

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الدكتور الطاهر مولاي سعيدة

Université Saida Dr Tahar Moulay –

Faculté de Sciences et Technologie



## MEMOIRE

Mémoire de fin d'études présenté pour l'obtention du Diplôme de MASTER

En : Automatique

Spécialité : Automatique et Systèmes

Par : Bouarfa Youcef Kheir Eddine et Touahri Boutaiba

Sujet :

**Modélisation et contrôle linéaire d'un quadri - rotor**

Soutenue publiquement en **24/09/2026** devant le jury composé de :

|                          |     |             |            |
|--------------------------|-----|-------------|------------|
| LABANE Chrif             | MCB | Univ. Saida | Président  |
| BOUROUNA Abdelkader      | MCB | Univ. Saida | Rapporteur |
| BENMAHJOUB Mohamed Amine | MCA | Univ. Saida | Examineur  |

Année universitaire 2025/2026

## SOMMAIRE

|                                                                                        |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduction générale.....</b>                                                      | <b>1</b> |
| <b>Chapitre I : Généralités sur les drones</b>                                         |          |
| • I. Introduction.....                                                                 | 3        |
| • I.1 Définition d'un drone.....                                                       | 3        |
| ◦ I.1.1 Historique.....                                                                | 3        |
| • I.2 Les différents types de drones.....                                              | 3        |
| ◦ I.2.1 Le drone militaire .....                                                       | 3        |
| ◦ I.2.2 Le drone civil .....                                                           | 4        |
| ◦ I.2.3 Le drone ambulancier.....                                                      | 4        |
| • I.3 Classification des drones .....                                                  | 4        |
| ◦ I.3.1 Classification selon l'altitude .....                                          | 4        |
| ◦ I.3.2 Classification selon la taille .....                                           | 5        |
| ◦ I.3.3 Classification selon le mode de propulsion .....                               | 6        |
| • I.4 Drone quadrirotor .....                                                          | 9        |
| ◦ I.4.1 Historique .....                                                               | 9        |
| ◦ I.4.2 Description détaillée .....                                                    | 10       |
| • I.5 Avantages des drones quadrirotor .....                                           | 10       |
| • I.6 Applications .....                                                               | 11       |
| • I.7 Conclusion .....                                                                 | 11       |
| <b>Chapitre II : Modélisation du quadrirotor</b>                                       |          |
| • II.1 Introduction .....                                                              | 12       |
| • II.2 Les possibilités de vol du quadrirotor .....                                    | 12       |
| ◦ II.2.1 Gaz (mouvement vertical) .....                                                | 12       |
| ◦ II.2.2 Lacet .....                                                                   | 12       |
| ◦ II.2.3 Roulis .....                                                                  | 13       |
| ◦ II.2.4 Tangage .....                                                                 | 13       |
| • II.3 Repérage du quadrirotor dans l'espace .....                                     | 13       |
| ◦ II.3.1 Repères utilisés .....                                                        | 13       |
| ◦ II.3.2 Matrices de rotation .....                                                    | 14       |
| • II.4 Modèle dynamique du quadrirotor .....                                           | 16       |
| ◦ II.4.1 La dynamique de translation .....                                             | 16       |
| ◦ II.4.2 La dynamique de rotation .....                                                | 18       |
| ◦ II.4.3 La relation entre les angles d'Euler et les vitesses angulaires.....          | 19       |
| ◦ II.4.4 La dynamique des rotors .....                                                 | 20       |
| ◦ II.4.5 Modèle d'état du quadrirotor .....                                            | 21       |
| ◦ II.4.6 Liaisons non holonomes .....                                                  | 23       |
| • II.5 Étude de la stabilité du système d'état complet par la méthode de Lyapunov .... | 24       |
| ◦ II.5.1 Rappel sur la méthode directe de Lyapunov .....                               | 24       |
| ◦ II.5.2 Décomposition du système d'état .....                                         | 24       |
| ◦ II.5.3 Stabilité du sous-système de roulis .....                                     | 24       |
| ◦ II.5.4 Stabilité du sous-système de tangage .....                                    | 25       |
| ◦ II.5.5 Stabilité du sous-système de lacet .....                                      | 25       |
| ◦ II.5.6 Stabilité de l'altitude et de la position horizontale .....                   | 25       |
| ◦ II.5.7 Stabilité du système d'état complet .....                                     | 26       |
| • II.6 Conclusion .....                                                                | 26       |
| <b>Chapitre III : La commande PID d'un quadrirotor</b>                                 |          |

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| • III.1 Introduction .....                                                     | 27 |
| • III.2 Principes généraux                                                     | 27 |
| ○ III.2.1 Principe de fonctionnement du correcteur PID .....                   | 27 |
| ○ III.2.2 Architecture de commande en cascade (boucles interne et externe).... | 28 |
| ○ III.2.3 La commande PID classique .....                                      | 28 |
| • III.3 Synthèse des lois de commande PID .....                                | 29 |
| ○ III.3.1 Contrôle de l'altitude (Z) .....                                     | 29 |
| ○ III.3.2 Contrôle du roulis ( $\varphi$ ) .....                               | 30 |
| ○ III.3.3 Contrôle du tangage ( $\theta$ ) .....                               | 30 |
| ○ III.3.4 Contrôle du lacet ( $\psi$ ) .....                                   | 30 |
| ○ III.3.5 Formulation vectorielle et matricielle de la commande .....          | 30 |
| • III.4 Résultats de simulation .....                                          | 31 |
| ○ III.4.1 Référence échelon 3D .....                                           | 31 |
| ○ III.4.2 Trajectoire hélicoïdale 3D .....                                     | 38 |
| ○ III.4.3 Interprétation des résultats .....                                   | 42 |
| • III.5 Conclusion .....                                                       | 44 |

## Chapitre IV : La commande LQR d'un quadrirotor

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| • IV.1 Introduction .....                                         | 45 |
| • IV.2 Fondements de la commande LQR.....                         | 45 |
| • IV.3 Résolution du problème LQR .....                           | 49 |
| • IV.4 Détermination de la commande optimale .....                | 49 |
| ○ IV.4.1 Loi de commande LQR .....                                | 49 |
| ○ IV.4.2 Équation algébrique de Riccati .....                     | 50 |
| ○ IV.4.3 Calcul du gain optimal .....                             | 50 |
| ○ IV.4.4 Condition de stabilité .....                             | 50 |
| ○ IV.4.5 Propriétés de la commande LQR .....                      | 51 |
| ○ IV.4.6 Procédure générale de recherche .....                    | 51 |
| ○ IV.4.7 Application au quadrirotor .....                         | 51 |
| • IV.5 Résultats de simulation .....                              | 52 |
| ○ IV.5.1 Référence échelon 3D .....                               | 52 |
| ▪ IV.5.1.1 Calcul des matrices de synthèse (Q, R, P, gain K)..... | 53 |
| ▪ IV.5.1.2 Simulation .....                                       | 55 |
| ▪ IV.5.1.3 Interprétation des résultats .....                     | 58 |
| ○ IV.5.2 Référence hélicoïdale 3D .....                           | 60 |
| ▪ IV.5.2.1 Calcul des matrices de synthèse (Q, R, P, gain K)..... | 60 |
| ▪ IV.5.2.2 Simulation .....                                       | 62 |
| ▪ IV.5.2.3 Interprétation des résultats .....                     | 65 |
| • IV.6 Comparaison entre la commande PID et la commande LQR ..... | 66 |
| ○ IV.6.1 Référence de type échelon 3D .....                       | 66 |
| ▪ IV.6.1.1 Interprétation des figures .....                       | 69 |
| ○ IV.6.2 Référence de type hélicoïdale 3D .....                   | 70 |
| ▪ IV.6.2.1 Interprétation des figures .....                       | 73 |
| • IV.7 Conclusion .....                                           | 75 |

|                           |    |
|---------------------------|----|
| Conclusion générale ..... | 76 |
|---------------------------|----|

|                     |    |
|---------------------|----|
| Bibliographie ..... | 83 |
|---------------------|----|

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| Annexe : Paramètres de Quadri-rotor ..... | 85 |
|-------------------------------------------|----|

### Introduction générale

Au cours des deux dernières décennies, les véhicules aériens sans pilote (UAV, *Unmanned Aerial Vehicles*), communément appelés drones, ont connu un essor technologique remarquable. Initialement réservés à des applications militaires, ces systèmes se sont progressivement imposés dans de nombreux domaines civils : surveillance environnementale, cartographie aérienne, agriculture de précision, inspection d'infrastructures, logistique et gestion des situations d'urgence. Cette diversification des usages résulte des progrès conjugués de la microélectronique, des systèmes embarqués, de l'automatique et de l'intelligence artificielle.

Parmi les différentes architectures de drones, le quadrirotor occupe une place particulière en raison de sa conception mécanique simple, de sa capacité de décollage et d'atterrissage verticaux (VTOL, *Vertical Take-Off and Landing*) et de ses bonnes performances en vol stationnaire. Composé de quatre rotors disposés en croix, il assure sa mobilité tridimensionnelle par la seule modulation des vitesses de rotation de ses moteurs électriques, sans surfaces mobiles complexes. Ces qualités en font une plateforme d'essai privilégiée pour la recherche en automatique et en commande des systèmes non linéaires.

Cependant, le quadrirotor est un système dynamique non linéaire, multivariable et sous-actionné : il possède six degrés de liberté, trois en translation et trois en rotation, mais seulement quatre entrées de commande indépendantes. Ce sous-actionnement, combiné au fort couplage entre les variables d'attitude et de position et aux effets gyroscopiques, rend la synthèse d'une loi de commande performante particulièrement délicate. La stabilité du système doit d'abord être établie, puis une stratégie de commande adaptée doit permettre la stabilisation et le suivi de trajectoires, parfois complexes, en présence de perturbations.

Parmi les stratégies existantes, la commande PID en cascade demeure la plus répandue grâce à sa simplicité de mise en œuvre : une boucle interne rapide assure le contrôle de l'attitude, tandis qu'une boucle externe plus lente génère les consignes d'attitude à partir de l'erreur de position. Toutefois, son réglage est le plus souvent empirique et elle repose sur un modèle linéarisé, ce qui limite ses performances lorsque les couplages deviennent importants. La commande optimale offre une alternative rigoureuse : le régulateur linéaire quadratique (LQR, *Linear Quadratic Regulator*) traite simultanément l'ensemble des variables d'état et détermine le gain de retour d'état en minimisant un critère quadratique, qui traduit un compromis entre la précision de poursuite et l'effort de commande.

Dans ce contexte, la problématique de ce travail peut se formuler ainsi : dans quelle mesure une commande optimale de type LQR permet-elle d'améliorer la stabilisation et le suivi de trajectoire d'un quadrirotor par rapport à une commande PID en cascade réglée de manière empirique ?

Pour y répondre, ce mémoire a pour objectif la modélisation, la commande et la comparaison de deux stratégies, PID et LQR, appliquées à un quadrirotor. Plus précisément, il vise à :

- établir un modèle dynamique du quadrirotor, sous forme d'état à douze variables, en tenant compte des forces de poussée, des couples de réaction et des effets gyroscopiques ;
- étudier la stabilité du système par la méthode directe de Lyapunov et le théorème de LaSalle ;
- synthétiser une commande PID en cascade pour le contrôle, de l'attitude et de la position ;
- concevoir un régulateur LQR à partir du modèle linéarisé autour du vol stationnaire, en choisissant les matrices de pondération Q et R selon la méthode

de Bryson, puis en résolvant l'équation algébrique de Riccati pour obtenir le gain optimal ;

- valider et comparer les deux approches par simulation numérique sous MATLAB, pour des trajectoires de référence de type échelon tridimensionnel et hélicoïdale tridimensionnelle.

Pour atteindre ces objectifs, ce mémoire est organisé en quatre chapitres, précédés de la présente introduction et suivis d'une conclusion générale.

**Le premier chapitre** est consacré aux généralités sur les drones. Il en propose une définition et un historique, puis une classification selon l'altitude, la taille et le mode de propulsion. Une attention particulière est portée au quadrirotor, dont il décrit le principe de fonctionnement, les avantages et les principaux domaines d'application.

**Le deuxième chapitre** présente la modélisation du quadrirotor. Après l'étude de ses mouvements élémentaires, la définition des repères et des matrices de rotation, il établit, sous des hypothèses simplificatrices, le modèle dynamique de translation, de rotation et des rotors, puis sa représentation d'état. Il se termine par l'analyse de la stabilité du système par la méthode de Lyapunov et le théorème de LaSalle.

**Le troisième chapitre** traite de la commande PID en cascade. Il en rappelle le principe, détaille la synthèse des lois de commande pour l'altitude et les angles d'attitude, puis présente et analyse les résultats de simulation obtenus pour des références en échelon et hélicoïdale. Les limites constatées, en particulier les oscillations résiduelles dans le plan horizontal, motivent le recours à une approche multivariable.

**Le quatrième chapitre** est dédié à la commande LQR. Il expose ses fondements théoriques (critère quadratique, matrices  $Q$  et  $R$ , équation de Riccati), en présente l'application au quadrirotor, puis analyse les résultats de simulation pour les mêmes trajectoires de référence. Une étude comparative avec la commande PID est enfin menée selon plusieurs critères : dépassement, temps de stabilisation, qualité du suivi de trajectoire et effort de commande.

Enfin, la conclusion générale synthétise les principaux résultats, souligne les apports du travail et ouvre des perspectives : commande LQR intégrale pour éliminer les erreurs statiques résiduelles, synthèse d'une commande LQG en présence de bruits de mesure, couplage avec des techniques de commande adaptative ou robuste ( $H_\infty$ , modes glissants) et implémentation en temps réel.

# **Chapitre I**

## **Généralité sur les drones**

## I. Introduction

Un drone est, d'un point de vue technologique, un aéronef dépourvu de pilote. Il est également désigné de manière plus formelle comme un véhicule aérien sans pilote (UAV, pour *Unmanned Aerial Vehicle*) ou comme un système d'aéronef sans pilote. En pratique, il s'agit d'un robot volant pouvant être contrôlé à distance ou évoluer de manière autonome grâce à des plans de vol programmés et intégrés à ses systèmes embarqués.

Dans ce premier chapitre, nous présenterons une définition ainsi que des notions générales sur les drones. Nous proposerons ensuite un aperçu de leurs différents types et classifications, en mettant également l'accent sur le drone quadrirotor. [2]

### I.1 Définition d'un drone

Un drone quadri-rotor (ou quadricoptère) est un type de véhicule aérien sans pilote (UAV) équipé de quatre rotors disposés généralement en configuration croisée. Ces rotors tournent par paires en sens opposés afin de stabiliser l'appareil et de contrôler ses mouvements (roulis, tangage et lacet).

Le contrôle du vol s'effectue en faisant varier la vitesse de rotation des moteurs, ce qui permet au drone de décoller verticalement, de se maintenir en vol stationnaire et de se déplacer dans l'espace sans nécessiter de surfaces portantes fixes comme des ailes. [1].

#### I.1.1 Historique

Les drones, ou véhicules aériens sans pilote (UAV), constituent une technologie dont les origines remontent au début du XX<sup>e</sup> siècle. Les premières expérimentations apparaissent durant la Première Guerre mondiale, avec des dispositifs rudimentaires tels que le Kettering Bug. Par la suite, leur utilisation se développe davantage au cours de la Seconde Guerre mondiale, où ils servent principalement de cibles pour l'entraînement des forces armées. Durant la Guerre froide, les drones connaissent une évolution notable, notamment dans le domaine de la reconnaissance stratégique, avec une utilisation significative pendant la Guerre du Vietnam. À partir des années 1990, les avancées technologiques en électronique embarquée, en systèmes de communication et en navigation par satellite ont permis l'émergence de drones plus performants et autonomes, à l'image du MQ-1 Prédateur, utilisé dans diverses missions militaires. Depuis les années 2010, ces systèmes ont connu une démocratisation rapide grâce à la réduction des coûts de fabrication et à l'innovation technologique, notamment sous l'impulsion d'entreprises telles que DJI. Cette évolution a favorisé l'intégration des drones dans de nombreux domaines civils, notamment la photographie aérienne, l'agriculture de précision, la surveillance et la cartographie (Beard & McLain, 2012 ; Fahlstrom & Gleason, 2012) [2],[3].

### I.2 Les différents types de drones

Les drones peuvent être catégorisés suivant leurs fonctions et leurs rôles. Ainsi donc, on distingue :

**I.2.1 Le drone militaire :** À usage exclusivement militaire, le drone militaire est souvent utilisé au cours des missions de reconnaissance et d'espionnage d'une zone à risque.

Ils permettent d'explorer des zones occupées par un clan ennemi et de repérer des soldats en mission sur ces terres [3].

**I.2.2 Le drone Civil :** Ceux pouvant être utilisés pour de la surveillance ou encore prendre des photos et des vidéos aériennes. [3].

**I.2.3 Le drone Ambulancier :** Drone à grande vitesse qui distribue des défibrillateurs automatiques (DEA) en cas d'arrêt cardiaque. Le drone suit les appels mobiles d'urgence et utilise le GPS pour se rendre sur le lieu de l'urgence. À l'aide d'une webcam en direct, l'instructeur du drone peut donner des instructions sur l'utilisation des DEA et sur la manière d'apporter une aide d'urgence [3].

## I.3 Classification des drones

Les drones aériens peuvent être classés en fonction de plusieurs critères (La taille, l'altitude, les systèmes de contrôle, etc...)

### I.3.1 Classification selon l'altitude

**I.3.1.1 HALE « High Altitude Long Endurance » :** Ce sont des drones de grande taille. Ils peuvent atteindre les dimensions d'un avion civil. Ils sont capables de rester très longtemps en vol et de collecter des informations sur de très longues périodes (entre 12 et 48 heures) [3].



**Figure I.1:** Drone de type HALE.

**I.3.1.2 MALE « Medium Altitude Long Endurance » :** Ils sont utilisés pour des vols de longue durée à moyenne altitude comprise entre 5000 et 12000 mètres, ce qui permet de parcourir jusqu'à 1000 km, à des vitesses relativement faibles, de 220 à 360 km/h. La masse de ce type de drones peut atteindre 3.5 tonnes, et l'envergure est généralement comprise entre 10 et 20 mètres [3].



**Figure I.2:** Drone de type MALE.

## **I.3.2 Classification selon la taille**

Les drones peuvent être aussi classés suivant leur taille ou leur envergure. Ce mode de classification prend uniquement en compte la longueur de l'engin. Dans cette catégorie on trouve :

**I.3.2.1 Micro-drone :** Ce sont des drones ayant des tailles variant du centimètre à quelques dizaines des centimètres. Généralement propulsés électriquement. Ils permettent de faire des vols à l'intérieur. Ils emportent des faibles charges.



**Figure I.3:** Micro-drone.

**I.3.2.2 Mini-drone :** Les mini-drones possèdent une envergure légèrement supérieure à celle des micro-drones. Leur taille varie généralement entre **50 cm et 2 m**. Ils sont largement utilisés pour les missions d'enregistrement, de surveillance et de prise de vues aériennes. Grâce à leur capacité à embarquer des équipements de capture d'images et de vidéos de haute qualité, ils trouvent de nombreuses applications dans les domaines de l'audiovisuel, de la photographie aérienne et de la cinématographie.



**FigureI.4:** Mini-drone.

### **I.3.3 Classification selon le mode de propulsion**

Les drones peuvent être classés, en fonction de leur mode de propulsion, en trois grandes catégories :

**I.3.3.1 Drones à ailes battantes :** Ces systèmes s'inspirent du vol des oiseaux ou des insectes, en reproduisant le mouvement oscillatoire des ailes pour générer la portance et la propulsion.



**FigureI.5:** Drones à ailes battantes.

**I.3.3.2 Drones à voilure fixe :** Ils sont équipés d'ailes rigides, similaires à celles des avions. Leur sustentation peut être assurée soit par des structures plus lourdes que l'air (comme les avions), soit par des dispositifs plus légers que l'air (comme les dirigeables).



**FigureI.6:** Drones à voilure fixe.

**I.3.3.3 Drones à voilure tournante :** cette catégorie regroupe les drones utilisant des rotors pour assurer leur sustentation et leur déplacement. Ils se déclinent en plusieurs sous-classes, notamment les drones mono-rotor, birotor, trirotor et multirotor.



**FigureI.7:** Drones à voilure tournante.

**I.3.3.4 Drones mono-rotor :** ces drones possèdent un rotor principal assurant la portance, généralement accompagné d'un rotor de queue permettant de stabiliser l'appareil et de contrôler sa direction.



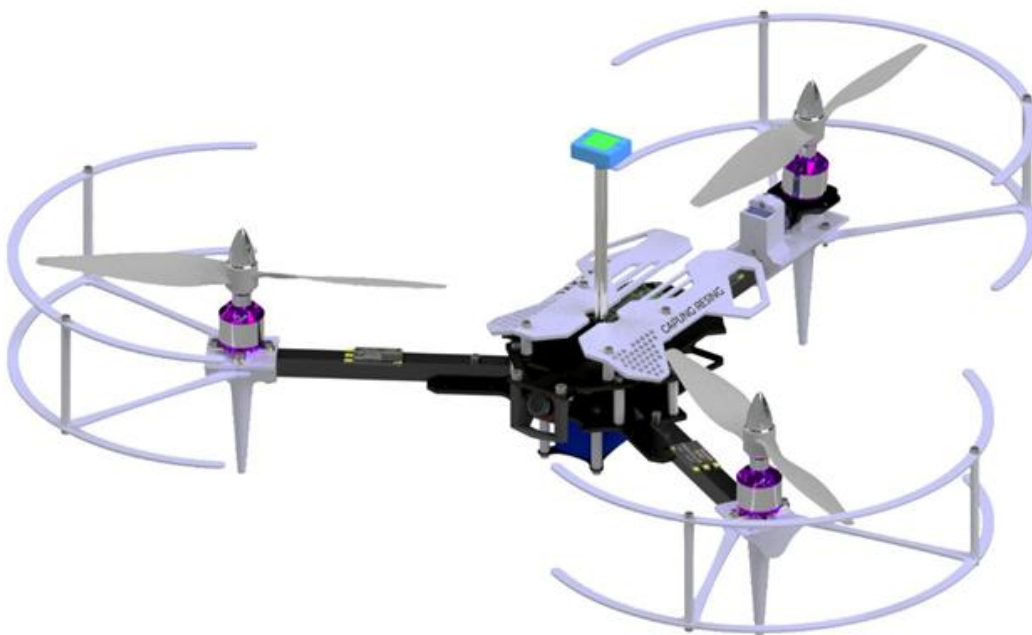
**FigureI.8 :** Drone mono-Rotor.

**I.3.3.5 Drones birotors :** Ils sont équipés de deux rotors coaxiaux qui tournent en sens opposés à la même vitesse. Cette configuration permet de stabiliser le drone et d'éviter toute rotation incontrôlée.



**Figure I.9:** Drone Birotors.

**I.3.3.6. Drones tri-rotors :** ils possèdent trois rotors, dont deux à l'avant qui tournent en sens opposés pour assurer la stabilité, et un rotor à l'arrière qui permet de contrôler le mouvement. Leur fonctionnement est proche de celui d'un quadrirotor, mais leurs performances de vol restent généralement limitées.



• **Figure I.10:** Drone tri-rotor.

**I.3.3.7 Multi-rotors :** ces drones possèdent plusieurs rotors qui tournent par paires en sens opposés pour assurer la stabilité. Les hélices, à pas fixe, produisent la portance. Le déplacement se fait en modifiant la vitesse des rotors afin d'augmenter, diminuer ou équilibrer la poussée par rapport aux forces comme la gravité. L'un de leurs principaux avantages est leur capacité à transporter des charges plus importantes grâce à une portance élevée.



• **Figure I.11:** Drone Multi-rotors.

## I.4 Drone Quadrirotor

### I.4.1 Historique

Les premiers quadrirotor sont apparus en janvier 1921, grâce à un contrat de l'armée américaine. George de Bothezat, un ingénieur américain d'origine russe, a été le premier à faire voler un quadrirotor. Son premier vol a eu lieu en octobre 1922, et le 18 décembre 1922, il réussit un vol de 1 min 42 s à 1,8 mètre du sol. Le 19 janvier 1923, l'appareil a même transporté deux personnes à 1,2 mètre du sol. Malgré de nombreux essais en 1923, le drone ne dépassait pas 5 mètres, et l'armée a finalement mis fin au projet.

En 1956, le quadrirotor "Convertawings Model A" a été développé pour un usage militaire et civil, mais le projet a été abandonné faute de demande.

À la fin des années 1990, le projet "Bell Boeing Quad Tilt Rotor", développé par Bell et Boeing pour le programme militaire américain "Joint Heavy Lift", prévoyait un quadrirotor capable de transporter 25 tonnes à 450 km/h sur 460 km, avec un décollage et un atterrissage verticaux. Plus récemment, en janvier 2016, la société chinoise Ehang a présenté un quadrirotor capable de transporter une personne de 100 kg jusqu'à 500 mètres d'altitude.

Enfin, en 2019, le Cezeri, un quadcopter turc monoplace, a été dévoilé au salon Teknof. Il peut atteindre 2000 mètres de hauteur et une vitesse maximale de 100 km/h. [4].

## I.4.2 Description détaillée

Le drone quadrirotor est un type de drone à voilure tournante composé de quatre hélices (rotors) disposées généralement en forme de croix. Chaque rotor est entraîné par un moteur électrique et produit une force appelée portance, qui permet au drone de décoller et de rester en l'air. Pour assurer la stabilité, les hélices ne tournent pas toutes dans le même sens :

- deux hélices tournent dans le sens horaire,
  - deux autres tournent dans le sens antihoraire.
- Cette disposition permet d'annuler les effets de rotation indésirables (appelés couple de réaction).

Le déplacement du drone ne se fait pas avec des ailes ou des gouvernes, mais en modifiant la vitesse des moteurs :

- pour monter ou descendre, on augmente ou diminue la vitesse des quatre rotors,
- pour avancer, reculer ou se déplacer sur les côtés, on change la vitesse de certains rotors,
- pour tourner sur lui-même (lacet), on crée une différence de vitesse entre les hélices tournant en sens opposés.

Le quadrirotor est très apprécié pour (sa stabilité, sa simplicité de conception, sa capacité à faire du vol stationnaire (rester immobile dans l'air)). Cependant, il présente aussi quelques limites, comme une autonomie de vol réduite et une capacité de charge limitée par rapport à certains autres types de drones.

Le quadrirotor est un drone simple, stable et facile à contrôler, très utilisé dans les domaines comme la photographie aérienne, la surveillance et les projets académiques [4].



• **Figure I.12:** Drone Quadrirotor.

## I.5 Avantages des drones quadrirotor

- Leur petite taille et leur maniabilité permettent de se déplacer facilement dans des espaces ouverts ou restreints tout en évitant les obstacles.

- Le quadrirotor est simple et facile à entretenir.
- Aucun embrayage n'est nécessaire entre le moteur et le rotor, et l'angle d'attaque des rotors n'a pas besoin d'être ajusté.
- Il peut décoller et atterrir verticalement.
- Le contrôle se fait uniquement en modifiant la vitesse des quatre moteurs.
- Avec quatre rotors, il possède une bonne capacité de levage.
- Sa dynamique est plus stable que celle des hélicoptères, ce qui réduit la nécessité d'une réponse rapide.
- Les quatre petits rotors remplacent les grands rotors d'un hélicoptère, réduisant l'énergie cinétique et minimisant les dommages en cas d'accident [5].

## I.6 Applications

- Recherche et sauvetage : aide à localiser rapidement des victimes lors d'accidents ou de catastrophes naturelles.
- Photographie : idéal pour la photographie aérienne grâce à sa stabilité et son autonomie.
- Inspection : permet de vérifier des infrastructures difficiles d'accès comme des lignes électriques, des routes ou des bâtiments, et de détecter des matières dangereuses.
- Cartographie : peut créer des cartes topographiques et 3D de haute précision en volant près du sol avec des caméras ou des capteurs.
- Journalisme : utilisé par les médias pour couvrir des événements comme les inondations, manifestations ou conflits, et pour vérifier les informations.

Les drones quadrirotors sont également utiles dans des domaines variés tels que télécommunications, livraison, publicité et médecine [6].

## I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une vue d'ensemble des drones en mettant en évidence leur définition, leur évolution ainsi que leurs principaux domaines d'application. Nous avons également exposé les différentes catégories de drones et les critères de classification basés sur leur taille, leur altitude de vol, leur mode de fonctionnement et les missions qui leur sont attribuées. Une attention particulière a été portée aux drones à voilure tournante, notamment aux quadrirotors, en raison de leur simplicité de conception, de leur grande maniabilité et de leur large champ d'application dans divers secteurs.

Par ailleurs, les principaux composants constituant un quadrirotor ainsi que son principe de fonctionnement ont été présentés afin de mieux comprendre les caractéristiques de ce type de véhicule aérien sans pilote. Les connaissances acquises dans ce chapitre constituent une base indispensable pour l'étude des aspects théoriques et pratiques liés à la commande des quadrirotors. Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation mathématique du quadrirotor ainsi qu'à l'analyse de sa stabilité dynamique.

# **Chapitre II**

## **Modélisation du quadrirotor**

## II.1 Introduction

La modélisation regroupe un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. Elle requiert une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques.

La synthèse des lois de commande d'un système dynamique nécessite une modélisation précise de ce dernier afin que le modèle puisse prévoir au mieux le comportement du système aux diverses excitations (commandes, perturbations, ...). Ainsi, plus il est détaillé, plus il est fidèle au système. Néanmoins, cela engendre une complication de l'étude et de la synthèse d'éventuelles lois de commande. Un compromis doit être fait en adoptant des hypothèses simplificatrices afin de pouvoir répondre aux contraintes pratiques.

Le quadrirotor est classé dans la catégorie des systèmes volants les plus complexes vu le nombre des phénomènes physiques qui affectent sa dynamique. Afin de concevoir un contrôleur de vol, on doit d'abord comprendre profondément les mouvements du système et sa dynamique. Cette compréhension est nécessaire non seulement pour la conception du contrôleur, mais aussi afin de s'assurer que les simulations de l'engin reproduisent un comportement aussi proche que possible de la réalité quand la commande est appliquée [8], [9].

## II.2 Les possibilités de vol du quadrirotor

Le quadrirotor est un engin volant doté de quatre rotors placés aux extrémités d'une croix. Ce sont ces quatre rotors qui fournissent la force verticale (portance) qui permet à l'appareil de s'élever. Les mouvements possibles du quadrirotor sont [7] :

### II.2.1 Gaz (mouvement vertical)

Cela représente le mouvement de montée/descente du drone. Les quatre moteurs tournent à la même vitesse. On diminue la vitesse des quatre moteurs pour faire descendre le quadrirotor tandis qu'on l'augmente pour le faire monter.

### II.2.2 Lacet

Il permet de faire tourner le quadrirotor sur lui-même. On réalise cela en agissant sur les moteurs par paires : on diminue la vitesse de rotation des deux moteurs face à face (avant et arrière) et on augmente la vitesse des deux autres (gauche et droit).

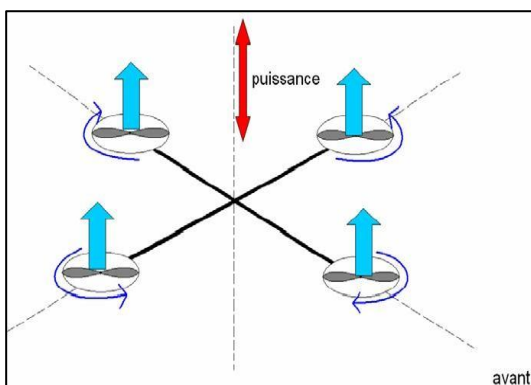


Figure II.1 : Gaz.

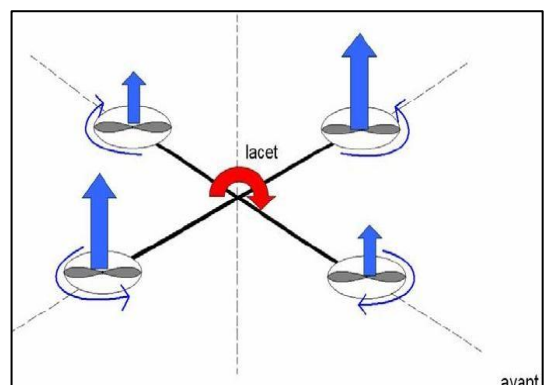


Figure II.2 : Lacet.

### II.2.3 Roulis (Le déplacement suivant l'axe $X$ )

Ce mouvement se produit suite à une rotation autour de l'axe  $X$  en agissant sur les moteurs gauche et droit. Par exemple, si le quadrirotor penche à gauche, on augmente la vitesse du moteur gauche tout en diminuant celle du moteur droit.

### II.2.4 Tangage (Le déplacement suivant l'axe $Y$ )

Ce mouvement se produit suite à une rotation autour de l'axe  $Y$ . Les moteurs avant et arrière permettent de garder une assiette stable sur cet axe. Si le quadrirotor est orienté vers l'arrière, il faut donner plus de vitesse au moteur arrière et baisser celle du moteur avant.

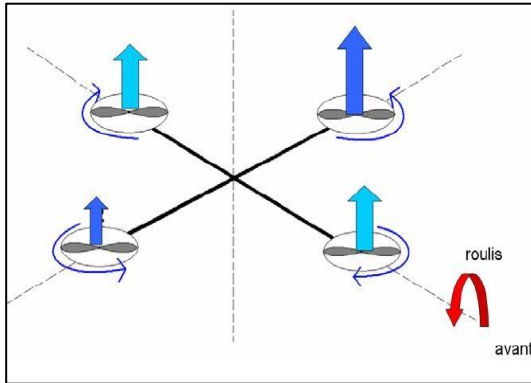


Figure II.3 : Roulis.

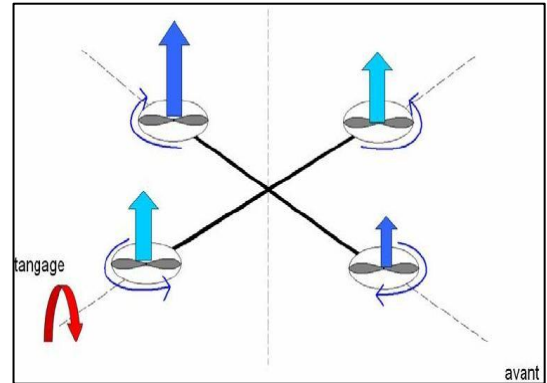


Figure II.4 : Tangage.

## II.3 Repérage du quadrirotor dans l'espace

### II.3.1 Repères utilisés

Un quadrirotor nécessite deux trièdres pour le repérer dans l'espace [8], ces repères sont :

#### II.3.1.1 Le repère terrestre

Il est noté  $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$ . C'est un repère lié à la terre et est considéré comme fixe dans le cadre de l'étude du mouvement du quadrirotor. Son origine  $O_0$  est généralement choisie comme un point de référence au sol. Les axes  $X_0, Y_0, Z_0$  définissent les directions principales du repère terrestre. Ce repère sert de référence pour décrire la position et la trajectoire du quadrirotor dans l'espace.

#### II.3.1.2 Le repère lié au corps du quadrirotor

Il est noté  $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ . C'est un repère dont l'origine  $O_1$  coïncide avec le centre de gravité  $G$  du quadrirotor. Les axes  $X_1, Y_1, Z_1$  sont solidaires de la structure du quadrirotor et se déplacent avec celui-ci. Ce repère permet de décrire l'orientation et les mouvements du quadrirotor par rapport à son propre corps. Il est particulièrement utilisé pour exprimer les vitesses, les accélérations et les angles d'attitude du véhicule.

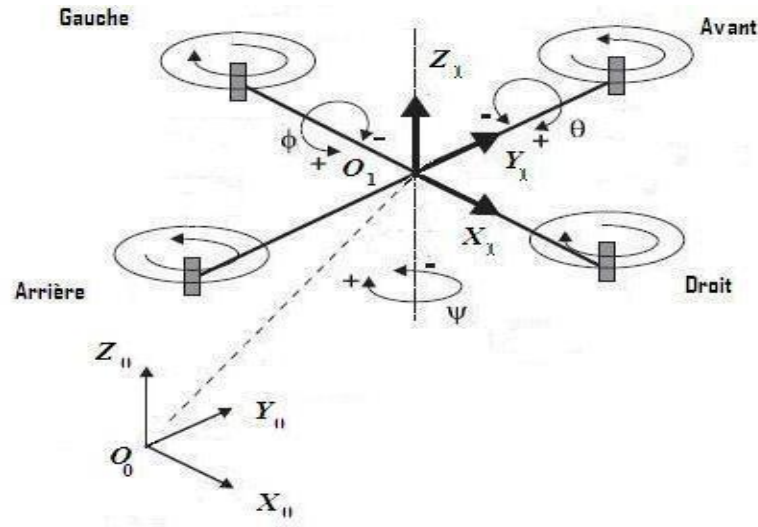


Figure II.5 : Les repères utilisés.

Donc les paramètres qui permettent de décrire le mouvement du quadrirotor sont :  $(x, y, z, \phi, \theta, \psi, V, \Omega)$  avec :

- $x$  : Coordonnée du centre de gravité  $G$  du quadrirotor suivant  $X_0$  ;
- $y$  : Coordonnée du centre de gravité  $G$  du quadrirotor suivant  $Y_0$  ;
- $z$  : Coordonnée du centre de gravité  $G$  du quadrirotor suivant  $Z_0$  ;
- $\phi$  (angle de roulis) : Rotation autour  $X_1$  ( $-\pi < \phi < \pi$ ) ;
- $\theta$  (angle de tangage) : Rotation autour  $Y_1$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) ;
- $\psi$  (angle de lacet) : Rotation autour  $Z_1$  ( $-\pi < \psi < \pi$ ) ;
- $V = [u, v, w]^T \in R^3$  : La vitesse linéaire liée au quadrirotor ;
- $\Omega = [p, q, r]^T \in R^3$  : La vitesse de rotation liée au même corps.

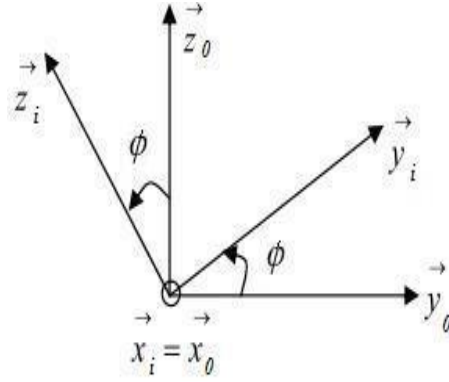
### II.3.2 Matrices de rotation

On considère que les centres  $O_0$  et  $O_1$  des deux repères sont confondus, ce qui signifie que le repère  $R_1$  ne fait que des rotations par rapport au repère  $R_0$ . Trois paramètres indépendants sont nécessaires pour décrire complètement l'orientation du repère  $R_1$  par rapport à celle de  $R_0$ .

Le passage du repère  $R_1$  vers le repère  $R_0$  se fera par trois rotations en utilisant deux repères intermédiaires  $R_i$  et  $R_j$ .

#### II.3.2.1 Passage du repère $R_0$ vers le repère $R_i$

La rotation se fait autour de l'axe  $x_i = x_0$ . On passe du repère  $R_0$  vers  $R_i$  en faisant une rotation d'angle  $\phi$  appelé angle de roulis. La représentation se fait par des figures planes,



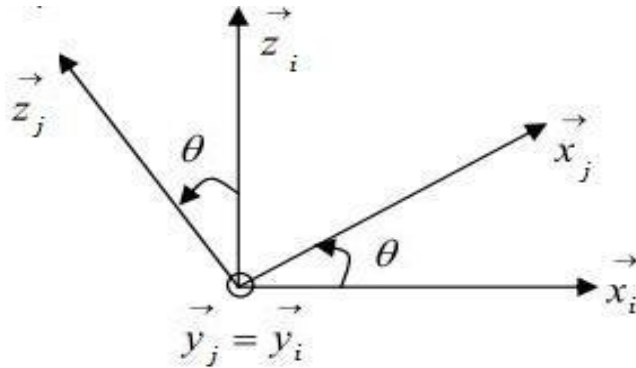
**Figure II.6 :** Rotation autour de l'axe  $X$  (Roulis).

À partir desquelles nous construisons les matrices de passage. Nous avons ainsi la matrice  $R(X_0, \phi)$  :

$$R(X_0, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

### II.3.2.2 Passage du repère $R_j$ vers le repère $R_i$

La rotation se fait autour de l'axe  $y_j = y_i$ . On passe du repère  $R_j$  vers le repère  $R_i$  en faisant une rotation d'angle  $\theta$  appelé angle de tangage.



**Figure II.7 :** Rotation autour de l'axe  $Y$  (Tangage).

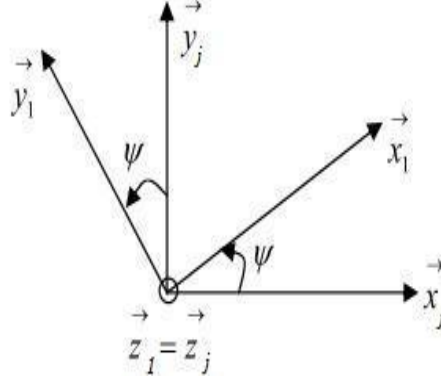
Nous avons ainsi la matrice  $R(Y_0, \theta)$  :

$$R(Y_0, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

### II.3.2.3 Passage du repère $R_1$ vers le repère $R_j$

La rotation se fait autour de l'axe  $z_1 = z_j$ . On passe du repère  $R_1$  vers le repère  $R_j$  en faisant une rotation d'angle  $\psi$  appelé angle de lacet. Nous avons ainsi la matrice  $R(Z_0, \psi)$  :

$$R(Z_0, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$



**Figure II.8 :** Rotation autour de l'axe Z (Lacet).

Le passage du repère  $R_1$  vers le repère  $R_0$  ou inversement se fait par trois rotations successives de telle sorte que tous les axes de  $R_1$  occupent des positions différentes de celle de  $R_0$ . La matrice de passage de  $R_1$  vers  $R_0$  est donnée par le produit des trois matrices successives, on obtient :

$$R = R(\phi, \theta, \psi) = R(Z_0, \psi) * R(Y_0, \theta) * R(X_0, \phi)$$

$$R = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & -c(\phi)s(\psi) + s(\phi)s(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)s(\theta)c(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & -s(\phi)c(\psi) + c(\phi)s(\theta)s(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Où :  $c(\theta) = \cos(\theta)$  et  $s(\theta) = \sin(\theta)$ .

## II.4 Modèle dynamique du quadrirotor

Nous adoptons les hypothèses suivantes pour établir le modèle dynamique du quadrirotor [8], [9], [11] :

- La structure du quadrirotor est supposée rigide et symétrique;
- Les hélices sont supposées rigides pour pouvoir négliger l'effet de déformation lors de la rotation;
- La matrice d'inertie  $J$  est supposée constante (il n'y a pas de changement de poids);
- Les forces de portance et de traînée sont supposées proportionnelles au carré de la vitesse de rotation des rotors.

### II.4.1 La dynamique de translation

D'après la deuxième loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(mV)}{dt} = \sum F_{ext \rightarrow repere} \quad (\text{II.5})$$

La vitesse exprimée dans le repère inertiel est :

$$\frac{d(mV)}{dt} = m \dot{V} \quad (\text{II.6})$$

Les forces extérieures appliquées au quadrirotor sont :

1. **Le poids** : est donné par :

$$\mathbf{P} = -mg\mathbf{z}_0 \quad (\text{II.7})$$

2. **La force de traînée** : C'est la résultante des forces qui s'opposent au mouvement du quadrirotor dans l'air. Elle s'exerce parallèlement au sol, de même direction que le mouvement du quadrirotor, mais de sens opposé. Elle représente en quelque sorte les forces de frottement sur l'objet [10]. Elle est donnée par :

$$\mathbf{F}_t = -\frac{1}{2}\rho_{air}C_d|V|V \quad (\text{II.8})$$

Où :  $C_d$  est le coefficient de traînée. En prenant  $C_{da} = \frac{1}{2}\rho_{air} C_d$ , l'équation précédente devient :

$$\mathbf{F}_t = -C_{da}|V|V \quad (\text{II.9})$$

3. **La force de portance** : Elle est perpendiculaire à l'écoulement d'air, dirigée vers le haut c'est-à-dire qu'elle a tendance à faire élever le quadrirotor. Elle représente la force totale produite par les quatre hélices. Elle est donnée par :

$$\mathbf{F}_p = (\sum_{i=1}^4 f_i)\mathbf{z}_1 \quad (\text{II.10})$$

Où :  $f_i$  est la force de portance produite par la rotation de l'hélice . Elle est donnée par :

$$f_i = b\omega_i^2 \quad (\text{II.11})$$

Avec :  $b$  est le coefficient de portance. Donc la force de portance totale est :

$$\mathbf{F}_p = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)\mathbf{z}_1 \quad (\text{II.12})$$

On doit exprimer cette force dans le repère inertiel, pour cela on utilise la matrice de rotation  $R$  :

$$\mathbf{F}_p = (\sum_{i=1}^4 f_i)(R\mathbf{z}_0) \quad (\text{II.13})$$

En remplaçant les expressions des forces, l'équation (II.5) devient :

$$(\dot{V}) = -g\mathbf{z}_0 - \frac{C_{da}}{m}|V|V + \frac{F_p}{m}(R\mathbf{z}_0) \quad (\text{II.14})$$

En développant l'équation (II.14) et sachant que  $\dot{P} = V$ , on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{z} &= w \\
\dot{u} &= -\frac{C_{da}^u}{m} |u|u + \frac{F_p}{m} (S\psi S\phi + S\theta C\psi C\phi) \\
\dot{v} &= -\frac{C_{da}^v}{m} |v|v + \frac{F_p}{m} (S\psi S\theta C\phi - S\phi C\psi) \\
\dot{w} &= -g - \frac{C_{da}^w}{m} |w|w + \frac{F_p}{m} (C\theta C\phi)
\end{aligned} \tag{II.15}$$

## II.4.2 La dynamique de rotation

D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = \sum \tau_{ext \rightarrow repere} \tag{II.16}$$

Et comme la vitesse angulaire est exprimée dans le repère lié au quadrirotor, alors :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = J\dot{\Omega} + \Omega \wedge J\Omega \tag{II.17}$$

Les couples extérieurs sont :

1. **Les couples aérodynamiques** : Ils sont produits par les forces de traînée et de poussée créées par la rotation des quatre hélices. Ils sont notés  $\tau_a^i$  :

$$\begin{cases} \tau_a^1 = db(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \tau_a^2 = db(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \tau_a^3 = k(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{cases} \tag{II.18}$$

Avec :  $k$  est le coefficient de traînée et  $d$  est la distance entre le centre de gravité du quadrirotor et l'axe du rotor.

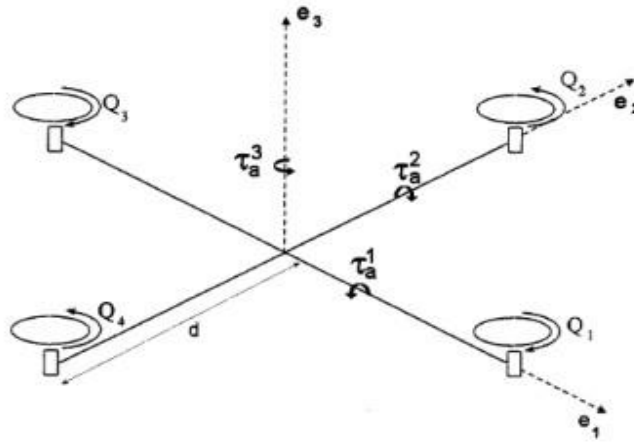


Figure II.9 : Les couples aérodynamiques.

2. **Le moment gyroscopique** : Se crée dans les systèmes physiques en mouvement avec des parties rotatoires. Lorsque la trajectoire du quadrirotor change, le rotor subit des rotations du fuselage [8], [10]. L'expression générale de ce moment est donnée par :

$$\tau_{gyro} = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^i \omega_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

La matrice d'inertie de chaque rotor est supposée diagonale :

$$J = \begin{bmatrix} J_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & J_{rz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

A partir des équations (II.19) et (II.20), on obtient :

$$\tau_{gyro} = \sum_{i=1}^4 [(-1)^i \omega_i J_{rz}] \Omega \wedge z_1 \quad (\text{II.21})$$

En remplaçant l'expression (II.21) dans l'équation (II.17) :

$$j(\dot{\Omega}) + \Omega \wedge J \Omega = \tau_a + \sum_{i=1}^4 [(-1)^i \omega_i J_{rz}] \Omega \wedge z_1 \quad (\text{II.22})$$

Comme la structure du quadrirotor est supposée symétrique, la matrice d'inertie  $J$  est diagonale :

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Donc l'équation (II.22) devient :

$$\begin{cases} (\dot{p}) = \frac{J_y - J_z}{J_x} q r + \frac{J_{rz}}{J_x} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) (q) + \frac{\tau_a^1}{J_x} \\ (\dot{q}) = \frac{J_z - J_x}{J_y} p r - \frac{J_{rz}}{J_y} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) p + \frac{\tau_a^2}{J_y} \\ (\dot{r}) = \frac{J_x - J_y}{J_z} p q + \frac{\tau_a^3}{J_z} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

### II.4.3 La relation entre les angles d'Euler et les vitesses angulaires

Si un solide tourne à une vitesse constante, sa vitesse angulaire  $\Omega$  est constante. Par contre, les variations des angles d'Euler seront variables car elles dépendent des angles instantanés entre les axes des deux repères. La séquence des angles d'Euler est obtenue à partir de trois rotations successives : roulis, tangage et lacet [8]. La variation  $\dot{\phi}$  nécessite une rotation,  $\dot{\theta}$  nécessite deux rotations et  $\dot{\psi}$  nécessite trois rotations :

$$\Omega = R(X_0, \phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(X_0, \phi) R(Y_0, \theta) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(X_0, \phi) R(Y_0, \theta) R(Z_0, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Ce qui donne:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S(\theta) \\ 0 & C(\phi) & S(\phi)C(\theta) \\ 0 & -S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Donc la relation entre  $\Omega = [p \ q \ r]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S(\theta) \\ 0 & C(\phi) & S(\phi)C(\theta) \\ 0 & -S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix}^{-1} * \Omega$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S(\phi)t(\theta) & C(\phi)t(\theta) \\ 0 & C(\phi) & -S(\phi) \\ 0 & S(\phi)/C(\theta) & C(\phi)/C(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

En développant l'équation précédente, on aura :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + S(\phi)t(\theta)q + C(\phi)t(\theta)r \\ \dot{\theta} = C(\phi)q - S(\phi)r \\ \dot{\psi} = \frac{S(\phi)}{C(\theta)}q + \frac{C(\phi)}{C(\theta)}r \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

#### II.4.4 La dynamique des rotors

On peut exprimer la dynamique des rotors en utilisant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d(J_r \bar{\omega}_i)}{dt} = \sum \tau_{ext \rightarrow rotor_i} \quad (\text{II.29})$$

La matrice d'inertie  $J_r$  de chaque rotor est constante, et comme la vitesse angulaire  $\bar{\omega}_i$  est exprimée dans le repère lié aux rotors, donc :

$$\frac{d(J_r \bar{\omega}_i)}{dt} = J_r \dot{\bar{\omega}}_i + \bar{\omega}_i \wedge J_r \bar{\omega}_i \quad (\text{II.30})$$

Les couples (moments) extérieurs sont :

1. **Un couple réactif** : C'est un couple généré par l'hélice tournant à une vitesse  $\bar{\omega}_i$  et s'opposant à sa rotation. Il est donné par :

$$\bar{Q}_i = -k |\bar{\omega}_i| \bar{\omega}_i \quad (\text{II.31})$$

Où :  $k$  est le coefficient de traînée. Il dépend de plusieurs facteurs : la densité de l'air, le rayon de l'hélice, nombre de pales, ...

2. **Un couple moteur** : est noté  $\tau_i$ .

3. **Un couple de poussée** : est produit par la force de poussée générée par l'hélice. Comme cette force est perpendiculaire au plan de rotation de l'hélice, elle ne produit aucun couple.
4. **Un moment visqueux** : Résultat du frottement visqueux, qui s'oppose à la rotation de l'hélice. Il est donné par :

$$\tau_{visq} = -C_v \bar{\omega}_i \quad (\text{II.32})$$

Où :  $C_v$  est le coefficient du frottement visqueux.

Comme les hélices ne tournent pas dans la même direction, le signe du couple moteur est toujours celui de la vitesse de rotation  $\omega_i$ , tandis que le couple réactif et le moment visqueux sont toujours opposés à lui, donc on peut écrire :

$$\sum \tau_{ext \rightarrow rotor_i} = (-1)^i [\tau_i - k \omega_i^2 - C_v \omega_i] z_1 \quad (\text{II.33})$$

L'équation (II.29) devient

$$\frac{d(J_r (-1)^i \omega_i)}{dt} z_1 = J_{rz} [(-1)^i \dot{\omega}_i z_1 + (-1)^i \omega_i (\Omega \wedge z_1)] \quad (\text{II.34})$$

Le terme  $(-1)^i \omega_i (\Omega \wedge z_1)$  n'est pas dans la direction de l'axe  $z_1$ , donc sa projection sur l'axe  $z_1$  est nulle. L'équation finale de la dynamique du rotor  $i$  sera :

$$J_{rz} \dot{\omega}_i = \tau_i - k \omega_i^2 - C_v \omega_i \quad (\text{II.35})$$

On aura le système suivant :

$$\begin{cases} J_{rz} \dot{\omega}_1 = \tau_1 - k \omega_1^2 - C_v \omega_1 \\ J_{rz} \dot{\omega}_2 = \tau_2 - k \omega_2^2 - C_v \omega_2 \\ J_{rz} \dot{\omega}_3 = \tau_3 - k \omega_3^2 - C_v \omega_3 \\ J_{rz} \dot{\omega}_4 = \tau_4 - k \omega_4^2 - C_v \omega_4 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

### II.4.5 Modèle d'état du quadrirotor

Le modèle dynamique final du quadrirotor, décrit par les équations (II.15), (II.24), (II.28) et (II.36), peut être décomposé en quatre sous-systèmes : la position et la vitesse linéaire, les angles d'Euler, les vitesses angulaires et la dynamique des rotors. Ces sous-systèmes sont interconnectés de manière hiérarchique, où la sortie d'un sous-système constitue l'entrée de commande du sous-système suivant. Cette organisation permet de traiter séparément les différentes dynamiques du quadrirotor tout en assurant leur interaction. Une telle organisation est appelée structure de commande en cascade [8], [9].

Pour simplifier l'analyse du système, et compte tenu du fait que les mouvements angulaires du quadrirotor sont caractérisés par de faibles amplitudes et de faibles vitesses, certaines approximations peuvent être adoptées. Ces hypothèses permettent de simplifier le modèle dynamique, en négligeant les frottements aérodynamiques et en assimilant les vitesses angulaires aux dérivées des angles d'Euler, et d'obtenir une représentation mathématique plus simple du système. Le modèle dynamique ainsi simplifié, ne prenant pas en compte la dynamique des actionneurs, s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \left(\frac{J_y - J_z}{J_x}\right) \dot{\theta} \dot{\psi} + \left(\frac{J_{rz}}{J_x}\right) \dot{\theta} \bar{\Omega} + \left(\frac{d}{J_x}\right) U_2 \\ \ddot{\theta} = \left(\frac{J_z - J_x}{J_y}\right) \dot{\phi} \dot{\psi} - \left(\frac{J_{rz}}{J_y}\right) \dot{\phi} \bar{\Omega} + \left(\frac{d}{J_y}\right) U_3 \\ \ddot{\psi} = \left(\frac{J_x - J_y}{J_z}\right) \dot{\phi} \dot{\theta} + \left(\frac{1}{J_z}\right) U_4 \\ \ddot{x} = (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi) \left(\frac{U_1}{m}\right) \\ \ddot{y} = (C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi) \left(\frac{U_1}{m}\right) \\ \ddot{z} = (C\phi C\theta) \left(\frac{U_1}{m}\right) - g \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Avec :  $U_1, U_2, U_3$  et  $U_4$  sont les entrées de commande du système, définies par :

L'écriture des entrées de commande en fonction des vitesses de rotation des rotors est la suivante :

$$\begin{cases} \tau_a^1 = dU_2 \\ \tau_a^2 = dU_3 \\ \tau_a^3 = U_4 \\ F_p = U_1 \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -b & 0 & b \\ -b & 0 & b & 0 \\ -k & k & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Tel que :

$$\bar{\Omega} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \quad (\text{II.40})$$

Pour mettre le système sous forme d'état, on peut choisir comme vecteur d'état :

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T$$

On aura le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_3 x_2 x_6 + a_4 x_2 \bar{\Omega} + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_5 x_2 x_4 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \left(\frac{U_1}{m}\right) U_x \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \left(\frac{U_1}{m}\right) U_y \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \left(\frac{C(x_1)C(x_3)}{m}\right) U_1 - g \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{J_y - J_z}{J_x}, a_2 = \frac{J_{rz}}{J_x}, a_3 = \frac{J_z - J_x}{J_y}, a_4 = -\frac{J_{rz}}{J_y}, a_5 = \frac{J_x - J_y}{J_z} \\ b_1 = \frac{d}{J_x}, b_2 = \frac{d}{J_y}, b_3 = \frac{1}{J_z} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Et :

$$\begin{cases} U_x = C x_1 S x_3 C x_5 + S x_1 S x_5 \\ U_y = C x_1 S x_3 S x_5 - S x_1 C x_5 \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

#### II.4.6 Liaisons non holonomes

Les liaisons non holonomes sont des relations liant les deux angles  $\phi$  et  $\theta$ , avec  $\psi$  et les composantes du vecteur d'accélération. Ces relations sont obtenues à partir de l'équation du modèle dynamique (II.37):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \left(\frac{U_1}{m}\right) (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi) \\ \ddot{y} &= \left(\frac{U_1}{m}\right) (C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi) \\ \ddot{z} &= \frac{C(\phi)C(\theta)}{m} U_1 - g \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

$$\text{Or : } \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2 = \frac{U_1^2}{m^2}$$

Donc :

$$\frac{m}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2}} \quad (\text{II.45})$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi}{\ddot{z} + g} \\ \sin \phi &= \frac{m}{U_1} (\ddot{x} \sin \psi - \ddot{y} \cos \psi) \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

En remplaçant dans (II.45) dans (II.46), on obtient :

$$\sin \phi = \frac{\ddot{x} \sin \psi - \ddot{y} \cos \psi}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2}} \quad (\text{II.47})$$

Les équations (II.46) et (II.47) sont appelées liaisons non holonomes.

## II.5 Étude de la stabilité du système d'état complet par la méthode de Lyapunov

### II.5.1 Rappel sur la méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov permet d'étudier la stabilité d'un système dynamique non linéaire sans résoudre explicitement ses équations différentielles. Soit un système décrit par  $\dot{X} = f(X)$ , avec  $f(0) = 0$  (l'origine est un point d'équilibre). On dit qu'une fonction scalaire  $V(X)$  est une fonction de Lyapunov si elle vérifie :

1.  $V(0) = 0$  ;
2.  $V(X) > 0$  pour tout  $X \neq 0$  (définie positive) ;
3.  $\dot{V}(X) \leq 0$  le long des trajectoires du système (semi-définie négative).

Si ces conditions sont satisfaites, l'origine est stable au sens de Lyapunov. Si de plus  $\dot{V}(X)$  est définie négative, l'origine est asymptotiquement stable. Lorsque  $\dot{V}(X)$  n'est que semi-définie négative, le théorème de LaSalle permet de conclure à la stabilité asymptotique : si le seul ensemble invariant contenu dans  $\{X : \dot{V}(X) = 0\}$  est l'origine, alors celle-ci est asymptotiquement stable [12], [13].

Cette méthode est particulièrement adaptée à l'étude du modèle du quadrirotor établi précédemment, car elle permet de traiter directement les non-linéarités et les couplages entre sous-systèmes sans passer par une linéarisation.

### II.5.2 Décomposition du système d'état

Le système d'état complet (II.41) comporte douze variables d'état regroupées en six sous-systèmes du second ordre :

1. Roulis :  $(x_1, x_2) = (\phi, \dot{\phi})$  ;
2. Tangage :  $(x_3, x_4) = (\theta, \dot{\theta})$  ;
3. Lacet :  $(x_5, x_6) = (\psi, \dot{\psi})$  ;
4. Position suivant  $X_0$  :  $(x_7, x_8) = (x, \dot{x})$  ;
5. Position suivant  $Y_0$  :  $(x_9, x_{10}) = (y, \dot{y})$  ;
6. Altitude :  $(x_{11}, x_{12}) = (z, \dot{z})$ .

Ces sous-systèmes sont couplés entre eux par les termes gyroscopiques ( $\bar{\Omega}$ ), les produits croisés des vitesses angulaires ( $a_1, \dots, a_5$ ) et par les entrées  $U_x$  et  $U_y$  qui dépendent des angles d'Euler. L'étude de la stabilité du système complet est menée en construisant, pour chaque sous-système, une fonction de Lyapunov candidate, puis en sommant ces fonctions pour obtenir une fonction de Lyapunov globale.

### II.5.3 Stabilité du sous-système de roulis

On considère la fonction candidate :

$$V_1 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (\text{II.48})$$

$V_1$  est définie positive et s'annule à l'origine. Sa dérivée le long des trajectoires du système est :

$$\dot{V}_1 = x_1 x_2 + x_2 (a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2) = x_2 [x_1 + a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2] \quad (\text{II.49})$$

En choisissant la loi de commande :

$$U_2 = \frac{1}{b_1} [-x_1 - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - k_1 x_2], \quad k_1 > 0 \quad (\text{II.50})$$

on obtient :

$$\dot{V}_1 = -k_1 x_2^2 \leq 0 \quad (\text{II.51})$$

$\dot{V}_1$  est semi-définie négative : elle s'annule dès que  $x_2 = 0$ , quelle que soit la valeur de  $x_1$ . On applique le théorème de LaSalle : sur l'ensemble  $\{x_2 = 0\}$ , la dynamique (II.49)-(II.51) impose  $\dot{x}_2 = -x_1$ , de sorte que l'invariance de cet ensemble exige  $x_1 = 0$ . Le plus grand ensemble invariant contenu dans  $\{\dot{V}_1 = 0\}$  est donc réduit à l'origine  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , ce qui assure la stabilité asymptotique du sous-système de roulis.

### II.5.4 Stabilité du sous-système de tangage

Par un raisonnement identique, on pose :

$$V_2 = \frac{1}{2} x_3^2 + \frac{1}{2} x_4^2 \quad (\text{II.52})$$

dont la dérivée s'écrit :

$$\dot{V}_2 = x_4 [x_3 + a_3 x_2 x_6 + a_4 x_2 \bar{\Omega} + b_2 U_3] \quad (\text{II.53})$$

Avec la loi de commande :

$$U_3 = \frac{1}{b_2} [-x_3 - a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - k_2 x_4], \quad k_2 > 0 \quad (\text{II.54})$$

Il vient  $\dot{V}_2 = -k_2 x_4^2 \leq 0$ . Le même argument fondé sur le théorème de LaSalle que précédemment montre que le sous-système de tangage est asymptotiquement stable à l'origine.

### II.5.5 Stabilité du sous-système de lacet

Ce sous-système est le moins couplé, puisqu'il ne fait intervenir que le produit  $x_2 x_4$ . On pose :

$$V_3 = \frac{1}{2} x_5^2 + \frac{1}{2} x_6^2 \quad (\text{II.55})$$

$$\dot{V}_3 = x_6 [x_5 + a_5 x_2 x_4 + b_3 U_4] \quad (\text{II.56})$$

En choisissant :

$$U_4 = \frac{1}{b_3} [-x_5 - a_5 x_2 x_4 - k_3 x_6], \quad k_3 > 0 \quad (\text{II.57})$$

On obtient  $\dot{V}_3 = -k_3 x_6^2 \leq 0$ , et le sous-système de lacet est, de la même manière, asymptotiquement stable à l'origine.

### II.5.6 Stabilité de l'altitude et de la position horizontale

Pour l'altitude, on pose :

$$V_4 = \frac{1}{2} x_{11}^2 + \frac{1}{2} x_{12}^2 \quad (\text{II.58})$$

$$\dot{V}_4 = x_{12} \left[ x_{11} + \frac{C(x_1)C(x_3)}{m} U_1 - g \right] \quad (\text{II.59})$$

Tant que  $C(x_1)C(x_3) \neq 0$ , c'est-à-dire pour  $\phi$  et  $\theta$  restant dans le domaine de vol proche du vol stationnaire précisé au paragraphe II.3.1, on peut choisir :

$$U_1 = \frac{m}{c(x_1)c(x_3)} [-x_{11} + g - k_4 x_{12}], \quad k_4 > 0 \quad (\text{II.60})$$

ce qui donne  $\dot{V}_4 = -k_4 x_{12}^2 \leq 0$  et assure, par le même raisonnement, la stabilité asymptotique de la boucle d'altitude.

Pour la position horizontale, les mêmes candidates  $V_5 = \frac{1}{2}x_7^2 + \frac{1}{2}x_8^2$  et  $V_6 = \frac{1}{2}x_9^2 + \frac{1}{2}x_{10}^2$  conduisent, avec  $U_1 > 0$  déjà fixé par la boucle d'altitude, aux valeurs désirées :

$$U_x^d = \frac{m}{u_1} [-x_7 - k_5 x_8], \quad U_y^d = \frac{m}{u_1} [-x_9 - k_6 x_{10}], \quad k_5, k_6 > 0 \quad (\text{II.61})$$

qui annulent  $\dot{V}_5 = -k_5 x_8^2$  et  $\dot{V}_6 = -k_6 x_{10}^2$ . Ces valeurs désirées, une fois inversées à travers la relation (II.43), fournissent les angles de roulis et de tangage de référence à imposer aux boucles internes (II.5.3) et (II.5.4). On retrouve ainsi naturellement la structure en cascade déjà évoquée au paragraphe II.4.5 : la boucle de position externe génère les consignes d'attitude de la boucle interne.

### II.5.7 Stabilité du système d'état complet

On considère la fonction de Lyapunov globale, somme des six fonctions candidates :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} x_i^2 \quad (\text{II.62})$$

$V$  est définie positive sur  $\mathbb{R}^{12}$  et radialement non bornée. Compte tenu des lois de commande (II.50), (II.54), (II.57), (II.60) et (II.61), sa dérivée le long des trajectoires du système complet (II.41) s'écrit :

$$\dot{V} = -k_1 x_2^2 - k_2 x_4^2 - k_3 x_6^2 - k_4 x_{12}^2 - k_5 x_8^2 - k_6 x_{10}^2 \leq 0 \quad (\text{II.63})$$

$\dot{V}$  est semi-définie négative sur  $\mathbb{R}^{12}$ . En reprenant, sous-système par sous-système, l'argument d'invariance développé aux paragraphes II.5.3 à II.5.6, le plus grand ensemble invariant contenu dans  $\{X \in \mathbb{R}^{12} : \dot{V}(X) = 0\}$  se réduit au seul point  $X = 0$ , c'est-à-dire à l'équilibre de vol stationnaire. Par le théorème de LaSalle, cet équilibre est donc asymptotiquement stable pour le système d'état complet, dans le domaine de vol défini par  $|\phi| < \frac{\pi}{2}$ ,  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$  et  $U_1 > 0$ .

## II.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation du quadrirotor. Après avoir décrit ses mouvements élémentaires et défini les repères et les matrices de rotation, nous avons établi, sous des hypothèses simplificatrices, son modèle dynamique (translation, rotation et rotors), puis mis celui-ci sous forme d'état à douze variables. Ce modèle met en évidence le caractère non linéaire, fortement couplé et sous-actionné du système : quatre entrées de commande pour six degrés de liberté, d'où les liaisons non holonomes. L'étude de stabilité par la méthode de Lyapunov et le théorème de LaSalle a montré qu'une commande en cascade (position externe, attitude interne) rend l'équilibre de vol stationnaire asymptotiquement stable dans le domaine de vol considéré, sous réserve d'un bon suivi des consignes d'attitude. Ce modèle servira de base à la synthèse et à la simulation des lois de commande présentées dans les chapitres suivants.

# **Chapitre III**

## **La Commande PID d'un Quadrirotor**

## III.1 Introduction

Le quadrirotor est un système dynamique multivariable, fortement couplé et sous-actionné, ce qui rend sa commande particulièrement complexe. En effet, il possède six degrés de liberté, correspondant à trois mouvements de translation selon les axes (x), (y) et (z), ainsi qu'à trois mouvements de rotation décrits par les angles de roulis ( $\phi$ ), de tangage ( $\theta$ ) et de lacet ( $\psi$ ). Cependant, il ne dispose que de quatre entrées de commande indépendantes, associées aux vitesses de rotation des quatre moteurs.

Cette différence entre le nombre de degrés de liberté et le nombre d'entrées de commande constitue l'une des principales difficultés liées à la stabilisation et à la poursuite de trajectoire du quadrirotor. De plus, les mouvements de translation et de rotation sont fortement couplés, de sorte qu'une modification de l'attitude peut entraîner une variation de la position du véhicule. Face à cette problématique, différentes stratégies de commande peuvent être envisagées, allant des méthodes linéaires classiques aux techniques de commande plus avancées. Parmi les approches conventionnelles, la commande proportionnelle-intégrale-dérivée (PID) demeure largement utilisée dans les applications industrielles et académiques [14], [16]. Son utilisation s'explique notamment par sa simplicité de mise en œuvre, le nombre limité de paramètres à ajuster et son efficacité pour assurer la stabilisation et le suivi des consignes autour de points de fonctionnement donnés.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la synthèse d'une loi de commande PID en cascade appliquée à la stabilisation et au suivi de trajectoire d'un quadrirotor. Dans un premier temps, nous exposerons la problématique de la stabilisation liée au sous-actionnement du système, ainsi que le principe général du correcteur PID. Nous détaillerons ensuite l'architecture de commande en cascade retenue, articulée autour d'une boucle interne d'attitude et d'une boucle externe de position. Les lois de commande PID seront ensuite développées pour chacun des quatre axes de commande (altitude, roulis, tangage, lacet), avant d'être formulées sous forme vectorielle. Enfin, les performances de la commande synthétisée seront évaluées à travers des résultats de simulation, portant à la fois sur la réponse à des consignes de type échelon et sur la poursuite d'une trajectoire hélicoïdale tridimensionnelle, avant de conclure sur les limites de l'approche PID classique et les perspectives d'amélioration envisageables.

## III.2 Principes généraux

### III.2.1 Principe de fonctionnement du correcteur PID

Le PID (Proportionnel-Intégral-Dérivé) est la loi de commande la plus utilisée pour stabiliser un quadrirotor grâce à sa simplicité d'implémentation et son efficacité [15], [16]. Pour une variable donnée l'erreur est définie comme :

$$e(t) = \phi_{consigne}(t) - \phi_{mesuré}(t) \quad (III.1)$$

La commande générée est alors :

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (III.2)$$

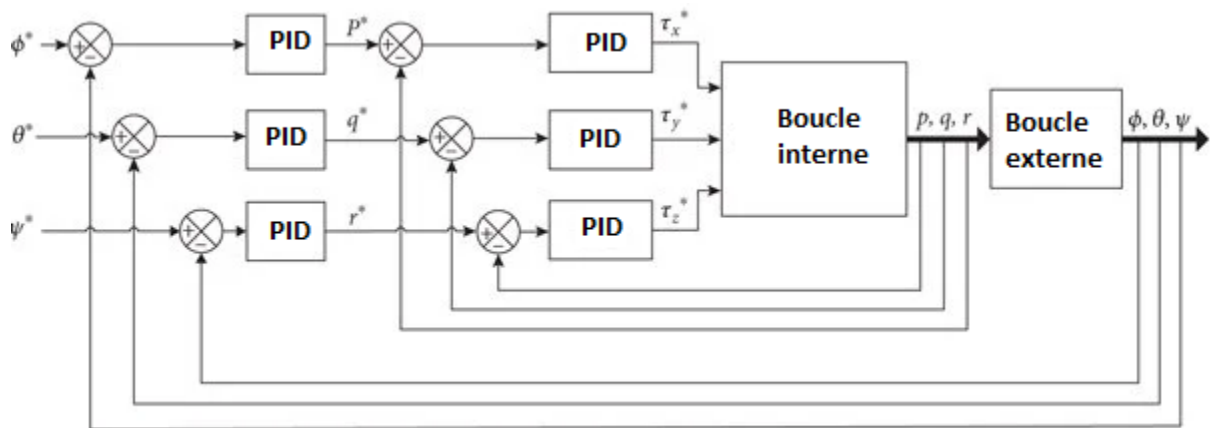
Rôle de chaque terme :

- **Proportionnel ( $K_p$ )** : réagit à l'erreur actuelle, assure la rapidité de la réponse.
- **Intégral ( $K_i$ )** : élimine l'erreur statique (utile face aux perturbations comme le vent ou un déséquilibre de masse).
- **Dérivé ( $K_d$ )** : anticipe l'évolution de l'erreur, amortit les oscillations et stabilise le système.

### III.2.2 Architecture de commande en cascade (boucles interne et externe)

La commande d'un quadrirotor s'organise généralement en deux boucles imbriquées [17], [18] :

1. **Boucle interne (attitude)** : rapide ( $\sim 100-500$  Hz), contrôle les angles  $\phi$  (roulis),  $\theta$  (tangage),  $\psi$  (lacet) via 3 PID indépendants.
2. **Boucle externe (position)** : plus lente ( $\sim 10-50$  Hz), génère les angles de consigne à partir de l'erreur de position ( $x, y, z$ ).



**Figure III.1** : Schéma bloc de la commande PID en cascade (boucles interne et externe) d'un quadrirotor (modèle linéarisé).

### III.2.3 La commande PID classique

Le PID reste une commande linéaire, alors que la dynamique du quadrirotor est fortement non linéaire (couplages entre axes, effets gyroscopiques). Il fonctionne bien autour d'un point d'équilibre (vol quasi-stationnaire) [15]. Chaque PID génère une commande qui est ensuite combinée via le mixeur moteur (mixing) pour répartir les efforts entre les 4 rotors.

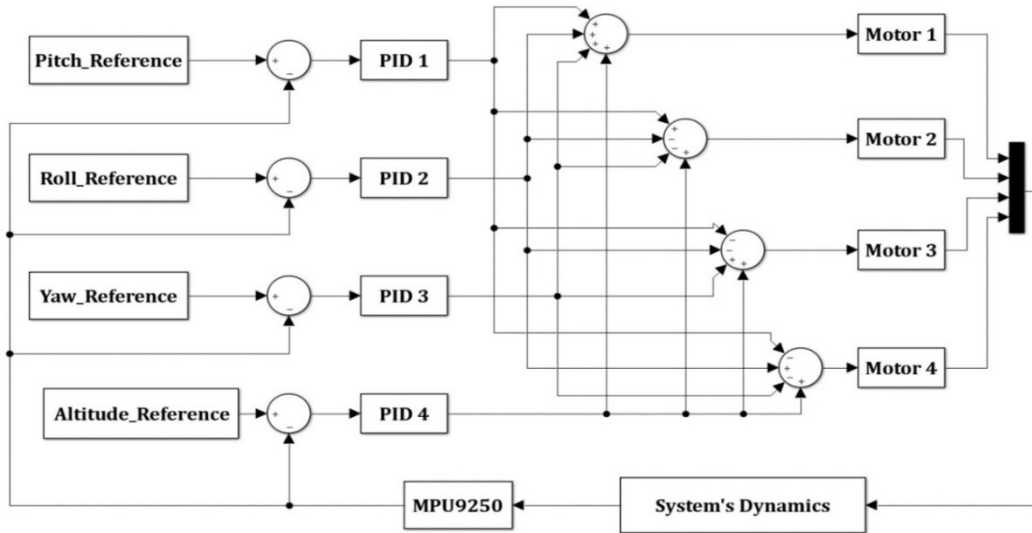


Figure III.2 : Schéma bloc de la commande PID d'un quadrirotor (modèle linéarisé).

### III.3 Synthèse des lois de commande PID

La commande PID (Proportionnelle–Intégrale–Dérivée) est une méthode de régulation classique largement utilisée pour le suivi de trajectoires et la stabilisation des systèmes dynamiques [14], [15]. Dans le cas d'un quadrirotor, elle est généralement employée pour assurer la stabilité :

- des angles d'attitude : roulis, tangage et lacet,
- ainsi que de la position :  $x$ ,  $y$ ,  $z$

Le principe de cette commande repose sur la correction de l'erreur entre la consigne et la sortie du système.

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (\text{III.3})$$

Et la commande :

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{III.4})$$

#### III.3.1 Loi de commande PID pour le contrôle de l'altitude (Z)

L'erreur entre la consigne de hauteur et la sortie du système est définie par :

$$e_z = z_d - z \quad (\text{III.5})$$

La loi de commande PID appliquée au contrôle de l'altitude s'écrit sous la forme :

$$u_1 = mg + K_{pz} e_z + K_{Iz} \int e_z dt + K_{Dz} \dot{e}_z \quad (\text{III.6})$$

Elle peut également être exprimée de manière explicite en fonction des variables de référence et mesurées :

$$u_1 = mg + K_{pz}(z_d - z) + K_{Iz} \int (z_d - z) dt + K_{Dz}(\dot{z}_d - \dot{z}) \quad (\text{III.7})$$

Le terme  $mg$  représente la compensation de la force de gravité, permettant au quadrirotor de maintenir le vol stationnaire.

### III.3.2 Loi de commande PID pour le contrôle du roulis ( $\phi$ )

L'erreur entre la consigne de roulis et la sortie du système est définie par :

$$e_\phi = \phi_d - \phi \quad (\text{III.8})$$

La loi de commande PID appliquée au contrôle de roulis s'écrit sous la forme :

$$u_2 = K_{p\phi} e_\phi + K_{I\phi} \int e_\phi dt + K_{D\phi} \dot{e}_\phi \quad (\text{III.9})$$

Elle peut également être exprimée de manière explicite en fonction des variables de référence et mesurées :

$$u_2 = K_{p\phi}(\phi_d - \phi) + K_{I\phi} \int (\phi_d - \phi) dt + K_{D\phi} (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}) \quad (\text{III.10})$$

### III.3.3 Loi de commande PID pour le contrôle du tangage ( $\theta$ )

L'erreur entre la consigne de tangage et la sortie du système est définie par :

$$e_\theta = \theta_d - \theta \quad (\text{III.11})$$

La loi de commande PID appliquée au contrôle de tangage s'écrit sous la forme :

$$u_3 = K_{p\theta} e_\theta + K_{I\theta} \int e_\theta dt + K_{D\theta} \dot{e}_\theta \quad (\text{III.12})$$

Elle peut également être exprimée de manière explicite en fonction des variables de référence et mesurées :

$$u_3 = K_{p\theta}(\theta_d - \theta) + K_{I\theta} \int (\theta_d - \theta) dt + K_{D\theta} (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) \quad (\text{III.13})$$

### III.3.4 Loi de commande PID pour le contrôle du lacet ( $\psi$ )

L'erreur entre la consigne de lacet et la sortie du système est définie par :

$$e_\psi = \psi_d - \psi \quad (\text{III.14})$$

La loi de commande PID appliquée au contrôle de lacet s'écrit sous la forme :

$$u_4 = K_{p\psi} e_\psi + K_{I\psi} \int e_\psi dt + K_{D\psi} \dot{e}_\psi \quad (\text{III.15})$$

Elle peut également être exprimée de manière explicite en fonction des variables de référence et mesurées :

$$u_4 = K_{p\psi}(\psi_d - \psi) + K_{I\psi} \int (\psi_d - \psi) dt + K_{D\psi} (\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) \quad (\text{III.16})$$

### III.3.5 Formulation vectorielle et matricielle de la commande

La loi de commande complète peut être écrite sous forme matricielle :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + K_p E + K_I \int E dt + K_D E \quad (\text{III.17})$$

Où

$$E = [e_z \quad e_\phi \quad e_\theta \quad e_\psi]^T \quad (\text{III.18})$$

Les matrices de gains des contrôleurs sont définies par les expressions suivantes. Elles permettent de modéliser et d'ajuster le comportement du correcteur pour chaque axe du système.

$$K_p = \begin{bmatrix} K_{pz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{p\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{p\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{p\psi} \end{bmatrix}, \quad K_I = \begin{bmatrix} K_{Iz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{I\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{I\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{I\psi} \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} K_{Dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{D\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{D\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{D\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

## III.4 Résultats de simulation

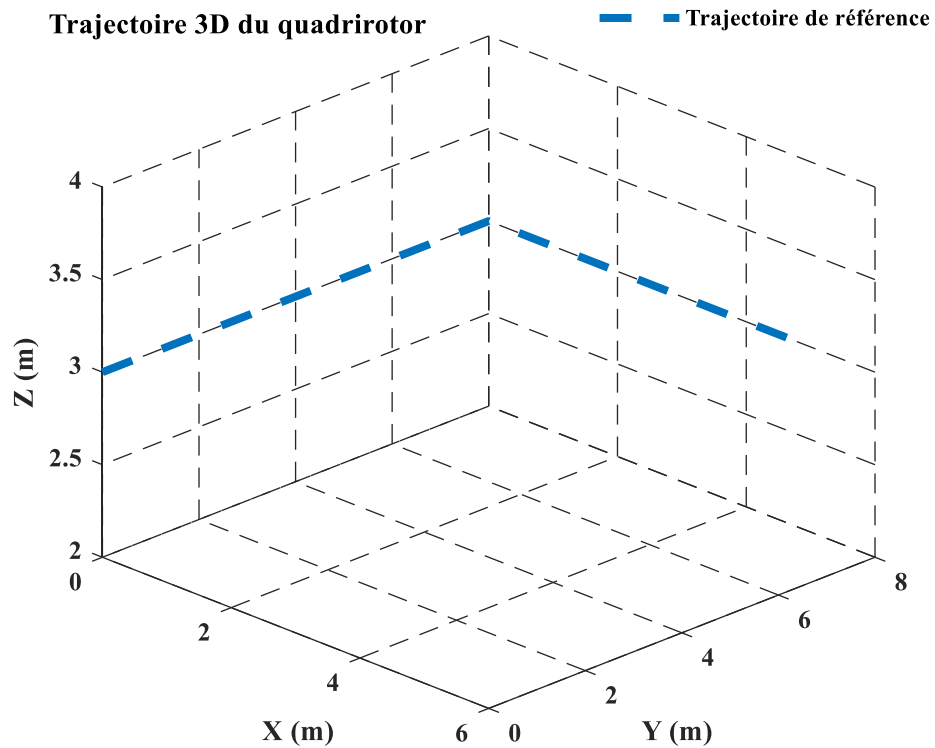
Dans le cadre de l'étude de notre quadrirotor, les simulations sont réalisées à partir des paramètres définis dans l'Annexe N°1, en considérant différentes trajectoires de référence afin d'évaluer les performances du système de commande.

### III.4.1 Référence échelon 3D :

La Figure III.3 illustre la trajectoire de référence en échelon tridimensionnelle (3D), dont l'évolution est définie par les équations suivantes :

$$x_d(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 5, & t \geq 2 \end{cases}, \quad y_d(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 8, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$z_{d(t)} = 3 \text{ m}, \quad \psi_d = 0.3 \text{ rad}$$



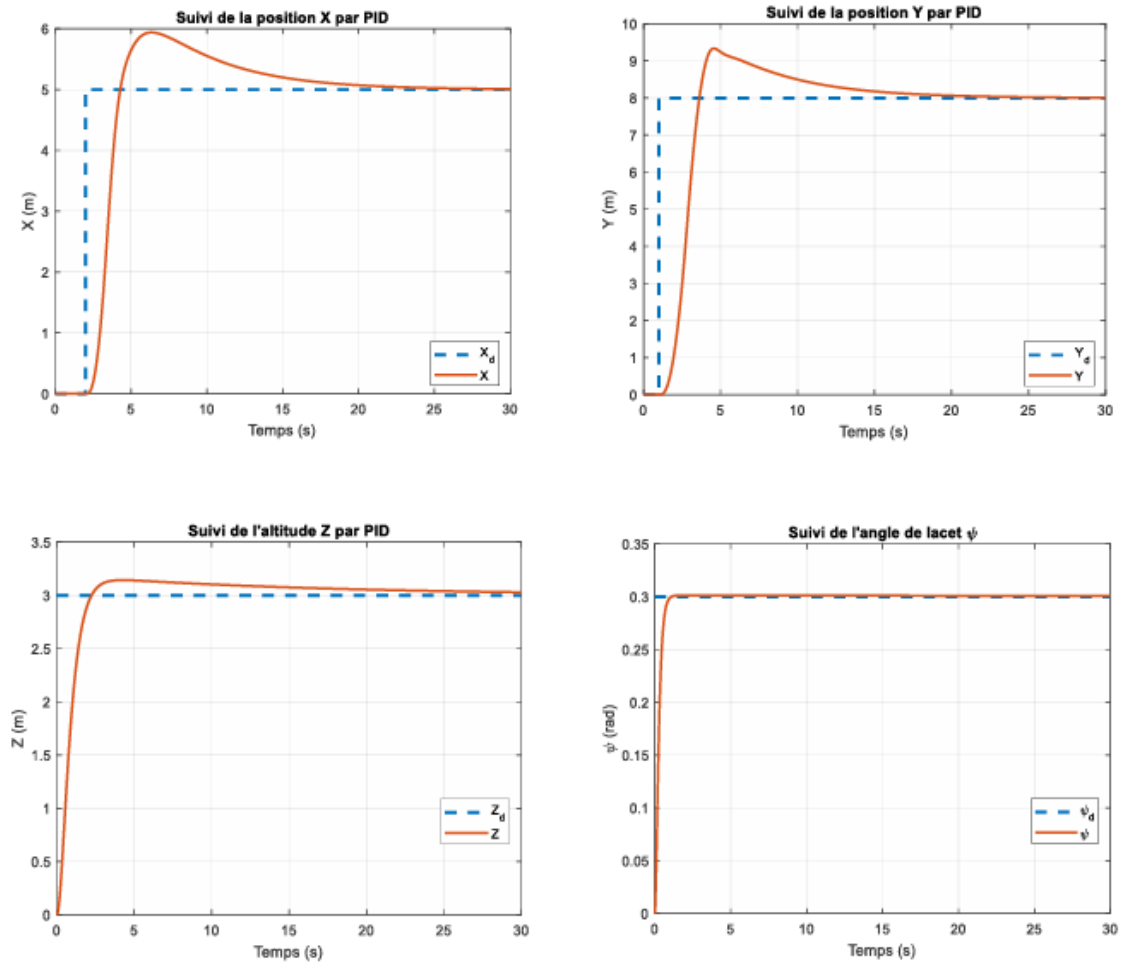
**Figure III.3:** Trajectoire de référence échelon 3D du quadrirotor.

#### III.4.1.1 Calcul Les gains de commande

| Gains    | $K_p$ | $K_i$ | $K_d$ |
|----------|-------|-------|-------|
| <b>x</b> | 8.40  | 1.35  | 4     |
| <b>y</b> | 8.40  | 1.35  | 4     |
| <b>z</b> | 15    | 0.90  | 5.33  |

**Tableau III.1 :**Gains de Commande PID à une trajectoire échelon .

### III.4.1.2 Simulation :



**Figure III.4 :** Les réponses du système (PID) Pour  $(X, Y, Z, \psi)$ .

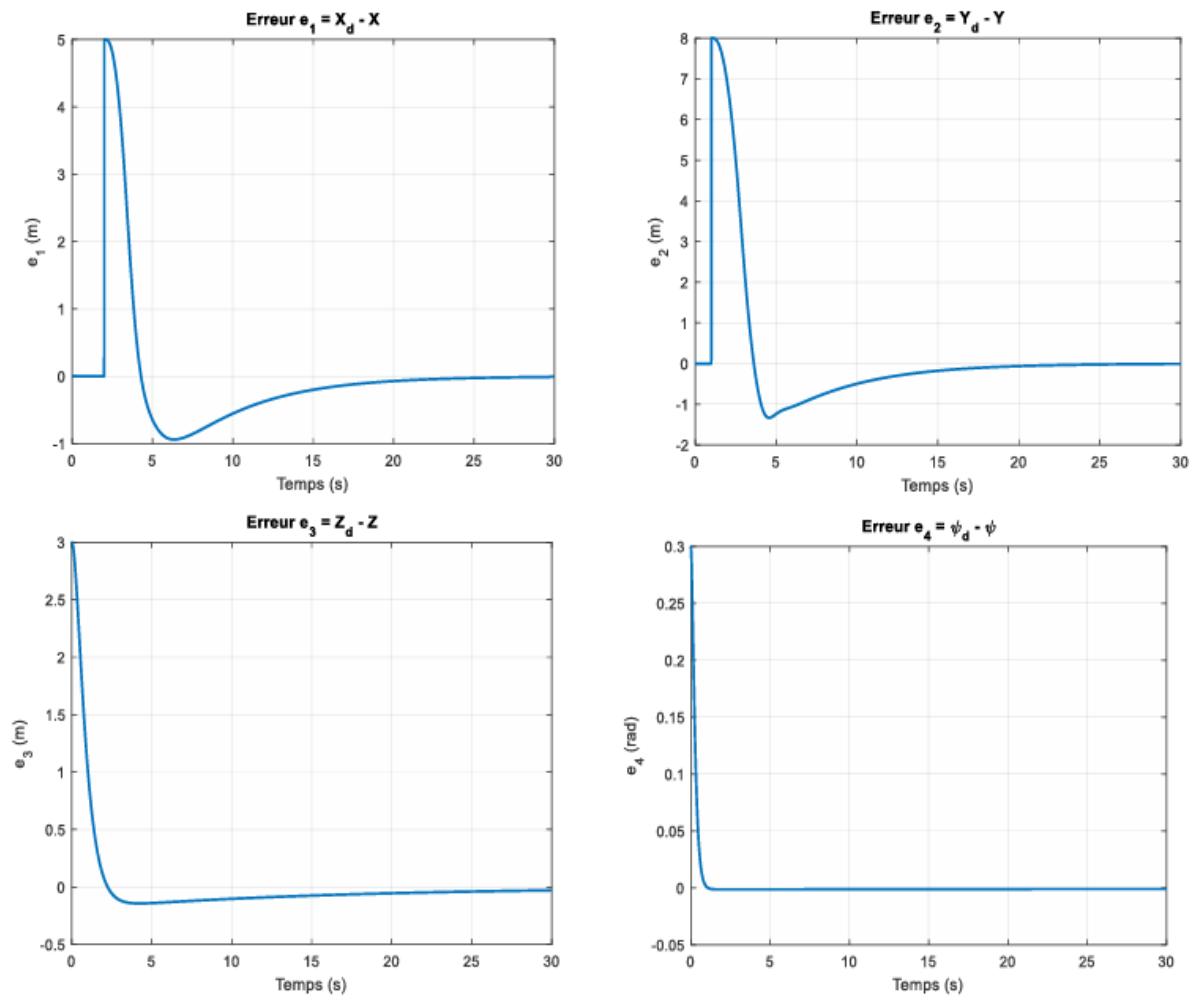


Figure III.5 : Les erreurs poursuite  $(X, Y, Z, \psi)$ .

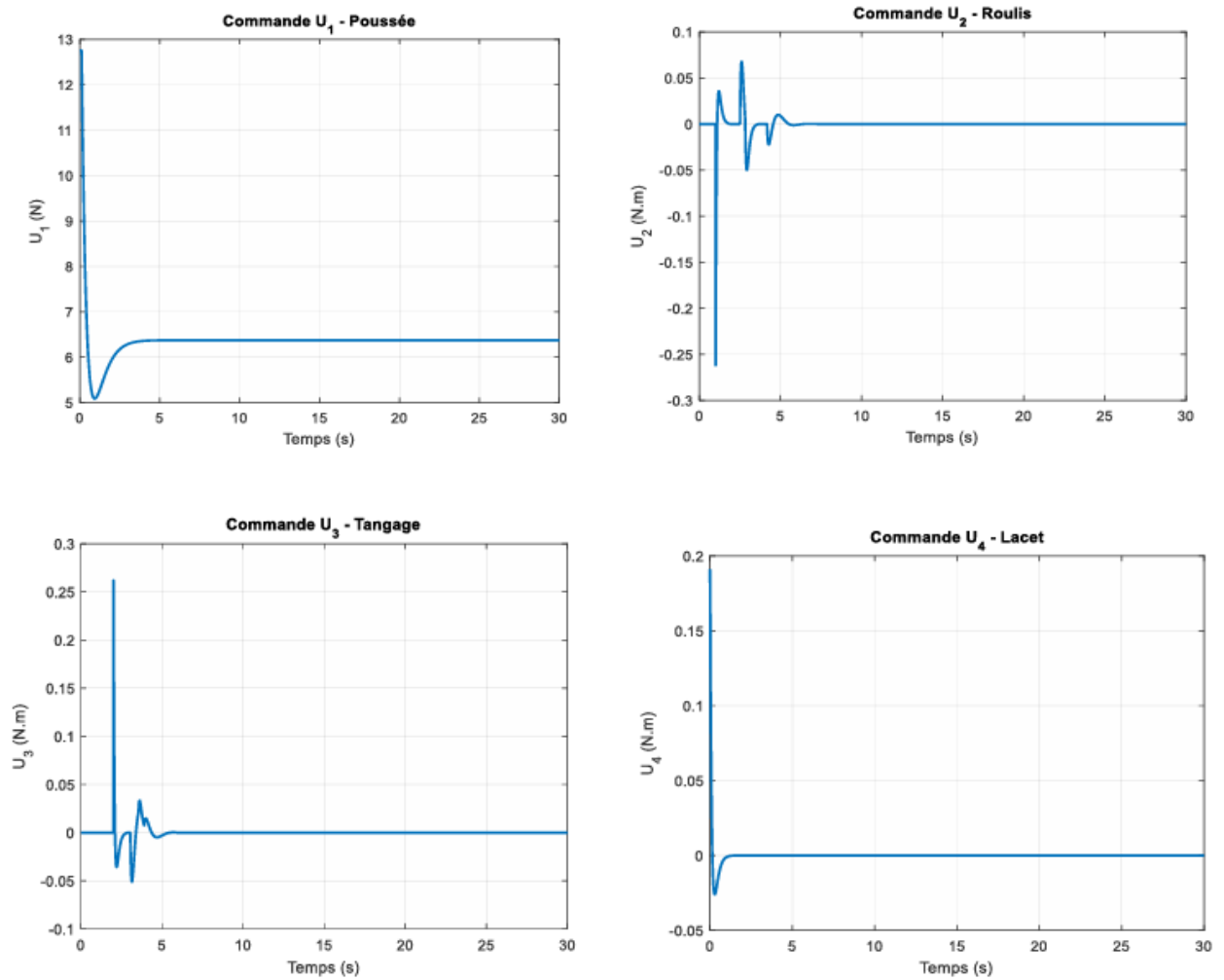


Figure III.6 : Les commandes ( $U_1$   $U_2$   $U_3$   $U_4$ ).

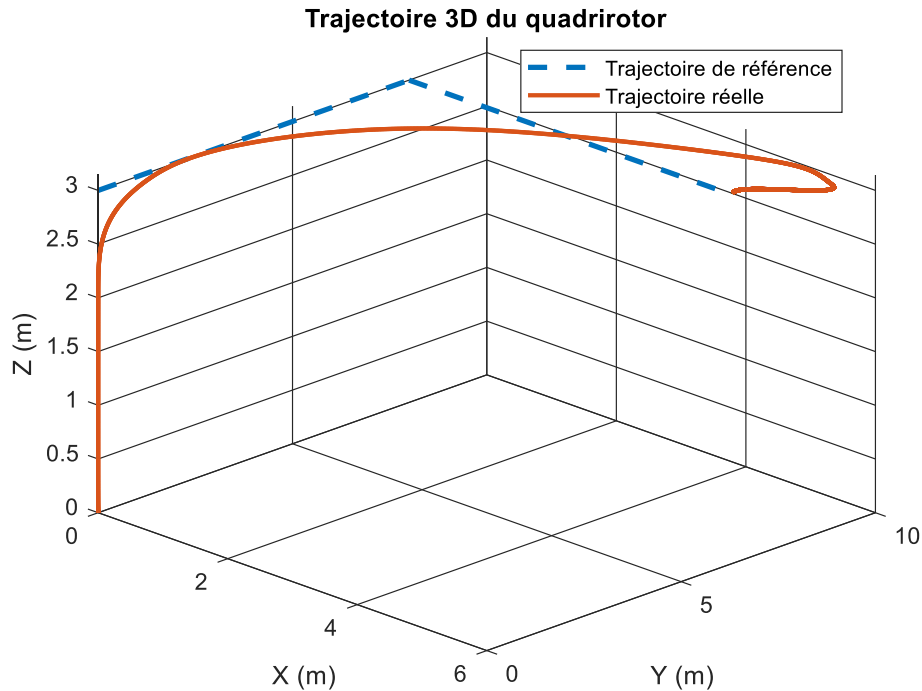


Figure III.7: Suivi de trajectoire 3D du Quadrirotor.

### III.4.1.3 Interprétation des résultats

**La figure (III.4) :** La figure présente le suivi des positions  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  et de l'angle de lacet  $\psi$  par une commande PID. On constate que le quadrirotor atteint les différentes références avec un temps de réponse relativement court. Les positions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  présentent un léger dépassement transitoire, puis convergent progressivement vers leurs valeurs de consigne. Concernant l'angle de lacet  $\psi$ , le suivi est rapide et précis, avec un dépassement très faible. Après le régime transitoire, les erreurs de suivi deviennent pratiquement nulles, ce qui montre une bonne capacité du PID à assurer la stabilisation du quadrirotor autour des références imposées. la commande PID permet d'obtenir un suivi satisfaisant des trajectoires, avec une bonne précision en régime permanent et une stabilité acceptable du système.

**La figure (III.5) :** La figure montre l'évolution des erreurs de suivi ( $e_1, e_2, e_3, e_4$ ), On observe que les erreurs diminuent rapidement après le régime transitoire et convergent progressivement vers zéro. Les erreurs en  $X$  et  $Y$  présentent un léger dépassement avant de se stabiliser, tandis que l'erreur en  $Z$  reste faible après quelques secondes. L'erreur de lacet  $\psi$  converge très rapidement vers zéro, traduisant un suivi précis de l'orientation, la commande PID assure une bonne précision de suivi et une stabilisation satisfaisante du quadrirotor, avec des erreurs statiques pratiquement nulles en régime permanent.

**La figure (III.6) :** La figure présente l'évolution des quatre commandes  $U_1$  (poussée),  $U_2$  (roulis),  $U_3$  (tangage) et  $U_4$  (lacet). On constate que les commandes présentent des variations importantes uniquement durant le régime transitoire, afin de permettre au quadrirotor d'atteindre les références. Après quelques secondes, les commandes  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_4$  convergent rapidement vers zéro, tandis que la poussée  $U_1$  se stabilise autour d'une valeur constante nécessaire au maintien de l'altitude. Ainsi, les signaux de commande restent stables en

régime permanent et montrent que le PID permet de stabiliser efficacement le quadrirotor tout en fournissant les efforts de commande nécessaires au suivi des références.

**La figure (III.7) :** La figure montre la comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire réelle du quadrirotor. On constate que la trajectoire réelle suit globalement la trajectoire imposée, avec un écart principalement observé durant le régime transitoire.

Après cette phase, le quadrirotor se rapproche progressivement de la référence, ce qui traduit une bonne capacité de suivi de la trajectoire et une stabilisation satisfaisante du système. la commande PID permet au quadrirotor de suivre la trajectoire 3D de référence avec une erreur relativement faible en régime permanent.

#### III.4.1.4 Tableaux de synthèse des performances

| Axe    | Consigne | Instant d'application | Dépassement max        | Erreur statique ( $t \rightarrow \infty$ ) | Temps d'établissement |
|--------|----------|-----------------------|------------------------|--------------------------------------------|-----------------------|
| $X$    | 5 m      | $t = 2$ s             | $\approx 1$ m (20 %)   | 0 m                                        | 25 – 30 s             |
| $Y$    | 8 m      | $t = 1$ s             | $\approx 1,3$ m (16 %) | 0 m                                        | 25 – 30 s             |
| $Z$    | 3 m      | $t = 0$ s             | $\approx 0,15$ m (5 %) | 0 m                                        | < 3 s                 |
| $\psi$ | 0,3 rad  | $t = 0$ s             | Aucun                  | 0 rad                                      | < 2 s                 |

**Tableau III.2 – Synthèse des performances : réponse aux échelons.**

| Commande        | Pic transitoire  | Régime permanent           |
|-----------------|------------------|----------------------------|
| $U_1$ (poussée) | 12,8 N           | 6,38 N $\approx m \cdot g$ |
| $U_2$ (roulis)  | $\pm 0,26$ N·m   | 0 N·m                      |
| $U_3$ (tangage) | $\pm 0,26$ N·m   | 0 N·m                      |
| $U_4$ (lacet)   | faible amplitude | 0 N·m                      |

**Tableau III.3 – Amplitudes des signaux de commande : réponse aux échelons.**

### III.4.2 Trajectoire Hélicoïdale 3D :

La Figure III.8 illustre la trajectoire de référence Hélicoïdale tridimensionnelle (3D), dont l'évolution est définie par les équations suivantes :

$$x_d = 6 \sin\left(\frac{8\pi}{20}(t - 2)\right), \quad y_d = 6 \cos\left(\frac{8\pi}{20}(t - 2)\right), \quad z_d = t - 2$$

Pour  $2 \leq t \leq 22 \text{ s}$ , rayon = 6 m, hauteur = 20 m, nombre de tours = 4, début de la trajectoire = 2 s,  $\psi_d = 0.3 \text{ rad}$

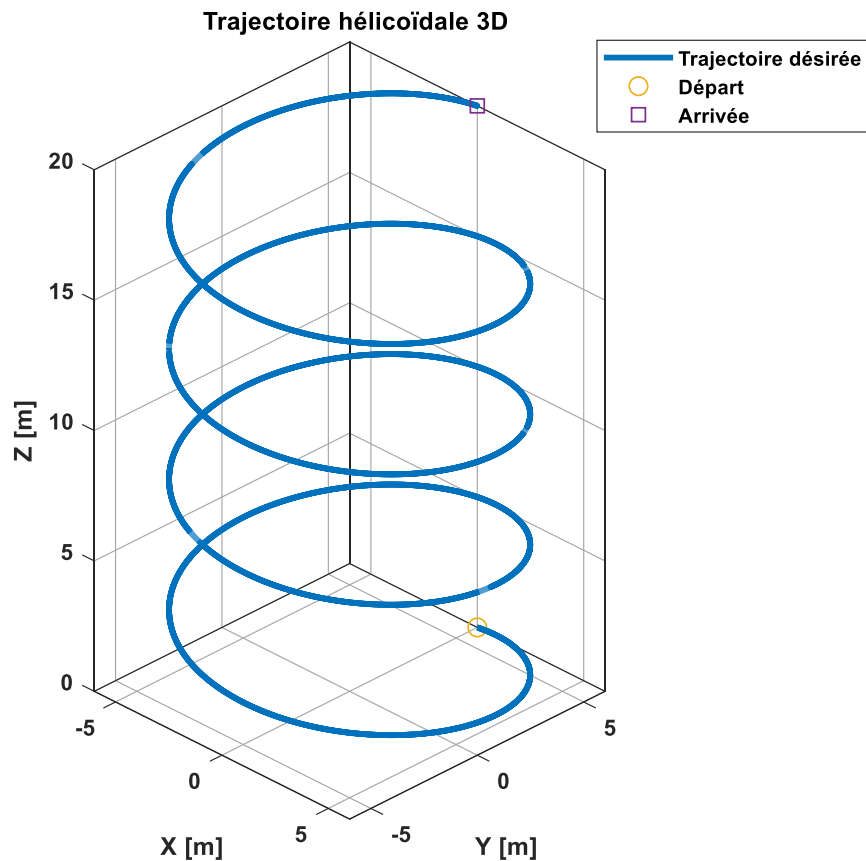


Figure III.8: Trajectoire Hélicoïdale 3D.

#### III.4.2.1 Calcul Les gains de commande

| Gain     | $\zeta$ | $\omega_n$ | $ts$ | $K_{px}$ | $K_{ix}$ | $K_{dx}$ | $K_{py}$ | $K_{iy}$ | $K_{dy}$ | $K_{pz}$ | $K_{iz}$ | $K_{dz}$ |
|----------|---------|------------|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Position | 0.8     | 2.4 rad/s  | 2.1s | 5.76     | 0.15     | 3.84     | 5.76     | 0.15     | 3.84     | 0        | 0        | 0        |
| Altitude | 0.85    | 3 rad/s    | 1.6s | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 9        | 1.5      | 5.10     |

Tableau III.4 : Gains de Commande PID à une trajectoire Hélicoïdale.

### III.4.2.2 Simulation :

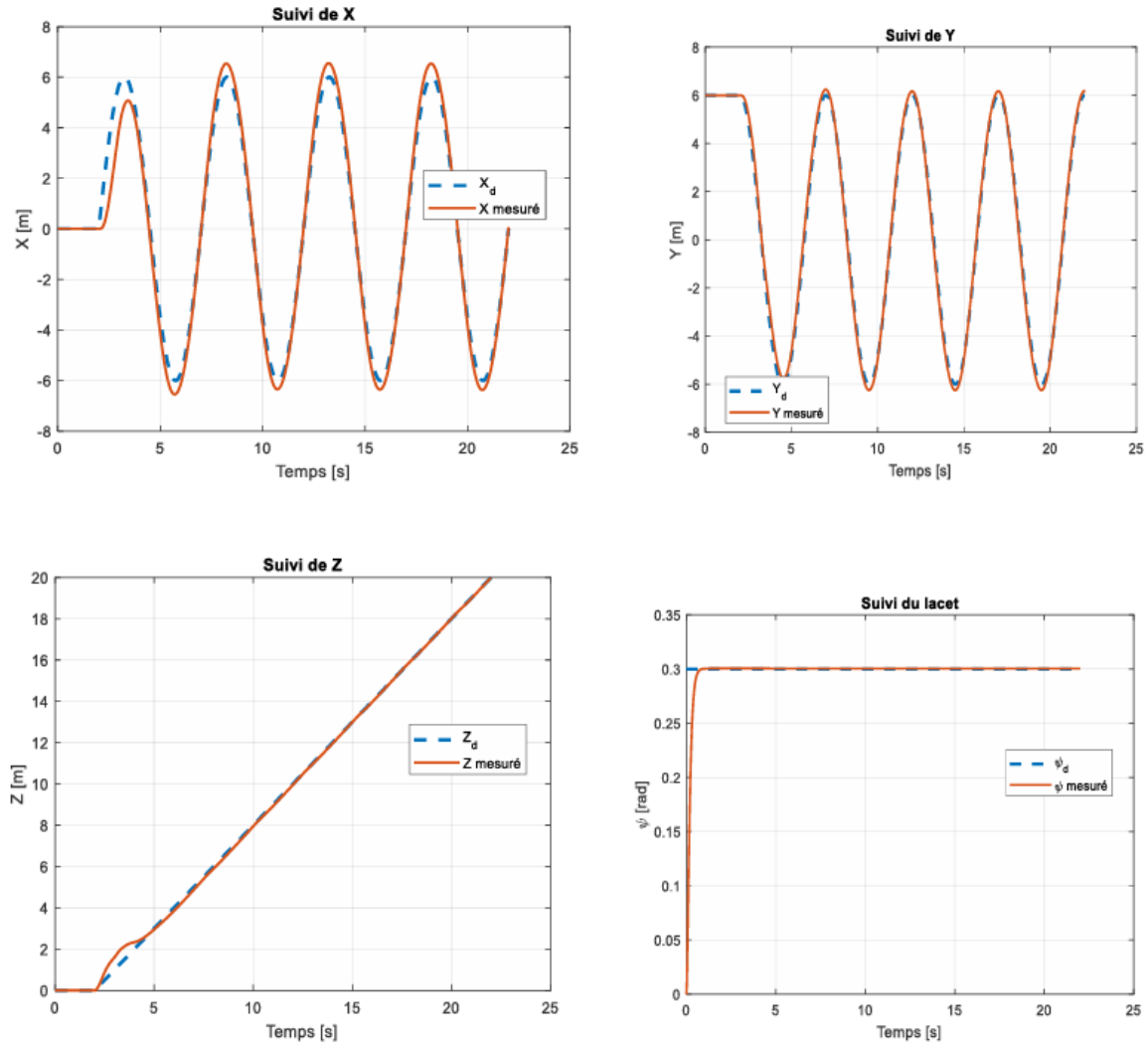


Figure III.9 : Les réponses du système (PID) pour trajectoire hélicoïdale  $(X, Y, Z, \psi)$ .

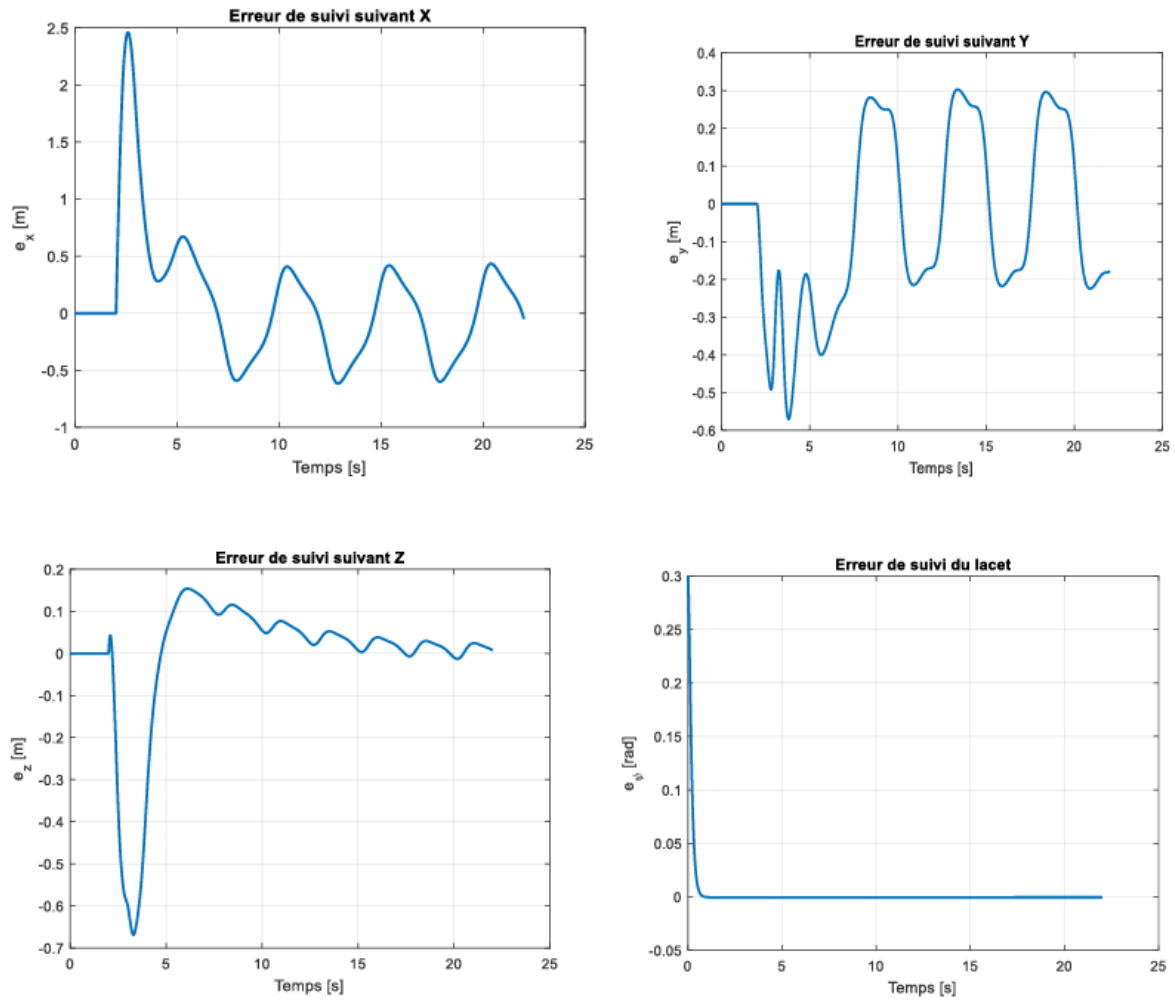


Figure III.10: Les erreurs poursuite  $(X, Y, Z, \psi)$ .

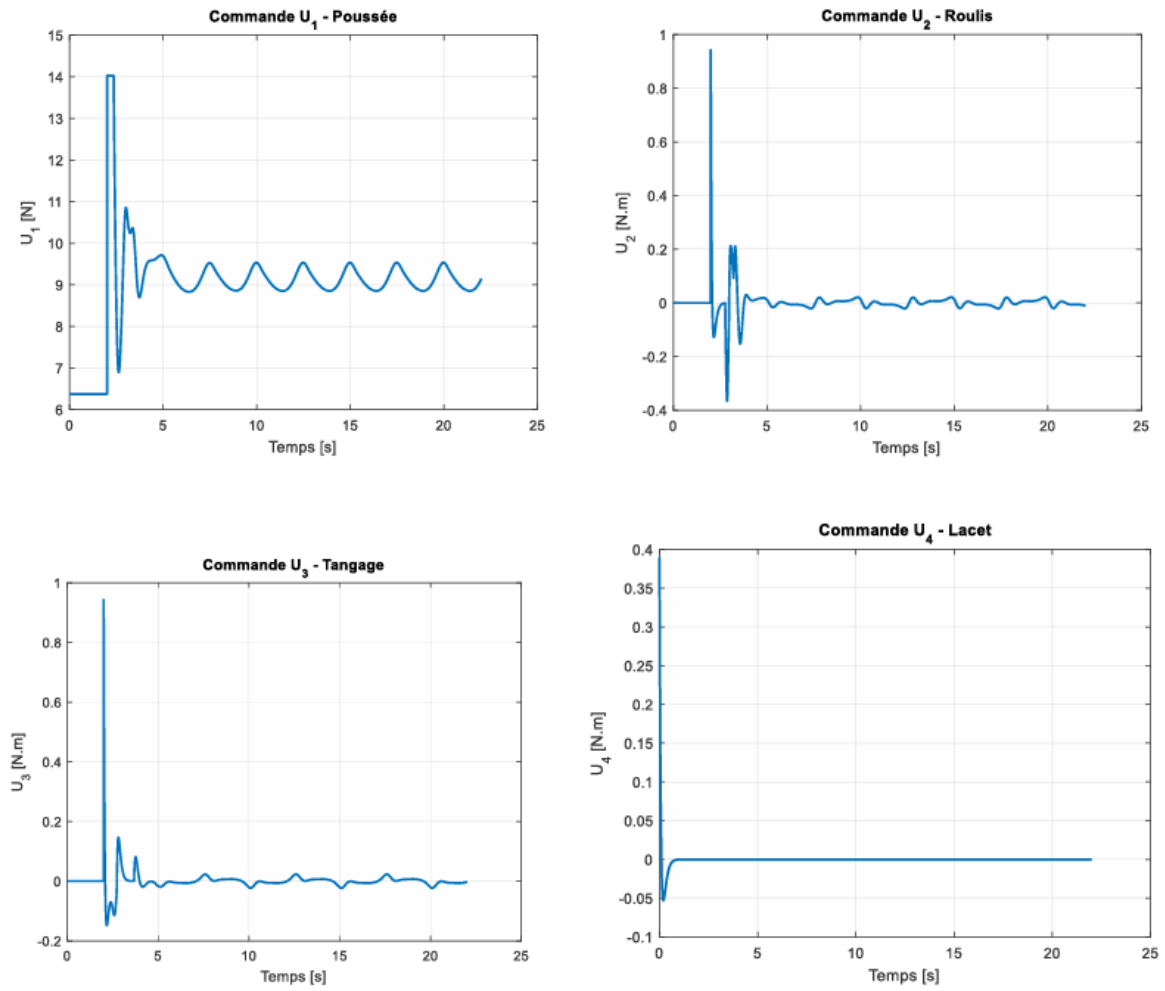
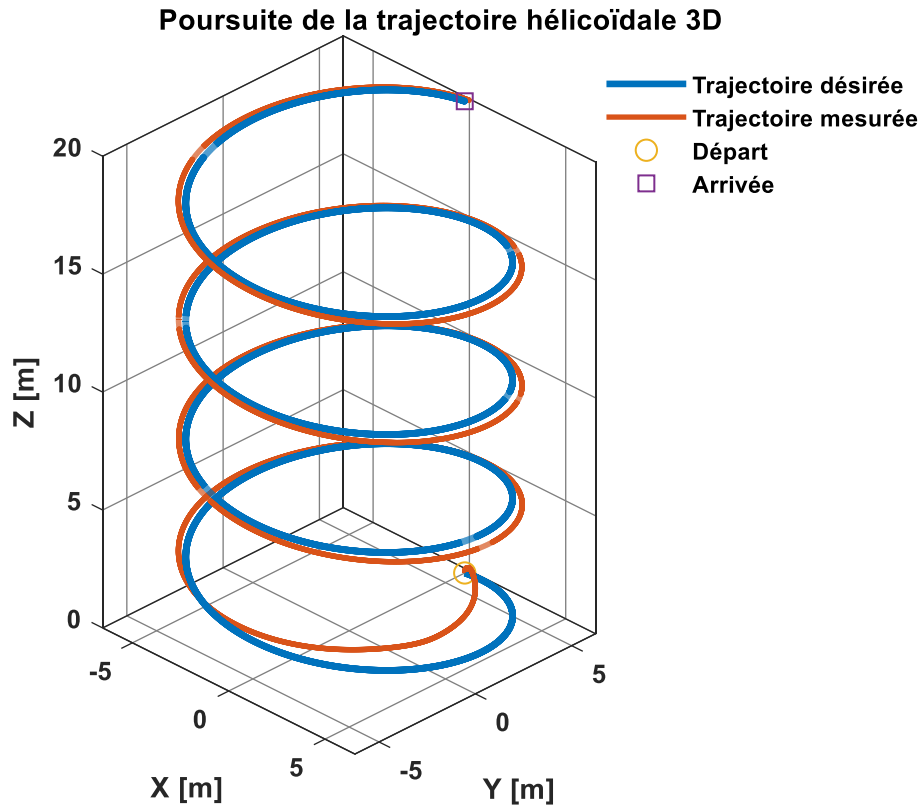


Figure III.11: les signaux de commande  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ .



**Figure III.12:** Poursuite de la trajectoire hélicoïdale 3D.

### III.4.3 Interprétation des résultats

**La figure (III.9) :** La figure présente le suivi des références en X, Y, Z et en angle de lacet  $\psi$ . On constate que les trajectoires mesurées suivent globalement les trajectoires de référence avec une bonne précision. Pour X et Y, malgré de légers écarts au niveau des extrema, le suivi reste satisfaisant et l'erreur demeure faible. Pour Z, la trajectoire mesurée suit presque parfaitement la référence, tandis que le suivi du lacet  $\psi$  est très rapide et précis, le système de commande assure un suivi satisfaisant des différentes références, avec une bonne stabilité et une erreur de suivi réduite, notamment en régime permanent.

**La figure (III.10) :** La figure présente les erreurs de suivi selon les axes X, Y, Z ainsi que l'erreur de lacet. On observe des erreurs transitoires importantes au début du mouvement, suivies d'une diminution progressive. Les erreurs en X et Y restent oscillatoires en régime permanent, mais avec une amplitude limitée. L'erreur en Z diminue progressivement et se rapproche de zéro, tandis que l'erreur de lacet converge très rapidement vers zéro, le système présente un suivi globalement satisfaisant des références, avec une bonne précision sur l'altitude et l'orientation, malgré de petites oscillations résiduelles sur les positions X et Y.

**La figure (III.11) :** Ces courbes illustrent la réponse des signaux de commande ( $U_1$  : poussée,  $U_2$  : roulis,  $U_3$  : tangage,  $U_4$  : lacet) appliqués à un système quadrirotor. On observe d'abord un régime transitoire prononcé autour de l'instant  $t \approx 2s$ , où toutes les commandes atteignent des valeurs de crête (pics) résultant de la réaction du contrôleur à un changement de consigne ou à une perturbation, suivi d'oscillations amorties qui s'atténuent progressivement. Après cette phase transitoire, la commande de poussée  $U_1$  se stabilise autour d'une valeur

constante d'environ 9 N, tandis que les commandes de couple  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_4$  convergent vers zéro, traduisant l'atteinte d'un état de vol stationnaire (hover) et le retour à l'équilibre du système. Ce comportement démontre l'efficacité et la stabilité de la loi de commande utilisée, bien qu'un temps d'établissement notable ( $\sim 10$ - $15$ s) et des pics de commande relativement élevés soient à prendre en compte lors de l'évaluation des performances et des contraintes des actionneurs.

**La figure (III.12) :** Ces figures illustrent la poursuite d'une trajectoire hélicoïdale par le quadrirotor, comparant la trajectoire désirée (référence) à la trajectoire réellement mesurée. La projection dans le plan XY montre un suivi globalement satisfaisant du cercle de référence (rayon  $\approx 6$  m), avec toutefois un écart radial notable sur une portion de la trajectoire, traduisant une erreur transitoire due à la dynamique du contrôleur face à la courbure constante du chemin. En revanche, la vue 3D révèle une excellente concordance en altitude sur l'ensemble des cinq tours de spirale (de  $Z=0$  à  $Z\approx 22$  m), du point de départ jusqu'au point d'arrivée, confirmant la robustesse de la commande verticale. Ces résultats valident globalement l'efficacité de la loi de commande proposée pour le suivi de trajectoires 3D complexes, tout en révélant une marge d'amélioration au niveau de la précision du contrôle horizontal (X, Y).

#### III.4.3.1 Tableaux de synthèse des performances

| Axe    | Type de référence        | Erreur transitoire max | Erreur en régime permanent           | Observation                   |
|--------|--------------------------|------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| $X$    | Sinusoidale ( $R = 6$ m) | 2,45 m                 | Oscillation bornée $[-0,6 ; +0,4]$ m | Erreur de traînage périodique |
| $Y$    | Sinusoidale ( $R = 6$ m) | -0,57 m                | Oscillation bornée $[-0,2 ; +0,3]$ m | Déphasage $\pi/2$ avec X      |
| $Z$    | Rampe ( $v_z = 1$ m/s)   | -0,67 m                | $< 0,08$ m                           | Quasi nulle                   |
| $\psi$ | Échelon (0,3 rad)        | 0,3 rad (initiale)     | 0 rad (exacte)                       | Asservissement parfait        |

**Tableau III.3 :** Synthèse des performances : poursuite de la trajectoire hélicoïdale 3D.

| Commande   | Transitoire                    | Régime permanent                           |
|------------|--------------------------------|--------------------------------------------|
| $U_1$      | 14 N (pic à $t = 2$ s)         | Oscille entre 8,8 et 9,5 N (moyenne 9,2 N) |
| $U_2, U_3$ | $\approx 0,94$ N·m (impulsion) | $\pm 0,02$ N·m (sinusoïdal, en quadrature) |
| $U_4$      | 0,39 N·m ( $t = 0$ )           | 0 N·m ( $t > 1$ s)                         |

**Tableau III.4 :** Amplitudes des signaux de commande : trajectoire hélicoïdale 3D.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les performances de la commande PID appliquée au quadrirotor à travers différentes configurations de trajectoires, notamment des références en échelon ainsi qu'une trajectoire hélicoïdale tridimensionnelle. Les résultats obtenus montrent que cette commande permet d'assurer une stabilisation satisfaisante du système et un suivi globalement précis des différentes références.

Les simulations réalisées mettent en évidence une bonne précision en régime permanent ainsi qu'une capacité satisfaisante de la commande PID à assurer le suivi de trajectoires tridimensionnelles complexes. Toutefois, les oscillations résiduelles et les écarts de suivi observés principalement dans le plan horizontal indiquent que certaines améliorations peuvent être apportées afin d'accroître les performances dynamiques du système.

Ces limitations sont notamment liées aux caractéristiques multivariables, fortement couplées et sous-actionnées du quadrirotor [16]. Il apparaît ainsi pertinent d'envisager une stratégie de commande permettant de mieux prendre en compte les interactions entre les différentes variables du système et d'améliorer ses performances dynamiques.

Dans cette perspective, le chapitre suivant sera consacré à l'étude et à la mise en œuvre de la commande LQR (Linear Quadratic Regulator). Cette approche permettra d'analyser les performances d'une stratégie de commande fondée sur une formulation optimale, notamment en termes de stabilisation, de précision du suivi et de comportement dynamique du quadrirotor.

# **Chapitre IV**

## **La Commande LQR d'un Quadrirotor**

## IV.1 Introduction générale

Le développement rapide des systèmes dynamiques modernes a conduit à l'émergence de techniques de commande avancées capables de répondre aux exigences croissantes en matière de précision, de robustesse et de performance. Dans de nombreux domaines tels que l'aéronautique, l'aérospatiale, la robotique, l'automatisation industrielle et les véhicules autonomes, les méthodes classiques de commande ne permettent pas toujours d'atteindre les performances souhaitées face à la complexité des systèmes actuels.

Parmi les approches modernes de commande, la commande optimale occupe une place importante. Cette méthode consiste à déterminer une loi de commande qui minimise un critère de performance tout en assurant la stabilité et les performances dynamiques du système. L'un des régulateurs optimaux les plus utilisés est le régulateur linéaire quadratique, connu sous le nom de LQR (Linear Quadratic Regulator) [19], [20].

La commande LQR a été développée dans les années 1960 [21] dans le cadre de la théorie moderne du contrôle. Elle repose sur une représentation du système sous forme d'espace d'état et permet de calculer automatiquement les gains de retour d'état optimaux en minimisant une fonction de coût quadratique. Cette approche offre plusieurs avantages par rapport aux méthodes conventionnelles telles que la commande PID, notamment une meilleure prise en compte des interactions entre les variables d'état, une conception systématique et des performances optimales.

Dans le domaine des drones quadrirotors, la commande LQR est particulièrement intéressante en raison de la nature multivariable du système [16]. En effet, le quadrirotor possède plusieurs degrés de liberté fortement couplés et nécessite une commande précise pour assurer la stabilité en roulis, tangage, lacet et altitude. La commande LQR permet de traiter simultanément ces différentes variables tout en optimisant les performances globales du système.

## IV.2 Fondements de la commande LQR

**IV.2.1 Principe général :** Le principe du LQR consiste à déterminer une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$U(t) = -KX(t) \quad (IV.1)$$

Où :

- $X(t)$  : est le vecteur d'état du système ;
- $U(t)$  : est le vecteur des commandes ;
- $K$  : est la matrice de gain LQR à déterminer.

Pour le quadrirotor considéré, on peut utiliser :

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}] \quad (IV.2)$$

Et

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T \quad (IV.3)$$

Avec :

- $u_1$  : commande de poussée ;
- $u_2$  : commande de roulis ;
- $u_3$  : commande de tangage ;
- $u_4$  : commande de lacet.

**IV.2.2 Modèle d'état utilisé par le LQR :** Après linéarisation autour d'un point d'équilibre, le modèle du quadrirotor s'écrit sous la forme :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (IV.4)$$

Et éventuellement :

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \quad (IV.5)$$

Où :

- **A** : est la matrice dynamique du système ;
- **B** : est la matrice d'actionnement ;
- **C** : est la matrice de sortie ;
- **D** : est la matrice de transmission directe.

### IV.2.3 Pourquoi utiliser une commande optimale

Une commande classique cherche généralement à réduire l'erreur entre la consigne et la sortie. Le LQR va plus loin : il cherche la meilleure commande, au sens d'un critère mathématique défini à l'avance.

On souhaite simultanément :

1. maintenir les états proches de leur valeur désirée ;
2. stabiliser le quadrirotor ;
3. éviter des commandes excessivement importantes ;
4. limiter les mouvements brusques des actionneurs ;
5. obtenir une réponse suffisamment rapide.

Ces objectifs peuvent être contradictoires. Par exemple, augmenter fortement la commande peut réduire rapidement l'erreur, mais provoquer des efforts importants sur les moteurs. Le LQR permet donc de trouver un compromis entre ces deux objectifs.

### IV.2.4 Fonction de coût quadratique

Le fondement mathématique du LQR est une fonction de coût quadratique. Pour un système continu, le critère généralement utilisé est :

$$J = \int_0^{\infty} [X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)]dt \quad (IV.6)$$

Cette expression constitue le cœur de la commande LQR. Le premier terme  $X^T Q X$  représente le coût associé aux écarts des états. Le deuxième terme  $U^T R U$  représente le coût associé à l'effort de commande. Ainsi, le LQR cherche à minimiser :

$$J \rightarrow \min \quad (IV.7)$$

**IV.2.5 Rôle de la matrice Q :** La matrice Q permet de définir l'importance accordée aux différents états. Elle est généralement choisie symétrique et semi-définie positive :

$$Q = Q^T \geq 0 \quad (IV.8)$$

Dans le cas du quadrirotor, on peut écrire :

$$Q = \text{diag}(q\phi, q\dot{\phi}, q\theta, q\dot{\theta}, q\psi, q\dot{\psi}, qx, q\dot{x}, qy, q\dot{y}, qz, q\dot{z}) \quad (IV.9)$$

Avec

$$q_i \geq 0$$

Chaque coefficient indique le poids associé à l'état correspondant. Par exemple, si :

$$qz \gg qx \quad (IV.10)$$

Cela signifie que l'on accorde davantage d'importance à l'erreur d'altitude qu'à l'erreur de position selon  $x$ . De même, une valeur élevée de :

$$q\phi \quad (IV.11)$$

Force le contrôleur à réduire rapidement l'écart de roulis. Influence de  $Q$  en général :

$Q \uparrow \Rightarrow$  Réduction plus importante des erreurs d'états, mais cela peut également conduire à une commande plus énergique.

Pour choisir  $Q$ , on peut utiliser la méthode de Bryson [22] :

$$q_i = \frac{1}{x_{i,max}^2} \quad (IV.12)$$

Où  $x_{i,max}$  représente l'erreur maximale acceptable

#### IV.2.6 Rôle de la matrice $R$ : La matrice $R$ pénalise l'effort de commande.

Elle est symétrique et définie positive :

$$R = R^T > 0 \quad (IV.13)$$

La matrice  $R$  s'écrit :

$$R = \text{diag}(r_i) = \text{diag}(r_1, r_2, r_3, r_4) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \quad (IV.14)$$

Où :

- $r_1$  correspond à  $u_1$  ;
- $r_2$  correspond à  $u_2$  ;
- $r_3$  correspond à  $u_3$  ;
- $r_4$  correspond à  $u_4$  .

Et, Par la méthode de Bryson

$$r_i = \frac{1}{u_{i,max}^2} \quad (IV.15)$$

Où  $u_{i,max}$  est la valeur maximale admissible de chaque commande.

Une augmentation de  $R$  signifie que l'on souhaite limiter davantage l'effort de commande. On peut donc résumer :

- $Q \rightarrow$  importance des états
- $R \rightarrow$  importance de l'effort de commande

#### IV.2.7 Signification physique des matrices $Q$ et $R$ dans la commande LQR

Dans le cas général, les matrices  $Q$  et  $R$  permettent d'intégrer les priorités physiques du concepteur au sein du critère d'optimisation de la commande LQR. Le critère quadratique, introduit précédemment à l'équation (IV.6), comporte ainsi deux contributions principales :

$$X^T Q X + U^T R U \quad (IV.16)$$

### IV.2.7.1 Signification physique de $Q$

La matrice  $Q$  représente l'importance physique accordée aux différentes variables d'état. Pour un système d'état :

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \quad (IV.17)$$

On choisit généralement :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{bmatrix} \quad (IV.18)$$

Ainsi :

$$X^T Q X = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2 \quad (IV.19)$$

Chaque coefficient  $q_i$  représente donc le poids attribué à l'écart de l'état  $x_i$ .

- Si  $q_i$  est élevé,  $q_i \uparrow \Rightarrow$  l'état  $x_i$  est fortement pénalisé. Le contrôleur cherchera donc à maintenir cet état très proche de sa référence.
- Si  $q_i$  est faible  $q_i \downarrow \Rightarrow$  l'état  $x_i$  est moins prioritaire.

### IV.2.7.2 Signification physique de $R$

La matrice  $R$  représente le coût ou la pénalisation de l'utilisation des actionneurs. Pour un système comportant  $m$  entrées :

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T \quad (IV.20)$$

On peut utiliser :

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_m \end{bmatrix} \quad (IV.21)$$

Et :

$$U^T R U = r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \dots + r_m u_m^2 \quad (IV.22)$$

Chaque coefficient  $r_i$  indique donc à quel point l'utilisation de l'actionneur  $u_i$  est pénalisée.

- Si  $r_i$  est élevé,  $r_i \uparrow \Rightarrow$  l'actionneur  $u_i$  est fortement pénalisé, Le LQR cherchera à utiliser moins cette commande.
- Si  $r_i$  est faible,  $r_i \downarrow \Rightarrow$  l'utilisation de  $u_i$  est moins pénalisée. Le contrôleur pourra utiliser davantage cette action pour réduire les erreurs.

On peut résumer ainsi :

| Matrice | Signification physique | Question principale                               |
|---------|------------------------|---------------------------------------------------|
| $Q$     | Importance des états   | « Quelles erreurs dois-je réduire en priorité ? » |
| $R$     | Coût de l'actionnement | « Combien puis-je solliciter mes actionneurs ? »  |

$Q \rightarrow$  priorité donnée aux performances.

$R \rightarrow$  priorité donnée à l'économie/limitation de l'actionnement.

**IV.2.7.3 Pourquoi Q et R sont-ils importants :** Le choix de Q et R influence directement le gain optimal :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (IV.23)$$

Où  $P$  est obtenu à partir de l'équation de Riccati :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (IV.24)$$

$$\dot{X} = (A - B K) X \quad (IV.25)$$

Le choix de  $Q$  et  $R$  constitue donc un moyen de régler le comportement du  $LQR$ .

## IV.3 Résolution du problème $LQR$

La résolution du problème  $LQR$  consiste à déterminer la loi de commande optimale qui minimise un critère quadratique tout en respectant la dynamique du système.

### IV.3.1 Modèle d'état général

On considère un système linéaire invariant dans le temps :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (IV.26)$$

avec :

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m \quad (IV.27)$$

Où  $A$  est la matrice d'état et  $B$  la matrice de commande. On cherche une commande par retour d'état :

$$u(t) = -K_x(t) \quad (IV.28)$$

Où :

$$K \in R^{m \times n} \quad (IV.29)$$

Est la matrice de gain optimale.

**IV.3.2 Définition du critère à minimiser :** Le problème  $LQR$  consiste à minimiser le critère quadratique

$$J = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (IV.30)$$

Avec :

$$Q = Q^T \geq 0 \quad (IV.31)$$

Et

$$R = R^T > 0 \quad (IV.32)$$

Le premier terme :  $x^T Q x$ , Pénalise les écarts des variables d'état.

Le second terme :  $u^T R u$ , pénalise l'effort de commande.

L'objectif est donc :  $J \rightarrow \min$

## IV.4 Détermination de la commande optimale

### IV.4.1 Loi de commande LQR

La minimisation du critère quadratique conduit à une loi de commande par retour d'état :

$$U(t) = -K X(t) \quad (IV.33)$$

Où  $K$  est la matrice de gain optimale. Pour un système à 12 états et 4 commandes :

$$K \in R^{4 \times 12} \quad (IV.34)$$

On peut donc écrire :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1,12} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2,12} \\ k_{31} & k_{32} & \dots & k_{3,12} \\ k_{41} & k_{42} & \dots & k_{4,12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

Et :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = -K [\phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad z \quad \dot{z}]^T \quad (\text{IV.36})$$

Pour déterminer la commande optimale, on minimise l'expression précédente par rapport à.

On dérive donc par rapport à  $u$  :

$$\frac{\partial}{\partial u} [x^T Q x + u^T R u + 2x^T P(Ax + Bu)] = 0 \quad (\text{IV.37})$$

Les termes indépendants de  $u$  disparaissent. On obtient :

$$2Ru + 2B^T P x = 0 \quad (\text{IV.38})$$

Donc :

$$Ru + B^T P x = 0 \quad (\text{IV.39})$$

Comme  $R$  est inversible :

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (\text{IV.40})$$

Ainsi, la commande optimale s'écrit :

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (\text{IV.41})$$

En définissant :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (\text{IV.42})$$

On obtient finalement :

$$u^*(t) = -Kx(t) \quad (\text{IV.43})$$

## IV.4.2 Équation algébrique de Riccati

Il reste à déterminer la matrice  $P$ . En remplaçant la commande optimale :

$$u^* = -R^{-1} B^T P x \quad (\text{IV.44})$$

Dans l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman [23], on obtient l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (\text{IV.45})$$

Cette équation est fondamentale dans la résolution du LQR. La procédure est donc :

$$A, B, Q, R \rightarrow P \rightarrow K \rightarrow u^* \quad (\text{IV.46})$$

## IV.4.3 Calcul du gain optimal

Une fois l'équation de Riccati résolue, on obtient  $P$ . Le gain optimal est alors :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (\text{IV.47})$$

La commande optimale devient :

$$u^*(t) = -Kx(t) \quad (\text{IV.48})$$

Cette commande est dite optimale parce qu'elle minimise le critère  $J$ .

## IV.4.4 Condition de stabilité

Le gain  $K$  obtenu par le LQR doit permettre de stabiliser le système. On vérifie donc les valeurs propres :

$$\lambda_i(A - BK) \quad (\text{IV.49})$$

Pour un système continu, la condition de stabilité asymptotique est :

$$Re[\lambda_i(A - BK)] < 0 \quad (IV.50)$$

#### IV.4.5 Propriétés de la commande LQR

La commande LQR présente plusieurs propriétés importantes.

**Stabilité** Si le système est commandable et que les matrices **Q** et **R** sont choisies correctement, le système en boucle est asymptotiquement stable [19].

**Optimalité** La commande obtenue minimise rigoureusement la fonction de coût définie.

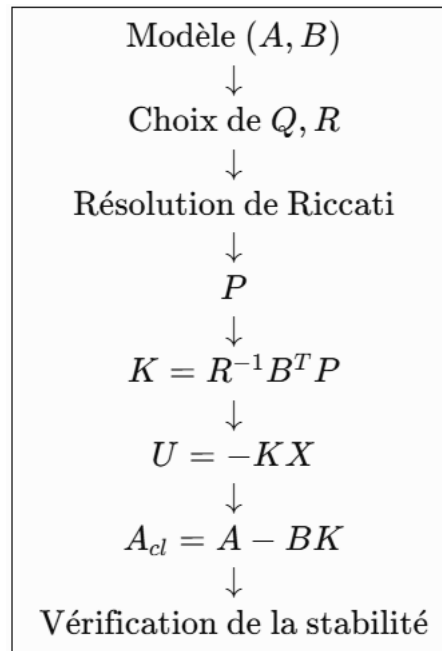
**Robustesse** La commande LQR possède généralement de bonnes marges de stabilité face aux perturbations et aux incertitudes modérées [19].

**Réponse Rapide** Le système converge rapidement vers son état d'équilibre.

**Faible Dépassement** Le dépassement est généralement plus faible que celui obtenu avec une commande PID mal réglée [16].

#### IV.4.6 Procédure générale de recherche

La recherche de la commande LQR peut donc être résumée par les étapes suivantes :



#### IV.4.7. Application au quadrirotor

D'après les équations (IV.4 et IV.5) on peut écrire le modèle linéaire suivant :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (IV.51)$$

Avec :

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T \quad (IV.52)$$

Et :

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T \quad (IV.53)$$

Dans ce cas :

$$K \in R^{4 \times 12} \quad (IV.54)$$

La loi de commande est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = -K [\phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad z \quad \dot{z}]^T$$

Pour un suivi de trajectoire, il est préférable de travailler avec l'erreur d'état :

$$\tilde{X} = X - X_d \quad (IV.55)$$

Et d'utiliser :

$$U = U_d - K(X - X_d) \quad (IV.56)$$

Où  $U_d$  représente la commande nominale nécessaire au suivi de la trajectoire désirée. La synthèse de la loi de commande **LQR** appliquée au quadrirotor nécessite, dans un premier temps, la détermination des matrices  $Q$  et  $R$  adaptées à la trajectoire désirée, puis le calcul des gains de rétroaction optimaux associés.

## IV.5 Résultats de simulation

Dans le cadre de l'étude de notre quadrirotor, les simulations sont réalisées à partir des paramètres définis dans l'Annexe N°1, en considérant différentes trajectoires de référence afin d'évaluer les performances du système de commande.

### IV.5.1 Référence échelon 3D :

La Figure IV.1 illustre la trajectoire de référence en échelon tridimensionnelle (3D), dont l'évolution est définie par les équations suivantes :

$$x_d(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 5, & t \geq 2 \end{cases} \quad , \quad y_d(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 8, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$z_{d(t)} = 3 \text{ m} \quad , \quad \psi_d = 0.3 \text{ rad}$$

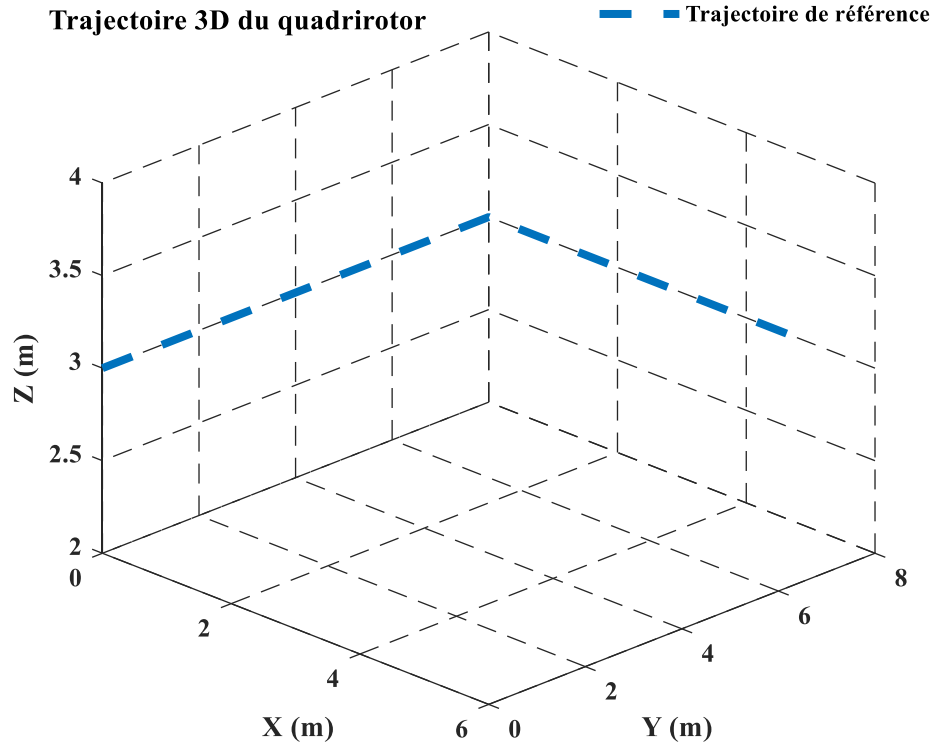


Figure IV.1 : Trajectoire échelon 3D du quadrirotor.

### IV.5.1.1 Calcule des matrices de la synthèse de commande

#### IV.5.1.1.1 Matrice Q

On prend généralement une matrice diagonale :

$$Q = \text{diag}(q\phi, q\dot{\phi}, q\theta, q\dot{\theta}, q\psi, q\dot{\psi}, qx, q\dot{x}, qy, q\dot{y}, qz, q\dot{z})$$

Avec :

$$q_i \geq 0$$

Pour choisir  $Q$ , on peut utiliser :

$$q_i = \frac{1}{x_{i,max}^2}$$

Où  $x_{i,max}$  représente l'erreur maximale acceptable

$$Q = \text{diag}\left(\frac{1}{e_{1,max}^2}, \dots, \frac{1}{e_{12,max}^2}\right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8.207 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.207 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.040 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.040 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0400 \end{pmatrix}$$

#### IV.5.1.1.2 Matrice R

En appliquant la théorie de Bryson [22] on peut écrire la matrice  $R$  sous la forme suivante :

$$R = \text{diag}(r_i) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix}$$

Où :

- $r_1$  correspond à  $u_1$ .
- $r_2$  correspond à  $u_2$ .
- $r_3$  correspond à  $u_3$ .
- $r_4$  correspond à  $u_4$ .

$$r_i = \frac{1}{u_{i,max}^2}$$

Où  $u_{i,max}$  est la valeur maximale admissible de chaque commande

$$R = \begin{bmatrix} 0.024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.163 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.163 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

#### IV.5.1.1.3 Calcul de P

En appliquant l'équation (IV.24) pour calculer la matrice  $P$

$$P = \begin{pmatrix} 1.234 & 0.070 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.049 & -0.136 & -0.000 & -0.000 \\ 0.070 & 0.008 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.002 & -0.007 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.266 & 0.072 & 0.000 & -0.000 & 0.080 & 0.164 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 0.072 & 0.015 & 0.000 & -0.000 & 0.004 & 0.009 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.008 & 0.083 & 0.020 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.020 & 0.017 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 0.080 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.084 & 0.069 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 0.164 & 0.004 & 0.000 & -0.000 & 0.069 & 0.137 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.049 & -0.002 & 0.000 & 0.009 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.044 & 0.421 & 0.000 & 0.000 \\ -0.136 & -0.007 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.042 & 0.113 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.109 & 0.034 \\ -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.034 & 0.033 \end{pmatrix}$$

#### IV.5.1.1.4 Calcul de gain K

D'après l'équation IV.21 on peut calculer la matrice du gain

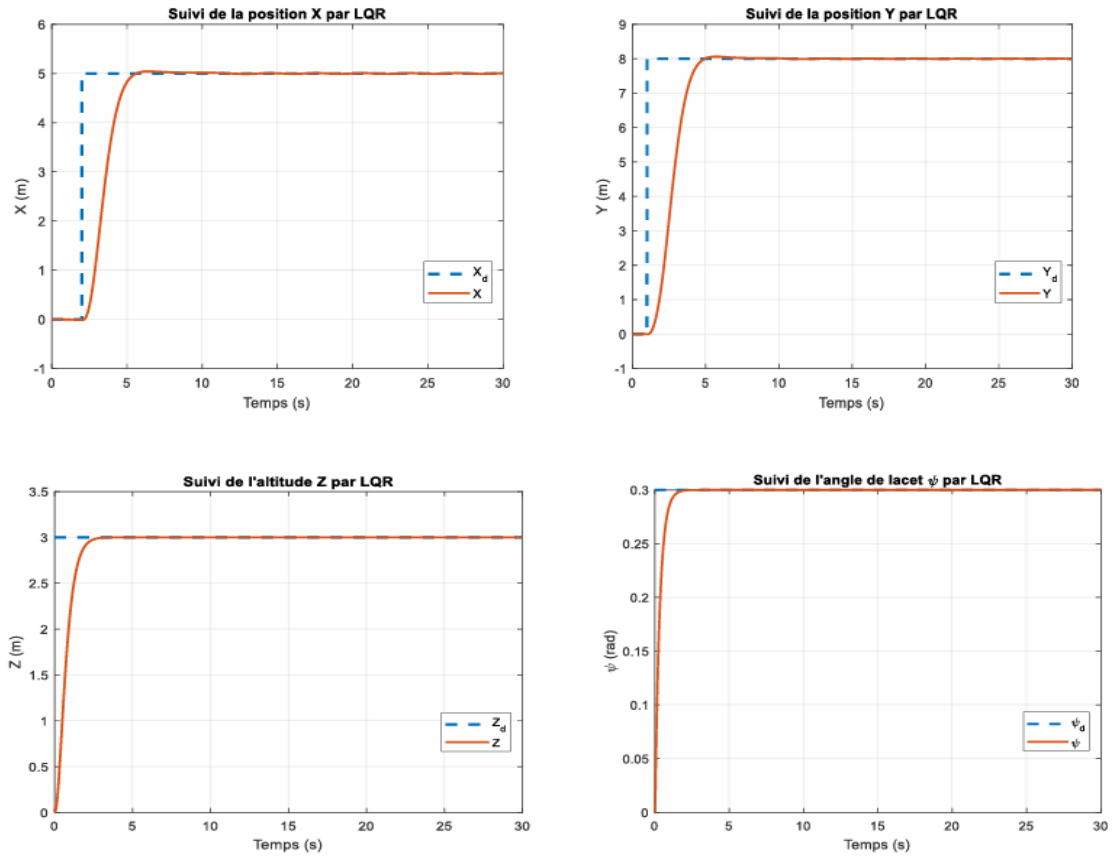
$$K = R^{-1}B^T P$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 2.125 & 2.095 \\ 1.155 & 0.138 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.043 & -0.123 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.183 & 0.140 & 0.000 & -0.000 & 0.070 & 0.147 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.063 & 0.052 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 \end{bmatrix}$$

**IV.5.1.1.5 Etude de stabilité :** En BF se fait par le calcul des pôles de la matrice  $(A - BK)$ , les pôles en boucle fermée sont :

$$s_i = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \\ s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.672 & +7.6437i \\ -8.672 & -7.6437i \\ -8.672 & +7.6437i \\ -8.672 & -7.6437i \\ -0.5757 & +0.3112i \\ -0.5757 & -0.3112i \\ -2.0229 & +0.8972i \\ -2.0229 & -0.8972i \\ -0.6780 & +0.4748i \\ -0.6780 & -0.4748i \\ -1.6116 & +0.8201i \\ -1.6116 & -0.8201i \end{bmatrix}$$

### IV.5.1.2 Simulation :



**Figure IV.2 :** Les réponses du système LQR pour  $(X, Y, Z, \psi)$ .

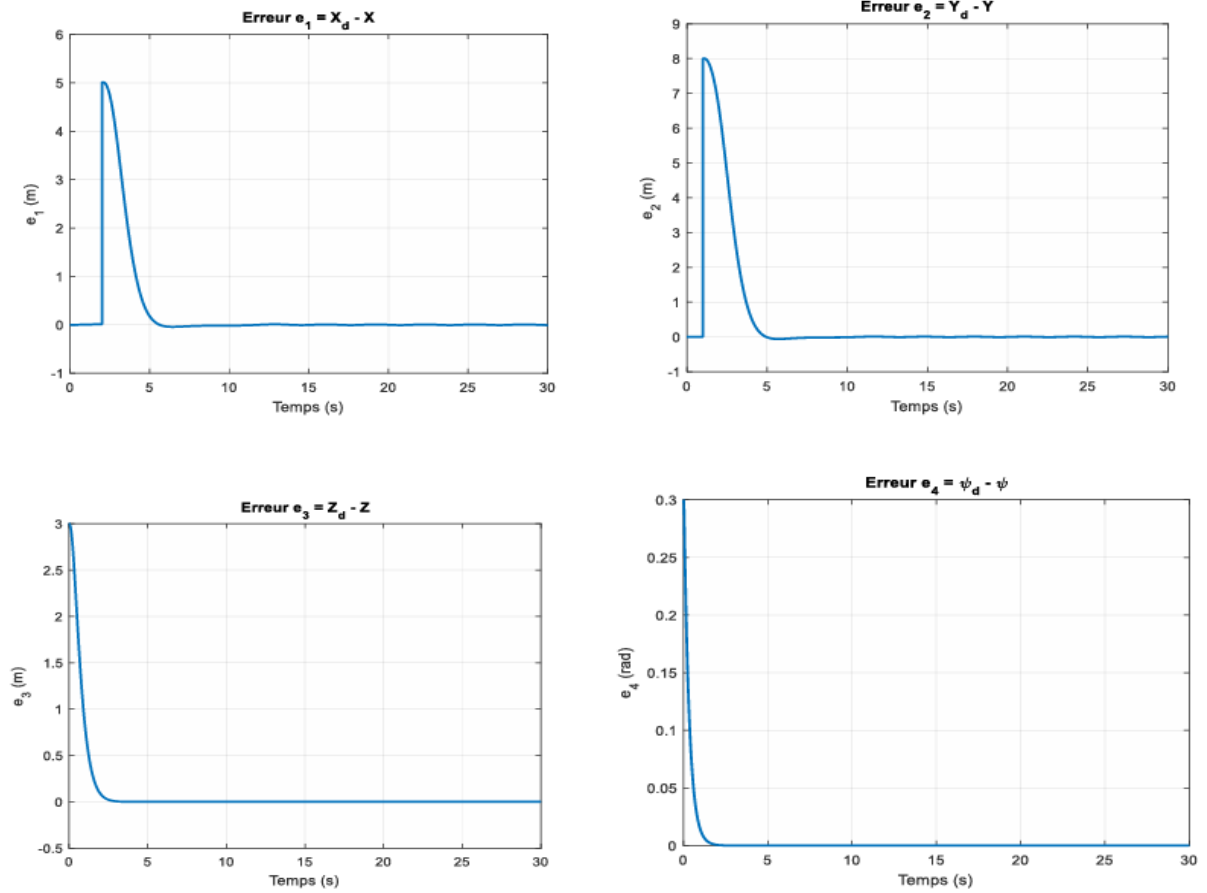


Figure IV.3 : Les erreurs poursuite  $(X, Y, Z, \psi)$ .

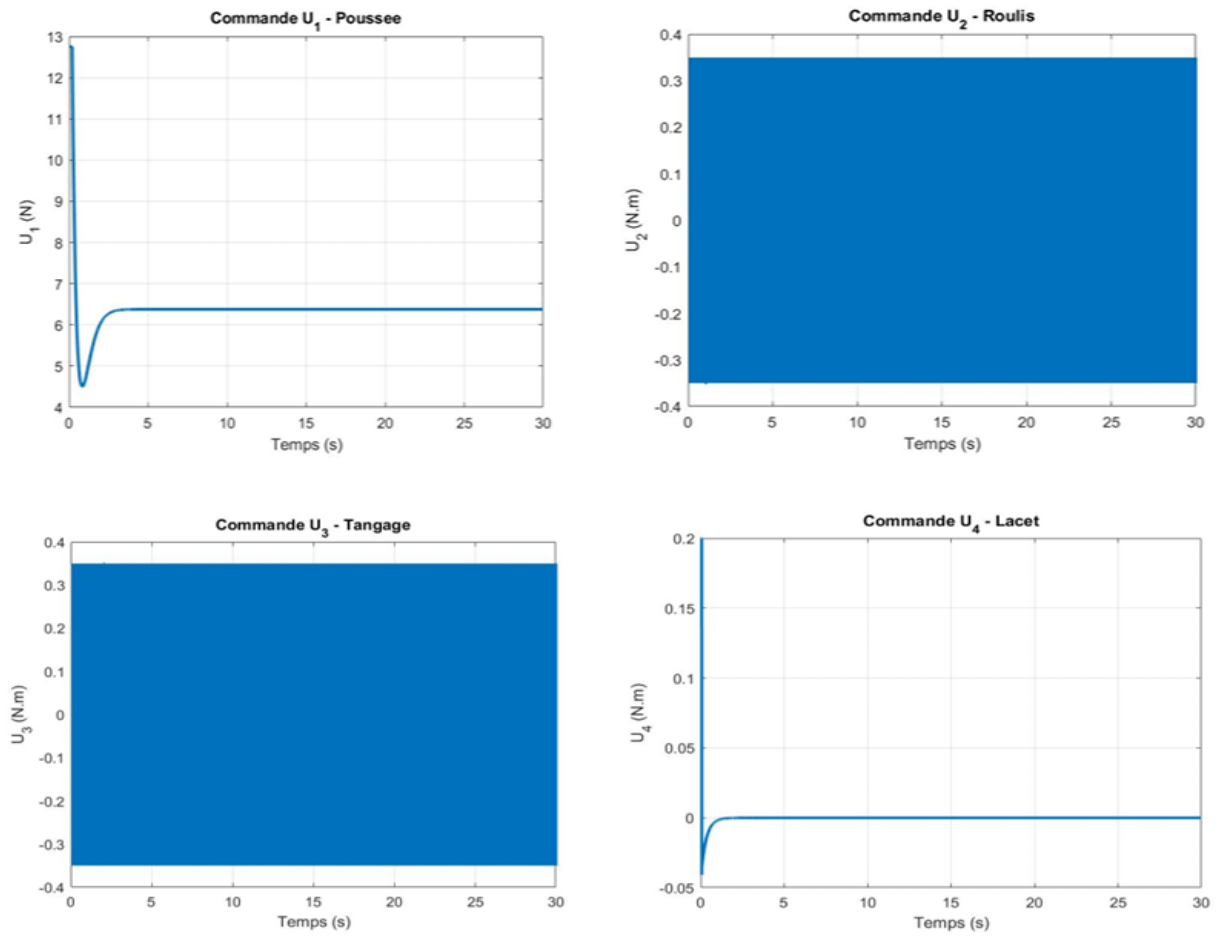


Figure IV.4 : Les Commandes  $(U_1 U_2 U_3 U_4)$  LQR.

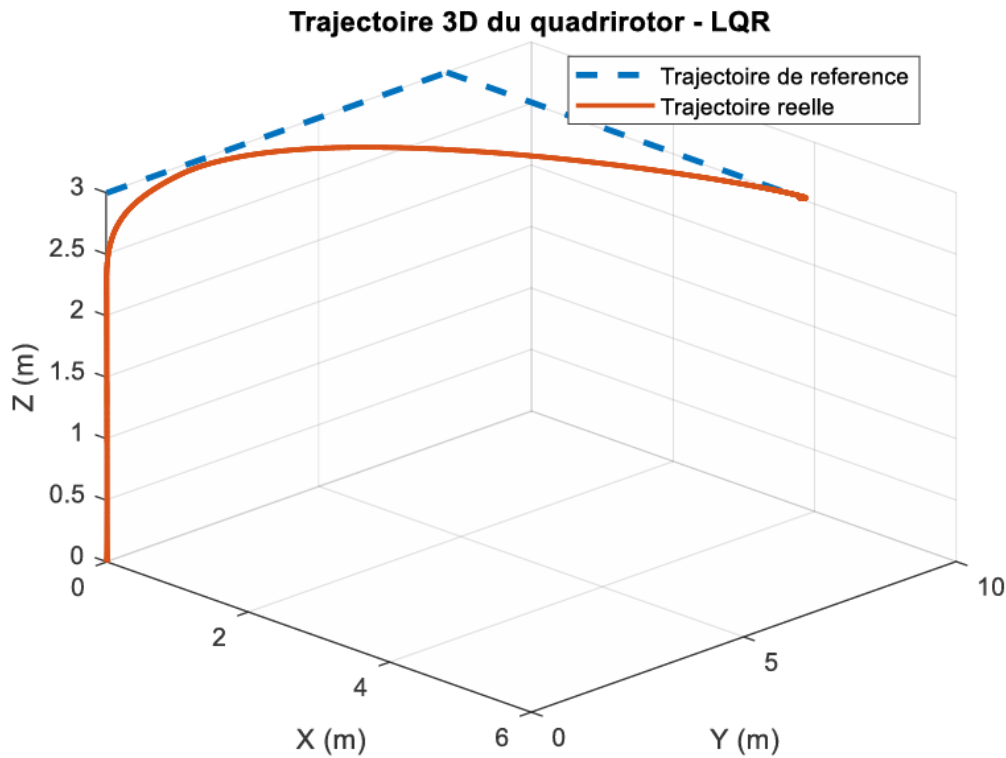


Figure IV.5 : Suivi de trajectoire 3D du quadrirotor – LQR.

#### IV.5.1.3 Interprétation des résultats

La figure (IV.2) : présente les réponses en boucle fermée du système (probablement un drone quadrirotor) commandé par un régulateur LQR, pour les quatre variables d'état :  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  et  $\psi$  (lacet). **Position  $X$  et  $Y$**  : les sorties (courbes rouges continues) convergent vers leurs consignes respectives (5m et 8m, courbes bleues en pointillés) avec un temps de réponse d'environ 5s, sans dépassement (overshoot) notable et sans erreur statique en régime permanent. **Altitude  $Z$**  : convergence rapide ( $\approx 3-4$  s) vers la consigne de 3m, avec un très léger dépassement, traduisant une dynamique un peu plus rapide sur cet axe, **Angle de lacet  $\psi$**  : suivi quasi instantané ( $< 2$  s) de la consigne de 0,3 rad, avec une réponse très amortie. Ces résultats montrent que le régulateur LQR assure un suivi de trajectoire stable, précis et sans erreur statique pour les quatre degrés de liberté étudiés. L'absence d'oscillations et de dépassements significatifs témoigne d'un bon compromis entre rapidité et stabilité, validant ainsi le choix des matrices de pondération  $Q$  et  $R$  utilisées dans la synthèse du contrôleur.

La figure (IV.3) : les erreurs de poursuite convergent asymptotiquement vers zéro en régime permanent, ce qui confirme la stabilité et la précision du régulateur LQR synthétisé. Le temps de convergence de chaque erreur est cohérent avec les temps de réponse observés sur les sorties ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $\psi$ ), validant ainsi la robustesse de la loi de commande pour assurer un suivi de trajectoire fiable du système.

**La figure (IV.4) :** les commandes  $U_1$  et  $U_4$  confirment un comportement cohérent avec un LQR bien réglé (convergence rapide vers une valeur d'équilibre), les commandes  $U_2$  et  $U_3$  révèlent un problème de **chattering**, qui devra être discuté : il peut provenir d'une saturation trop stricte, d'un gain de retour d'état trop élevé sur ces axes, d'un pas de simulation inadapté, ou d'un couplage non linéaire mal compensé. Ce point mérite d'être mentionné comme une limite du réglage actuel, avec des pistes d'amélioration (réduction des gains Q/R associés au roulis/tangage).

**La figure (IV.5) :** La trajectoire 3D confirme que le régulateur LQR assure la convergence finale vers l'objectif de position, avec une excellente précision sur la phase de décollage vertical. Cependant, l'écart observé pendant la phase de croisière traduit une limite du LQR, il optimise un compromis global (fonction de coût quadratique) plutôt qu'un suivi point par point strict de la référence, d'où une trajectoire réelle plus « économe » en énergie mais moins fidèle à la forme initialement prescrite.

En résumé les résultats dans le tableau suivant :

| Variable     | Consigne appliquée | Instant d'application | Temps de réponse ( $\approx 5\%$ ) | Dépassement              | Erreur statique |
|--------------|--------------------|-----------------------|------------------------------------|--------------------------|-----------------|
| $X (m)$      | 5 m                | $t = 2$ s             | $\approx 4$ s                      | Quasi nul ( $\sim 0\%$ ) | $\approx 0$     |
| $Y (m)$      | 8 m                | $t = 1$ s             | $\approx 4 - 5$ s                  | Quasi nul ( $\sim 0\%$ ) | $\approx 0$     |
| $Z (m)$      | 3 m                | $t = 0$ s             | $\approx 3$ s                      | Très faible              | $\approx 0$     |
| $\psi (rad)$ | 0.3 rad            | $t = 0$ s             | $\approx 1 - 2$ s                  | Quasi nul ( $\sim 0\%$ ) | $\approx 0$     |

**IV. Tableau 1 :** Les Performance de la commande LQR pour une référence de type échelon 3D.

### IV.5.2 Référence Hélicoïdale 3D:

La Figure IV.6 illustre la trajectoire de référence **Hélicoïdale** tridimensionnelle (3D), dont l'évolution est définie par les équations suivantes :

$$x_d = 6 \sin(\omega \tau), \quad y_d = 6 \cos(\omega \tau), \quad z_d = \frac{20}{20} \tau$$

Pour  $2 \leq t \leq 22$  s. rayon = 6 m , hauteur = 20 m , nombre de tours = 4 , début de la trajectoire = 2 s ,  $\psi_d = 0.3$  rad

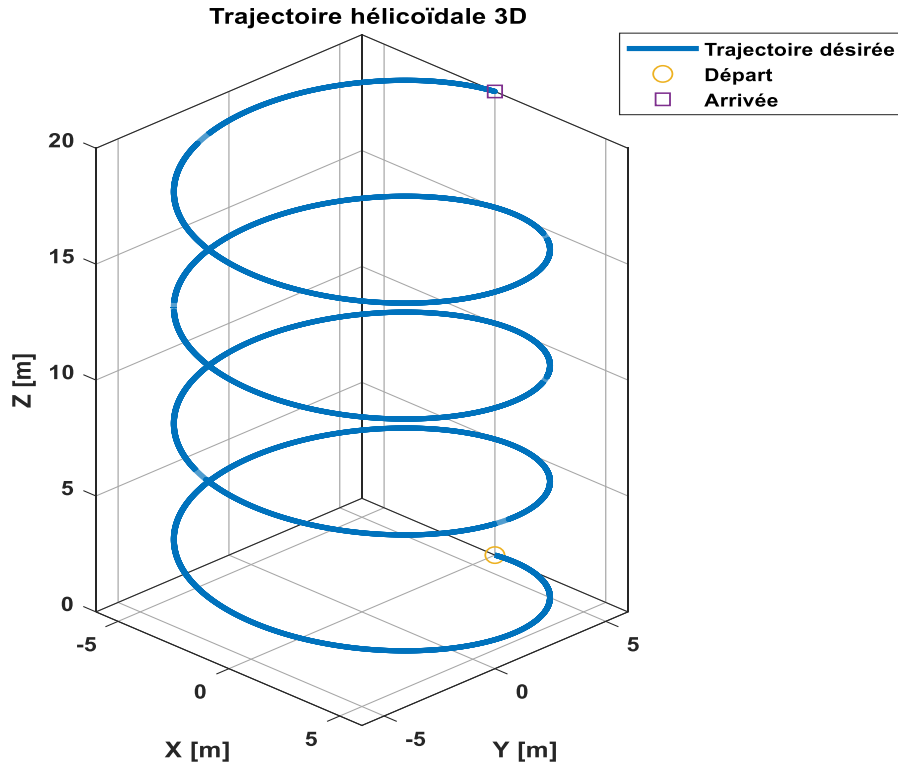


Figure IV.6 : Trajectoire Hélicoïdale 3D.

#### IV.5.2.1 Calcule des matrices de synthèse de commande

##### IV.5.2.1.1 Matrice Q

$$Q = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

## IV.5.2.1.2 Matrice R

$$R = \begin{bmatrix} 0.024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

## IV.5.2.1.3 Matrice P

$$P = \begin{pmatrix} 7.489 & 0.054 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -1.052 & -1.3727 & 0.000 & 0.000 \\ 0.054 & 0.007 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.007 & -0.0098 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 7.489 & 0.054 & -0.000 & -0.000 & 1.052 & 1.372 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & -0.000 & 0.054 & 0.007 & -0.000 & 0.000 & 0.007 & 0.009 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 3.610 & 0.086 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.086 & 0.028 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.052 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 1.311 & 0.073 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.372 & 0.009 & -0.000 & -0.000 & 0.734 & 0.855 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 \\ -1.052 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.311 & 0.734 & -0.000 & -0.000 \\ -1.372 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.734 & 0.855 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.673 & 0.101 \\ 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.101 & 0.068 \end{pmatrix}$$

## IV.5.2.1.4 Matrice K

$$K = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 6.376 & 4.295 \\ 7.206 & 1.052 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & -1.000 & -1.311 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.000 & 7.206 & 1.052 & -0.000 & 0.000 & 1.000 & 1.311 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 1.666 & 0.541 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

## IV.5.2.1.5 Etude de stabilité :

$$s_i = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \\ s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.332 \\ -1.332 \\ -0.383 \\ -0.049 \\ -0.049 \\ -0.011 + i0.0089 \\ -0.011 - i0.0089 \\ -0.011 + i0.0089 \\ -0.011 - i0.0089 \\ -0.033 \\ -0.043 \\ -0.022 \end{bmatrix} \cdot 10^2$$

## IV.5.2.2 Simulation :

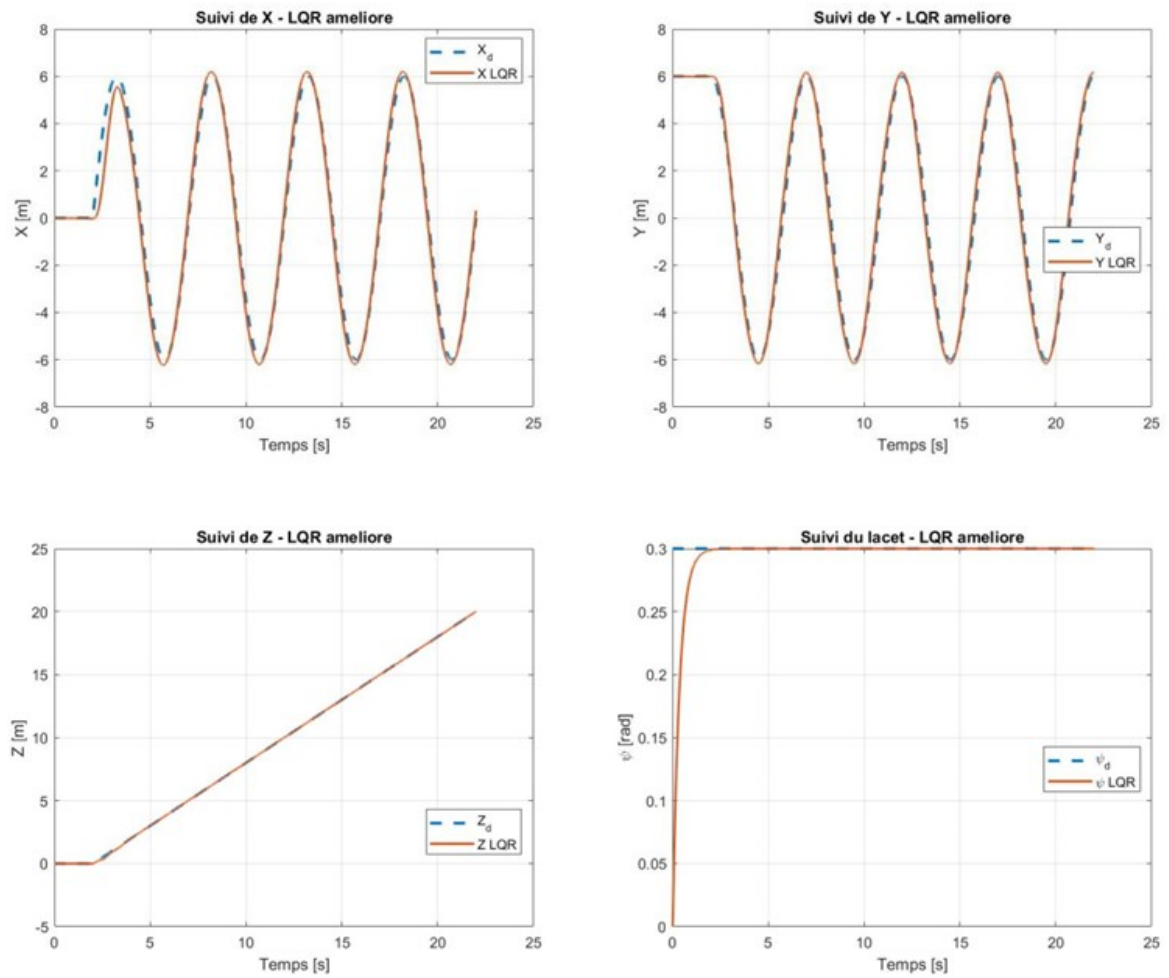
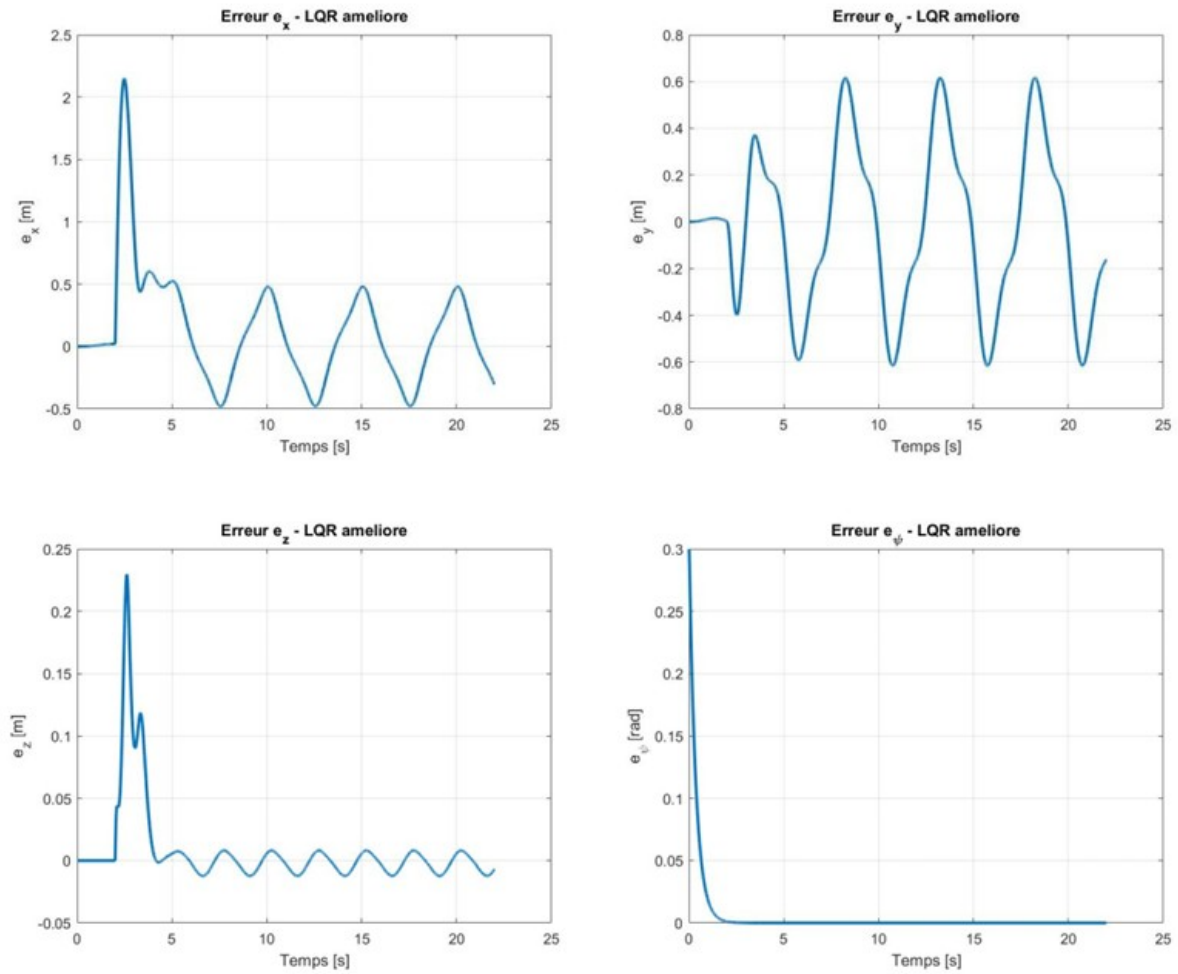


Figure IV.7 : Les réponses du système LQR à une trajectoire Hélicoïdale pour  $(X, Y, Z, \psi)$ .



**Figure IV.8 :** Les erreurs de poursuite du système LQR à une trajectoire Hélicoïdale pour  $(X, Y, Z, \psi)$ .

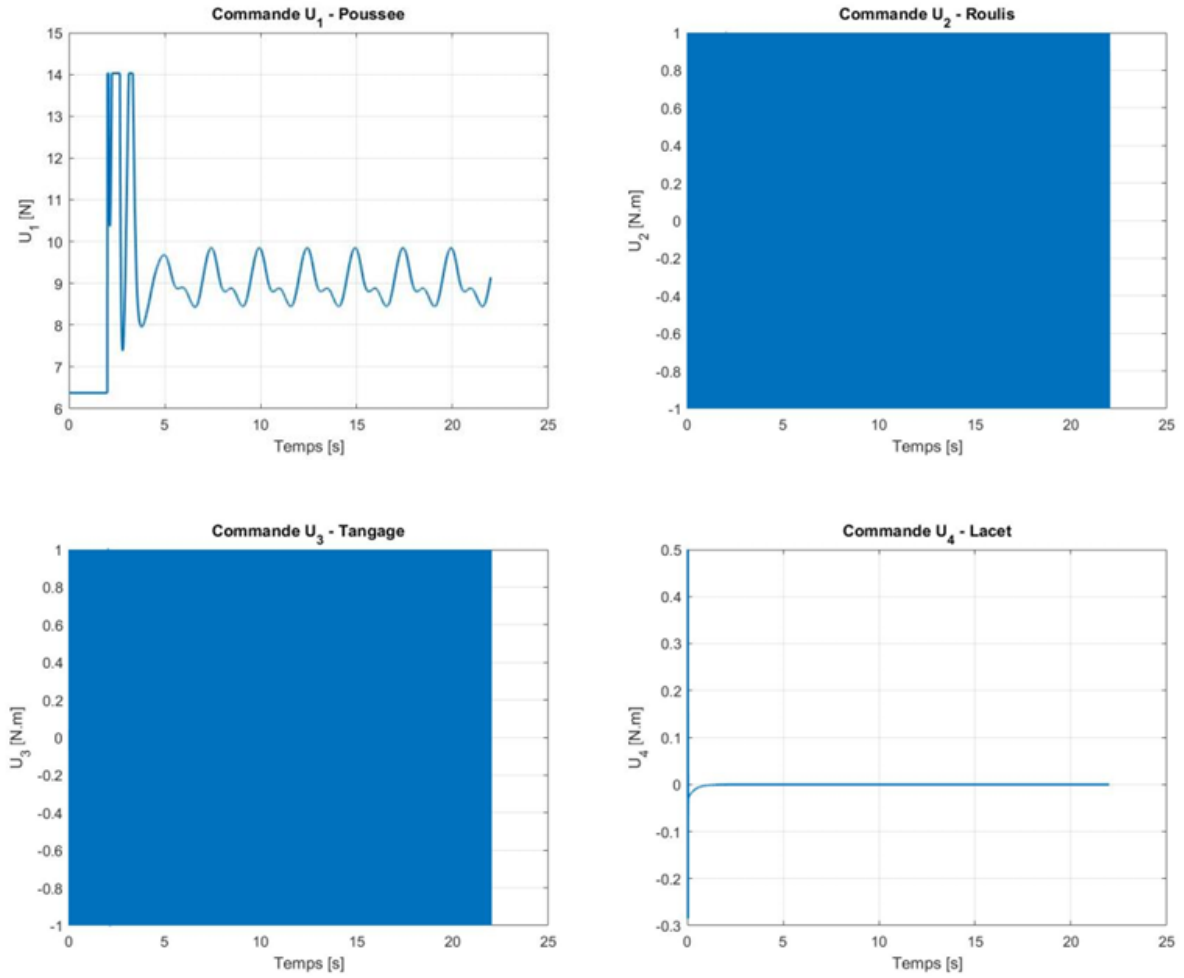


Figure IV.9 : Les commandes du système LQR à une trajectoire Hélicoïdale pour  $(X, Y, Z, \psi)$ .

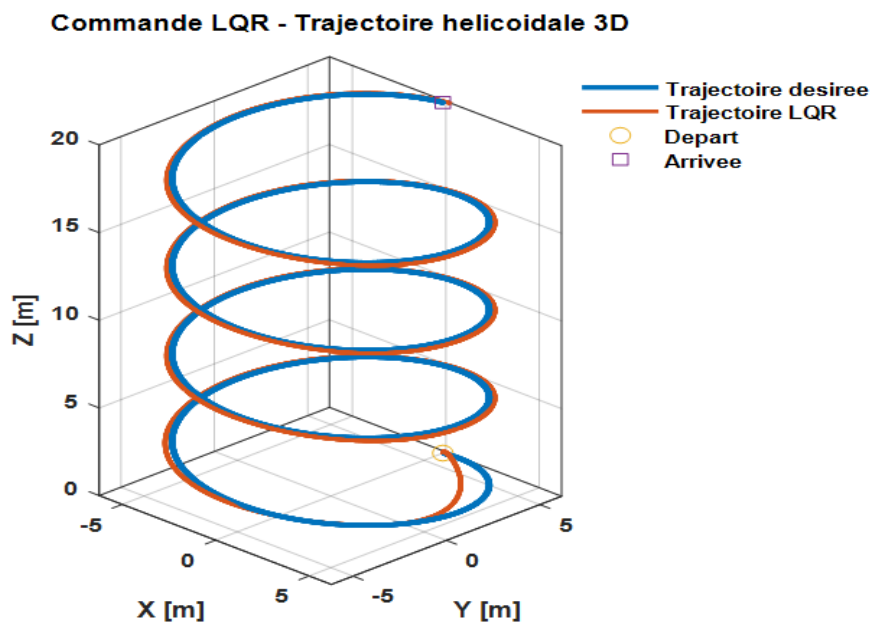


Figure IV.10 : Suivi de Trajectoire Hélicoïdale 3D.

### IV.5.2.3 Interprétation des résultats

**La figure (IV.7) :** démontrent que le LQR conserve d'excellentes performances de poursuite même face à des trajectoires dynamiques complexes (sinusoïdales et en rampe), et non plus seulement des consignes statiques. Le très faible écart entre trajectoire désirée et trajectoire réelle, y compris en régime oscillatoire, confirme la robustesse et la généralisation de la loi de commande. Cette figure constitue ainsi une validation plus poussée que les tests précédents et peut être présentée comme une amélioration/validation supplémentaire de la commande LQR initiale, en comparant explicitement le comportement statique.

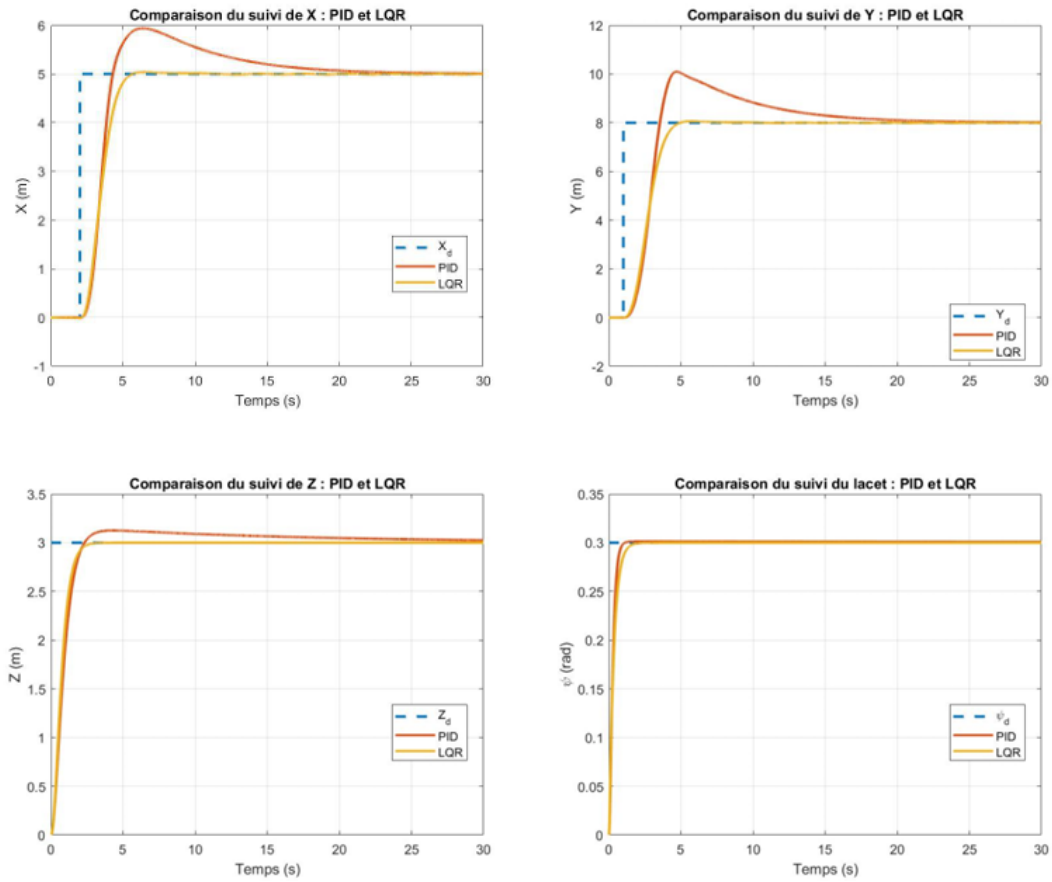
**La figure (IV.8)** pour les axes X, Y et Z soumis à des trajectoires variables dans le temps, le LQR ne parvient pas à annuler complètement l'erreur en régime permanent, il subsiste une erreur résiduelle oscillatoire bornée, de faible amplitude mais non nulle. Ceci s'explique par la nature même du LQR, conçu comme un régulateur par retour d'état optimisant un critère quadratique, sans action intégrale ni terme de compensation (feedforward) dédié au suivi de trajectoires non constantes. Ce point doit être présenté comme une limite structurelle de la commande LQR, bien que l'erreur reste faible et bornée (stabilité pratique garantie), elle ne s'annule pas. Cela justifie une perspective d'amélioration telle que l'ajout d'une action intégrale (LQI), d'un terme de feedforward basé sur la dérivée de la consigne.

**La figure (IV.9) :** Cette figure confirme que le chattering sur  $U_2$  et  $U_3$  n'est pas un artefact isolé mais un phénomène structurel et persistant du réglage LQR, qui s'intensifie logiquement lorsque le système doit suivre des trajectoires dynamiques exigeantes. Ce comportement explique directement l'erreur résiduelle oscillatoire non nulle observée sur X et Y : le contrôleur ne parvient pas à générer des couples de roulis/tangage lisses et suffisamment précis, ce qui dégrade légèrement le suivi. Ce point renforce la conclusion de la section précédente et doit être discuté comme une limite majeure à traiter dans les perspectives (retuning des matrices Q/R sur les axes roulis/tangage, ajout d'un filtre anti-chattering).

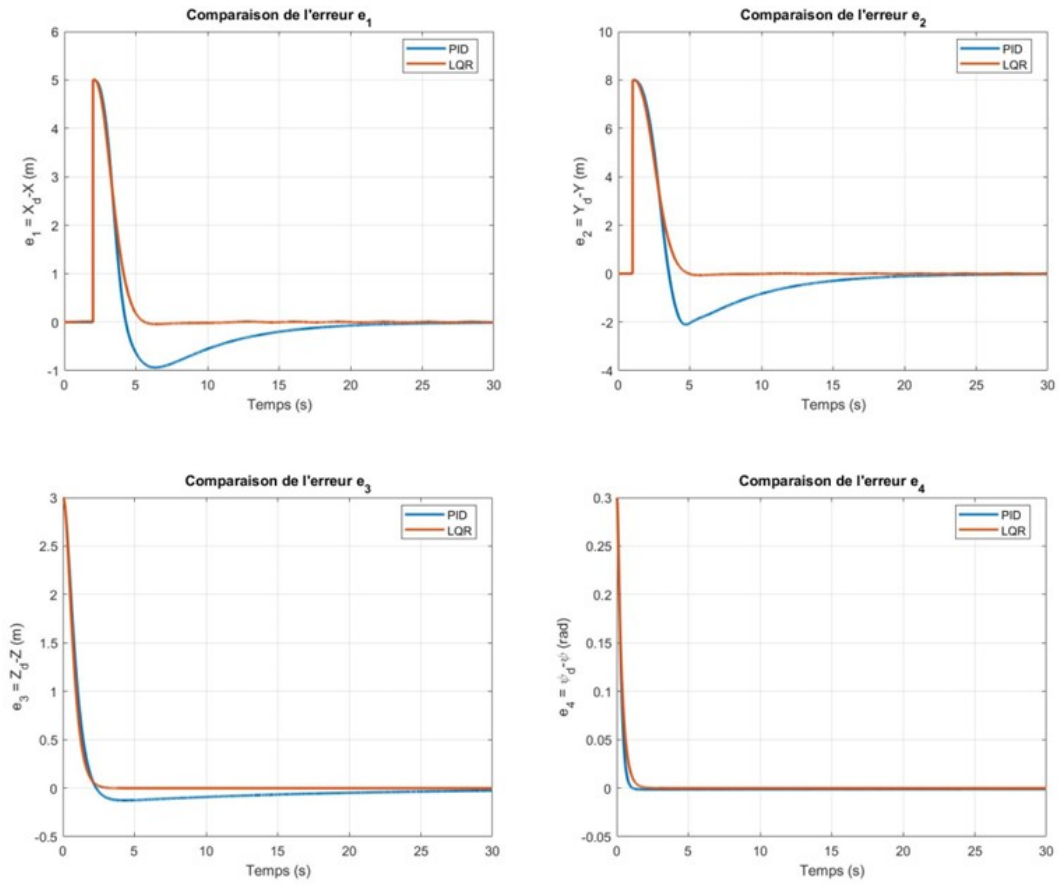
**La figure (IV.10) :** Cette figure propose une visualisation globale en trois dimensions du scénario de poursuite dynamique étudié précédemment. Elle représente une trajectoire hélicoïdale, résultant de la combinaison des mouvements sinusoïdaux imposés sur les axes X et Y avec une montée linéaire en rampe sur l'axe Z. Ce type de trajectoire, plus complexe qu'un simple point de consigne fixe, permet d'évaluer la capacité du régulateur LQR à suivre un mouvement tridimensionnel continu et prolongé dans le temps.

## IV.6 Une comparaison entre la commande PID et LQR

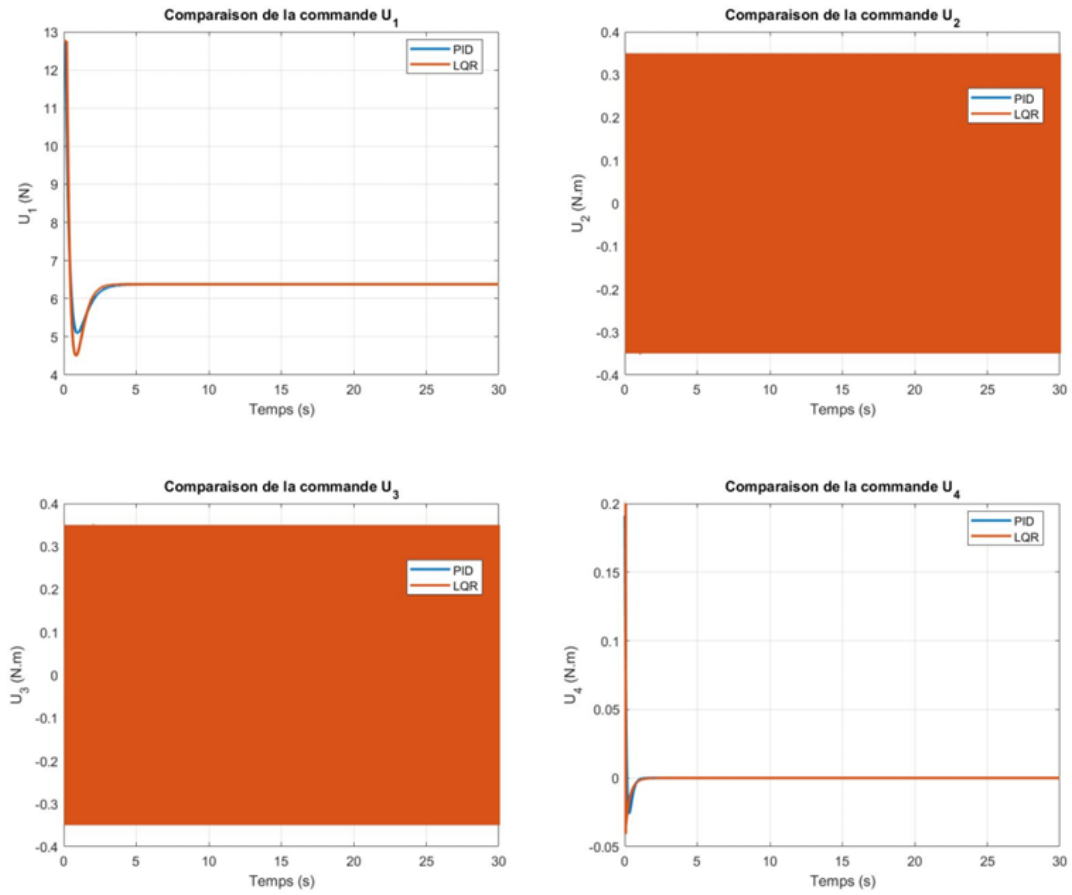
### IV.6.1 Résultat pour une référence de type échelon 3D :



**Figure IV.11 :** Comparaison PID et LQR des réponses  $(X, Y, Z, \psi)$ .



**Figure IV.12 :** Comparaison PID et LQR des erreurs de poursuite  $(X, Y, Z, \psi)$ .



**Figure IV.13 :** Comparaison PID et LQR des commandes  $U_1$   $U_2$   $U_3$   $U_4$  poursuite  $(X, Y, Z, \psi)$ .

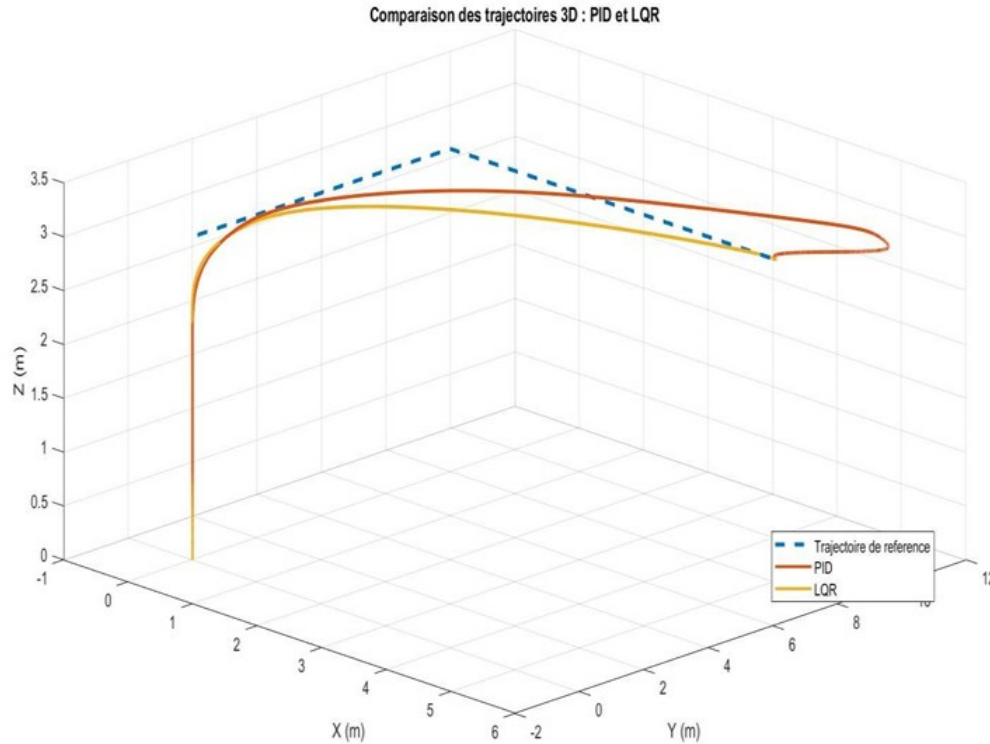


Figure IV.14 : Comparaison des suivis des trajectoires PID et LQR.

#### IV.6.1.1 Interprétation des figures

**Figure (IV.11) :** la comparaison met en évidence la supériorité du LQR par rapport au PID classique, en particulier sur les axes de translation horizontale (X, Y), où le PID souffre d'un dépassement important et d'un temps de convergence nettement plus long. Le LQR, grâce à son formalisme d'optimisation par retour d'état, offre un compromis rapidité / précision / stabilité plus satisfaisant, sans nécessiter le réglage empirique des gains propre au PID.

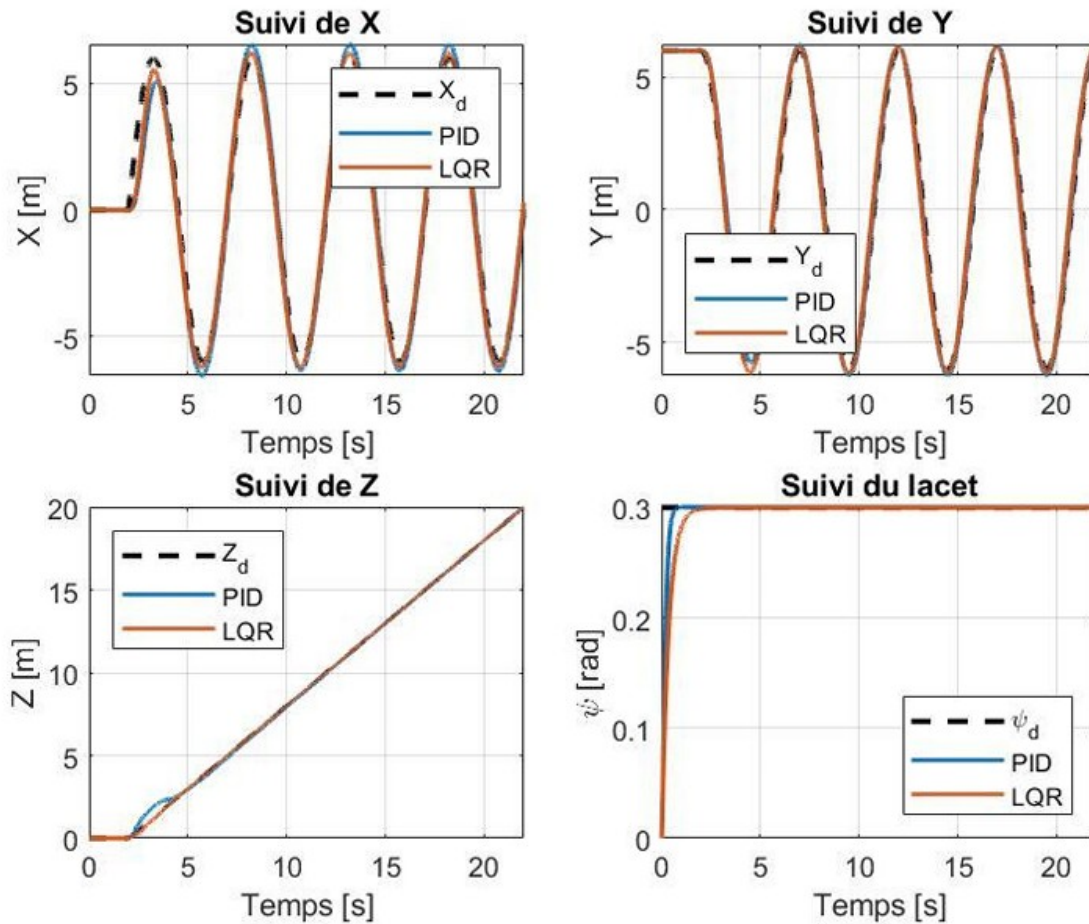
**Figure (IV.12) :** la comparaison des erreurs confirme quantitativement la supériorité du LQR sur le PID en matière de précision et de rapidité de convergence, en particulier sur les axes X et Y où le PID présente des dépassements négatifs significatifs et des temps de stabilisation nettement plus longs ( $\approx 20$  s contre  $\approx 6$  s pour le LQR). Cette différence s'explique par la nature même des deux approches : le PID repose sur un réglage empirique de gains fixes, tandis que le LQR optimise un compromis global entre rapidité et effort de commande via la résolution de l'équation de Riccati, offrant ainsi une réponse mieux amortie et plus précise. Ces résultats renforcent le choix du LQR comme stratégie de commande privilégiée pour ce système.

**Figure (IV.13) :** Cette comparaison montre que les efforts de commande du LQR et du PID sont globalement similaires en amplitude sur les quatre canaux, sans surcoût énergétique notable pour le LQR malgré ses meilleures performances de suivi. Le phénomène de chattering observé sur  $U_2$  et  $U_3$ , commun aux deux régulateurs, suggère une origine indépendante de la stratégie de commande (saturation des couples, dynamique de rotation non linéaire, ou pas de simulation), et doit être traité comme une limite générale du modèle ou du

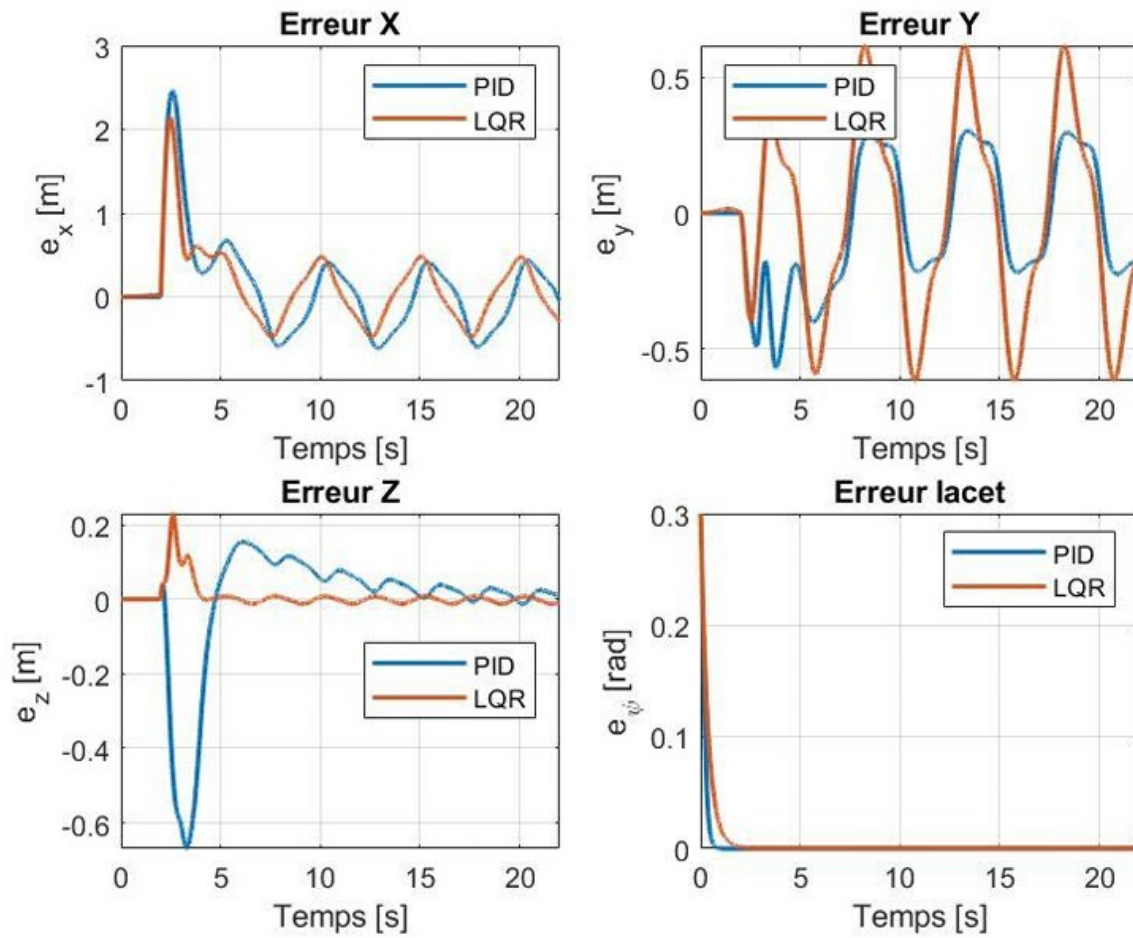
scénario de test, plutôt que comme un défaut propre au LQR. Ce constat renforce l'intérêt du LQR, qui obtient un suivi plus précis et plus rapide sans effort de commande supplémentaire par rapport au PID.

**Figure (IV.14) :** Cette figure offre une synthèse visuelle globale en trois dimensions, comparant les trajectoires réelles obtenues avec le PID (rouge) et le LQR (jaune) par rapport à la trajectoire de référence (bleu). Cette vue 3D confirme visuellement la supériorité du LQR en termes de précision de trajectoire, avec un chemin plus régulier et plus fidèle à la référence, alors que le PID présente une trajectoire plus erratique en fin de parcours, directement liée à son dépassement plus important sur les axes X et Y. Ce résultat qualitatif vient corroborer l'ensemble des analyses quantitatives précédentes (sorties, erreurs, commandes) et constitue une illustration synthétique particulièrement parlante pour conclure la section comparative PID vs LQR.

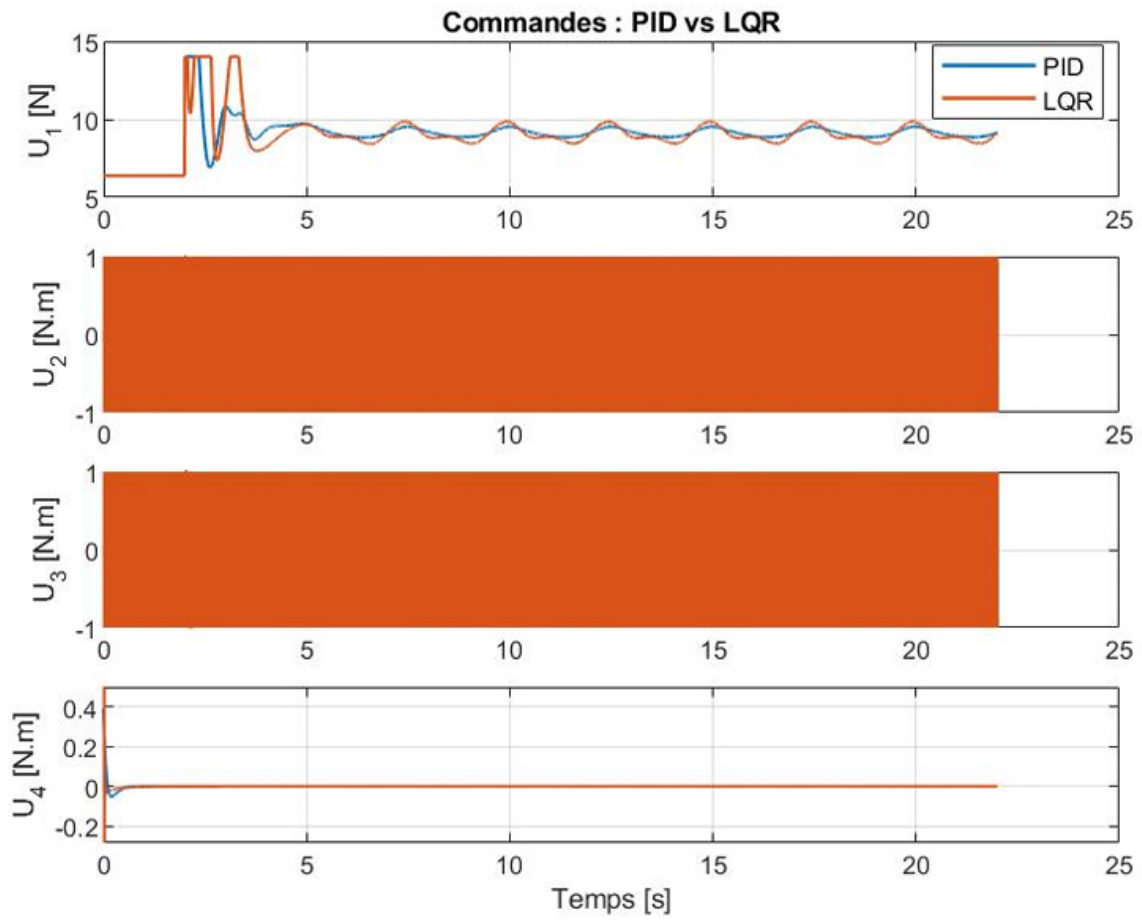
## IV.6.2 Résultat pour une référence de type hélicoïdale 3D :



**Figure IV.15 :** comparaison des réponses entre la commande PID Hélicoïdale et LQR Hélicoïdale.



**Figure IV.16 :** comparaison des erreurs entre la commande PID Hélicoïdale et LQR Hélicoïdale.



**Figure IV.17 :** Comparaison des commandes ( $U_1$   $U_2$   $U_3$   $U_4$ ) entre la commande PID Hélicoïdale et LQR Hélicoïdale.

### Trajectoire helicoidale 3D : reference, PID et LQR

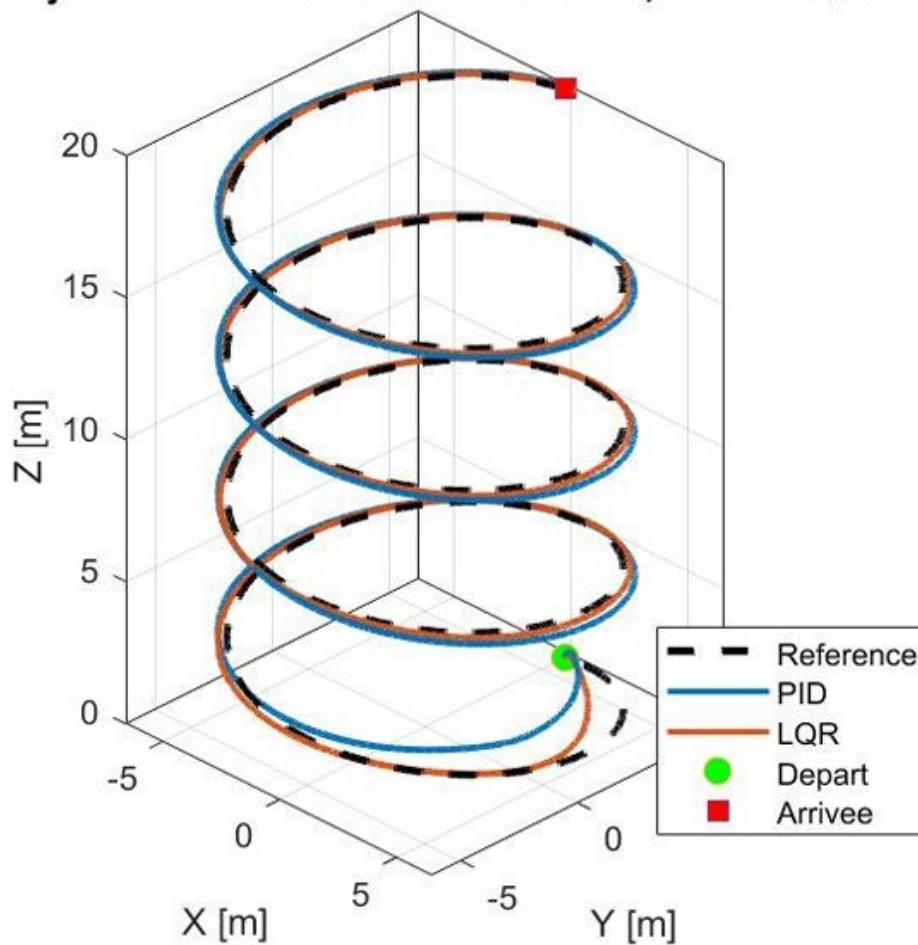


Figure IV.18 : Suivi des trajectoires Hélicoïdale 3D PID et LQR.

#### IV.6.2.1 Interprétation des figures :

**Figure (IV.15) :** Ce test sur trajectoires dynamiques montre des performances de suivi globalement comparables entre PID et LQR, avec un léger avantage qualitatif pour le LQR (moins d'oscillations transitoires, réponse plus lisse). Ce résultat suggère que l'écart de performance entre les deux régulateurs se réduit lorsque la consigne devient elle-même dynamique, les deux approches étant alors sollicitées de façon comparable pour suivre un mouvement continu. Il conviendra de coupler cette observation qualitative à l'analyse quantitative des erreurs.

**Figure (IV.16) :** Ce test sur trajectoire dynamique révèle des performances contrastées selon l'axe considéré : le LQR se montre plus performant sur l'axe Z (convergence plus rapide, moins d'oscillations prolongées), tandis que le PID offre une meilleure précision sur l'axe Y (amplitude d'erreur résiduelle plus faible), les deux régulateurs étant comparables sur X et  $\psi$ . Ce constat nuance la conclusion générale.

**Figure (IV.17) :** Cette comparaison finale montre que le PID et le LQR mobilisent des efforts de commande globalement équivalents face à une trajectoire dynamique exigeante, avec une

différence notable uniquement sur le régime transitoire initial de la poussée  $U_1$  (pics plus marqués pour le LQR). Associé aux résultats contrastés observés sur les erreurs de poursuite, ce constat confirme que l'avantage du LQR sur le PID se réduit significativement lorsque la trajectoire devient dynamique, les deux régulateurs présentant alors des performances et des coûts de commande comparables. Le chattering persistant sur  $U_2$  et  $U_3$ , commun aux deux approches, reste une limite majeure du système global à traiter dans les perspectives indépendamment du choix entre PID et LQR.

**Figure (IV.18) :** Cette vue 3D de synthèse confirme visuellement que PID et LQR parviennent tous deux à suivre correctement une trajectoire hélicoïdale complexe et prolongée, sans divergence ni décrochage. Toutefois, comme pour la figure hélicoïdale du LQR seul, il est essentiel de ne pas se limiter à cette impression visuelle globalement satisfaisante : les écarts fins entre PID et LQR (avantage du LQR sur Z, avantage du PID sur Y, chattering commun sur roulis/tangage). Cette figure doit donc être présentée comme une validation qualitative globale, complétée impérativement par l'analyse quantitative détaillée pour nuancer la comparaison entre les deux stratégies de commande et conclure objectivement sur leurs performances respectives.

En résumé les résultats dans le tableau suivant :

| Critère                                     | PID                                                      | LQR                                                |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Dépassement sur $x$ (consigne 5 m)          | $\approx 20\%$ (pic $\approx 6$ m)                       | Quasi nul                                          |
| Dépassement sur $y$ (consigne 8 m)          | $\approx 27\%$ (pic $\approx 10,2$ m)                    | Quasi nul                                          |
| Dépassement sur $z$ (consigne 3 m)          | Léger ( $\approx 5\%$ , pic $\approx 3,15$ m)            | Très faible                                        |
| Dépassement sur $\psi$ (consigne $0,3$ rad) | Faible                                                   | Quasi nul                                          |
| Temps de stabilisation                      | Plus lent ( $\approx 15 - 20$ s)                         | Plus rapide ( $\approx 3 - 6$ s)                   |
| Comportement de l'erreur                    | Oscillatoire, passe par des valeurs négatives            | Convergence monotone vers 0, sans oscillation      |
| Effort de commande $U_1$ (poussée)          | Creux plus marqué ( $\approx 4,5$ N)                     | Creux plus modéré ( $\approx 4,7$ N), plus doux    |
| Commandes $U_2, U_3, U_4$                   | Similaires en amplitude (saturées)                       | Similaires en amplitude (saturées)                 |
| Suivi de trajectoire 3D                     | Déviation visible, boucle parasite en fin de trajectoire | Suivi plus fidèle et régulier de la référence      |
| Méthode de réglage                          | Empirique (gains $K_p, K_i, K_d$ )                       | Systématique (matrices Q, R + équation de Riccati) |
| Robustesse générale                         | Sensible aux couplages entre variables                   | Meilleure gestion des couplages multivariable      |

**IV. Tableau 3 : Comparaison PID / LQR .**

## IV.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude, à la conception et à l'implémentation de la commande LQR (Linear Quadratic Regulator) appliquée à la stabilisation et au suivi de trajectoire d'un quadrirotor, dans une perspective de commande optimale multivariable.

Sur le plan théorique, nous avons établi les fondements mathématiques de cette approche de commande optimale. Après avoir formulé la dynamique du quadrirotor sous forme d'une représentation d'état linéarisée, nous avons défini le critère de performance quadratique dont la minimisation constitue le cœur de la synthèse LQR. Le rôle respectif des matrices de pondération  $Q$  et  $R$  a été détaillé ( la première traduit l'importance accordée à la précision de poursuite des différents états, tandis que la seconde reflète le coût associé à l'effort de commande), la résolution de l'équation algébrique de Riccati, issue du principe d'optimalité de Bellman, nous a ensuite permis de déterminer le gain de retour d'état optimal  $K$  assurant la stabilité asymptotique du système bouclé. Cette formulation confère à la commande LQR un avantage méthodologique déterminant par rapport aux approches classiques, la synthèse du correcteur repose sur un compromis explicite et systématique entre rapidité de convergence et sollicitation des actionneurs, particulièrement adapté à un système fortement couplé et multivariable tel que le quadrirotor.

Sur le plan applicatif, les simulations conduites sous l'environnement MATLAB/Simulink, pour une trajectoire rectiligne puis pour une trajectoire hélicoïdale tridimensionnelle, ont permis de valider les performances du correcteur synthétisé. Les résultats obtenus montrent que la commande LQR assure une convergence rapide des variables de position  $(x, y, z)$  et d'orientation  $(\psi)$  vers leurs consignes respectives, avec un dépassement quasi nul et une erreur de poursuite décroissant de façon monotone vers zéro, ce qui traduit un comportement dynamique bien amorti.

L'étude comparative menée avec un correcteur PID classique, réglé de manière empirique [16], a par ailleurs mis en évidence les apports concrets de l'approche optimale, la commande LQR présente un temps de stabilisation plus court, un dépassement nettement réduit sur l'ensemble des axes, ainsi qu'un suivi de trajectoire plus fidèle à la référence désirée, avec un effort de commande maîtrisé et sans sollicitation excessive des actionneurs. Ces résultats confirment que la formalisation du réglage à travers les matrices  $Q$  et  $R$  constitue un avantage significatif par rapport à l'ajustement manuel des gains d'un correcteur PID, notamment en présence de couplages dynamiques importants entre les différentes variables d'état.

En définitive, les travaux présentés dans ce chapitre démontrent que la commande LQR constitue une solution robuste, performante et méthodologiquement rigoureuse pour la stabilisation et le suivi de trajectoire d'un quadrirotor. Ces résultats ouvrent des perspectives intéressantes pour des travaux futurs, notamment l'extension de cette approche à la commande LQR intégrale afin d'éliminer les erreurs statiques résiduelles, à la synthèse LQG (Linear Quadratic Gaussian) en présence de bruits de mesure et de perturbations stochastiques, ou encore au couplage de la commande LQR avec des techniques de commande adaptative ou robuste ( $H_\infty$ , mode glissant) en vue d'améliorer la tolérance du système aux incertitudes paramétriques et aux perturbations externes non modélisées.

### Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'est intéressé à la modélisation, à la commande et à la comparaison de deux stratégies, PID en cascade et LQR, appliquées à la stabilisation et au suivi de trajectoire d'un drone quadrirotor. Le quadrirotor étant un système non linéaire, multivariable, fortement couplé et sous-actionné, l'objectif était d'évaluer dans quelle mesure une approche optimale multivariable améliore les performances par rapport à un correcteur classique réglé de manière empirique.

Le premier chapitre a présenté les généralités sur les drones : leur définition, leur évolution historique et leurs différentes classifications selon l'altitude, la taille et le mode de propulsion. Il a mis en évidence l'intérêt du quadrirotor, dont la simplicité mécanique, la capacité de vol stationnaire et la maniabilité expliquent l'usage dans de nombreux domaines, ainsi que ses limites, notamment une autonomie de vol et une capacité de charge réduites.

Le deuxième chapitre a été consacré à la modélisation. Après la définition des repères et des matrices de rotation, un modèle dynamique a été établi sous des hypothèses simplificatrices, puis mis sous forme d'état à douze variables. Ce modèle a confirmé le caractère non linéaire, couplé et sous-actionné du système : quatre entrées de commande pour six degrés de liberté. L'étude de stabilité par la méthode de Lyapunov et le théorème de LaSalle a montré qu'une commande en cascade, avec une boucle externe de position et une boucle interne d'attitude, rend l'équilibre de vol stationnaire asymptotiquement stable dans le domaine de vol considéré.

Le troisième chapitre a porté sur la commande PID en cascade. Les lois de commande ont été synthétisées pour l'altitude et les trois angles d'attitude, puis testées en simulation sur une référence en échelon tridimensionnel et sur une trajectoire hélicoïdale. Les résultats ont montré que cette commande stabilise correctement le système et assure un bon suivi en régime permanent, notamment sur l'altitude et le lacet. Ils ont toutefois révélé des dépassements sensibles sur les positions horizontales, des temps de stabilisation relativement longs et des oscillations résiduelles dans le plan horizontal lors du suivi de la trajectoire hélicoïdale. Ces limites tiennent au réglage empirique des gains et à la difficulté de prendre en compte les couplages entre variables avec des boucles indépendantes.

Le quatrième chapitre a présenté la commande LQR. Après un rappel de ses fondements (critère quadratique, rôle des matrices  $Q$  et  $R$ , équation algébrique de Riccati),

## Conclusion générale

---

le régulateur a été synthétisé à partir du modèle linéarisé autour du vol stationnaire, les matrices de pondération étant choisies selon la méthode de Bryson. Les simulations sous MATLAB ont montré une convergence rapide des positions et du lacet vers leurs consignes, avec un dépassement quasi nul et une erreur décroissant de façon monotone vers zéro. L'étude comparative avec le PID a confirmé ces apports : sur l'échelon, les dépassements d'environ 20 % sur  $x$  et 27 % sur  $y$  obtenus avec le PID disparaissent avec le LQR, et le temps de stabilisation passe d'environ 15 à 20 s à environ 3 à 6 s. Le réglage par les matrices  $Q$  et  $R$  apparaît en outre plus systématique et plus lisible que l'ajustement manuel de gains PID.

Cette comparaison doit toutefois être nuancée. Sur la trajectoire hélicoïdale, l'avantage du LQR n'est pas uniforme : il est net sur l'altitude, alors que le PID se comporte mieux sur l'axe  $y$ . Par ailleurs, un phénomène de chattering est apparu sur les commandes de roulis et de tangage ( $U_2$  et  $U_3$ ) avec les deux approches, ce qui constitue une limite du réglage actuel et une contrainte pour une éventuelle implémentation sur un système réel. Enfin, les résultats reposent sur des simulations : ils n'ont été validés ni sur un prototype, ni en présence de perturbations extérieures ou de bruits de mesure.

En définitive, ce travail montre que, pour la stabilisation et le suivi de trajectoire d'un quadrirotor, la commande LQR offre un gain net de rapidité et d'amortissement par rapport à un PID en cascade réglé de manière empirique, tout en s'appuyant sur une démarche de synthèse plus rigoureuse. Le PID conserve néanmoins l'avantage de la simplicité de mise en œuvre, ce qui explique sa large utilisation.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour prolonger ce travail :

- l'extension à la commande LQR intégrale afin d'éliminer les erreurs statiques résiduelles ;
- la synthèse d'une commande LQG, associant le LQR à un filtre de Kalman, pour prendre en compte les bruits de mesure et les perturbations stochastiques ;
- le couplage avec des techniques de commande adaptative ou robuste ( $H_\infty$ , modes glissants) pour améliorer la tolérance aux incertitudes paramétriques et aux perturbations extérieures ;
- la réduction du chattering sur les commandes de roulis et de tangage par un réglage plus fin des matrices  $Q$  et  $R$  et la prise en compte de la saturation des actionneurs ;
- l'implémentation en temps réel sur un prototype expérimental, afin de valider les résultats obtenus en simulation.

# Bibliographie

---

- [1] Beard, R. W., & McLain, T. W. (2012). *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA.
- [2] Beard, R. W. (2008). *Quadrotor Dynamics and Control*. Department of Electrical and Computer Engineering, Brigham Young University, USA.
- [3] Fahlstrom, P. G., & Gleason, T. J. (2012). *Introduction to UAV Systems* (4th Edition). John Wiley & Sons, New York, USA.
- [4] Pounds, P., Mahony, R., & Corke, P. (2006). "Modelling and Control of a Quad-Rotor Robot". *Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation (ACRA)*, Auckland, New Zealand.
- [5] Bouabdallah, S. (2007). *Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying*. Doctoral Thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Switzerland.
- [6] Valavanis, K. P., & Vachtsevanos, G. J. (2015). *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*. Springer, Dordrecht, Netherlands.
- [7] S. Bouabdallah, P. Murrieri et R. Siegwart, « Design and control of an indoor micro quadrotor », in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2004.
- [8] S. Bouabdallah, *Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying*, thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2007.
- [9] R. Mahony, V. Kumar et P. Corke, « Multirotor aerial vehicles: modeling, estimation, and control of quadrotor », *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 19, n° 3, 2012.
- [10] P. Castillo, R. Lozano et A. E. Dzul, *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*, Springer, 2005.
- [11] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano et J. Ostrowski, « Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-flyer », in *Proc. IFAC World Congress*, 2002.
- [12] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3<sup>e</sup> éd., Prentice Hall, 2002.
- [13] J.-J. E. Slotine et W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991
- [14] K. J. Åström et T. Häggglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2<sup>e</sup> éd., Instrument Society of America (ISA), 1995.
- [15] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5<sup>e</sup> éd., Prentice Hall, 2010.
- [16] S. Bouabdallah, A. Noth et R. Siegwart, « PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor », in *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2004.

## Bibliographie

---

- [17] L. R. García Carrillo, A. E. Dzúl López, R. Lozano et C. Pégard, *Quad Rotorcraft Control: Vision-Based Hovering and Navigation*, Springer, 2013.
- [18] T. Luukkonen, « Modelling and control of quadcopter », rapport de projet, Aalto University, 2011.
- [19] B. D. O. Anderson et J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1990.
- [20] F. L. Lewis, D. L. Vrabie et V. L. Syrmos, *Optimal Control*, 3e éd., Wiley, 2012.
- [21] R. E. Kalman, « Contributions to the theory of optimal control », *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 5, 1960.
- [22] A. E. Bryson et Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, Hemisphere Publishing, 1975.
- [23] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice Hall, 1970.

## Paramètre de Quadri-rotor

|             |                 |
|-------------|-----------------|
| $m$         | $0.650Kg$       |
| $g$         | $9.81[m/s^2]$   |
| $J_x = J_y$ | $7.5 * 10^{-3}$ |
| $J_z$       | $1.3 * 10^{-2}$ |
| $\psi_d$    | $0.3rad$        |
| $z_d(t)$    | $3m$            |