IV**

## **Analyses numérique du l'effet du cisaillement transverse**

**IV.1 Introduction :**

La prise en compte du cisaillement transverse dans l'étude des matériaux composites peut s'avérer prépondérante pour obtenir des résultats cohérents et exploitables, par la voie analytique comme par la voie numérique. Plusieurs approches existent pour le prendre en compte dans les structures composites. Ce phénomène a été étudié depuis très longtemps par les scientifiques, et plusieurs niveaux de complexité se distinguent dans la prise en compte du cisaillement transverse.

Considérons une poutre rectiligne de longueur L de largeur b et d'épaisseur h, dont les directions d'orthotropie correspondent aux trois axes d'un repère 3D orthonormé  $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  illustrée en figure (IV.1). On note  $E_{11}$  le module d'élasticité suivant l'axe  $(x_1)$ ,  $G_{13}$  le module de cisaillement dans la plan  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$



**Figure IV.1:** Définition de la structure poutre étudiée

La prise en compte du cisaillement transverse s'observe généralement par l'intermédiaire d'une fonction  $f(x_3)$ . Celle-ci est présenté dans le modèle général de déplacement d'un point M appartenant à la structure considérée, issue de la théorie des plaques multicouches

$$U(M) = \begin{cases} u_1(x_1, x_3) = u_1^0(x_1) - x_3 u_{3,1}^0(x_1) + f(x_3) \gamma_{13}^0(x_1) \\ u_3(x_1, x_3) = u_3^0(x_1) \end{cases}$$

Cette cinématique fait apparaître les différents éléments suivants :

$u_1^0(x_1)$  représentent les déplacements du plan moyen dans les directions  $x_1$  et  $x_3$

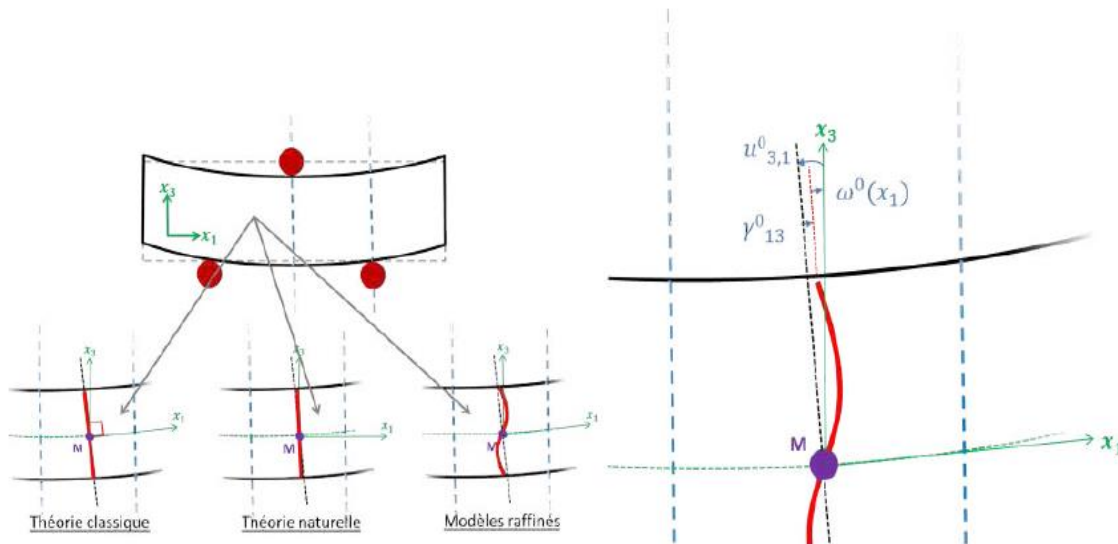
$u_{3,1}^0(x_1)$  représentent la rotation de la section autour de l'axe  $x_2$  induite par la flexion

$\gamma_{13}^0(x_1)$  représentent la deformation de cisaillement transverse par rapport a la ligne moyenne, également exprimée par:

$$\gamma_{13}^0(x_1) = (u_{3,1}^0(x_1) - \omega^0(x_1))$$

$\omega^0(x_1)$  représente la rotation totale de la section par rapport a l'axe vertical  $f(x_3)$  représentant la fonction de cisaillement transverse

On notera que ce modèle de champs de déplacement est issu de la théorie générale des coques multicouches, simplifiée par les hypothèses d'infinité des rayons de courbure et d'unité des métriques propres a la définition d'une plaque, plus la non prise en compte de la direction  $x_2$  de par la considération de poutre. On peut distinguer et classer les différentes approches de prise en compte du cisaillement transverse en trois grandes catégories, comme l'illustre la figure (IV.2) Historiquement, d'après la théorie de Kirchhoff-Love, appelée « théorie classique » des plaques multicouches, le cisaillement transverse n'est pas pris en compte [30] .L'hypothèse qui est alors faite est que les sections restent perpendiculaires et rectilignes par rapport a la ligne moyenne de la poutre. La théorie classique est la plus simple du point de vue de la résolution analytique, du fait que la fonction  $f(x_3)$  devient égale a 0, néanmoins elle néglige tous les effets lies aux contraintes de cisaillement transverse, notamment le gauchissement des sections. Pour modéliser de manière plus réaliste le comportement des structures multicouches, la « théorie naturelle » a été proposée par Meissner et Mandrin [31]



**Figure IV.2:** Représentation des catégories de théories à la prise en compte du cisaillement transverse.

Cette théorie est la première a prendre en compte le cisaillement transverse dans la résolution du champ de déplacement. On considère alors que  $f(x_3) = x_3$  , ce qui permet de prendre en compte la rotation des sections par rapport a la normale de la fibre moyenne. Cela entraine donc une modification des valeurs de déplacements longitudinaux. Néanmoins, la distribution linéaire des déplacements le long de la hauteur des sections est critiquable, du fait de l'impossibilité d'analyser l'amplitude du gauchissement des sections. Un coefficient correcteur k sur les contraintes est souvent utilise dans la loi de comportement pour accentuer la prise en compte du phénomène.

Aussi, on a vu apparaitre un grand nombre de théories, rassemblées sous l'appellation de «modèles raffinés » ou « modèles d'ordre supérieur » qui permettent une prise en compte plus significative du cisaillement transverse. Les fonctions de cisaillement permettent alors une distribution non uniforme des déplacements longitudinaux le long de la hauteur des sections. On voit alors apparaitre le phénomène de gauchissement des sections, responsable de l'augmentation des déplacements et dans certains cas de l'initiation de délaminage dans les structures composites, ayant souvent pour conséquence, par propagation, la rupture mécanique. Ces fonctions raffinées sont abordées plus en détail dans le paragraphe suivant. Une autre approche consiste a prendre en compte les phénomènes lies aux interfaces entre les plis, comme la continuité des contraintes et des déformations a travers l'épaisseur du stratifié. Ainsi, les théories « zig-zig » ont été développées pour une meilleure prise en compte des phénomènes locaux lies aux empilements de couches. [32]

Dans l'optique d'une prise en compte du cisaillement transverse la plus précise possible, de nombreux modèles ont été développés et sont encore développés aujourd'hui. Ce paragraphe détaille les principales fonctions raffinées existantes.

Il est intéressant de noter que la majorité de ces différentes fonctions de cisaillement transverse, permettant de considérer un gauchissement des sections, sont basées sur un modèle de développement polynomial, de puissances impaires, de la fonction  $f(x_3)$  de la forme suivante :

$$f(x_3) = a_1 x_3 - a_3 \cdot \left( \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{x_3^3}{h^2} \right) + a_5 \cdot \left( \frac{\pi^4}{3!} \cdot \frac{x_3^5}{h^4} \right) + \dots + (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \cdot a_n \cdot \left( \frac{\pi^{(n-1)}}{n!} \cdot \frac{x_3^3}{h^{(n-1)}} \right)$$

La construction des fonctions  $f(x_3)$  s'établit alors par le choix des coefficients  $a_n$  induits par l'ordre choisi pour le développement. De très nombreuses études sont présentes dans la littérature , on distinguera

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| 1. Kirchhoff – Love   | $f(x_3) = 0$   |
| 2. Reissner – Mindlin | $f(x_3) = x_3$   |
| 3. Reddy              | $f(x_3) = x_3 \left( 1 - \frac{4x_3^2}{3h^2} \right)$          |
| 4. Touratier          | $f(x_3) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi x_3}{h} \right)$ |
| 5. Karama             | $f(x_3) = x_3 e^{-2(x_3/h)^2}$                                 |

6. Mantari

$$f(x_3) = \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) e^{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x_3}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} x_3$$

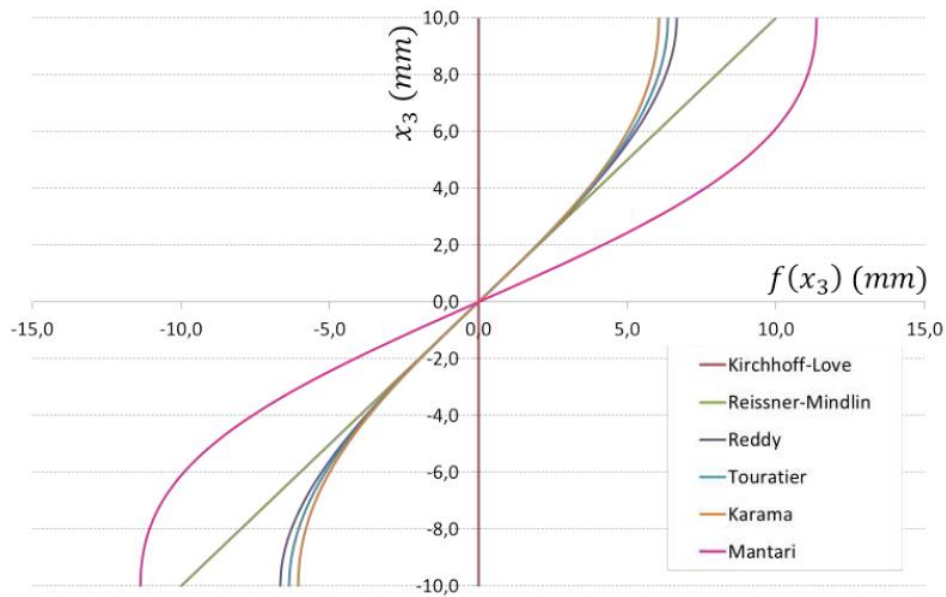


Figure IV.3: exemple des fonctions de cisaillement transverse

Dans ce chapitre on vas étudier le comportement mécanique des poutres en matériaux composite en évaluant les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  dans la section de la poutre  $(x_1, x_2)$ . Une comparaison sera effectuée entre trois matériaux (isotrope, unidirectionnels et stratifié). par la suite effet de l'épaisseur des poutres, effet de la longueur du poutre entre appuis, amplitude de chargement et l'effet du l'empilement des couches de stratifié, seront analysés.

### IV.2 Modèle géométriques:

Pour analyser les différents résultats des champs de déplacement obtenus par la modélisation numérique un essai de flexion trois points (figure IV.4). sur une poutre en composite de dimension  $(l \times H \times b)$  sera étudié (tableau IV.1). Le but est d'étudier l'effet de cisaillement transverse par l'évaluation des champs des déplacements  $U_1, U_2$  dans la section de la poutre.

La modélisation numérique par éléments finis a été réalisé a l'aide de code de calcul Abaqus en utilisant la méthode des éléments finis tridimensionnelles, le maillage est automatiquement généré a partir de la construction de domaine correspondant aux zones géométriques, dans notre modèle on a choisi un maillage carré, plus ce maillage est raffiné plus la solution que l'on obtient sera proche de la vraie solution.

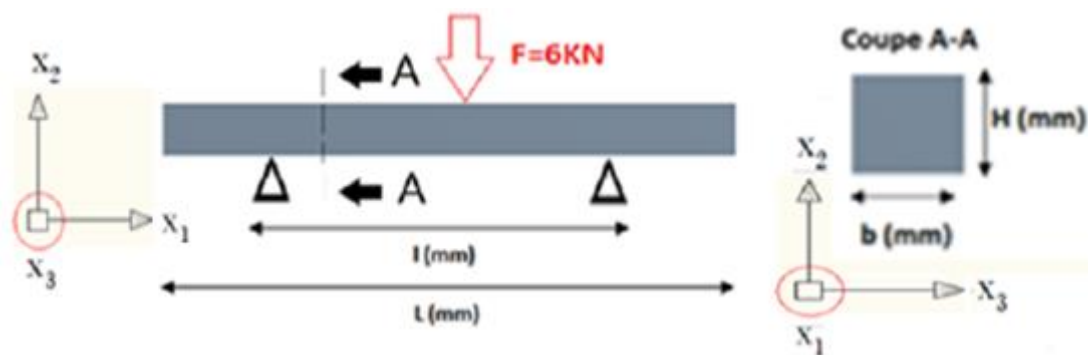


Figure IV.4 :Modèle géométrique analysé

les propriétés géométrique des poutres étudié sont présente dans le tableau IV.1:

Longueur de poutre 'L' (mm)	Distance entre appuis 'l' (mm)	Largeur 'b' (mm)	Épaisseur 'h' (mm)
100	50	30	30
100	50	30	20
100	50	30	10
100	50	30	5

Tableau IV.1: Configurations géométriques des poutres

dans ce travail on va étudier trois matériaux acier, composite unidirectionnel et stratifié, dont les propriétés mécanique sont présenté dans les tableaux suivants:

Matériaux	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$E_3$ (MPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$ (MPa)	$G_{13}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)
Acier	210000	.....	....	0.3	.....	....	.....	.....	.....
Composite unidirectionnel	144790	9652.66	9652.66	0.25	0.25	0.4065	5860.54	5860.54	3461.17

Tableau IV.2 propriétés mécaniques des matériaux

Pour le composite stratifié on a pris l'épaisseur de la couche=0.5mm alors la poutre de hauteur 30mm contient 60 plies avec différentes orientations de fibre, Les types de startifié étudié sont:

1.  $(0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ)$
2.  $(0^\circ/90^\circ)_s$
3.  $(0^\circ/90^\circ)_{30}$
4.  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_{10}$
5.  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$

pour obtenir les caractéristiques mécaniques de chaque angle on utilisé le code de calcul

(Helius composite 2017) [33] voir tableaux IV.3

	Orientation des fibres				
	0°	30°	45°	-45	90°
$E_1$ (MPa)	144790	23977.4	1.44048E+04	14404.8	9652.66
$E_2$ (MPa)	9652.66	11104.7	1.44048E+04	14404.8	144790
$E_3$ (MPa)	9652.66	9652.66	9.65266E+03	9652.66	9652.66
$\nu_{12}$	0.25	0.296195	2.28969E-01	0.228969	0.0166667
$\nu_{13}$	0.25	0.283488	3.15750E-01	0.31575	0.4065
$\nu_{23}$	0.4065	0.355531	3.15750E-01	0.31575	0.25
$G_{12}$ (MPa)	5860.54	7804.77	8.77515E+03	8775.15	5860.54
$G_{13}$ (MPa)	5860.54	4994.89	4.35206E+03	4352.06	3461.17
$G_{23}$ (MPa)	3461.17	3855.82	4.35206E+03	4352.06	5860.54

**Tableau IV.3:** propriétés mécaniques en fonction de l'orientation des fibres de matériaux graphite époxy LM de la structure modélisée.

### IV.3 Résultats et analyses :

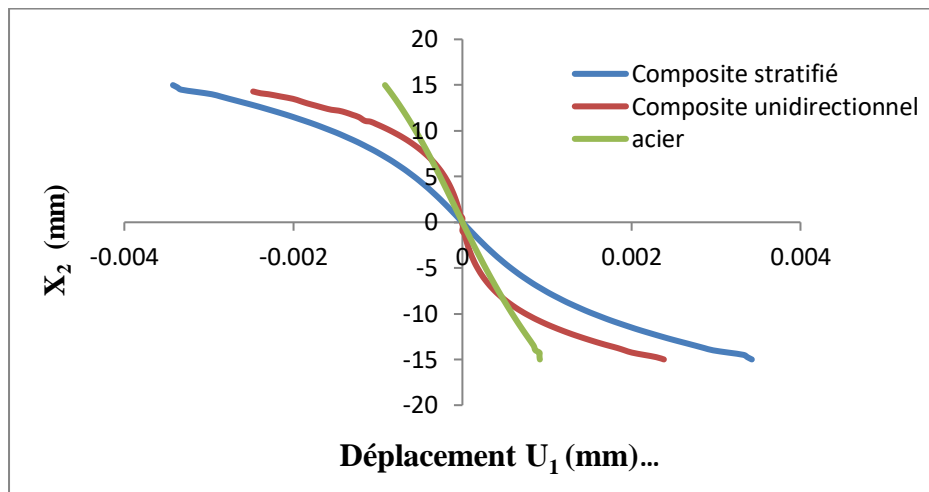
Afin de décrire le comportement mécanique des poutres- composites unidirectionnels et stratifié soumissent à la flexion trois points, une analyse numérique par la méthode des éléments finis à été effectué en utilisant le code de calcul Abaqus, en évaluant le déplacement longitudinal ( $u_1$ )dans la section de la poutre. Il est nécessaire de mettre en évidence des facteurs et des paramètres contribuent à la variation des déplacements tels que le type de composite l'épaisseur de la poutre, l'empilement de couche, la longueur et le chargement de la poutre. Les résultats obtenus sont présentés comme suit :

**IV.3.1 Influence de type de matériau :**

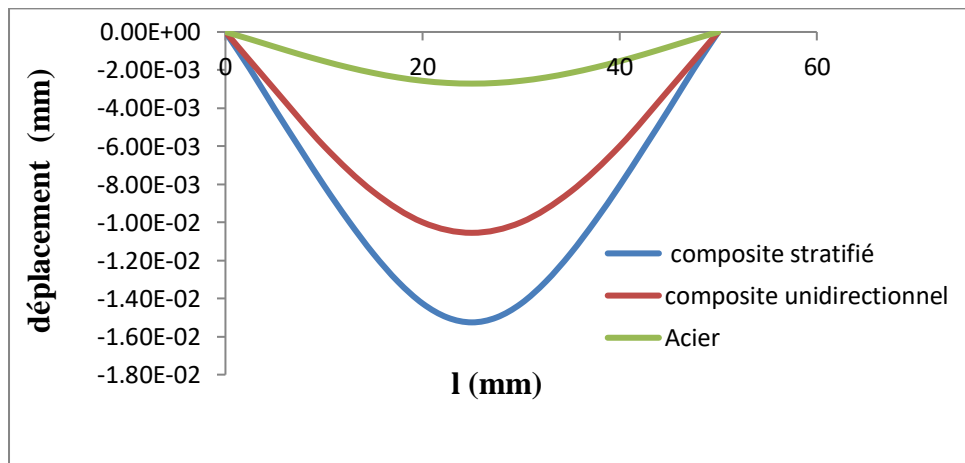
Le cisaillement transverse est un phénomène propre aux matériaux présentent des propriétés mécanique anisotropes. Un de ces effets est le gauchissement des sections induits par des contraintes de cisaillement transverse importantes. Le gauchissement des sections entraine une augmentation de l'amplitude des déplacements dans la structure et peut entrainer une rupture anticipé. Dans ce paragraphe on va étudier l'effet de cisaillement transverse sur trois matériaux :

Composite unidirectionnel stratifié et a acier (matériau isotrope) :

La figure (IV.5) présente la variation du déplacement  $u_1$  dans la section de la poutre pour différents matériaux, on remarque que la section de la poutre en acier reste rectiligne par contre pour le matériau unidirectionnel et stratifié, la distribution de déplacement longitudinal  $u_1$  n'est pas uniforme le long de la hauteur des sections (une amplitude de gauchissement) avec des valeurs un peu élevées pour le stratifié et cela due à la rigidité du matériau, plus la rigidité augmente plus les déplacements longitudinal et la flèche diminuent.



**Figure IV.5:** variation du déplacement  $u_1$  dans la section de la poutre pour différents matériaux



**Figure IV.6:** variation du déplacement  $u_2$  (la flèche) pour différents matériaux.

IV.3.2 Effet de la hauteur de la poutre:

Dans ce paragraphe, on va étudier l'influence de la hauteur de la poutre sur le déplacement longitudinal de la section de la poutre, la figure (IV.7) présente la distribution de déplacement ( $u_1$ ) pour différentes hauteurs de la poutre unidirectionnel et stratifié.

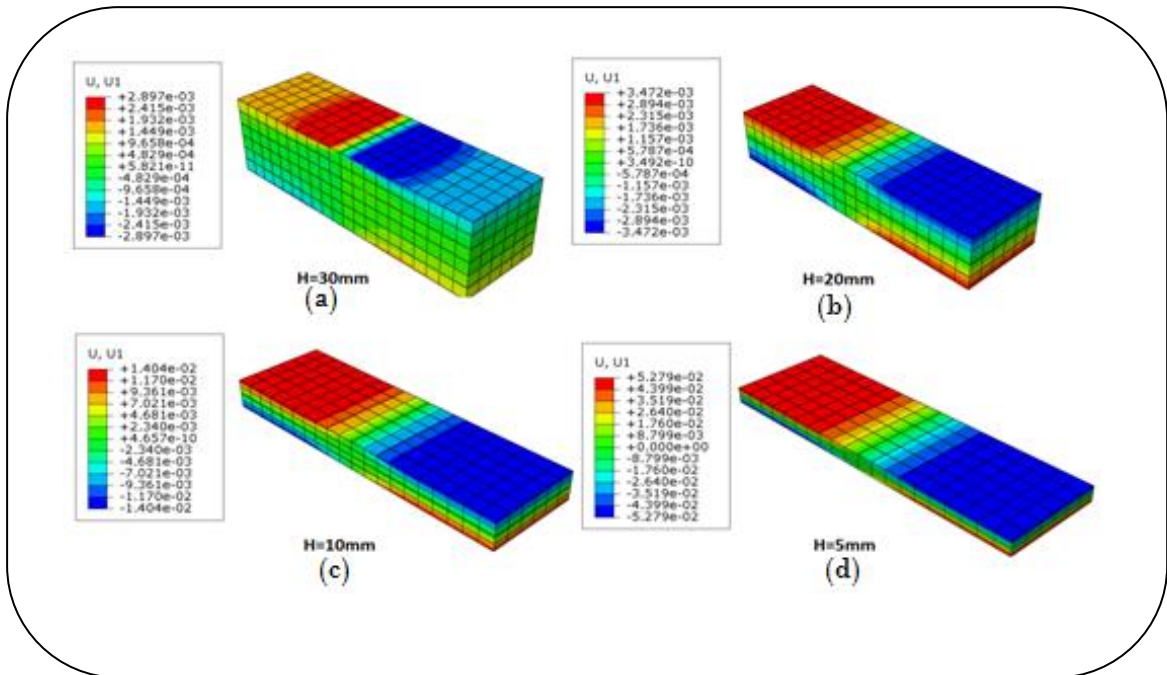
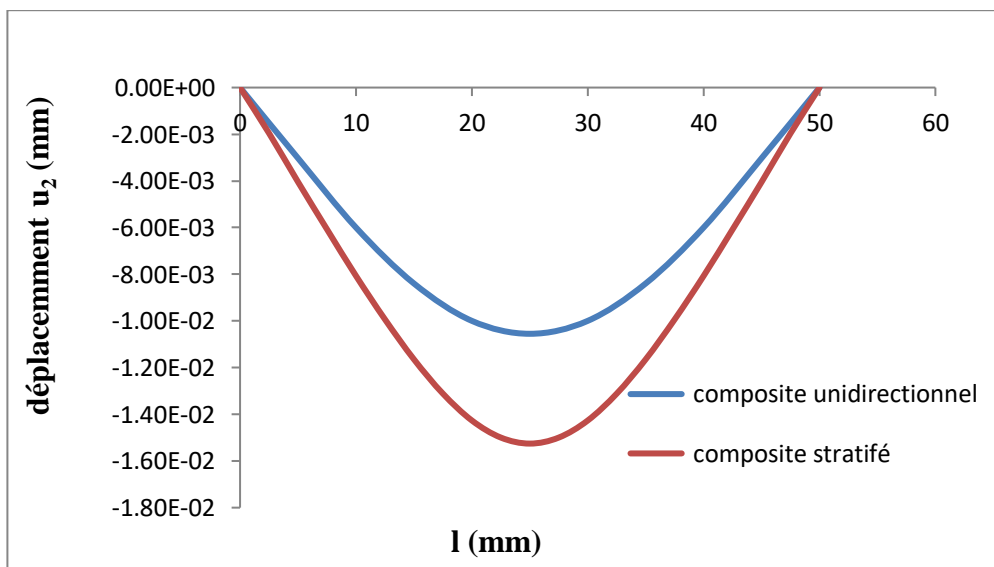
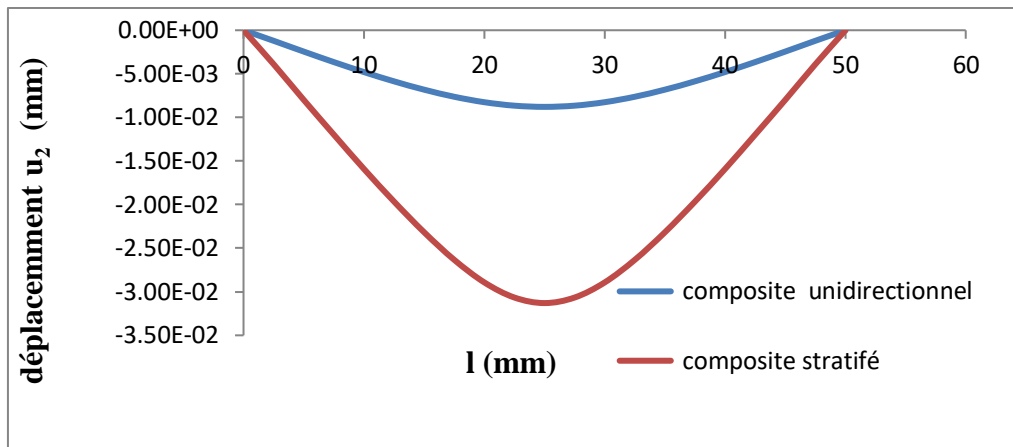


Figure IV.7: champ de déplacement ( $u_1$ ) pour différentes hauteur ( $H$ ).

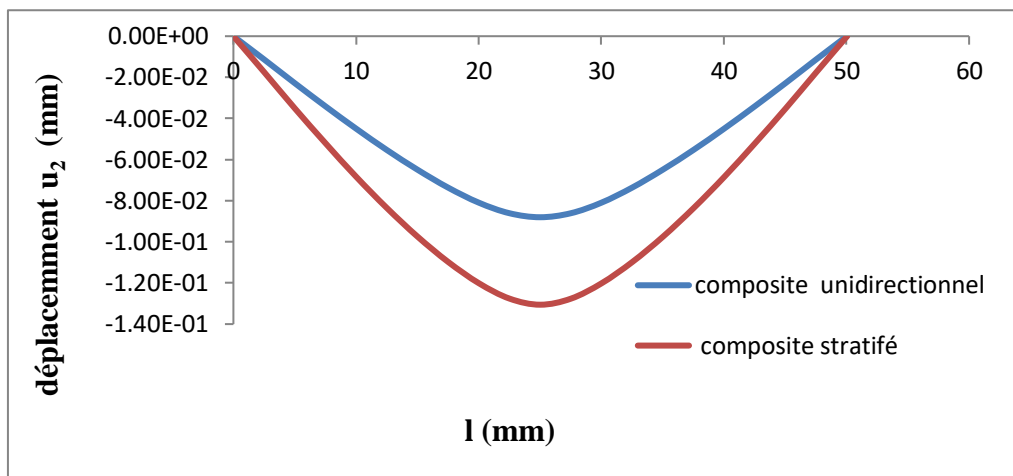
Les Figures (IV.8 a-b-c-d) présentent la variation du déplacement  $u_2$  pour différente hauteurs de la poutre. On remarque que le déplacement vertical (la flèche) de la poutre est élevé pour la poutre qui a une faible hauteur.



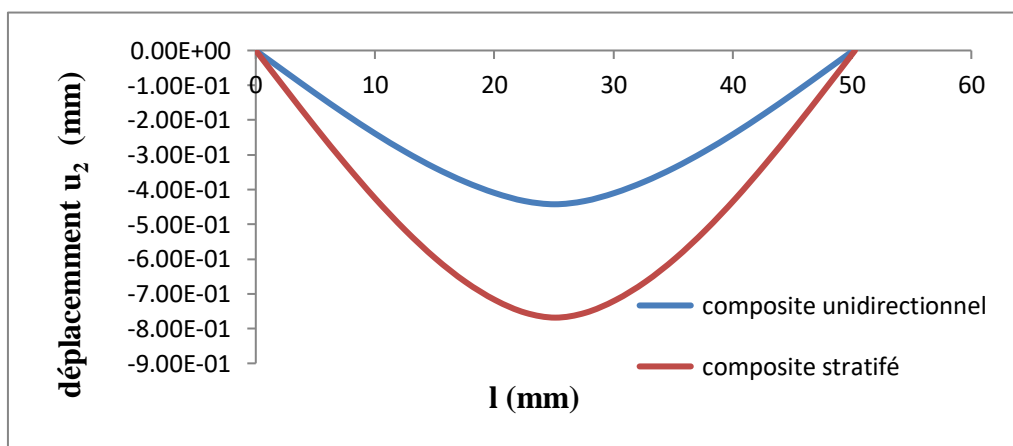
poutre (a)  $H=30\text{mm}$



poutre (b) H=20mm



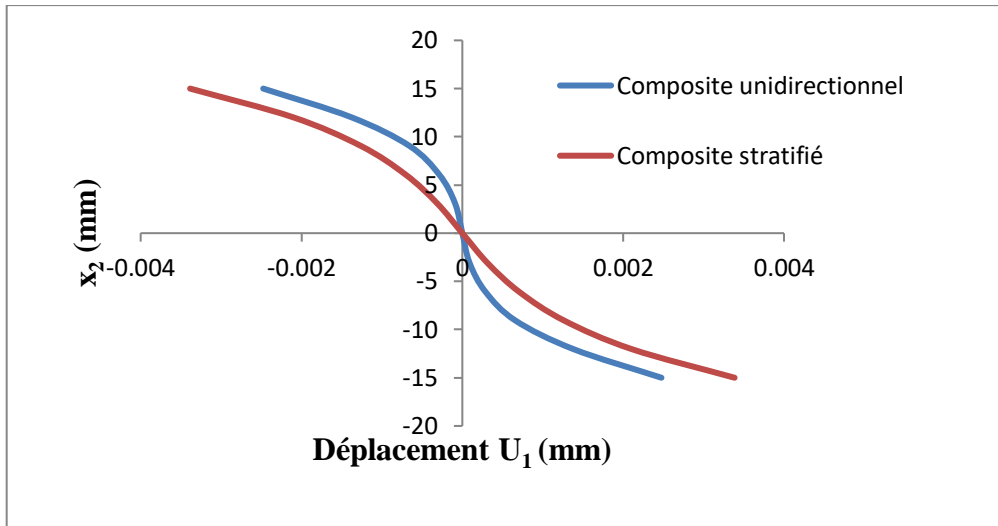
poutre (c) H=10mm



poutre (d) H=5mm

Figure IV.8: variation du déplacement  $u_2$  (la flèche) pour différentes hauteurs des poutres (a-b-c-d)

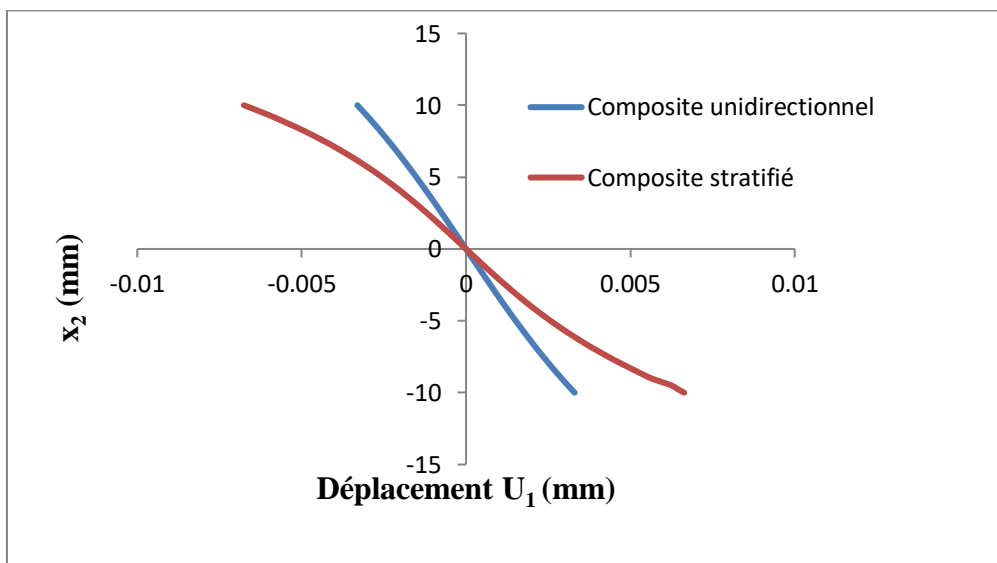
La figure ( IV.9 ) présente la variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) pour une hauteur de la poutre  $H=30\text{mm}$ . On remarque que le gauchissement de la section entraîne une amplitude du déplacement  $u_1$ , avec des valeurs maximales au niveau des fibres supérieures et inférieures de la poutre  $u_{max}(\text{Stratifié})= 0,003\text{mm}$ ,  $u_{max}(\text{unidirectionnel})=0.0025\text{mm}$



**Figure IV.9:** variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) dans la section de la poutre ( $h=30\text{mm}$ )

Pour la hauteur  $h=20\text{mm}$  (figure IV.10) , on remarque que l’amplitude du gauchissement de la section commence à diminué par rapport à la poutre de  $h=30\text{mm}$ , mais avec une augmentation du déplacement maximal :

$$u_{max} (\text{Stratifié}) = 0,064\text{mm}, u_{max}(\text{unidirectionnel}) = 0,031\text{mm}$$



**Figure IV.10:** variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) dans la section de la poutre  $h=20\text{mm}$

sur la figure ( IV.11 ) qui présent la variation du déplacement  $u_1$  sur la hauteur de la poutre de 10mm, on remarque une forte diminution de l'amplitude de gauchissement , mais avec des valeurs élevées de déplacement maximale  $u_{max}(\text{stratifié}) = 0.025\text{mm}$   $u_{max}(\text{unidirectionnel}) = 0.013\text{mm}$

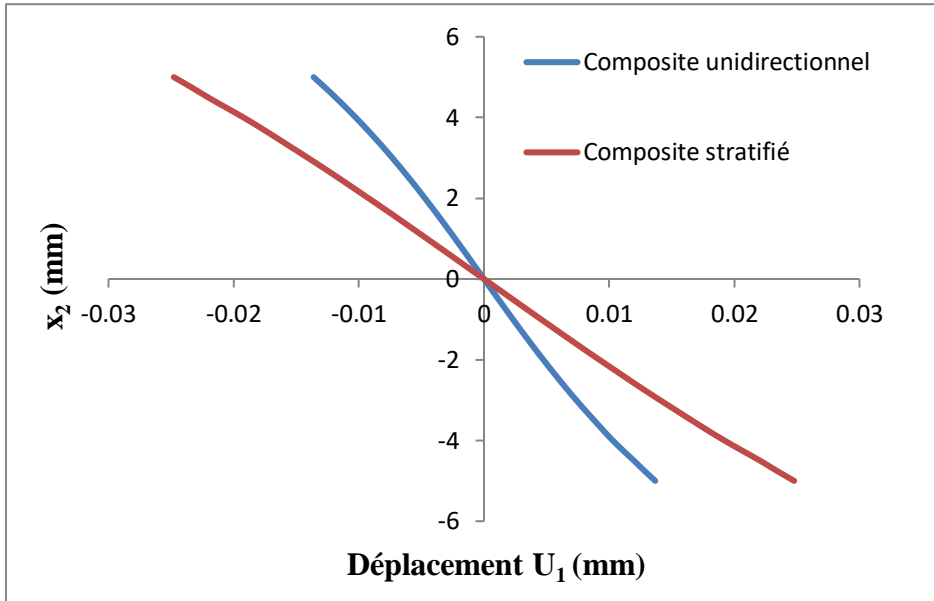


Figure IV.11: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) dans la section de la poutre  $h=10\text{mm}$

pour une poutre de  $h = 5\text{mm}$ , figure (IV.12 ), on remarque une variation rectiligne du déplacement longitudinal et cela est explique par l'absence de l'effet de cisaillement transverse dans la section de la poutre.

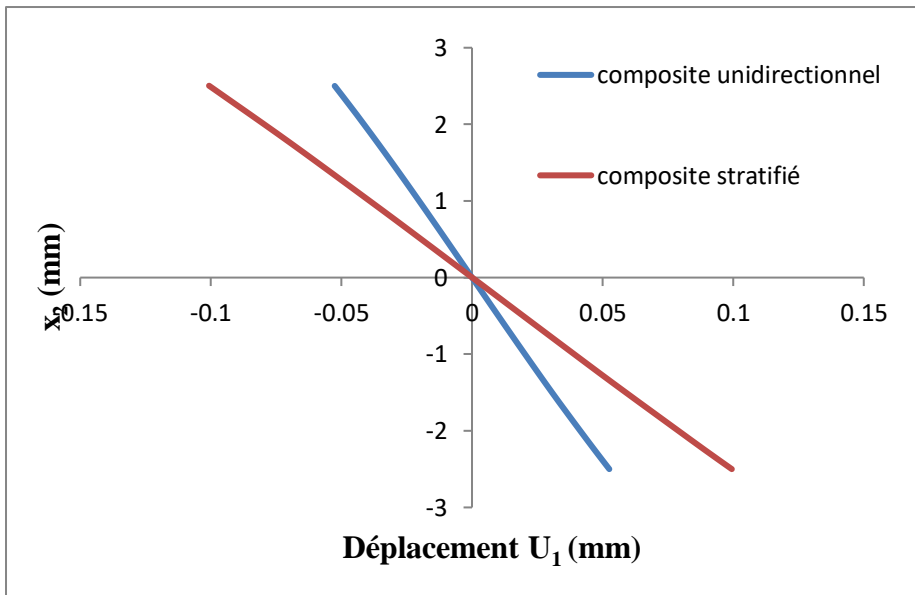


Figure IV.12: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) dans la section de la poutre  $h=5\text{mm}$

### IV.3.3 Influence de chargements :

Pour prendre en compte l'influence des variations de la charge appliquée on vas utiliser le même modèle étudié dans les paragraphes précédents avec hauteur  $H=30\text{mm}$ . Les figures (IV.13-14) présentent la variation du champs de déplacement  $u_1$  dans la section des poutres en composite unidirectionnel, et stratifié pour différentes taux de chargement 2KN ,6KN et 10 KN. Les courbes montrent que l'influence de la variation de taux de chargement est très important sur le taux de gauchissement .

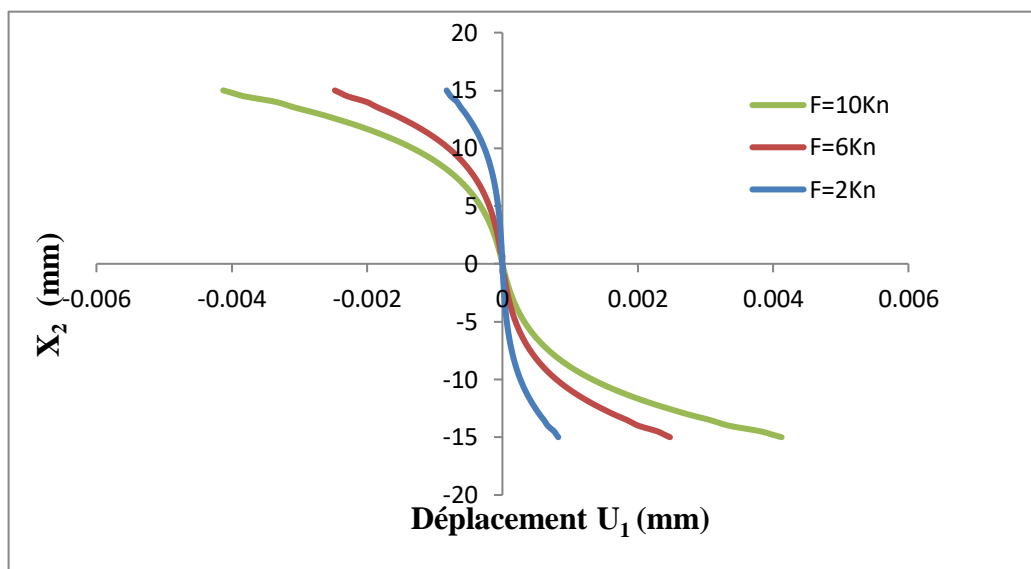


Figure IV.13: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) de composite unidirectionnel en fonction de chargement dans la section de la poutre

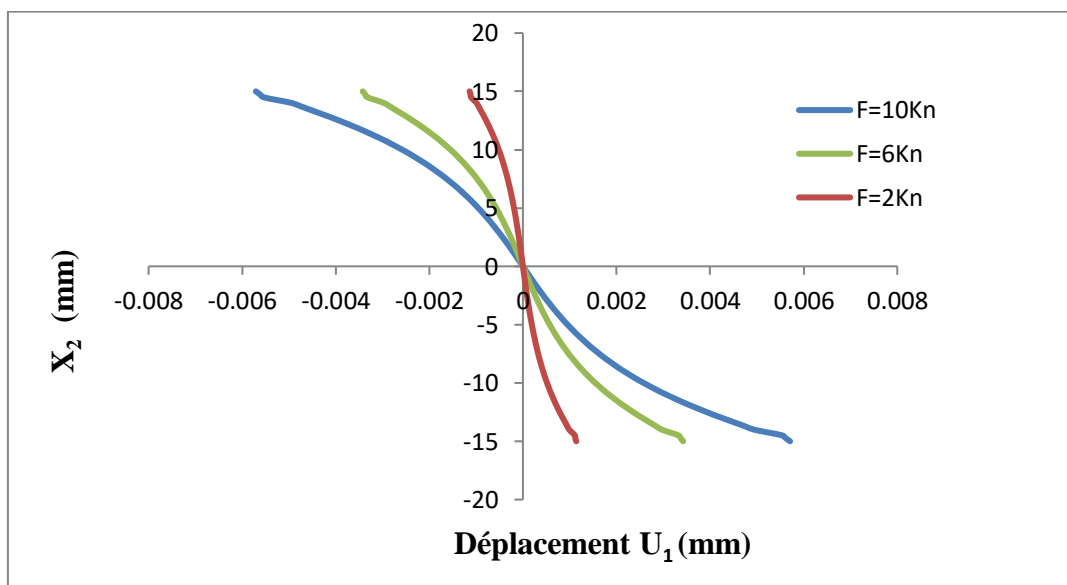


Figure IV.14: variation de déplacement longitudinal ( $u_1$ ) de composite stratifié en fonction de chargement dans la section de la poutre

IV.3.4 Influence de la longueur entre appuis :

Dans ce paragraphes on vas étudier l'influence de longueur de la poutre, la figure ( IV.15) présente la variation du déplacement  $u_1$  pour différentes longueurs entre appuis de la poutre de hauteur  $h=30mm$ . Pour longueur  $l=50mm$  ,on remarque que le gauchissement de la section entraine une amplitude du déplacement  $u_1$  maximales au niveau des fibres supérieur et, inferieurs de la poutre  $u_{max}=0,0035mm$  , lorsqu'on augmente la longueur de la poutre on remarque que l'amplitude du gauchissement de la section commence à diminué avec une augmentation du déplacement maximal. Pour la longueur  $l=100mm$   $u_{max}=0,006mm$  ,et pour  $l=150mm$   $u_{max}=0,0014mm$ .

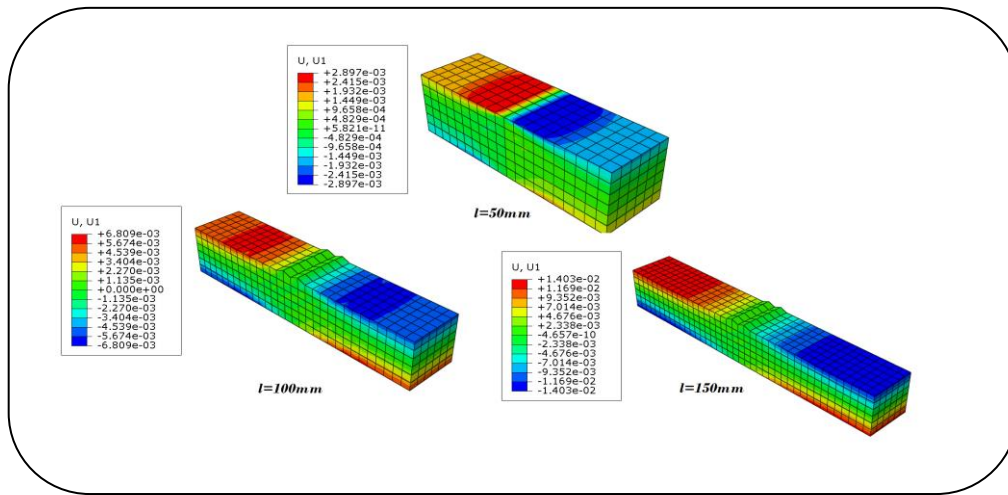


Figure IV.15: champ de déplacement pour différentes longueurs entre appuis (l)

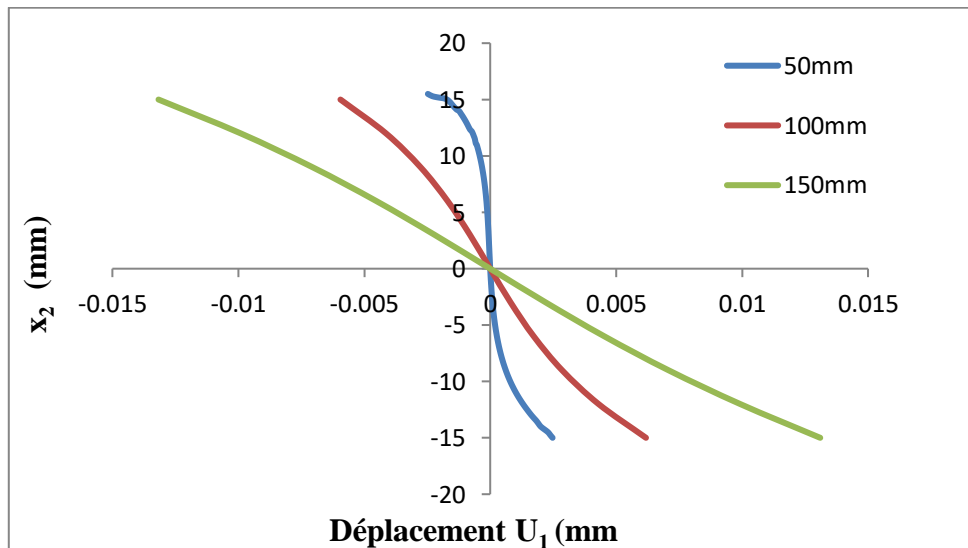


Figure IV.16: variation de déplacement  $u_1$  dans la section de la poutre pour différentes longueur entre appuis

IV.3.5 Influence de l'empilement de couche :

Dans ce paragraphe, on va étudier l'influence de l'empilement des couches de la poutre stratifié de hauteur  $H=30\text{mm}$  et de longueur  $l=50\text{mm}$  sur le champs de déplacement, on utilise les mêmes propriétés du composite présentes dans le tableau (IV.3) ,cinq configuration de séquences d'empilement sont pris en compte dans ce paragraphe :

$(0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ)$  ,  $(0^\circ/90^\circ)_s$  ,  $(0^\circ/90^\circ)_{30}$  ,  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_{10}$  ,  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$

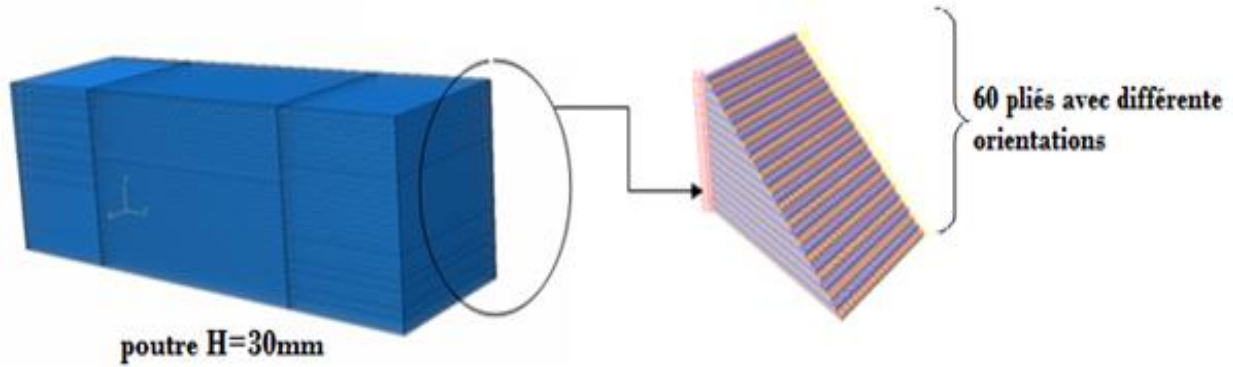


Figure IV.17: les pliés du stratifié avec différentes orientations des fibres

la figure ( IV.18 ) présente la variation du champs de déplacement ( $u_1$ ) pour deux types de stratifié  $(0/90)_s$  et  $(0/90)_{30}$  , les courbes montrent que le taux de gauchissement n'es pas significatif pour ces deux a types de stratifiés, on peut voir même remarque entre les stratifiés  $(0/45/90)_s$  et  $(0/45/90)_{20}$  (figure IV.19), mais si on compare les cinq configurations de séquences d'empilement (figure IV.20), on remarque que le taux de gauchissement est plus important dans les configurations $(0/90)$  mais avec des faibles déplacements ( $u_1$ ) (figure IV.21) , Alors on peut dire que l'effet de cisaillement transverse diminue lorsque on ajoute des pliés avec orientation de fibre  $45^\circ$

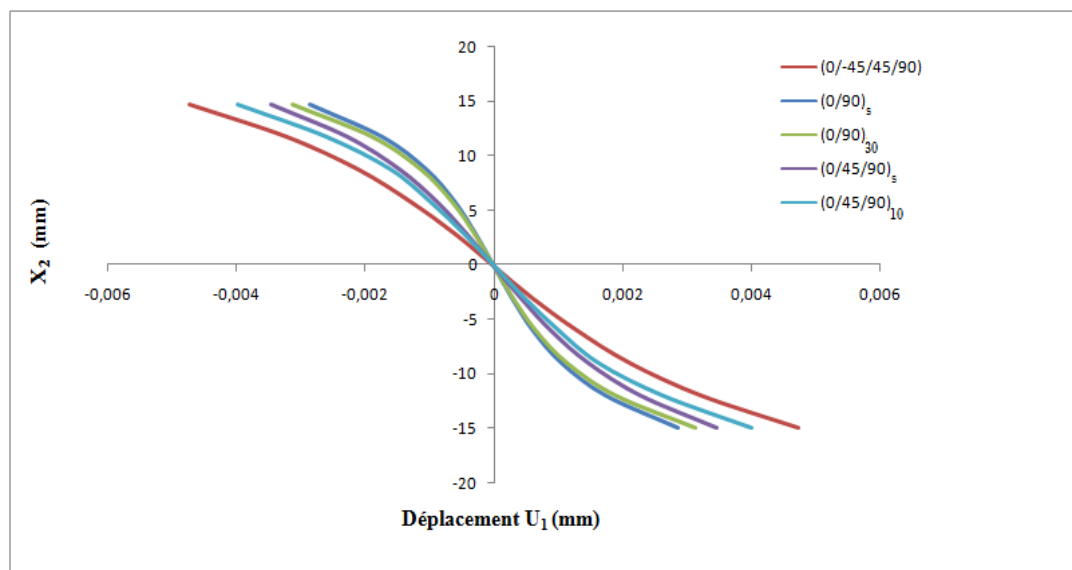
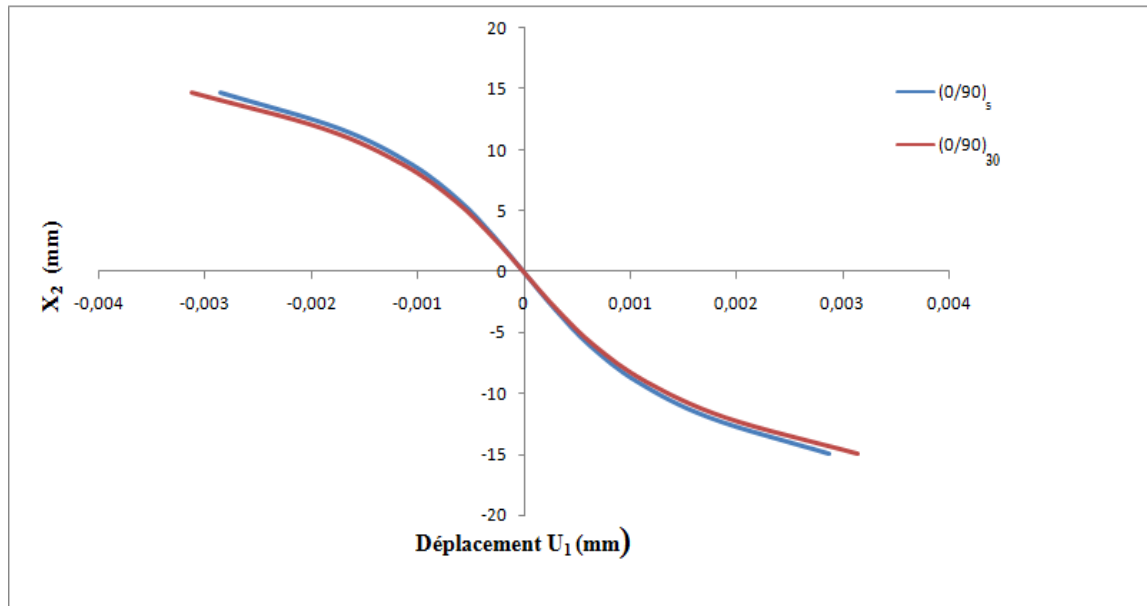
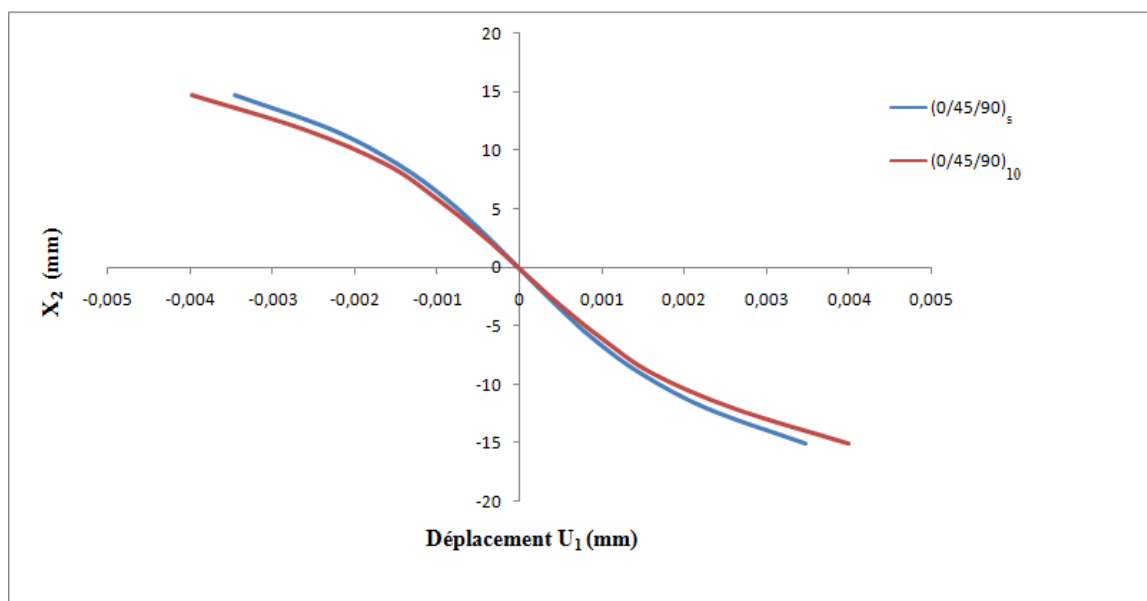


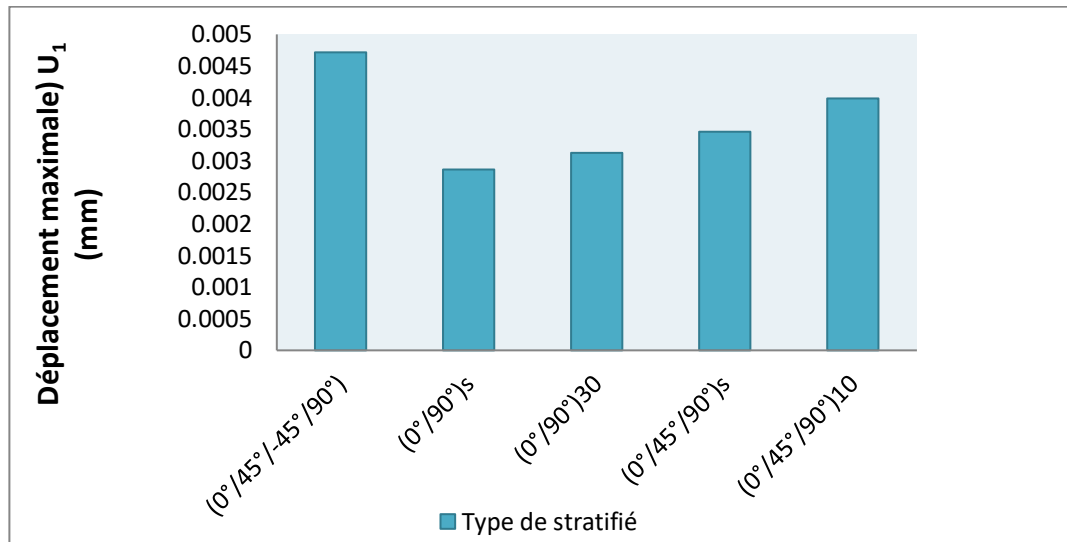
Figure IV.18: variation du déplacement  $u_1$  dans la section de la poutre stratifié pour différentes types de stratifié



**Figure IV.19:** variation du déplacement  $u_1$  dans la section de la poutre  $h=30\text{mm}$  pour deux types de stratifiés  $(0^\circ/90^\circ)_s$  et  $(0^\circ/90^\circ)_{30}$



**Figure IV.20:** variation du déplacement  $u_1$  dans la section de la poutre  $h=30\text{mm}$  pour deux types de stratifiés  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$  et  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_{10}$



**Figure IV.21:** Histogramme montre le déplacement maximale  $u_1$  dans la section de la poutre  $h=30\text{mm}$  pour différents types stratifiés

#### IV.4 Conclusion:

Les résultats obtenus nous a permettent de déduire que :

- Le gauchissement des sections entraine une augmentation de l'amplitude de déplacement induits par des contraintes de cisaillement transverse , ce phénomène est propre aux matériaux composite (Anisotrope) .
- l'analyses des champs de déplacement dans la section de la poutre montre que:
  - ❖ les poutres épaisses et courtes sont très sensible au gauchissement qui est déterminé par le rapport ( $h/l$ ) entre la hauteur ( $h$ ) et la longueur ( $l$ ) .
- Le taux de gauchissement est très important pour des charges élevées .
- La séquence d'empilement de couche est un paramètre important sur l'effet de cisaillement transverses. Pour diminuer le gauchissement des sections, on favorise d'utilisé un composite qui contient des plis de différentes orientations de fibres .

# Conclusion générale

---

## Conclusion générale :

Le matériau composite est très utilisé ces dernières années dans plusieurs domaines à savoir génie civil. Le cisaillement transverse est un phénomène propre aux matériaux présentant des propriétés mécaniques anisotropes. Ainsi, plus l'anisotropie est élevée, plus les effets du cisaillement transverse sont importants. Ce phénomène est provoqué lors de fortes sollicitations engendrant des contraintes de cisaillement prépondérantes dans la structure.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'effet de cisaillement transverse sur le comportement mécanique des poutres en composite.

Pour cela nous avons étudiés au premier lieu généralités sur les matériaux composites et leurs propriétés physiques et mécaniques puis les théories du comportement mécanique des matériaux composites (unidirectionnel et stratifié) et les différents mécanismes de rupture et d'endommagement des matériaux composites, ensuite une étude du comportement des poutres soumises à la flexion trois points a été présentée en prenant en compte l'effet de cisaillement transverse.

L'analyse numérique de l'effet de cisaillement sur le comportement des matériaux composites a été effectuée en évaluant les champs de déplacements dans la section de la poutre et montre le gauchissement des sections, cette analyse a été effectuée par la méthode des éléments finis tridimensionnels en utilisant le code de calcul "Abaqus", à partir de cette étude on peut conclure:

- Le gauchissement des sections entraîne une augmentation de l'amplitude de déplacement induits par des contraintes de cisaillement transverse, ce phénomène est propre aux matériaux composites (Anisotrope).
- L'analyse des champs de déplacement dans la section de la poutre montre que:
  - ❖ les poutres épaisses et courtes sont très sensibles au gauchissement qui est déterminé par le rapport  $(h/l)$  entre la hauteur  $(h)$  et la longueur  $(l)$ .
- Le taux de gauchissement est très important pour des charges élevées.

La séquence d'empilement de couche est un paramètre important sur l'effet de cisaillement transverse. Pour diminuer le gauchissement des sections, on favorise d'utiliser un composite qui contient des plis de différentes orientations de fibres.

# Références

---

- [1] Astm-D5379-05 (2005). Standard Test Method For Shear Properties Of Composite Materials By The V-Notched Beam Method.
- [2] Babin, P., Della Valle, G., Dendievel, R., Lourdin, D. Et Salvo, L. (2007). Xray Tomography Study Of The Cellular Structure Of Extruded Starches And Its Relations With Expansion Phenomenon And Foam Mechanical Properties. Carbohydrate Polymers,
- [3] Shankar Prasad Shukla , " Investigation In To Tribo Potential Of Rice Husk (Rh) Char Reinforced Epoxy Composite ", These Doctoral ,National Institute Of Technology, Rourkela ,2011.
- [4] Delannoy (Marc) & Demarle (Benoit) , " L'utilisation Du Carbone Et Des Composites Dans La Realisation De Chassis De Voitures De Course", Ecole Des Mines De Douai 2009
- [5] Narayanan S., Schadler L.S., " Mechanisms Of Kink-Band Formation In Graphite/Epoxy Composites : A Micromechanical Experimental Study ", Composite Materials And Technology, Vol. 59, (1999), Pp. 2201-2213.
- [6] Karkanis P.I., Partridge I.K., Attwood D.," Modeling The Cure Of A Commercial Epoxy Resin For Applications In Resin Transfer Moulding ", Polymer International, Vol. 41, (1996), Pp. 183-191.
- [7] Potter K., "Beyond The Pin Jointed Net : Maximising The Deformability Of Aligned Continuous Fibre Reinforcements ", Composites Part A Applied Science And Manufacturing, Vol. 33, (2002), Pp. 677-683.
- [8] Wang J., Page J.R., Patod R., "Experimental Investigation Of The Draping Properties Of Reinforcement Fabrics ", Composites Science And Technology, Vol. 58, (1998), Pp. 229-231.
- [9] Escola M.A., Moina C.A., Nino Gomez A.C., Ybarra G.O., " The Determination Of The Degree Of Cure In Epoxy Paints By Infrared Spectroscopy ", Polymer Testing, Vol. 24, (2005), Pp. 572-575.
- [10] Gharbi Abderrezak , " Analyse Des Fissurations Des Materiaux Composites Et Determination De Leur Delamination Utilisant Des Capteurs Piezo-Electriques ", These De Magister .Universite Mentouri- Constantine 2005.
- [11] J.L. Billoët, 'Introduction Aux Materiaux Composites A Hautes Performances', Edition Broche, 1993.
- [12] J.Weiss, C. Bord , "Les Materiaux Composites, Tome I: Structure, Constituants, Fabrication", Ed. L'usine Nouvelle, Paris, 1983, Partie: A-B-C.
- [13] Kim, J.K. & Mai, Y.W. , "Engineered Interfaces In Fiber Reinforced Composites.", Pays-Bas: Elsevier Science Ltd., 1998.
- [14] . M.K. Antoon, J.L. Koenig, "Fourier-Transform Infrared Study Of The Reversible Interaction Of Water And A Crosslinked Epoxy Matrix J.Polym. Sci", 1981
- [15] . F. Bondioli, V. Cannilo, E. Fabbri Et M. Messori, "Epoxy-Silica Nanocomposites, Preparation, Experimental Characterisation, And Modeling J.Polym.Sci", 2005.
- [16] F. Gerdinand, M. Budde, M. Kurrat, "Electrical And Mechanical Strength Of Mineral Filled Epoxy Insulators In Correlation To Power Loss Factor Proc", France 2004.
- [17] H. Janssen, J.M. Seifert, H.C. Karner, " Interfacial Phenomenal In Composite High Voltage Insulation", 1999.

# Références

---

- [18] -Barbara Heman," Contribution A L'étude Des Interphases Et De Leur Comportement Au Vieillessement Hygrothermique Dans Les Systemes A Matrice Thermodurcissable Renforces De Fibres De Verre", These De Doctorat, L'universite Du Sud Toulon-Var 2008.
- [19] Haddadi Manel ,"Etude Numerique Avec Comparaison Experimentale Des Proprietes Thermophysiques Des Materiaux Composites A Matrice Polymere", L'universite De Batna, 2011.
- [20] S. Bensaïd, "Contribution A La Caracterisation Et A La Modelisation Electromagnetique Et Thermique Des Materiaux Composites Anisotropes",L'universite De Nantes, 2006.
- [21] Menail 2009. Analyse De L'effet Du Vieillessement A L'air, Dans L'eau Douce Et Dans L'eau Salee, Sur La Tenue En Fatigue De Composites A Matrice Organique, Renforcee Par Des Fibres De Verre, These De Doctorat Ubmanaba Menail Younes 2009.
- [22] Ait Atmane 2011. Vibration Des Structures Composites En Tenant Compte De L'effet Du Cisaillement These De Doctorat Udl Ait Atmane 2011.
- [23] C. Bathias Et Coll., "Materiaux Composites ", L'usine Nouvelle, Dunod, 2005.
- [24] Houideg Abdellah « Transfert De Charge Et Frottement Fibre/ Matrice D'un Materiau Composite (T300/914) » These En Vue D'obtention Du Diplome De Magistere (2012/2011)
- [25] Berthelot, J. M. « Materiaux Composites Comportement Mecanique Et Analyse Des Structures». Paris, Masson, 1992, 615 P.
- [26] J.Courbon, J.Theillout, « Resistance Des Materiaux », Techniques De L'ingenieur, Traite Construction, C 2 060.
- [27] J.M.Berthelot, Materiaux Composites « Comportement Mecanique Et Analyse Des Structures », Tec & Doc, Paris, 2005.
- [28] D.Gay, «Materiaux Composites», Hermes Science, Paris, 2005.
- [29] A.K. Kaw, «Mechanics Of Composite Materials» Taylor & Francis Ltd, London, 2006.
- [30] Kirchhoff, G. (1850). Uber Das Gleichgewicht Und Die Bewegung Einer Elastischen Schreitbe. *Reine Angew Math*, 40:51–58.
- [31] Reissner, E. (1945). Reflection On The Theory Of Elastic Plates. *Journal Of Applied Mechanics*, 38:1453–1464. [32] Chaudhuri, R. A. (2008). A Nonlinear Zigzag Theory For Finite Element Analysis Of Highly Shear-Deformable Laminated Anisotropic Shells. *Composite Structures*, 85(4):350–359.
- [32] Chaudhuri, R. A. (2008). A nonlinear zigzag theory for finite element analysis of highly shear-deformable laminated anisotropic shells. *Composite Structures*, 85(4):350–359.
- [33] <https://www.autodesk.com/products/helius-composite/free-trial>