

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة سعيدة - د. مولاي الطاهر

UNIVERSITÉ DE SAÏDA - Dr MOULAY TAHAR



Faculté des sciences et de technologie

Département de génie civil et d'hydraulique

PROJET DE FIN DE CYCLE

Présenté pour l'obtention du diplôme de master en Génie civil

Spécialité : Structure

Thème :

**Analyse en flexion des plaques FGM la une théorie de cisaillement
sinusoïdale et de déformation normale**

Présenté par :

M : meglali bensaoug & M : Boukhecha mohamed Marouane

Soutenu le 24 / 09 / 2026, devant le jury composé de :

M. BELOUADI Larbi :	Maitre de Conférences « A »		Président
Mme GHAFIR Meriem:	Maître-assistant « A »		Encadreur
M. HACHEMI Houari:	Maitre de Conférences « A »		Examineur

Année universitai re : 2025 / 2026

Résumé

Cette étude porte sur l'analyse numérique du comportement mécanique, notamment en flexion, des plaques en matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM), en tenant compte de la présence de porosités au sein du matériau.

Une théorie améliorée du cisaillement sinusoïdal d'ordre élevé est adoptée pour analyser la réponse des plaques. Cette théorie permet de représenter la distribution non linéaire des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque, tout en prenant en considération la déformation normale dans la direction transversale. Elle satisfait également la condition d'annulation des contraintes de cisaillement sur les surfaces libres de la plaque, sans nécessiter l'introduction d'un coefficient de correction du cisaillement.

L'étude numérique est réalisée à l'aide du logiciel Maple 18 afin d'examiner l'influence de plusieurs paramètres géométriques et matériels, notamment l'indice de gradient fonctionnel, le taux de porosité et sa distribution à travers l'épaisseur, les dimensions de la plaque, le rapport d'aspect ainsi que les différentes conditions de chargement.

Les résultats montrent que la présence de porosités entraîne une diminution de la rigidité des plaques, ce qui se traduit par une augmentation des déplacements et des flèches. Ils montrent également que les effets du cisaillement transversal et de la déformation normale deviennent plus importants avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque, ce qui rend les théories d'ordre élevé particulièrement adaptées à l'analyse des plaques épaisses en FGM. Le comportement mécanique est également influencé par l'indice de gradient fonctionnel, la distribution des porosités, les paramètres géométriques et les conditions de chargement.

De manière générale, le modèle théorique adopté constitue un cadre approprié pour l'analyse du comportement en flexion des plaques FGM poreuses. Il permet de représenter de manière plus réaliste leur réponse mécanique en tenant compte des effets du gradient fonctionnel, de la porosité, du cisaillement transversal et de la déformation normale.

Mots-clés : matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM), plaques poreuses, flexion, théorie du cisaillement d'ordre élevé, cisaillement transversal, déformation normale, analyse numérique.

Abstract

This study deals with the numerical investigation of the bending behavior of porous functionally graded material (FGM) plates. An improved higher-order sinusoidal shear deformation theory is employed to describe the mechanical response of the plates, considering both transverse shear deformation and normal deformation through the thickness. The adopted theory satisfies the zero transverse shear stress conditions at the upper and lower surfaces without introducing a shear correction factor.

The numerical analysis is conducted using **Maple 18** to investigate the effects of various material and geometrical parameters, including the functional gradation index, porosity ratio and its distribution through the thickness, plate dimensions, aspect ratio, and applied loading conditions. The results reveal that the presence of porosity reduces the effective stiffness of the plates, leading to an increase in transverse displacement and bending deformation. The influence of transverse shear and normal deformation becomes more significant as the plate thickness increases.

Furthermore, the mechanical response is strongly affected by the functional gradation and the distribution of porosity across the thickness. The proposed formulation therefore provides an appropriate and efficient approach for analyzing the bending response of porous FGM plates while accounting for the combined effects of material gradation, porosity, transverse shear, and normal deformation.

Keywords: Functionally graded materials (FGM), porous plates, bending, higher-order shear deformation theory, transverse shear deformation, normal deformation, numerical analysis.

المخلص

تتناول هذه الدراسة التحليل العددي لسلوك الانحناء للصفائح المصنوعة من المواد ذات التدرج الوظيفي (FGM) والمسامية. تم اعتماد نظرية محسنة للتشوه بالقص الجببي من الرتبة العالية لوصف الاستجابة الميكانيكية للصفائح، مع الأخذ بعين الاعتبار كلاً من تشوه القص العرضي والتشوه الطبيعي عبر سمك الصفيحة. كما تحقق النظرية المعتمدة شرط انعدام إجهادات القص العرضي على السطحين العلوي والسفلي للصفيحة دون الحاجة إلى إدخال معامل تصحيح للقص.

أجري التحليل العددي باستخدام برنامج **Maple 18** لدراسة تأثير مجموعة من المعلمات المادية والهندسية، من بينها مؤشر التدرج الوظيفي، ونسبة المسامية وتوزيعها عبر السمك، وأبعاد الصفيحة، ونسبة الاستطالة، بالإضافة إلى ظروف التحميل المطبقة. أظهرت النتائج أن وجود المسامية يؤدي إلى انخفاض الصلابة الفعالة للصفائح، مما يسبب زيادة في الإزاحات العرضية وتشوهات الانحناء. كما تصبح تأثيرات القص العرضي والتشوه الطبيعي أكثر أهمية مع زيادة سماكة الصفيحة.

إضافة إلى ذلك، تتأثر الاستجابة الميكانيكية بشكل ملحوظ بدرجة التدرج الوظيفي وتوزيع المسامية عبر سمك الصفيحة. وبالتالي، يوفر النموذج المقترح طريقة مناسبة وفعالة لتحليل سلوك الانحناء للصفائح ذات التدرج الوظيفي والمسامية، مع مراعاة التأثيرات المترتبة على التدرج الوظيفي، والمسامية، والقص العرضي، والتشوه الطبيعي.

الكلمات المفتاحية: المواد ذات التدرج الوظيفي (FGM)، الصفائح المسامية، الانحناء، نظرية التشوه بالقص من الرتبة العالية، القص العرضي، التشوه الطبيعي، التحليل العددي.

شكر وتقدير

أتقدم بأسمى عبارات الشكر والعرفان إلى الأستاذة المشرفة **غفير مريم** على إشرافها على هذا العمل، وما قدمته لي من توجيهات علمية قيّمة، ونصائح بناءة، ومتابعة مستمرة منذ بداية هذا المشروع إلى غايته

كما أشكرها على صبرها، وسعة صدرها، وتشجيعها الدائم، وثقتها التي كانت لها الأثر الكبير في إنجاز هذا العمل في أحسن صورة ممكنة

وأتوجه كذلك بخالص الشكر إلى أساتذتي الكرام بكلية العلوم والتكنولوجيا على ما قدموه من علم وتكوين طوال مساري الدراسي

ولا يفوتني أن أشكر عائلتي وأصدقائي على دعمهم المتواصل وتشجيعهم الدائم

لكم جميعاً مني فائق الاحترام والتقدير

الإهداء

أهدي هذا العمل المتواضع

إلى والديّ العزيزين، رمز الحب والتضحية، اللذين كانا سندي في كل خطوة من حياتي، ولم يبخلا عليّ بالدعم والتشجيع.

إلى عائلتي الكريمة، التي منحتني القوة والإصرار من أجل مواصلة دراستي وتحقيق هذا النجاح.

إلى أساتذتي الأفاضل، الذين أناروا طريقي بالعلم والمعرفة، وكانوا خير عون لي في مسيرتي الدراسية.

إلى أصدقائي الأعزاء، الذين شاركوني أجمل اللحظات وساندوني في أصعب الأوقات.

وإلى كل من ساعدني من قريب أو بعيد في إنجاز هذا العمل.

لكم جميعاً أهدي ثمرة جهدي هذا بكل حب والامتنان

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	III
LISTE DES TABLEAUX	IV
LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS	V
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENT FONCTIONNEL (FGM)	3
<i>I-1. Introduction</i>	3
<i>I.2 Panorama des matériaux structuraux en ingénierie</i>	5
I.2.1 Les matériaux homogènes (isotropes)	5
I.2.2 Les matériaux composites stratifiés	6
I.2.3 Problème de discontinuité aux interfaces	9
I.3 constitution Concept et des FGM	11
I.3.1 Philosophie des FGM	12
I.3.2 Phases constituantes	14
I.3.3 Procédés de fabrication	16
I.3.4 Classification des FGM	18
<i>I.4 Modélisation des propriétés mécaniques</i>	21
I.4.1 Hypothèses de variation (variation à travers l'épaisseur)	22
I.4.2 Loi de puissance (P-FGM)	23
I.4.3 Modèles alternatifs	23
I.4.4 Lois de mélange :	24
I.4.5 Approximation vs Réalité:	25
I.5 Domaines d'application	26
I.5.1 Structures thermiques	26
I.5.2 Génie civil	27
<i>Conclusion</i>	29
CHAPITRE 2 THÉORIES CINÉMATIQUES ET FORMULATION MATHÉMATIQUE	31
<i>II.1 Introduction</i>	31
<i>II.2 Théories classiques des plaques</i>	33
II.2.1 Théorie Classique des Plaques (CPT : Kirchhoff) :	34
II.2.2 Théorie de Premier Ordre (FSDT : Mindlin) :	36
<i>II.3 Théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)</i>	38

II.3.1 Concept non-linéaire	39
2.3.3 Comparaison entre les théories CPT, FSDT et HSDT	41
<i>II.4 Théories d'ordre supérieur de type quasi-3D</i>	43
II.4.1 Effet d'étirement transversal (ϵ_{zz})	44
II.4.2 Champ des déplacements quasi-3D	45
<i>II.5 Relations fondamentales:</i>	46
II.5.1 Déformations (Relations Déformations-Déplacements)	47
II.5.3 ÉNERGIE DE DÉFORMATION (STRAIN ENERGY)	48
<i>II.6 ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE</i>	49
II.6.1 Principe des travaux virtuels (PTV)	49
2.6.3 Forme matricielle des équations d'équilibre	51
2.7.2 Encastrement (Clamped - C)	54
2.7.3 Bord libre (Free - F)	55
2.7.4 Cas des conditions mixtes et de symétrie	56
<i>CONCLUSION DU CHAPITRE :</i>	57
CHAPITRE III : RÉSULTATS, ANALYSE ET INTERPRÉTATION	60
<i>III.1. Introduction</i>	60
<i>III.2. Objectifs de l'Analyse Numérique</i>	60
<i>III.3. Formulation Théorique et Propriétés du Modèle</i>	61
III.3.1. Propriétés du Matériau et Configuration Géométrique	61
<i>III.4. Modélisation du Matériau FGM et Effet de la Porosité</i>	63
III.4.1. Loi de Variation du Matériau Sain ($e = 0$)	63
III.4.2. Introduction des Modèles de Porosité ($e > 0$)	64
<i>III.5. Équations Constitutives et Champ de Déplacement</i>	66
III.5.1. Champ de Déplacement de la Théorie Sinusoïdale	66
III.5.2. Équations d'Équilibre Globales	68
<i>III.5. Solution de Navier</i>	70
<i>III-6-Résultats et Discussions:</i>	73
III-6-1-Validation analytique du modèle proposé :	73
<i>III.7. Analyse Paramétrique de la Réponse Mécanique</i>	75
III.7.1. Influence de l'Indice de Gradation (k) sur le Déplacement Transversal	75
III.7.2. Influence de l'Élancement Géométrique ($S = a/h$)	76
III.7.3. Influence de la Position dans l'Épaisseur (z/h)	77
III.7.4. Influence du Rapport de Forme en Plan (a/b)	78
<i>III.8. Analyse et Distribution des Contraintes</i>	79
<i>III.9. Conclusion</i>	80
<i>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES</i>	83

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Constitution d'un stratifié composite.	8
Figure 1.2: Désignation d'un stratifié composite.	9
Figure1. 3 : Microstructure d'une FGM graduée en nickel (Ni)–cuivre (Cu).	14
Figure 1. 4: Distribution des constituants dans un matériau à gradient fonctionnel (FGM).v	16
Figure 1.5: FGM à gradient continu (A) et FGM à gradient par couches (B).v	21
Figure 1. 6 : Revêtement à gradient fonctionnel (FGM) pour barrière thermique (TBC).	27
Figur1.7 : Dégradation des structures en béton armé due à la corrosion en milieu agressif.	28
Figure 3.1: Géométrie et système de coordonnées de la plaque FG considérée.	61
Figure 3.2:variation du module $E(z)$ ($e = 0$)	64
Figure 3. 3: K en fonction de w	76
Figure 3.4– Évolution de $W(0)$ en fonction de a/h pour les six configurations étudiées	77
Figure 3.5: Évolution de $W(0)$ en fonction de z/h pour les six configurations étudiées.	78
Figure 3. 6: Évolution de $W(0)$ en fonction de a/b pour les six configurations étudiées	79

LISTE DES TABLEAUX

Table 3.1: Les propriétés mécaniques et géométriques de référence	62
Table 3.2: des valeurs calculées de $E(z)$ pour $k = 1$	65
Table 3.3: Validation analytique du modèle proposé	73

LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS

FGM : Functionally Graded Material — matériau à gradient fonctionnel
CPT : Classical Plate Theory — théorie classique des plaques
FSDT : First-Order Shear Deformation Theory — théorie du premier ordre
HSDT : Higher-Order Shear Deformation Theory — théorie d'ordre supérieur
UDL : Uniformly Distributed Load — charge uniformément répartie
SSL : Sinusoidal Surface Load — charge sinusoïdale
 a, b : dimensions en plan de la plaque
 h : épaisseur de la plaque
 z : coordonnée suivant l'épaisseur
 k : indice de gradation de la loi de puissance
 e : paramètre/amplitude de porosité
 $E(z)$: module d'Young variable suivant l'épaisseur
 ν : coefficient de Poisson
 ϵ_{zz} : déformation normale transverse
 γ_{xz}, γ_{yz} : déformations de cisaillement transversal
 σ_{xx}, σ_{yy} : contraintes normales
 τ_{xz}, τ_{yz} : contraintes tangentielles
 w : déplacement transversal
Maple 18 : environnement de calcul symbolique et numérique

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le domaine de l'ingénierie moderne, la recherche de matériaux de structure performants, capables de combiner une haute résistance thermique et une excellente ténacité mécanique, est devenue une priorité technologique majeure. Les structures traditionnelles, telles que les plaques stratifiées composites ou les revêtements barrières thermiques (TBC), montrent rapidement leurs limites opérationnelles lorsqu'elles sont soumises à des environnements sévères. Elles souffrent fréquemment de délaminage prématuré, un phénomène destructeur provoqué par des concentrations excessives de contraintes aux interfaces hétérogènes, dues à la rupture brutale des propriétés mécaniques entre les couches empilées.

Pour pallier ces défaillances structurelles, les Matériaux à Gradient Fonctionnel (Functionally Graded Materials - FGM) se sont imposés comme une alternative particulièrement élégante et novatrice. Caractérisés par une transition continue et fluide de leurs propriétés mécaniques et thermiques à travers l'épaisseur, les FGM éliminent intrinsèquement les interfaces franches. Généralement élaborés à partir d'un mélange intime entre une phase céramique (protectrice et résistante aux fortes températures) et une phase métallique (ductile et résistante aux chocs), ils offrent un comportement macroscopique optimisé. Cependant, les procédés de fabrication réels, tels que le frittage ou la métallurgie des poudres, génèrent inévitablement des micro-vides ou des porosités au sein de la matrice. Ces imperfections matérielles altèrent la rigidité globale et modifient de manière significative la réponse cinématique et les distributions de contraintes des structures en service.

L'objectif principal de ce travail de recherche est de modéliser avec précision le comportement en flexion de plaques poreuses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Pour y parvenir, nous mettons en œuvre une théorie cinématique sinusoïdale d'ordre élevé, capable de capturer à la fois le cisaillement transversal et la déformation normale sans nécessiter l'introduction artificielle de facteurs de correction. Ce manuscrit s'articule autour de trois chapitres fondamentaux :

- **Le Premier Chapitre** dresse un état de l'art exhaustif sur les concepts physiques des FGM, leurs techniques d'élaboration, ainsi que les modèles mathématiques de porosités (EVEN et UNEVEN) couramment observés.

- **Le Deuxième Chapitre** pose le cadre rigoureux de la formulation théorique, en établissant précisément le champ de déplacement enrichi, les relations de comportement constitutives et les équations d'équilibre via le principe variationnel des puissances virtuelles.
- **Le Troisième Chapitre** est dédié à la validation numérique de notre modèle sous le logiciel Maple 18 en exploitant une solution analytique exacte de Navier, tout en isolant l'influence des paramètres géométriques et matériels sur la réponse mécanique globale.

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENT FONCTIONNEL (FGM)

I-1. Introduction

L'idée des Functionally Graded Materials (FGMs) a été considérablement développée au début des années 1980 au Japon, où ce nouveau concept de matériau a été proposé afin d'améliorer l'adhérence entre les constituants et de minimiser les contraintes thermiques dans les composites métal-céramique développés notamment pour les moteurs de fusées réutilisables. Le principe consiste à remplacer l'interface brusque entre deux matériaux de propriétés différentes par une transition progressive de leur composition et de leurs propriétés. Cette approche permet ainsi de mieux contrôler les contraintes thermiques et mécaniques générées au sein de la structure.

Depuis leur apparition, les concepts de FGM ont suscité une activité de recherche importante à l'échelle internationale. Ils sont aujourd'hui appliqués à différentes familles de matériaux, notamment les métaux, les céramiques et les composites organiques, afin de produire des composants présentant des propriétés physiques, mécaniques et thermiques adaptées aux conditions de fonctionnement. L'intérêt de ces matériaux réside principalement dans la possibilité de combiner progressivement les caractéristiques de plusieurs constituants au sein d'une même structure.

Aujourd'hui, la production de structures graduées peut être considérée comme une étape importante dans le développement des matériaux composites avancés. Les Functionally Graded Materials sont une classe de matériaux conçus dans laquelle la composition et/ou la microstructure varie progressivement selon une direction spécifique. Contrairement aux composites stratifiés conventionnels, constitués de couches distinctes, les FGM permettent d'obtenir une variation continue des propriétés matérielles et ne présentent donc pas d'interface nette entre les constituants. Cette particularité permet de réduire les discontinuités de propriétés et d'améliorer progressivement la répartition des caractéristiques mécaniques et thermiques à travers la structure.

Dans le cas des systèmes métal-céramique, par exemple, la région riche en métal peut apporter une bonne ductilité et une capacité importante à supporter les sollicitations mécaniques, tandis que la région riche en céramique peut assurer une meilleure résistance aux températures élevées, à l'usure et à la dégradation thermique. La variation progressive entre ces deux phases permet ainsi d'obtenir un matériau dont les propriétés évoluent continûment d'une surface à l'autre. Une telle architecture est particulièrement intéressante pour les structures soumises à des environnements thermo-mécaniques sévères et à des cycles thermiques répétés.

L'application du concept des FGM aux composites à matrice métallique (MMCs) conduit au développement de matériaux et de composants conçus afin d'être renforcés de manière sélective dans les zones nécessitant un module d'élasticité, une résistance mécanique et/ou une résistance à l'usure accrues. La distribution graduelle des constituants permet ainsi d'adapter les propriétés locales du matériau aux sollicitations imposées à chaque région de la structure. Cette possibilité constitue un avantage majeur dans la conception de composants structuraux à performances élevées.

La structure graduée implique donc une variation progressive des propriétés matérielles telles que le module d'Young, la masse volumique, le coefficient de dilatation thermique et les propriétés de conductivité thermique. Cette variation peut être définie suivant une ou plusieurs directions de l'espace et peut notamment être étudiée à travers l'épaisseur des plaques et des coques. La description mathématique de cette distribution constitue par conséquent une étape essentielle dans l'analyse du comportement mécanique et thermo-mécanique des structures en FGM.

L'intérêt des FGM s'étend ainsi à de nombreux domaines d'application, notamment l'aéronautique, l'aérospatiale, l'énergie, le génie mécanique et les structures soumises à de fortes variations de température. Leur capacité à assurer une transition progressive entre des matériaux présentant des propriétés différentes permet d'améliorer le comportement global des composants et d'élargir considérablement les applications industrielles des matériaux gradués.

Ainsi, l'étude des FGM constitue un domaine important de la mécanique des matériaux et des structures. La compréhension de leur constitution, de la distribution de leurs propriétés et de leur comportement sous différentes sollicitations constitue une étape fondamentale pour l'analyse des plaques et des coques en matériaux à gradient fonctionnel, notamment lorsqu'elles sont soumises à des chargements thermiques et mécaniques pouvant conduire à des phénomènes d'instabilité et de flambement.

Afin de mieux situer les FGMs parmi les différents matériaux utilisés en ingénierie, la section suivante présente un panorama des matériaux structuraux.

I.2 Panorama des matériaux structuraux en ingénierie

I.2.1 Les matériaux homogènes (isotropes)

Un matériau homogène est un matériau dont les propriétés physiques et mécaniques restent identiques en tout point de son volume. Lorsqu'un matériau homogène possède également des propriétés indépendantes de la direction considérée, il est qualifié de matériau isotrope. Ainsi, dans un matériau isotrope, les propriétés mécaniques ne dépendent pas du choix des axes de référence utilisés pour décrire son comportement. Il n'existe donc aucune direction privilégiée et le comportement du matériau reste identique quelle que soit l'orientation du système de coordonnées.

Du point de vue de la mécanique des matériaux, l'isotropie signifie que la matrice de rigidité, ou de manière équivalente la matrice de souplesse, demeure invariante lors d'un changement de base orthonormée. Cette caractéristique simplifie considérablement la description mathématique du comportement mécanique, car les propriétés élastiques peuvent être représentées par un nombre limité de constantes indépendantes. Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, le comportement mécanique est généralement défini à partir de deux constantes élastiques indépendantes, telles que le module d'Young et le coefficient de Poisson.

L'isotropie peut également être associée à la présence d'un nombre important de plans de symétrie dans le matériau. Un matériau isotrope idéal possède ainsi une infinité de directions et de plans de symétrie. Cette propriété signifie que les caractéristiques mécaniques observées dans une direction donnée sont identiques à celles observées dans toute autre direction. La

représentation schématique d'un matériau isotrope permet ainsi de mettre en évidence l'absence de direction matérielle privilégiée, comme illustré à la figure correspondante.

Il convient toutefois de distinguer l'isotropie de l'homogénéité. Un matériau peut être homogène sans être isotrope lorsque ses propriétés sont constantes d'un point à l'autre mais dépendent de la direction. À l'inverse, l'isotropie concerne principalement l'indépendance des propriétés vis-à-vis de l'orientation. Cette distinction est particulièrement importante dans l'étude des matériaux composites, car ces derniers présentent souvent un comportement anisotrope ou orthotrope en raison de l'orientation de leurs fibres ou de leurs constituants.

L'étude des matériaux isotropes constitue donc une base essentielle pour comprendre le comportement des matériaux plus complexes étudiés en mécanique des structures. Elle permet notamment d'établir une comparaison avec les matériaux composites stratifiés et les matériaux à gradient fonctionnel, pour lesquels les propriétés mécaniques peuvent varier suivant la direction et/ou la position dans la structure.

On trouvera les coefficients élastiques de ces corps, à partir de ceux des matériaux cubiques. En écrivant l'invariance dans n'importe quelle rotation du système d'axes et le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 2 : [4]

I.2.2 Les matériaux composites stratifiés

Un matériau composite stratifié est constitué d'un empilement de plusieurs monocouches, également appelées plis, dont chacune peut présenter une orientation propre des fibres par rapport à un référentiel commun associé au stratifié. Chaque couche possède ainsi des caractéristiques mécaniques dépendant notamment de la nature du matériau et de l'orientation des fibres. L'ensemble des couches forme une structure multicouche dont le comportement mécanique global dépend directement de la séquence d'empilement, de l'épaisseur des plis et de leurs orientations. [2], [3]

Le choix de la séquence d'empilement et, plus particulièrement, l'orientation des différentes couches permet d'adapter les propriétés mécaniques du stratifié aux sollicitations auxquelles la structure est soumise. Cette possibilité constitue l'un des principaux avantages des matériaux

composites stratifiés. En fonction de la disposition des plis, plusieurs configurations de stratifiés peuvent être distinguées : [4], [5]

1. Stratifié équilibré : il comporte un nombre égal de couches orientées suivant des directions opposées, par exemple des plis orientés à $+ \theta^\circ$ associés à des plis orientés à $- \theta^\circ$. Cette configuration permet notamment d'obtenir un comportement plus équilibré vis-à-vis des sollicitations dans les directions principales du stratifié.

2. Stratifié symétrique : les couches sont disposées de manière symétrique par rapport au plan moyen du stratifié. La séquence d'empilement située d'un côté du plan moyen est ainsi reproduite de manière symétrique de l'autre côté. Cette disposition permet de contrôler certaines interactions entre les déformations de membrane et les déformations de flexion.

3. Stratifié antisymétrique : les couches sont disposées selon une séquence qui n'est pas symétrique par rapport au plan moyen. Les orientations des plis peuvent être organisées de manière opposée de part et d'autre du plan moyen, ce qui conduit à un comportement mécanique différent de celui d'un stratifié symétrique.

4. Stratifié croisé : il comporte des couches orientées principalement suivant les directions 0° et 90° , avec généralement un nombre équivalent de plis dans ces deux orientations. Cette configuration est fréquemment utilisée lorsque la structure doit présenter des propriétés mécaniques importantes suivant deux directions principales perpendiculaires.

5. Stratifié hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes. Le stratifié peut ainsi associer plusieurs types de renforts, chacun apportant des caractéristiques mécaniques spécifiques. Cette combinaison permet de rechercher un compromis entre différentes propriétés telles que la rigidité, la résistance mécanique, la légèreté et la résistance à l'endommagement.

Ainsi, les matériaux composites stratifiés offrent une grande liberté de conception grâce au contrôle de la nature, de l'épaisseur et de l'orientation des différentes couches. Cette architecture permet d'optimiser les propriétés mécaniques du matériau en fonction des exigences de la structure. Cependant, la présence d'interfaces distinctes entre les monocouches peut également entraîner des variations brusques des propriétés mécaniques et thermiques, ce

qui constitue une caractéristique importante à prendre en considération lors de l'analyse du comportement des composites stratifiés. [2], [4], [8]

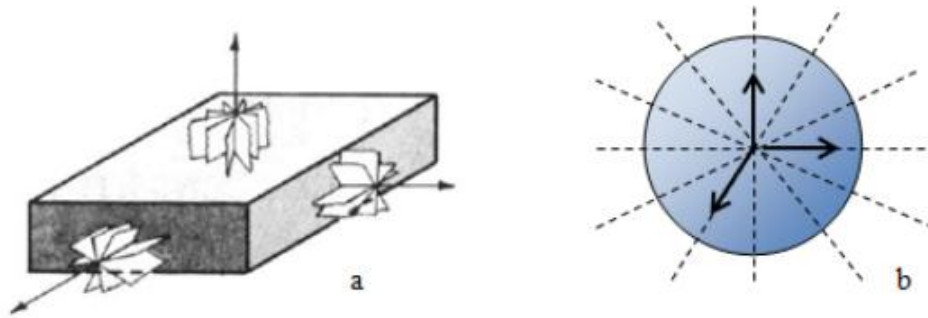


Figure 1.1: Constitution d'un stratifié composite.

Le type d'un matériau composite stratifié est généralement défini par sa séquence d'empilement, qui fournit une représentation synthétique de l'orientation successive des différentes couches constituant le stratifié. Chaque pli peut être orienté suivant une direction déterminée, ce qui permet de contrôler le comportement mécanique global du matériau et de l'adapter aux sollicitations auxquelles la structure est soumise.

À titre d'exemple, un stratifié noté $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$ est constitué de huit plis. Cette notation traduit la répétition des orientations 90° et 0° , suivie d'un arrangement symétrique par rapport au plan moyen du stratifié. La séquence d'empilement permet ainsi de définir précisément la disposition des fibres dans l'épaisseur et, par conséquent, les caractéristiques mécaniques recherchées.

L'un des principaux intérêts des matériaux composites stratifiés réside dans la possibilité d'orienter les propriétés mécaniques en fonction des besoins de la structure. En choisissant convenablement l'orientation et la succession des différents plis, il est possible de favoriser la rigidité et la résistance dans les directions correspondant aux sollicitations principales. Cette liberté de conception permet ainsi d'obtenir des structures légères et performantes, tout en exploitant efficacement les propriétés directionnelles des matériaux composites.

Cependant, la succession de plis d'orientations différentes entraîne l'existence d'interfaces entre les couches. Ces interfaces constituent des zones où les propriétés mécaniques peuvent présenter des variations importantes, ce qui peut influencer le comportement du stratifié sous des sollicitations mécaniques ou thermiques. La compréhension de la séquence d'empilement constitue donc une étape essentielle pour l'analyse et la conception des structures composites stratifiées. [4], [14]

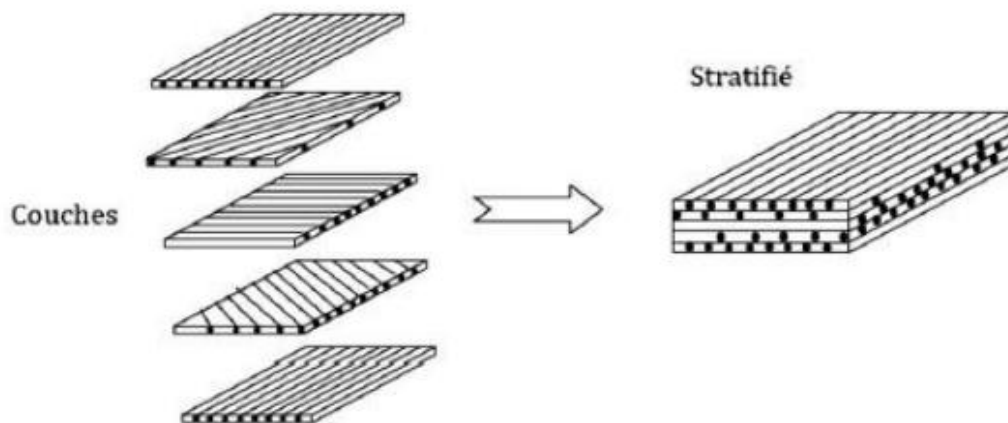


Figure 1.2: Désignation d'un stratifié composite.

Ces matériaux sont largement utilisés dans la conception des structures minces, notamment les plaques et les coques, où le contrôle de l'orientation des fibres permet d'optimiser les performances mécaniques.

I.2.3 Problème de discontinuité aux interfaces

Les matériaux composites stratifiés présentent des performances mécaniques élevées grâce à l'association de plusieurs plis possédant des orientations de fibres et des propriétés mécaniques différentes. Cette architecture permet d'adapter le comportement global du matériau aux différentes sollicitations appliquées à la structure. Cependant, la présence d'interfaces nettes entre les différents plis constitue une particularité importante des composites stratifiés. En effet, le passage d'un matériau ou d'une orientation à une autre s'effectue de manière brusque à travers ces interfaces, ce qui entraîne une discontinuité des propriétés mécaniques dans l'épaisseur du stratifié. [2], [4], [14]

Cette discontinuité peut provoquer une redistribution non uniforme des contraintes et favoriser l'apparition de contraintes interlaminaires, notamment dans les zones où les sollicitations sont importantes. Le phénomène est particulièrement sensible au voisinage des bords libres et des régions fortement sollicitées. Les différences de rigidité et d'orientation entre les plis peuvent alors générer des contraintes de cisaillement et de traction perpendiculaires aux interfaces.

Lorsque ces contraintes atteignent des niveaux critiques, elles peuvent favoriser l'amorçage et la propagation de fissures au niveau des interfaces entre les couches. Ce phénomène, généralement associé au délaminage, peut entraîner une diminution progressive de la rigidité et de la capacité portante du stratifié. La présence de telles dégradations peut ainsi réduire la durée de vie en service de la structure et, dans les cas les plus sévères, conduire à une rupture prématurée.

La discontinuité des propriétés aux interfaces constitue donc une limitation importante des matériaux composites stratifiés, particulièrement lorsque ceux-ci sont soumis à des sollicitations mécaniques ou thermiques élevées. Cette problématique contribue à expliquer l'intérêt porté aux matériaux à gradient fonctionnel (FGM), dans lesquels les propriétés peuvent évoluer progressivement à travers l'épaisseur, réduisant ainsi les variations brusques associées aux interfaces entre les différentes couches. [4], [14]

Sous l'effet de chargements mécaniques ou thermiques répétés, les différences de rigidité et de coefficient de dilatation thermique entre les couches adjacentes peuvent également engendrer des incompatibilités de déformation au niveau des interfaces. Ces incompatibilités résultent du fait que chaque couche possède un comportement mécanique et thermique différent, ce qui peut conduire à une redistribution locale des contraintes. Il peut alors apparaître des contraintes interlaminaires élevées, notamment des contraintes de cisaillement et de traction, susceptibles de favoriser l'amorçage et la propagation progressive du délaminage.

Le délaminage correspond à une séparation partielle ou totale entre deux couches adjacentes du stratifié. Sa propagation peut entraîner une diminution importante de la rigidité globale du matériau ainsi qu'une perte progressive de sa capacité portante. Dans les cas les plus sévères,

l'évolution du délaminage peut compromettre l'intégrité de la structure et conduire à une rupture prématurée. Ce phénomène constitue ainsi l'un des principaux modes d'endommagement à prendre en considération lors de l'analyse des structures composites soumises à des sollicitations répétées. [14]

Par ailleurs, dans les environnements thermomécaniques sévères, les interfaces entre les différentes couches peuvent devenir des zones particulièrement critiques en raison de l'accumulation des contraintes thermiques résiduelles. Ces contraintes peuvent être générées au cours du procédé de fabrication, notamment en raison des différences de comportement thermique des constituants, ou apparaître au cours de l'exploitation lorsque la structure est soumise à des variations importantes de température. Les effets combinés des chargements mécaniques et thermiques peuvent ainsi accentuer les incompatibilités de déformation et favoriser l'endommagement interlaminaire.

Cette problématique est particulièrement importante dans les applications aéronautiques, spatiales et énergétiques, dans lesquelles les structures composites peuvent être soumises à de forts gradients thermiques et à des cycles thermomécaniques répétés. La réduction des concentrations de contraintes au niveau des interfaces constitue donc un enjeu majeur pour améliorer la fiabilité, la durabilité et les performances des structures composites. [2], [4], [14]

Afin de réduire ces effets néfastes associés aux discontinuités interfaciales, le concept des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) a été développé. Contrairement aux composites stratifiés conventionnels, les FGM assurent une variation continue et progressive des propriétés matérielles à travers l'épaisseur, ce qui permet d'atténuer les concentrations de contraintes et d'améliorer la tenue thermo-mécanique des structures. [9]

I.3 constitution Concept et des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials – FGM) ont été développés comme une approche avancée permettant de répondre à certaines limitations rencontrées dans les matériaux composites stratifiés conventionnels, notamment celles liées à la présence d'interfaces nettes entre les différentes couches. Contrairement aux composites stratifiés, dans lesquels les propriétés mécaniques et thermiques peuvent varier brusquement

d'un pli à l'autre, les FGM reposent sur une variation progressive et contrôlée des propriétés du matériau à travers une ou plusieurs directions de l'espace. [9]

Le concept fondamental des FGM consiste à associer progressivement deux ou plusieurs constituants présentant des propriétés différentes, de manière à obtenir une transition continue entre les régions du matériau. Dans de nombreuses applications, cette transition est réalisée entre une phase métallique et une phase céramique. La partie riche en métal apporte notamment une bonne ductilité et une capacité importante à supporter les sollicitations mécaniques, tandis que la partie riche en céramique contribue à améliorer la résistance à la température, à l'usure et à certains environnements agressifs. [9]

La variation progressive de la composition permet ainsi d'éviter la présence d'une interface parfaitement définie entre les deux constituants. Les propriétés mécaniques et thermiques évoluent alors progressivement à travers l'épaisseur, ce qui permet de limiter les variations brusques des contraintes et des déformations. Cette caractéristique est particulièrement intéressante lorsque le matériau est soumis simultanément à des sollicitations mécaniques et thermiques, car elle contribue à une distribution plus régulière des champs de contraintes et peut réduire les concentrations locales susceptibles d'apparaître dans les matériaux stratifiés conventionnels. [9]

Ainsi, les FGM peuvent être considérés comme des matériaux dont la microstructure et les propriétés sont spatialement adaptées aux conditions de fonctionnement de la structure. Le contrôle du gradient permet de rechercher un compromis entre les propriétés des différents constituants et d'adapter progressivement le comportement du matériau aux exigences de l'application. Cette conception constitue l'un des principaux intérêts des FGM dans les structures soumises à des environnements thermomécaniques complexes. [9]

I.3.1 Philosophie des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel constituent une nouvelle génération de matériaux d'ingénierie dont la philosophie repose sur une variation spatiale contrôlée de la microstructure et de la composition. Contrairement aux matériaux homogènes ou aux composites stratifiés classiques, dans lesquels les constituants sont généralement répartis de manière uniforme ou séparés en couches distinctes, les FGM permettent de faire varier

progressivement la proportion et la distribution des différentes phases constituant à travers le matériau. Cette variation peut concerner la nature, la taille, la forme et la fraction volumique des phases de renforcement ainsi que leur interaction avec la matrice. [9]

L'objectif principal de cette approche est d'obtenir une microstructure présentant des propriétés mécaniques et thermiques qui évoluent progressivement, de manière continue ou, selon le procédé et le modèle considéré, par variations discrètes à différentes échelles. Cette organisation permet ainsi d'adapter localement les caractéristiques du matériau aux conditions auxquelles il est soumis. Par exemple, dans un FGM métal-céramique, la proportion de céramique peut augmenter progressivement dans une direction tandis que celle du métal diminue, permettant ainsi d'associer progressivement les propriétés spécifiques des deux constituants. [9]

La philosophie des FGM repose donc sur l'intégration simultanée des considérations liées au matériau et à la structure dès l'étape de conception. La distribution spatiale des constituants n'est plus considérée comme une caractéristique fixe du matériau, mais devient elle-même un paramètre de conception pouvant être adapté aux exigences mécaniques et thermiques de la structure. Cette conception graduelle permet notamment de rechercher un compromis entre plusieurs propriétés qui seraient difficiles à réunir dans un matériau homogène ou dans un composite stratifié conventionnel. [9]

Les FGM ont été initialement développés au Japon et leur intérêt s'est progressivement étendu à de nombreux domaines de l'ingénierie. Leur développement a donné lieu à de nombreux travaux consacrés à leur caractérisation, leur modélisation, leur conception et leurs procédés de fabrication. La fabrication d'un matériau à gradient fonctionnel peut notamment être envisagée à partir du mélange progressif de deux phases distinctes, telles qu'une phase métallique et une phase céramique, selon une distribution déterminée à travers le volume du matériau. [9]

Dans l'étude et la modélisation des FGM, la connaissance de la distribution des constituants à l'échelle microscopique n'est pas toujours suffisante ou directement accessible. Il devient alors nécessaire de déterminer les propriétés matérielles effectives du matériau gradué, telles que le module d'élasticité, le module de cisaillement, la masse volumique et les autres

propriétés mécaniques et thermiques nécessaires à l'analyse. Ces propriétés effectives dépendent notamment de la fraction volumique et de la distribution de la phase dispersée, ainsi que des caractéristiques des constituants utilisés. [9]

Ainsi, la philosophie des FGM consiste à exploiter la possibilité de contrôler la distribution des phases constituantes afin de créer un matériau dont les propriétés évoluent progressivement dans l'espace. Cette approche permet de concevoir des matériaux adaptés aux sollicitations complexes et constitue une base essentielle pour l'analyse du comportement mécanique et thermomécanique des structures en FGM. [9]

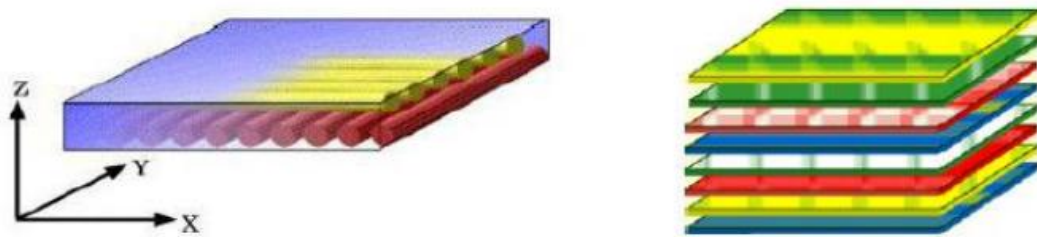


Figure1. 3 : Microstructure d'une FGM graduée en nickel (Ni)–cuivre (Cu).

I.3.2 Phases constituantes

La fabrication des matériaux à gradient fonctionnel peut être envisagée à partir de l'association progressive de deux phases distinctes possédant des propriétés complémentaires. Dans le cas des FGM métal-céramique, les deux constituants principaux sont généralement une phase métallique et une phase céramique. La variation progressive de leur fraction volumique permet d'obtenir un matériau dont les propriétés évoluent graduellement à travers l'épaisseur.

A. La phase métallique (Aluminium)

L'aluminium est un matériau métallique caractérisé par sa légèreté et sa bonne aptitude à la mise en forme grâce à sa ductilité. Sa masse volumique est de l'ordre de $(2700, \text{kg/m}^3)$. Les alliages d'aluminium présentent plusieurs caractéristiques intéressantes pour la constitution des FGM, notamment une bonne résistance à la corrosion, liée à la formation d'une couche d'oxyde protectrice à leur surface, ainsi qu'un rapport résistance/masse favorable.

Ils présentent également une conductivité thermique et électrique relativement élevée, ce qui constitue un avantage lorsque la partie métallique du FGM doit assurer une bonne dissipation ou une bonne transmission de la chaleur. Ces caractéristiques font de l'aluminium une phase particulièrement intéressante dans les matériaux gradués destinés à combiner légèreté, propriétés mécaniques et propriétés thermiques.

B. La phase céramique

La phase céramique constitue le second constituant essentiel des FGM métal-céramique. Elle se distingue notamment par son module d'Young élevé, sa dureté importante et sa bonne résistance à l'usure. Elle possède également une bonne tenue à haute température et une résistance élevée à la compression. Sa masse volumique est donnée ici de l'ordre de $(3800, \text{kg/m}^3)$.

Ces caractéristiques permettent à la phase céramique d'apporter au matériau gradué une meilleure aptitude à supporter des environnements thermiques sévères et des sollicitations nécessitant une rigidité et une résistance élevées. Elle joue ainsi un rôle complémentaire à celui de la phase métallique.

C. Synergie des phases

L'intérêt principal d'un FGM métal-céramique réside dans la complémentarité des propriétés des deux phases constituantes. La région riche en métal peut contribuer à assurer la ductilité, la légèreté ainsi qu'une bonne conductivité thermique, tandis que la région riche en céramique apporte une meilleure résistance aux températures élevées, une rigidité importante et une bonne résistance à l'usure. [9]

Contrairement à un composite stratifié conventionnel, la transition entre les deux phases n'est pas nécessairement réalisée par une interface nette. La fraction volumique des constituants peut varier progressivement à travers l'épaisseur, conduisant ainsi à une distribution graduée des propriétés du matériau. Cette variation continue permet d'obtenir un compromis entre les caractéristiques des deux constituants et constitue l'un des principes fondamentaux de la conception des matériaux à gradient fonctionnel. [9]

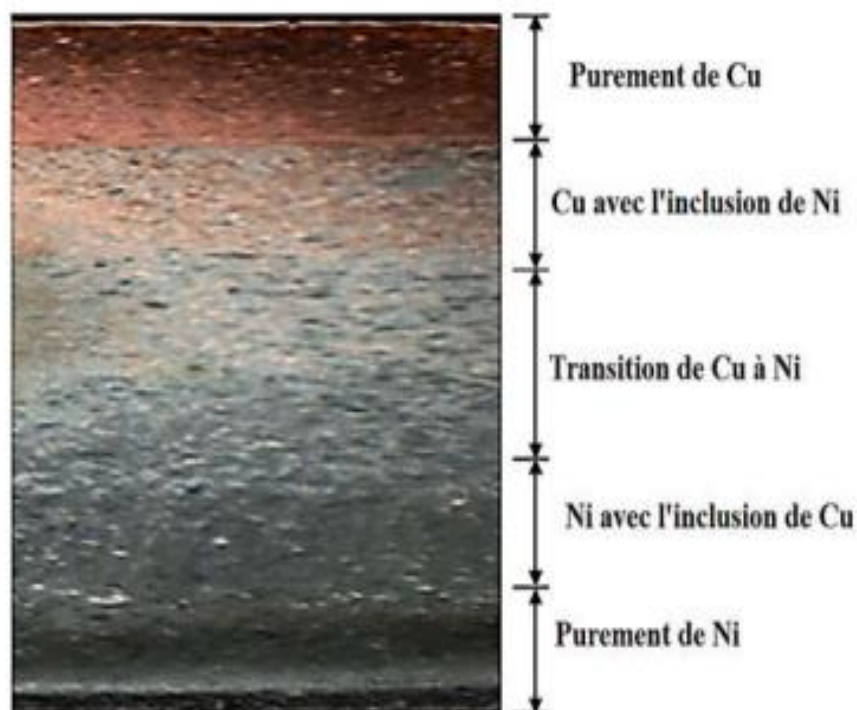


Figure 1. 4: Distribution des constituants dans un matériau à gradient fonctionnel (FGM).

I.3.3 Procédés de fabrication

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être élaborés à l'aide de plusieurs procédés de fabrication, dont le choix dépend principalement de la nature des phases constituantes, de leur état physique ainsi que de la géométrie et des performances recherchées pour la pièce finale. L'objectif commun de ces différentes techniques est de contrôler la distribution spatiale des constituants afin d'obtenir une variation progressive des propriétés du matériau. Parmi les

procédés couramment utilisés pour l'élaboration des FGM, on peut notamment citer le dépôt en phase vapeur, la métallurgie des poudres, la coulée centrifuge et les techniques de fabrication additive.

A. Dépôt en phase vapeur (CVD/PVD) [3], [8]

Les techniques de dépôt en phase vapeur regroupent notamment le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD). Elles permettent de réaliser des revêtements ou des couches minces présentant une composition contrôlée. Dans le cas des FGM, la variation des conditions de dépôt ou des flux des différents constituants permet de modifier progressivement la composition du matériau au cours de l'élaboration. Ces procédés offrent ainsi un contrôle relativement précis de la microstructure et de la composition à une échelle fine, ce qui les rend particulièrement adaptés aux applications nécessitant des gradients de faible épaisseur.

B. Métallurgie des poudres (Powder Metallurgy)

La métallurgie des poudres constitue une méthode particulièrement adaptée à la fabrication de matériaux FGM massifs. Le procédé repose généralement sur la préparation et le mélange de poudres correspondant aux différentes phases constituantes, avec des fractions volumiques qui peuvent varier progressivement suivant la position considérée dans la pièce. Les mélanges ainsi préparés peuvent ensuite être disposés selon une séquence déterminée avant de subir une opération de compactage et de frittage. Au cours du frittage, les particules sont consolidées sous l'action de la température, permettant d'obtenir une pièce présentant le gradient de composition recherché. [3], [8]

C. Coulée centrifuge (Centrifugal Casting)

La coulée centrifuge exploite l'action d'une force centrifuge afin de favoriser la séparation et la redistribution des différentes phases présentes dans un mélange à l'état liquide. Dans le cas d'un système métal-céramique, la différence de masse volumique entre les constituants peut provoquer une migration préférentielle des particules pendant la solidification. Cette redistribution conduit à une variation de la concentration des phases suivant la direction radiale de la pièce et permet ainsi d'obtenir un gradient de propriétés. Cette méthode est

particulièrement intéressante pour la réalisation de certaines pièces de géométrie cylindrique ou axisymétrique.

D. Fabrication additive (3D Printing)

La fabrication additive constitue une approche plus récente et particulièrement prometteuse pour l'élaboration des FGM. Elle permet de construire progressivement une pièce à partir de dépôts successifs de matière tout en contrôlant localement sa composition. Certaines techniques, telles que le dépôt de métal par laser (LMD), permettent notamment de modifier au cours du procédé les proportions des poudres introduites dans la zone de fabrication. Il devient ainsi possible de contrôler le gradient de composition de manière spatiale et de réaliser des géométries complexes difficilement accessibles par les procédés conventionnels. [3], [8]

Le choix du procédé de fabrication dépend donc des constituants utilisés, de la nature du gradient recherché, de la géométrie de la structure et du niveau de précision nécessaire. Malgré leurs différences, ces techniques ont pour objectif commun de maîtriser la distribution des phases afin d'obtenir une évolution progressive des propriétés mécaniques et thermiques du matériau. [3], [8]

I.3.4 Classification des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) peuvent être classés selon plusieurs critères liés à la nature de leurs constituants, à leur organisation structurale, à leur domaine d'application, à la direction du gradient de propriétés ainsi qu'aux exigences liées à leur fabrication. Cette classification permet de distinguer les différentes architectures de FGM et de mieux identifier le type de matériau adapté à une application donnée.

A. Selon la combinaison des matériaux

Selon la nature des phases constituantes, plusieurs combinaisons de matériaux peuvent être utilisées pour élaborer un FGM. Les associations les plus courantes comprennent notamment les systèmes métal/céramique, céramique/céramique et céramique/polymère. Le choix de la combinaison dépend principalement des propriétés recherchées et des conditions de fonctionnement de la structure. Chaque constituant apporte ainsi ses caractéristiques propres,

tandis que la variation progressive de leurs proportions permet d'obtenir un matériau présentant des propriétés intermédiaires et évolutives.

B. Selon la structure

Du point de vue de leur organisation, les FGM peuvent être distingués en deux grandes catégories. Les FGM à structure continue présentent une variation progressive des propriétés à travers le matériau, sans interface nette entre les différentes régions constituantes. Cette continuité constitue l'une des caractéristiques fondamentales du concept FGM.

À l'inverse, les FGM à structure discontinue ou stratifiée sont constitués de plusieurs couches distinctes dont la composition ou les propriétés varient progressivement d'une couche à l'autre. Dans ce cas, le gradient est obtenu par une succession de régions discrètes présentant des compositions différentes.

C. Selon le domaine d'application

Les FGM peuvent également être classés en fonction de leur domaine d'utilisation. Les FGM thermomécaniques sont notamment conçus pour des applications soumises à des températures élevées ou à des sollicitations thermomécaniques importantes. Les FGM biologiques peuvent être utilisés dans le domaine médical, notamment pour certaines applications liées aux implants, grâce à la possibilité d'adapter progressivement les propriétés du matériau.

D'autres applications concernent le génie chimique et électronique, où les matériaux gradués peuvent être employés pour améliorer la résistance à la corrosion, assurer une protection thermique ou gérer la dissipation de chaleur dans certains composants.

D. Selon la dimension du gradient

La variation des propriétés d'un FGM peut être définie suivant une ou plusieurs directions de l'espace. Lorsque le gradient est appliqué suivant une seule direction, le matériau est généralement considéré comme un FGM unidirectionnel (1D). Si les propriétés varient suivant deux directions, il s'agit d'un FGM bidirectionnel (2D). Enfin, lorsque la distribution des propriétés varie suivant les trois directions spatiales, le matériau est considéré comme un FGM

tridirectionnel (3D). Le choix de la dimension du gradient dépend de la géométrie de la structure et des exigences liées aux sollicitations auxquelles elle est soumise.

E. Selon les critères industriels

La classification et le choix d'un FGM peuvent enfin être liés à des considérations industrielles et technologiques. Plusieurs paramètres doivent alors être pris en compte, notamment la complexité de la géométrie à réaliser, la possibilité de contrôler précisément le gradient de composition, l'apparition éventuelle de contraintes résiduelles ainsi que le coût global du procédé de fabrication. Ces critères jouent un rôle essentiel dans le choix du procédé d'élaboration et dans la détermination de l'architecture du FGM adaptée à l'application considérée. [9]

Ainsi, la classification des FGM selon ces différents critères permet de mettre en évidence la grande diversité des architectures et des applications possibles. Elle constitue également une étape importante pour sélectionner la combinaison de matériaux, la distribution du gradient et le procédé de fabrication les plus appropriés aux exigences de la structure. [9]

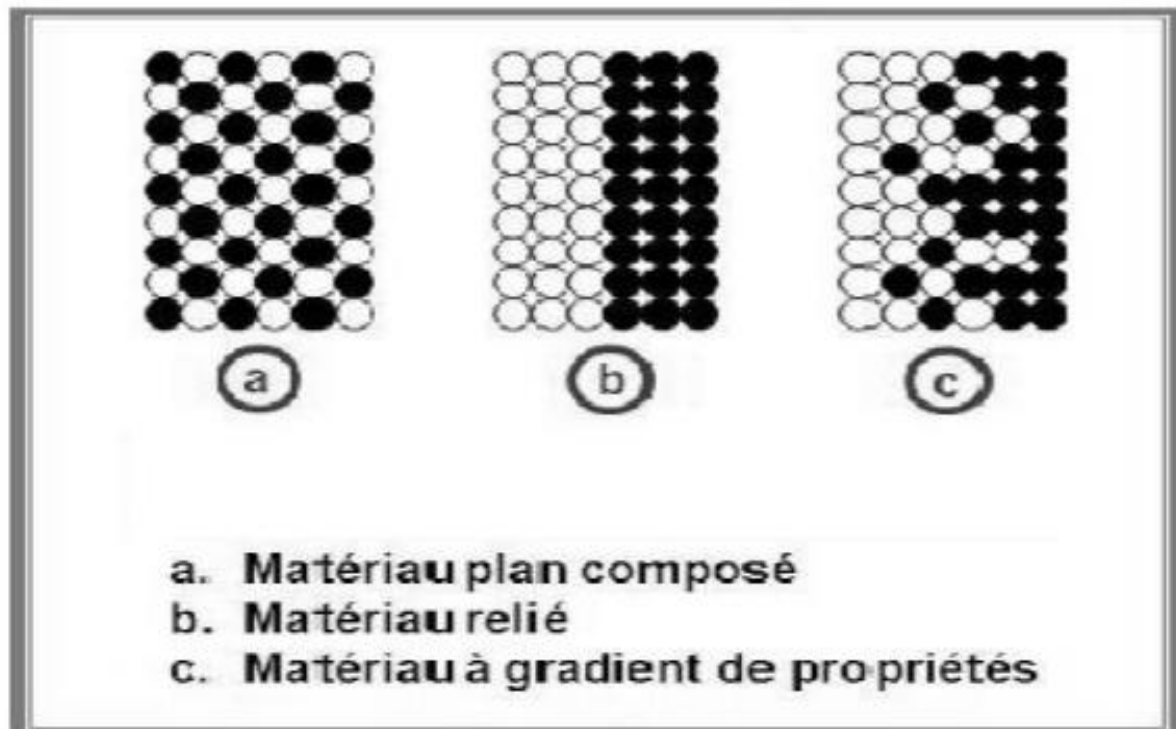


Figure 1.5: FGM à gradient continu (A) et FGM à gradient par couches (B).

I.4 Modélisation des propriétés mécaniques

La modélisation précise des propriétés mécaniques constitue une étape essentielle dans l'analyse et la prédiction du comportement structural des plaques en matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Contrairement aux matériaux homogènes ou aux composites stratifiés conventionnels, les FGM présentent une microstructure dont la composition varie progressivement dans l'espace. Cette variation se traduit directement à l'échelle macroscopique par une évolution continue des propriétés matérielles, telles que le module d'Young, la masse volumique, le coefficient de Poisson et, selon le problème étudié, les propriétés thermiques.

Dans le cadre de l'analyse des plaques et des coques en FGM, ces propriétés sont donc considérées comme des fonctions de la position. La distribution spatiale des constituants est généralement décrite à partir de leurs fractions volumiques, ce qui permet de déterminer les propriétés effectives du matériau en chaque point de la structure. Cette approche est particulièrement importante lorsque la plaque est soumise à des sollicitations mécaniques ou

thermiques, car les variations locales des propriétés influencent directement sa rigidité, sa résistance et sa stabilité.

I.4.1 Hypothèses de variation (variation à travers l'épaisseur)

Dans l'étude des plaques et des coques en FGM, l'une des hypothèses les plus couramment adoptées consiste à considérer que les propriétés matérielles varient de manière continue et régulière à travers l'épaisseur, suivant la direction z . La variation est généralement définie à partir d'une loi de distribution de la fraction volumique des différents constituants. Ainsi, contrairement aux composites stratifiés dans lesquels les propriétés peuvent subir des variations brusques au niveau des interfaces entre les plis, le matériau FGM présente une évolution progressive de ses caractéristiques.

Cette distribution continue permet notamment de réduire les effets associés aux interfaces matérielles abruptes et de favoriser une transition progressive des contraintes et des déformations dans l'épaisseur. Elle constitue ainsi une hypothèse fondamentale dans la modélisation mécanique des plaques FGM et permet de représenter mathématiquement la transition entre les différentes phases constituantes.

Pour une plaque FGM d'épaisseur h , les propriétés effectives du matériau, telles que le module d'élasticité et la masse volumique, sont généralement déterminées en fonction de la coordonnée z . Dans une configuration classique, la face supérieure de la plaque est considérée comme étant riche en céramique, tandis que la face inférieure est riche en métal. Entre ces deux faces, la fraction volumique des constituants évolue progressivement, donnant lieu à une variation continue des propriétés effectives.

Mathématiquement, cette évolution peut être représentée par différentes lois de distribution. Parmi les modèles couramment utilisés figurent notamment la loi de puissance et la loi exponentielle. Le choix de la loi de variation permet de contrôler la manière dont les propriétés du matériau évoluent à travers l'épaisseur et constitue donc un paramètre important dans l'étude du comportement mécanique et thermomécanique des plaques FGM.

Cette hypothèse de variation à travers l'épaisseur constitue la base des modèles analytiques et numériques utilisés pour étudier la flexion, les vibrations, le flambement et, en particulier, le flambement thermique des plaques FGM.

I.4.2 Loi de puissance (P-FGM)

« La loi de puissance est la plus couramment utilisée pour décrire la variation des propriétés des FGM. Les propriétés matérielles effectives $P(z)$ sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur de la plaque selon la fonction suivante : » [9]

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p + P_m$$

« Où P_c et P_m sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, h est l'épaisseur de la plaque et p est l'indice de la loi de puissance qui dicte le profil de la variation des constituants à travers l'épaisseur. » (J.N, 1998) [9]

I.4.3 Modèles alternatifs

A. Loi Sigmoidale (S-FGM)

« Afin d'éliminer les contraintes résiduelles aux interfaces et d'assurer une distribution de contraintes plus douce, une loi de distribution sigmoïde a été proposée. Ce modèle utilise deux fonctions de puissance pour définir la variation des propriétés de part et d'autre de la surface neutre. » (Y.L, 2006) [9], [16]

B. Loi Exponentielle (E-FGM)

« Dans ce modèle, les propriétés mécaniques du matériau sont supposées varier selon une loi exponentielle à travers l'épaisseur de la plaque, sous la forme : »

$$P(z) = P_0 \cdot e^{\beta z}$$

« Ce modèle est largement utilisé, notamment dans les problèmes de mécanique de la rupture et pour l'étude du comportement thermique des structures non homogènes. » (J.N, 1999)

I.4.4 Lois de mélange :

Pour estimer les propriétés mécaniques effectives des FGM, plusieurs modèles de micro-mécanique sont utilisés pour la transition de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique : [9], [10], [16], [17]

A. La règle des mélanges (Voigt model) :

« La méthode la plus simple pour l'estimation des propriétés effectives est la règle des mélanges, où la propriété locale $P(z)$ est exprimée comme une combinaison linéaire des propriétés des constituants pondérée par leurs fractions volumiques respectives : » (Hill, R.1965).

B. Modèle de Mori-Tanaka : « Le modèle de Mori-Tanaka est plus sophistiqué car il prend en compte les interactions entre les phases. Il est basé sur la solution d'inclusion d'Eshelby, supposant que chaque phase est entourée par un champ de contrainte moyen de la matrice. Ce modèle fournit des estimations plus précises pour les composites à matrice renforcée. » (Mori, T., & Tanaka, K. 1973).

$$P(z) = P_c V_c(z) + P_m V_m(z)$$

B. Modèle de Mori-Tanaka:

Le modèle de Mori-Tanaka constitue une approche plus élaborée pour l'estimation des propriétés effectives des matériaux composites et des FGM. Contrairement aux modèles simples fondés uniquement sur une loi de mélange, cette méthode tient compte, de manière approximative, des interactions entre les différentes phases constituantes du matériau.

Le modèle repose sur la théorie des inclusions développée par Eshelby, selon laquelle une phase dispersée ou une inclusion est considérée comme étant soumise à un champ de contraintes moyen associé à la matrice environnante. Cette approche permet ainsi de prendre en considération l'influence de la matrice sur les inclusions et, réciproquement, l'effet des inclusions sur le comportement global du matériau.

Dans le cas des FGM, le modèle de Mori-Tanaka peut être utilisé pour déterminer les propriétés effectives en fonction de la fraction volumique des différentes phases. Il permet ainsi d'obtenir une représentation plus réaliste du comportement mécanique lorsque les constituants présentent des propriétés fortement différentes, notamment dans les systèmes à matrice métallique ou céramique renforcée. [9], [10], [16], [17]

I.4.5 Approximation vs Réalité:

Les modèles mathématiques utilisés pour décrire les propriétés des FGM, tels que la loi de puissance, reposent généralement sur l'hypothèse d'une variation parfaitement continue et régulière des propriétés à travers l'épaisseur. Cette hypothèse facilite considérablement la formulation analytique et numérique du problème, mais elle constitue une idéalisation par rapport aux conditions réelles de fabrication. En pratique, plusieurs facteurs peuvent provoquer des écarts entre le modèle théorique et le matériau effectivement obtenu.

Effet de la porosité : les procédés de fabrication tels que le frittage et la métallurgie des poudres peuvent entraîner l'apparition de micro-porosités au sein du matériau. La présence de ces vides diminue généralement la rigidité globale et peut modifier les propriétés élastiques effectives par rapport aux valeurs prédites par les modèles théoriques considérant un matériau parfaitement dense. [18]

Gradient par couches (Stepwise) : dans certaines applications industrielles, il n'est pas toujours possible d'obtenir une variation parfaitement continue de la composition. Le gradient peut alors être réalisé sous la forme d'une succession de fines couches discrètes présentant des compositions différentes. Cette approximation en escalier permet de reproduire le gradient recherché, mais elle peut également conduire à l'apparition de faibles concentrations locales de contraintes au niveau des interfaces entre les couches.

Déplacement de la surface neutre : lorsque la distribution des propriétés matérielles est asymétrique à travers l'épaisseur de la plaque, la surface neutre ne coïncide pas nécessairement avec le plan médian géométrique. Son déplacement résulte de la variation non symétrique des propriétés mécaniques et doit être pris en considération dans une analyse précise du comportement de la plaque. Cette particularité peut nécessiter l'utilisation de

théories de déformation plus avancées afin de représenter correctement les effets associés au gradient de propriétés.

Ainsi, même si les modèles théoriques constituent des outils indispensables pour l'étude des FGM, la prise en compte des caractéristiques réelles du matériau et du procédé de fabrication demeure importante pour obtenir une prédiction plus représentative du comportement mécanique de la structure.

I.5 Domaines d'application

Les propriétés particulières des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), résultant de la variation progressive de leur composition et de leurs propriétés à travers la structure, leur permettent d'être utilisés dans des environnements où les matériaux conventionnels présentent certaines limitations. La possibilité d'associer progressivement les caractéristiques de plusieurs matériaux au sein d'une même structure offre notamment une meilleure adaptation aux sollicitations thermiques, mécaniques et environnementales sévères. [9]

Les applications des FGM couvrent ainsi plusieurs domaines de l'ingénierie, allant de l'aérospatiale et de l'aéronautique au génie énergétique et au génie civil, en passant par les secteurs nucléaire, biomédical et électronique. Parmi ces applications, les structures soumises à de fortes sollicitations thermiques constituent l'un des domaines les plus importants. [9]

I.5.1 Structures thermiques

L'une des applications les plus emblématiques des matériaux à gradient fonctionnel concerne les barrières thermiques (Thermal Barrier Coatings – TBC). Ces matériaux sont particulièrement intéressants pour les composants soumis à des températures élevées, notamment dans les turbines à gaz et les moteurs aéronautiques. Le gradient progressif des propriétés permet d'assurer une transition entre un matériau métallique, présentant une bonne résistance mécanique, et un matériau céramique, caractérisé par une meilleure résistance aux températures élevées. [9]

Turbines et réacteurs : dans les turbines à gaz et les réacteurs, l'utilisation d'un gradient métal/céramique permet de protéger les composants métalliques contre les températures extrêmes et les phénomènes d'oxydation. La variation progressive de la composition contribue également à limiter les incompatibilités entre les constituants et à maintenir l'intégrité de la structure lorsqu'elle est soumise à des chargements thermiques cycliques. [9]

Protection thermique spatiale : les FGM présentent également un intérêt important dans les systèmes de protection thermique destinés aux véhicules spatiaux et hypersoniques. Ils peuvent notamment être envisagés pour des zones fortement sollicitées thermiquement, telles que les nez des véhicules spatiaux et les bords d'attaque des véhicules hypersoniques. Dans ces applications, la transition progressive des propriétés permet de mieux gérer les gradients thermiques et de réduire les concentrations de contraintes susceptibles d'apparaître lors des variations importantes de température. [9]

Ainsi, les structures thermiques constituent un domaine particulièrement adapté aux FGM, car leur capacité à combiner progressivement les propriétés d'un métal et d'une céramique permet de répondre simultanément aux exigences de résistance mécanique, de stabilité thermique et de protection contre les températures élevées. [9]

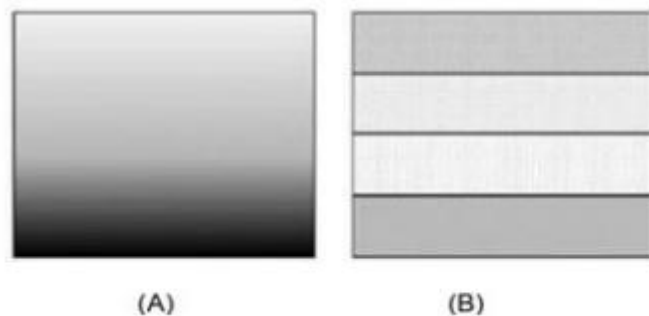


Figure 1. 6 : Revêtement à gradient fonctionnel (FGM) pour barrière thermique (TBC).

I.5.2 Génie civil

Bien que leur utilisation dans le domaine du génie civil soit relativement récente, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) présentent un potentiel intéressant pour améliorer la durabilité et la résistance des structures exposées à des conditions environnementales sévères. La variation progressive de la composition et des propriétés du matériau permet en effet

d'adapter localement les caractéristiques de la structure aux différentes sollicitations auxquelles elle est soumise.

Structures en milieu marin : l'une des applications prometteuses concerne les structures exposées aux environnements marins, notamment les ponts, les ouvrages portuaires et les plate formes offshore. Dans ces structures, l'utilisation d'un gradient de composition peut contribuer à créer une zone de protection progressive limitant la pénétration d'agents agressifs, en particulier les ions chlorure, responsables de phénomènes de corrosion dans les structures en béton armé et dans certains éléments métalliques.

Cette approche vise ainsi à améliorer la résistance des matériaux aux mécanismes de dégradation liés à l'environnement marin et, par conséquent, à prolonger la durée de service des ouvrages. L'intérêt des FGM réside alors dans leur capacité à combiner différentes propriétés au sein d'une même structure tout en assurant une transition progressive entre les différentes régions du matériau.

Ainsi, l'utilisation des FGM dans le génie civil ouvre des perspectives intéressantes pour la conception de structures plus durables et mieux adaptées aux environnements agressifs, notamment lorsque la maîtrise des phénomènes de corrosion et de dégradation constitue un enjeu majeur



Figur1.7 : Dégradation des structures en béton armé due à la corrosion en milieu agressif.

Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter de manière approfondie les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), une classe innovante de matériaux offrant de nouvelles possibilités dans le domaine de l'ingénierie structurelle. L'étude du panorama général des matériaux a montré que, bien que les composites stratifiés conventionnels présentent des performances mécaniques intéressantes par rapport aux matériaux homogènes, ils restent confrontés au problème de la discontinuité des propriétés au niveau des interfaces. Cette discontinuité peut favoriser l'apparition de concentrations de contraintes interlaminaires et augmenter le risque de délaminage, particulièrement sous des sollicitations mécaniques et thermiques importantes.

L'émergence des FGM apporte une réponse particulièrement intéressante à ces limitations grâce à une variation progressive et continue de la microstructure et des propriétés matérielles suivant une ou plusieurs directions. Cette caractéristique permet d'assurer une transition plus régulière entre les différentes phases constituantes et de combiner, au sein d'un même matériau, des propriétés complémentaires telles que la résistance aux hautes températures et la dureté de la céramique avec la ductilité et la ténacité du métal.

L'étude a également montré que la modélisation mathématique des propriétés effectives constitue une étape essentielle dans l'analyse du comportement des structures FGM. Les différentes lois de distribution, notamment la loi de puissance (P-FGM), permettent de décrire la variation des propriétés à travers l'épaisseur et de déterminer leur influence sur la réponse mécanique et thermomécanique des plaques. Cette modélisation joue ainsi un rôle important dans l'étude de phénomènes tels que la flexion, les vibrations et surtout le flambement thermique.

Enfin, la diversité des procédés de fabrication, allant de la métallurgie des poudres aux techniques de dépôt et à la fabrication additive, montre l'évolution progressive des FGM vers des applications de plus en plus diversifiées. Initialement fortement associés aux domaines aéronautique et spatial, ces matériaux présentent aujourd'hui un potentiel important dans des secteurs tels que le génie civil, le génie énergétique et le domaine biomédical. Les FGM apparaissent ainsi comme une solution prometteuse pour la conception de structures capables

de répondre à des exigences élevées de performance, de durabilité et de résistance aux environnements sévères.

CHAPITRE 2: THÉORIES CINÉMATIQUES ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

II.1 Introduction

La modélisation des plaques FGM nécessite de distinguer clairement la description géométrique de la plaque et la description de ses propriétés matérielles. La première définit la forme et les dimensions, tandis que la seconde introduit une dépendance continue des propriétés mécaniques suivant la coordonnée d'épaisseur z . Cette distinction est essentielle pour établir les rigidités équivalentes intervenant dans les équations de la plaque. [9]

Dans une approche analytique, la théorie cinématique choisie détermine le nombre de variables inconnues et la forme des fonctions de déplacement. Une théorie plus riche permet de représenter davantage de phénomènes physiques, mais conduit généralement à une formulation plus complexe. Le choix doit donc rester cohérent avec la géométrie, les chargements et la précision recherchée. [11][14]

Ce deuxième chapitre est consacré au développement du formalisme mathématique nécessaire pour modéliser le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials, FGM). Si le premier chapitre a permis de présenter les aspects physico-chimiques ainsi que les principaux avantages industriels de ces matériaux, l'objectif de ce chapitre est d'établir les relations cinématiques et les formulations mathématiques permettant de décrire leur réponse sous différentes sollicitations mécaniques. Une attention particulière est accordée à l'analyse des plaques FGM, dont les propriétés mécaniques varient continûment à travers l'épaisseur. Cette variation des propriétés constitue une caractéristique essentielle des FGM et doit être intégrée de manière appropriée dans la formulation mécanique du problème [11].

L'analyse de la flexion des plaques FGM repose sur une évolution progressive des théories classiques vers des modèles cinématiques plus raffinés. Cette transition est dictée par la nécessité de représenter avec une précision suffisante les différents mécanismes de déformation, notamment la flexion et le cisaillement transversal, tout en prenant en considération la variation des propriétés élastiques à travers l'épaisseur de la plaque. Le choix de la théorie cinématique constitue ainsi une étape importante dans la modélisation du

comportement des plaques, puisqu'il détermine la forme du champ des déplacements ainsi que les relations entre les déplacements, les déformations et les contraintes [11].

Pour ce faire, l'étude est structurée autour des principales théories utilisées dans l'analyse des plaques en matériaux FGM :

- Les théories classiques et de premier ordre, à savoir la théorie classique des plaques de Kirchhoff (Classical Plate Theory, CPT) et la théorie de déformation par cisaillement de premier ordre de Mindlin (First-order Shear Deformation Theory, FSDT). Ces deux approches constituent une base comparative indispensable pour comprendre les différentes hypothèses cinématiques utilisées dans la modélisation des plaques et pour mettre en évidence l'évolution vers des formulations plus raffinées.
- Les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (Higher-order Shear Deformation Theories, HSDT), qui introduisent des fonctions supplémentaires dans le champ des déplacements afin de représenter plus correctement la variation des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur. Ces théories permettent notamment de décrire une distribution non linéaire du cisaillement transversal et, dans certaines formulations, de satisfaire les conditions de cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans avoir recours à un facteur de correction du cisaillement [12].

Cette formulation s'appuie principalement sur les travaux de référence consacrés à la modélisation des plaques et structures en matériaux à gradient fonctionnel, notamment ceux de Reddy, ainsi que sur les approches raffinées utilisant des fonctions de distribution du cisaillement, telles que la théorie sinusoïdale développée par Touratier. Ces différentes formulations permettent de construire progressivement le modèle mathématique nécessaire à la description du comportement mécanique de la plaque [11][12].

Le cadre théorique développé dans ce chapitre permettra finalement d'établir les relations fondamentales entre les déplacements, les déformations et les contraintes, puis de déterminer les efforts résultants et les moments de flexion par intégration à travers l'épaisseur. L'application du principe des travaux virtuels permettra ensuite de déduire les équations d'équilibre nécessaires à la résolution analytique ou numérique du problème étudié. Ces

développements constituent ainsi une base essentielle pour l'analyse ultérieure du comportement des plaques FGM sous les différentes sollicitations considérées dans cette étude.

II.2 Théories classiques des plaques

Dans l'analyse des plaques FGM, la réduction bidimensionnelle permet de conserver les principaux mécanismes de déformation tout en limitant le nombre de variables inconnues. Cette démarche est particulièrement utile lorsque la variation des propriétés mécaniques est connue suivant l'épaisseur et peut être intégrée directement dans les relations constitutives. Les différentes théories se distinguent alors principalement par les hypothèses adoptées pour la cinématique de la section transversale.

Les théories classiques constituent une première réduction du problème tridimensionnel. Elles remplacent le champ complet des déplacements par un ensemble limité de variables définies sur le plan moyen. Cette réduction permet d'obtenir des équations utilisables pour l'étude de structures étendues tout en conservant les mécanismes dominants. [11][13]

Dans les plaques FGM, les propriétés ne sont pas constantes sur l'épaisseur. Les intégrations qui conduisent aux rigidités de membrane et de flexion doivent donc être réalisées avec les propriétés locales correspondantes. Le choix de la théorie cinématique reste indépendant de cette variation, mais la loi constitutive doit l'intégrer explicitement. [9]

L'analyse structurelle des plaques en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) repose historiquement sur l'adaptation des théories développées initialement pour les matériaux homogènes. Ces approches, qualifiées de « classiques », se distinguent principalement par la nature des hypothèses cinématiques adoptées pour décrire le champ de déplacement et la distribution des déformations à travers l'épaisseur de la plaque. Le choix d'une théorie appropriée dépend essentiellement de l'élancement de la plaque, de l'importance des effets de cisaillement transversal et du niveau de précision recherché dans l'évaluation des déplacements, des déformations et des contraintes. Dans le cas des matériaux FGM, cette description doit également tenir compte de la variation progressive des propriétés mécaniques suivant l'épaisseur.

Dans cette section, nous examinons les deux modèles fondamentaux qui constituent la base de la mécanique classique des plaques :

- La théorie classique des plaques de Kirchhoff (CPT), adaptée principalement aux plaques minces, pour lesquelles l'effet du cisaillement transversal est considéré comme négligeable. Cette théorie repose sur des hypothèses cinématiques simplifiées permettant de décrire efficacement le comportement en flexion des plaques minces.
- La théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin (FSDT), qui introduit une description plus complète du champ de déplacement afin de prendre en compte les déformations de cisaillement transversal. Cette prise en compte devient particulièrement importante lorsque l'épaisseur de la plaque n'est plus négligeable devant ses dimensions en plan et lorsqu'une représentation plus précise du comportement mécanique est recherchée.

Ces deux théories constituent ainsi une première étape dans la modélisation mécanique des plaques FGM. Elles permettent d'établir les relations fondamentales entre les déplacements, les déformations et les contraintes avant d'introduire des formulations plus élaborées. Conformément aux développements des théories raffinées des plaques, ces modèles classiques fournissent donc un premier niveau d'approximation rigoureux, servant de base à l'évolution vers les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), mieux adaptées à certaines configurations nécessitant une description plus précise du comportement à travers l'épaisseur [12].

II.2.1 Théorie Classique des Plaques (CPT : Kirchhoff)

La théorie CPT constitue une approximation adaptée aux plaques dont l'épaisseur reste faible devant les dimensions en plan. Son intérêt réside dans la simplicité du champ cinématique et dans la possibilité d'obtenir des formulations analytiques relativement compactes. Pour une plaque FGM, cette simplicité est conservée tandis que les propriétés locales $E(z)$ et $\nu(z)$ restent prises en compte dans les intégrations conduisant aux rigidités équivalentes.

L'hypothèse de Kirchhoff–Love conduit à un champ de déplacement dans lequel la rotation de la normale est directement liée à la pente de la surface moyenne. Le modèle est ainsi particulièrement compact et convient aux plaques minces pour lesquelles la contribution du cisaillement transverse reste faible. [13][14]

Une conséquence directe de cette hypothèse est l'annulation des déformations γ_{xz} et γ_{yz} . La théorie ne fournit donc pas une description détaillée du cisaillement transversal. Cette limitation explique pourquoi d'autres modèles sont employés lorsque l'épaisseur ou les sollicitations rendent cet effet important. [11]

A. Définition et Hypothèses Fondamentales

La théorie classique des plaques (CPT), développée par Kirchhoff, est une extension bidimensionnelle de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Elle est spécifiquement conçue pour l'analyse des plaques minces. Cette théorie repose sur trois hypothèses cinématiques majeures (hypothèses de Kirchhoff-Love) :

1. Hypothèse de la normale : Les lignes droites initialement perpendiculaires au plan moyen restent droites et perpendiculaires à ce plan après déformation.
2. Invariabilité de l'épaisseur : La distance entre deux points situés sur la normale reste constante (pas d'écrasement transversal).
3. Négligence du cisaillement : Les déformations par cisaillement transversal sont supposées nulles ($\gamma_{xz} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$).

B. Relations Cinématiques (Champ des Déplacements) :

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ des déplacements (u , v , w) d'un point quelconque de la plaque situé à une distance z du plan moyen est exprimé par :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

Où (u_0 , v_0 , w_0) représentent les déplacements des points du plan moyen ($z=0$). [13]

C. Relations Déformations-Déplacements :

En considérant de petites déformations, les composantes du tenseur des déformations sont déduites par dérivation du champ des déplacements :

$$\varepsilon_{xx} = \partial u_0 / \partial x - z \partial^2 w_0 / \partial x^2$$

$$\varepsilon_{yy} = \partial v_0 / \partial y - z \partial^2 w_0 / \partial y^2$$

$$\gamma_{xy} = (\partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x) - 2z \partial^2 w_0 / (\partial x \partial y)$$

D. Relations de Comportement (Loi de Hooke pour FGM) :

Pour une plaque dont les propriétés varient de façon continue (FGM), la loi de comportement relie les contraintes aux déformations en tenant compte de la dépendance de la rigidité par rapport à z :

$$1. \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}\} = [Q_{11}(z) Q_{12}(z) 0 Q_{12}(z) Q_{22}(z) 0 0 0 Q_{66}(z)] \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}\}$$

Où les coefficients $Q_{ij}(z)$ sont calculés à partir du module de Young $E(z)$ et du coefficient de Poisson $\nu(z)$ spécifiques au matériau FGM. Ces coefficients dépendent ainsi de la position suivant l'épaisseur de la plaque, traduisant la variation progressive des propriétés mécaniques du matériau [14].

II.2.2 Théorie de Premier Ordre (FSDT : Mindlin) :

La FSDT introduit deux rotations indépendantes afin de représenter le cisaillement transversal. Elle constitue ainsi une extension naturelle de la CPT lorsque l'épaisseur devient suffisamment importante pour que le cisaillement ne puisse plus être négligé. Dans les plaques FGM, cette formulation permet également d'intégrer la variation de la rigidité de cisaillement à travers l'épaisseur.

L'introduction des rotations indépendantes ϕ_x et ϕ_y augmente la souplesse cinématique du modèle. La section normale peut tourner sans rester strictement perpendiculaire au plan moyen, ce qui permet d'introduire le cisaillement transversal dans les relations de déformation. [12]

Le profil uniforme supposé par la FSDT ne correspond toutefois pas au profil réel du cisaillement dans de nombreuses configurations. Le facteur k est donc utilisé pour ajuster l'énergie de cisaillement. Cette correction constitue une approximation et doit être considérée dans l'interprétation des résultats. [11][12]

La théorie de premier ordre (First-order Shear Deformation Theory), plus connue sous le nom de théorie de Mindlin, apporte une amélioration significative par rapport au modèle de Kirchhoff. Contrairement à ce dernier, la FSDT lève l'hypothèse de perpendicularité de la normale après déformation. Selon Mindlin (1951), une ligne initialement droite et perpendiculaire à la surface moyenne reste droite, mais subit une rotation supplémentaire due au cisaillement [19].

Cette approche permet de prendre en compte les déformations de cisaillement transversal, ce qui rend ce modèle particulièrement adapté aux plaques modérément épaisses et aux matériaux dont les propriétés varient selon l'épaisseur, tels que les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) [9].

B. Champ des déplacements

Dans cette théorie, les rotations des sections transversales (ϕ_x et ϕ_y) sont considérées comme des variables indépendantes des pentes de la surface moyenne ($\partial w_0/\partial x$ et $\partial w_0/\partial y$). Le champ des déplacements s'énonce comme suit :

C. Relations Déformations-Déplacements

L'intégration du cisaillement transversal implique que les déformations γ_{xz} et γ_{yz} ne sont plus nulles. Les relations cinématiques sont alors définies par [9] :

$$\varepsilon_{xx} = \partial u_0 / \partial x + z \partial \phi_x / \partial x$$

$$\varepsilon_{yy} = \partial v_0 / \partial y + z \partial \phi_y / \partial y$$

$$\gamma_{xy} = (\partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x) + z (\partial \phi_x / \partial y + \partial \phi_y / \partial x)$$

$$\gamma_{xz} = \phi_x + \partial w_0 / \partial x$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y + \partial w_0 / \partial y$$

D. Facteur de correction du cisaillement (k)

La théorie FSDT suppose une distribution uniforme du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, alors que la distribution réelle des contraintes de cisaillement présente généralement un profil parabolique. Un facteur de correction du cisaillement est donc introduit afin

d'améliorer la représentation des effets du cisaillement transversal pour corriger cette estimation de l'énergie de déformation, on introduit un facteur de correction k (généralement $k=5/6$ pour les sections rectangulaires). Freund (2019) souligne que pour les structures en FGM, le choix de ce facteur est déterminant pour la précision des calculs de flexion et de vibrations. (Freund, 2019).

II.3 Théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

Les théories HSDT recherchent une représentation plus réaliste du champ de déformation suivant l'épaisseur. Leur formulation repose sur des fonctions de forme choisies de manière à reproduire les conditions physiques aux surfaces de la plaque. Elles permettent ainsi de réduire les approximations associées à une distribution uniforme du cisaillement et constituent une étape importante vers les modèles raffinés utilisés pour les structures FGM.

Les HSDT enrichissent le champ cinématique en introduisant une fonction de distribution suivant l'épaisseur. Le but n'est pas uniquement d'ajouter des termes mathématiques, mais de reproduire les conditions physiques aux surfaces et la variation du cisaillement dans le volume. [9][15]

Les formulations d'ordre supérieur peuvent être construites à partir de fonctions polynomiales ou trigonométriques. Le choix de la fonction influence la forme du champ de cisaillement et les intégrales de rigidité obtenues dans la formulation finale. [15][16]

Bien que les théories classiques (CPT) et de premier ordre (FSDT) fournissent des résultats acceptables pour de nombreuses applications, elles présentent certaines limites intrinsèques, notamment la nécessité d'introduire un facteur de correction du cisaillement dans la théorie FSDT.

Afin de remédier à ces insuffisances et d'obtenir une représentation plus fidèle de la distribution réelle, parabolique ou non linéaire, des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été développées.

Selon Reddy (2000), ces modèles raffinés permettent de satisfaire les conditions aux limites de cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, sans recourir à des facteurs de correction du cisaillement [9].

Dans ce qui suit, nous explorerons les fondements de ces théories à travers deux axes principaux :

- Le concept non linéaire des déplacements.
- La théorie sinusoïdale proposée par Touratier, qui offre une alternative cinématique performante pour l'analyse des structures complexes [15].

II.3.1 Concept non-linéaire

Dans cette formulation, les termes en z^3 enrichissent la variation du déplacement dans l'épaisseur. Ils permettent de générer un profil de cisaillement non uniforme tout en conservant une description basée sur les variables du plan moyen. [9]

La satisfaction des conditions de cisaillement nul sur les surfaces $z = \pm h/2$ constitue une propriété importante du modèle. Elle permet de réduire la dépendance à un facteur de correction et améliore la cohérence physique de la distribution obtenue. [9]

Le concept non linéaire dans les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) repose sur l'idée que les fonctions de déplacement ne doivent pas être limitées à une variation linéaire suivant l'épaisseur (z). Contrairement aux modèles CPT et FSDT, cette approche introduit des termes d'ordre supérieur, généralement cubiques, afin de représenter de manière plus réaliste la déformation de la section transversale.

Selon Reddy (2000), l'expansion polynomiale du champ des déplacements permet de remédier à la limitation liée à la distribution uniforme du cisaillement. Le champ des déplacements est modélisé sous la forme [9] :

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\varphi_x(x,y) \\
 &\quad - z^3 \frac{4}{(3h^2)} (\varphi_x + \partial w_0 / \partial x) \\
 v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\varphi_y(x,y) \\
 &\quad - z^3 \frac{4}{(3h^2)} (\varphi_y + \partial w_0 / \partial y)
 \end{aligned}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

Cette formulation non linéaire présente deux avantages majeurs :

1. Distribution parabolique : elle permet de représenter une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

- Conditions aux limites : elle satisfait naturellement la condition de cisaillement nul sur les surfaces libres de la plaque ($z = \pm h/2$), ce qui rend l'utilisation d'un facteur de correction du cisaillement inutile [9].

L'emploi d'une fonction sinusoïdale présente l'avantage d'introduire directement une variation continue du champ de cisaillement. La fonction choisie est construite de manière à satisfaire la condition de cisaillement nul sur les surfaces libres. Cette propriété simplifie la formulation puisque le comportement recherché est intégré dans le champ cinématique plutôt que corrigé a posteriori.

La fonction sinusoïdale introduite par Touratier permet de décrire la variation du déplacement suivant l'épaisseur avec une fonction continue et régulière. Son choix est particulièrement adapté à une représentation non uniforme du cisaillement. [15]

Le comportement aux surfaces libres est directement intégré dans la fonction de distribution. Ainsi, les conditions de cisaillement nul sont obtenues sans ajouter une condition corrective indépendante. [15][16]

A. Concept et fonction de cisaillement

La théorie sinusoïdale est une théorie de déformation de cisaillement raffinée qui utilise des fonctions trigonométriques pour décrire la distribution des déplacements à travers l'épaisseur. L'idée fondamentale consiste à remplacer les termes polynomiaux des théories HSDT classiques par une fonction sinusoïdale, afin de mieux représenter le profil réel des contraintes de cisaillement [15].

Cette théorie permet de satisfaire automatiquement les conditions de non-cisaillement sur les surfaces libres de la plaque, sans nécessiter de facteur de correction du cisaillement (k), tout en offrant une représentation améliorée du comportement des plaques épaisses [15].

B. Champ des déplacements :

Dans la théorie sinusoïdale de Touratier, le champ des déplacements est formulé à l'aide d'une fonction de distribution suivant l'épaisseur de la plaque. Cette fonction permet de représenter de manière plus réaliste la variation des déformations de cisaillement transversal. Elle est définie par [15] :

$$f(z) = (h/\pi) \sin(\pi z/h)$$

Les expressions du champ des déplacements sont données comme suit :

B. Distribution des déformations de cisaillement

Dans la théorie sinusoïdale de Touratier, les déformations de cisaillement transversal sont définies par une fonction trigonométrique suivant l'épaisseur de la plaque :

$$\gamma_{xz} = \cos(\pi z/h) \psi_x$$

$$\gamma_{yz} = \cos(\pi z/h) \psi_y$$

Cette distribution s'annule exactement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque ($z = \pm h/2$), ce qui permet de satisfaire les conditions aux limites de cisaillement nul sans utiliser de facteur de correction [15].

2.3.3 Comparaison entre les théories CPT, FSDT et HSDT

L'évolution $CPT \rightarrow FSDT \rightarrow HSDT$ peut être interprétée comme une augmentation progressive du niveau de description cinématique. La CPT privilégie la simplicité, la FSDT introduit le cisaillement, tandis que la HSDT cherche à représenter plus fidèlement sa variation suivant l'épaisseur. [11][9]

Cette progression n'implique pas qu'une théorie soit universellement préférable à une autre. La pertinence d'un modèle dépend du rapport épaisseur/dimension, des propriétés du matériau, du chargement et de la précision attendue. [11][16]

Cette section synthétise les différences fondamentales entre les trois familles de théories étudiées. Le choix entre ces modèles dépend d'un compromis entre la précision des résultats et la complexité mathématique des équations.

A. Comparaison cinématique (Champ des déplacements)

Le tableau suivant résume l'évolution du champ des déplacements $u(x, y, z)$ selon la théorie

Théorie	Champ des déplacements $u(x, y, z)$	Forme mathématique	Effet du cisaillement
CPT	$u = u_0 - z \partial w / \partial x$	$u = u_0 - z \partial w / \partial x$	Négligé ($\tau_{xz} = 0$)
FSDT	$u = u_0 + z \varphi_x$	$u = u_0 + z \varphi_x$	Constant
HSDT	$u = u_0 + z \varphi_x + z^2 \psi_x$	$u = u_0 + z \varphi_x + z^2 \psi_x$	Champ polynomial d'ordre supérieur
Parabolique	$u = u_0 + z \varphi_x + z^2 \psi_x + z^3 \chi_x$	$u = u_0 + z \varphi_x + z^2 \psi_x + z^3 \chi_x$	Représentation plus précise de la variation selon l'épaisseur

B. Distribution des contraintes de cisaillement (τ_{xz})

L'un des critères de comparaison les plus critiques est la capacité de la théorie à modéliser la contrainte de cisaillement transversal.

- CPT : Ne peut pas prédire τ_{xz} , car elle suppose une rigidité infinie au cisaillement.
- FSDT : Prédit une distribution constante, ce qui nécessite l'utilisation d'un facteur de correction du cisaillement (k) pour compenser l'erreur d'énergie.
- HSDT (et théorie sinusoïdale) : représente une distribution non linéaire qui s'annule sur les surfaces libres de la plaque.

HSDT (et théorie sinusoïdale) : Représente une distribution non linéaire des contraintes de cisaillement transversal, qui s'annule naturellement sur les surfaces libres de la plaque ($z = \pm h/2$). Cette propriété permet de satisfaire les conditions aux limites sans nécessiter de facteur de correction du cisaillement, ce qui améliore la représentation du comportement mécanique des matériaux à gradient de propriétés (FGM) [10]. [5, 6].

C. Synthèse pour les matériaux FGM

Dans le cas des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM), les théories CPT, FSDT et HSDT présentent des niveaux de précision différents dans la modélisation du comportement mécanique. La théorie CPT néglige les déformations de cisaillement transversal, tandis que la théorie FSDT nécessite l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement. Les théories HSDT, notamment les formulations sinusoïdales, permettent de représenter plus fidèlement la distribution des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur. Ces modèles sont

particulièrement adaptés à l'analyse des plaques FGM, pour lesquelles la variation des propriétés matérielles doit être prise en compte [5, 7].

II.4 Théories d'ordre supérieur de type quasi-3D

Les modèles quasi-3D complètent les théories raffinées en considérant simultanément les effets du cisaillement transversal et ceux associés à la déformation normale suivant l'épaisseur. Cette extension est intéressante pour les plaques FGM lorsque la variation des propriétés ou le type de chargement rend l'hypothèse $\epsilon_{zz} = 0$ trop restrictive. Le modèle reste néanmoins formulé sur le plan moyen, ce qui conserve une structure mathématique exploitable.

Les modèles quasi-3D constituent une extension naturelle des théories raffinées. Ils conservent une description réduite du problème mais introduisent un degré de liberté permettant de représenter la déformation normale suivant l'épaisseur. [10][17]

Cette approche est particulièrement utile lorsque l'hypothèse $\epsilon_{zz} = 0$ n'est plus suffisamment représentative. Elle permet alors d'étudier simultanément le cisaillement transversal et l'étirement de l'épaisseur. [10][17]

Malgré la précision des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) dans la représentation du cisaillement transversal, la plupart des modèles classiques reposent sur l'hypothèse de l'absence de déformation normale suivant l'épaisseur ($\epsilon_{zz} = 0$). Cependant, dans les plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM), notamment lorsqu'elles sont soumises à des charges mécaniques ou thermiques, l'effet de l'étirement transversal peut devenir significatif.

Les théories dites « quasi-3D » ont été développées afin de prendre en compte cette limitation, en enrichissant le champ cinématique par des termes permettant de représenter la déformation normale suivant l'axe z . Ces modèles considèrent simultanément les effets du cisaillement transversal et de l'étirement de l'épaisseur, tout en conservant une formulation bidimensionnelle plus simple que les modèles tridimensionnels complets [17].

Dans cette section, nous aborderons les fondements de cette approche à travers deux axes principaux :

- L'extension du champ cinématique incluant le déplacement transversal.

- L'importance de l'étirement transversal (ϵ_{zz}) dans la réponse mécanique des plaques FGM.

II.4.1 Effet d'étirement transversal (ϵ_{zz})

L'étirement transversal traduit la possibilité pour les couches de la plaque de se déplacer relativement suivant la direction z . Dans un matériau dont les propriétés changent continuellement, ce degré de liberté peut influencer la distribution des contraintes et les résultantes globales. [10][17]

Son importance dépend de la géométrie et du type de sollicitation. Pour certaines plaques minces, son influence peut être limitée ; pour des plaques plus épaisses ou soumises à des sollicitations thermiques et mécaniques combinées, elle peut devenir significative. [10]

Dans les théories conventionnelles des plaques, l'hypothèse d'invariabilité de l'épaisseur impose une déformation normale nulle suivant l'axe transversal ($\epsilon_{zz} = 0$). Cette hypothèse néglige les effets d'étirement de l'épaisseur de la plaque.

L'effet d'étirement transversal (thickness stretching), introduit dans les modèles quasi-3D, permet de prendre en compte la variation du déplacement transversal suivant l'épaisseur z . Cette extension du champ cinématique est particulièrement importante pour l'analyse des matériaux à gradient de propriétés (FGM), dans lesquels les propriétés mécaniques varient continuellement à travers l'épaisseur.

La prise en compte de cet effet permet d'améliorer la modélisation du comportement mécanique des plaques FGM, notamment lorsqu'elles sont soumises à des sollicitations thermiques ou mécaniques. Les théories quasi-3D considèrent ainsi simultanément les effets du cisaillement transversal et de l'étirement de l'épaisseur [17].

A. Extension du champ des déplacements

Afin de prendre en compte l'effet d'étirement transversal, le champ des déplacements est enrichi par l'introduction d'une composante supplémentaire suivant l'épaisseur de la plaque. Le déplacement transversal w devient ainsi dépendant de la coordonnée z .

Le champ cinématique peut être formulé comme suit [17] :

A. Expressions des composantes du déplacement

Le champ des déplacements dans une théorie quasi-3D est défini en tenant compte des effets de cisaillement transversal et d'étirement de l'épaisseur. Les composantes du déplacement sont exprimées comme suit [17] :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + F(z)\phi_x(x,y)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + F(z)\phi_y(x,y)$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) + G(z)\phi_z(x,y)$$

où $G(z)$ est une fonction d'ordre supérieur qui représente l'étirement de la section transversale.

II.4.2 Champ des déplacements quasi-3D

Les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ permettent de séparer mathématiquement les effets de cisaillement et d'étirement. Leur construction doit être compatible avec les conditions aux limites et avec la continuité du champ cinématique. [10][17]

Le champ enrichi constitue ensuite la base du calcul des déformations, des contraintes et de l'énergie de déformation. Il peut être utilisé aussi bien dans une formulation analytique que dans une procédure numérique. [17]

La formulation mathématique d'une théorie quasi-3D repose sur l'enrichissement des composantes du déplacement afin de modéliser simultanément le gauchissement de la section transversale et son étirement. Contrairement aux modèles bidimensionnels raffinés, le champ cinématique inclut une fonction supplémentaire pour le déplacement vertical.

Le champ des déplacements (u, v, w) s'écrit sous la forme suivante [17] :

A. Expressions des composantes du déplacement

Le champ des déplacements (u, v, w) s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z(\partial w_0 / \partial x) + f(z)\phi_x(x,y)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z(\partial w_0 / \partial y) + f(z)\phi_y(x,y)$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) + g(z)\phi_z(x,y)$$

Dans cette formulation :

- $f(z)$ est la fonction de distribution du cisaillement (par exemple, la fonction de Reddy ou de Touratier).
- $g(z)$ est la fonction d'étirement transversal, souvent définie comme $g(z) = f'(z)$, ou comme une fonction polynomiale d'ordre supérieur.
- φz représente un degré de liberté supplémentaire lié à la déformation normale verticale [17].

B. Relations déformations-déplacements enrichies

L'avantage majeur de ce champ cinématique est l'obtention d'un tenseur de déformation complet. Les déformations de cisaillement et la déformation normale sont données par :

$$\gamma_{xz} = f'(z)(\varphi x - \partial w_0 / \partial x)$$

$$\varepsilon_{zz} = g'(z)\varphi z$$

L'existence de ε_{zz} permet d'intégrer directement la variation du module d'élasticité $E(z)$ dans la direction de l'épaisseur, sans les simplifications habituelles des théories de Kirchhoff ou de Mindlin [17].

II.5 Relations fondamentales:

La formulation mécanique complète repose sur une chaîne de relations cohérentes : le champ des déplacements définit les déformations, les déformations sont reliées aux contraintes par la loi constitutive, puis les contraintes sont intégrées suivant l'épaisseur pour obtenir les résultantes et les moments. Cette organisation permet de passer de la description locale du matériau FGM à une formulation globale de la plaque.

Les relations fondamentales assurent la continuité logique entre la cinématique, la loi constitutive et l'équilibre. Elles permettent de transformer les déplacements inconnus en grandeurs mécaniques utilisables dans l'analyse de la plaque. [14][17]

Pour un FGM, la dépendance en z des propriétés est conservée lors des intégrations sur l'épaisseur. Les coefficients résultants représentent ainsi l'effet global de la distribution des phases dans la plaque. [9][17]

Après avoir défini les modèles cinématiques (CPT, FSDT, HSDT et quasi-3D) qui décrivent le mouvement géométrique de la plaque, il est impératif d'établir les relations physiques liant les déplacements aux efforts internes.

Ce paragraphe constitue le cœur de la formulation mécanique du problème, car il regroupe les relations entre les déformations et les déplacements (cinématique linéaire), ainsi que les relations de comportement (loi de Hooke) adaptées aux matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Ces relations fondamentales permettent de transformer le problème géométrique en un système d'équations différentielles régissant l'équilibre de la structure sous différentes sollicitations mécaniques et thermiques [17].

II.5.1 Déformations (Relations Déformations-Déplacements)

La décomposition des déformations en termes membranaires, courbures et contributions d'ordre supérieur permet d'identifier l'origine physique de chaque terme. Elle facilite également l'établissement des matrices de rigidité et la comparaison entre différentes théories cinématiques. [14]

Les termes γ_{xz} et γ_{yz} complètent les déformations dans le plan et permettent de représenter le cisaillement transverse. Dans les formulations quasi-3D, la présence de ϵ_{zz} ajoute une composante normale suivant l'épaisseur. [10][17]

Pour une plaque d'épaisseur h , les relations déformations-déplacements sont établies en considérant un champ cinématique général. Dans le cadre des théories d'ordre supérieur (HSDT), les déformations sont liées non seulement aux déplacements plans, mais également aux fonctions de forme qui modélisent le gauchissement de la section.

Les composantes du vecteur de déformation (ϵ) en tout point (x, y, z) de la plaque sont données par [14].

1. Déformations planes (In-plane strains) :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}^0 + z\kappa_{xx}^0 + f(z)\kappa_{xx}^1$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{yy}^0 + z\kappa_{yy}^0 + f(z)\kappa_{yy}^1$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 + f(z)\kappa_{xy}^1$$

2. Déformations de cisaillement transversal (Transverse shear strains) :

$$\gamma_{xz} = df(z)/dz \cdot \varphi_x$$

$$\gamma_{yz} = df(z)/dz \cdot \varphi_y$$

Où ε^0 représente les déformations membranaires, κ^0 les courbures classiques et κ^1 les courbures d'ordre supérieur liées à la fonction de cisaillement $f(z)$ [14].

II.5.3 ÉNERGIE DE DÉFORMATION (STRAIN ENERGY)

L'énergie de déformation constitue une mesure globale de l'état élastique de la plaque. Elle est obtenue par intégration de la densité d'énergie sur le volume et dépend donc directement de la distribution des propriétés matérielles. [14][17]

Cette formulation énergétique est particulièrement adaptée aux problèmes variationnels. Elle permet de déduire les équations gouvernantes en imposant que la variation totale de l'énergie soit compatible avec le travail des actions extérieures. [12][17]

Pour une plaque constituée d'un matériau à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM), l'énergie de déformation élastique dépend directement de la variation des propriétés mécaniques suivant l'épaisseur de la plaque. En effet, contrairement aux matériaux homogènes, les caractéristiques mécaniques d'un FGM, notamment le module de Young et les coefficients de rigidité, varient continûment en fonction de la coordonnée z .

L'énergie de déformation représente l'énergie élastique emmagasinée dans la structure lorsqu'elle est soumise à des sollicitations extérieures. Dans le cas des plaques, cette énergie peut être décomposée en deux contributions principales : la première est associée aux déformations normales dans le plan moyen de la plaque et comprend les effets de membrane et de flexion, tandis que la seconde est liée aux déformations de cisaillement transverse.

Pour un matériau FGM, le calcul de l'énergie doit tenir compte de la variation des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur. Elle est donc obtenue par intégration de la densité d'énergie de déformation sur l'ensemble du volume de la plaque. Cette formulation permet de prendre en considération de manière plus précise l'influence de la distribution progressive des phases céramique et métallique sur la réponse mécanique de la structure [14].

II.6 ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

Les équations d'équilibre constituent l'étape qui relie la description cinématique aux sollicitations appliquées. Après intégration suivant l'épaisseur, les efforts internes sont exprimés à partir des rigidités équivalentes de la plaque. Dans le cas FGM, ces rigidités contiennent directement l'influence de la distribution des constituants et peuvent conduire à des couplages entre extension et flexion lorsque la distribution n'est pas symétrique.

Les équations d'équilibre expriment la conservation mécanique de la plaque. Leur établissement peut être réalisé à partir des équations locales ou du principe des travaux virtuels. Dans les formulations complexes, l'approche énergétique permet d'intégrer naturellement les contributions de toutes les composantes de déformation. [11][12]

Après intégration suivant l'épaisseur, les contraintes tridimensionnelles sont remplacées par des résultantes et des moments. Cette réduction conduit à un système d'équations différentielles défini sur le plan moyen de la plaque. [14][17]

II.6.1 Principe des travaux virtuels (PTV)

Le principe des travaux virtuels (PTV) constitue une méthode énergétique fondamentale permettant d'établir les équations d'équilibre d'une structure déformable. Il repose sur l'égalité entre le travail virtuel réalisé par les forces extérieures et le travail virtuel associé aux contraintes internes pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible.

Pour une plaque en matériau à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM), ce principe permet de prendre en considération la variation des propriétés mécaniques suivant l'épaisseur ainsi que les différentes composantes de déformation. Il est particulièrement adapté à l'analyse des plaques FGM, car il permet de formuler les équations gouvernantes à partir des champs de déplacements et des résultantes des contraintes.

Le travail virtuel interne est exprimé à partir des contraintes et des déformations virtuelles comme suit :

$$\delta U = \int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2}$$

$$(\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz d\omega$$

où δU représente le travail virtuel interne, tandis que $\delta \epsilon_{xx}$, $\delta \epsilon_{yy}$, $\delta \gamma_{xy}$, $\delta \gamma_{xz}$ et $\delta \gamma_{yz}$ désignent les variations virtuelles des composantes de déformation.

De manière générale, le travail virtuel externe est associé aux charges appliquées sur la plaque. Il peut être représenté par :

$$\delta W = \int_{\omega} (N_x \delta \epsilon_{0xx} + N_y \delta \epsilon_{0yy} + N_{xy} \delta \gamma_{0xy} + M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \gamma_{xz} + Q_y \delta \gamma_{yz}) d\omega$$

où N_x , N_y et N_{xy} représentent les résultantes des efforts membranaires, M_x , M_y et M_{xy} les moments de flexion et de torsion, tandis que Q_x et Q_y correspondent aux résultantes des efforts de cisaillement transverse.

Selon le principe des travaux virtuels, la condition d'équilibre de la plaque s'écrit :

$$\delta U = \delta W$$

Cette relation constitue la base de la formulation variationnelle du problème. En introduisant les relations cinématiques et constitutives dans l'expression précédente, puis en effectuant les intégrations nécessaires suivant l'épaisseur de la plaque, on obtient les équations différentielles d'équilibre ainsi que les conditions aux limites associées.

Dans le cas d'une plaque FGM, les matrices de rigidité résultantes dépendent de la distribution des propriétés mécaniques suivant l'épaisseur. Cette dépendance permet de représenter l'influence du gradient de composition sur les comportements de membrane, de flexion et de cisaillement de la plaque.

B. Traduction en termes de déplacements

Les équations d'équilibre précédentes sont exprimées en fonction des efforts résultants. Afin d'obtenir une formulation directement exploitable dans l'analyse des plaques FGM, il est nécessaire de les exprimer en fonction des champs de déplacements. Pour cela, les relations cinématiques de la théorie considérée sont introduites dans les relations constitutives, puis dans les équations d'équilibre.

Dans le cadre de la théorie classique des plaques, les déplacements sont généralement décrits à partir des déplacements du plan moyen de la plaque. Cependant, pour les plaques épaisses ou lorsque les effets de cisaillement transverse ne peuvent pas être négligés, les théories du

premier ordre (FSDT) et d'ordre supérieur (HSDT) permettent de représenter plus précisément la distribution des déplacements suivant l'épaisseur.

Pour la théorie de premier ordre de déformation en cisaillement (FSDT), le champ de déplacements peut être écrit sous la forme :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z$$

B. Traduction en termes de déplacements

Pour résoudre le problème de manière analytique ou numérique, les efforts résultants (N, M, Q) sont exprimés en fonction des variables cinématiques de la plaque, à savoir les déplacements du plan moyen (u_0, v_0, w_0) et les rotations (φ_x, φ_y). En introduisant les relations cinématiques et constitutives dans les équations d'équilibre, on obtient un système de cinq équations différentielles aux dérivées partielles, généralement couplées entre elles.

Dans le cas des plaques en matériau à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM), le couplage entre les différents modes de déformation dépend notamment de la distribution des propriétés mécaniques suivant l'épaisseur. Lorsque la distribution du matériau n'est pas symétrique par rapport au plan moyen, la matrice de couplage [B] peut être non nulle. Dans ce cas, une sollicitation de membrane peut être accompagnée d'une réponse en flexion, et inversement. Ce phénomène doit être pris en considération dans la formulation des équations gouvernantes afin de représenter correctement le comportement mécanique de la plaque FGM [14].

2.6.3 Forme matricielle des équations d'équilibre

La forme matricielle rassemble les différentes équations dans une structure compacte. Elle est particulièrement adaptée à la programmation scientifique et aux méthodes numériques, car elle permet d'organiser les inconnues, les charges et les opérateurs dans des objets mathématiques clairement définis. [13][14]

Les matrices de rigidité peuvent être interprétées séparément : A gouverne principalement les efforts membranaires, D les moments de flexion et B les couplages. Les termes de cisaillement complètent cette description lorsque la théorie retenue les prend en compte. [14][9]

Afin de faciliter la résolution des équations différentielles obtenues précédemment, celles-ci peuvent être regroupées sous une forme matricielle compacte. Cette formulation permet de représenter simultanément les différents degrés de liberté de la plaque ainsi que les interactions entre les déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transverse.

La forme matricielle générale des équations d'équilibre peut être exprimée comme suit :

$$[L]\{u\} = \{F\}$$

où $\{u\}$ représente le vecteur des inconnues cinématiques de la plaque, défini par :

$$\{u\} = [u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y]^T$$

Les termes u_0 et v_0 correspondent aux déplacements du plan moyen suivant les directions x et y , tandis que w_0 représente le déplacement transversal. Les variables φ_x et φ_y désignent les rotations associées à la déformation de cisaillement transverse.

Le vecteur des charges extérieures s'écrit, dans le cas d'une plaque soumise principalement à une charge transversale q :

$$\{F\} = [0, 0, q, 0, 0]^T$$

Dans cette expression, q représente la charge distribuée appliquée suivant la direction transverse de la plaque. Les autres composantes sont nulles lorsque aucune charge membranaire ou aucun moment extérieur n'est directement appliqué.

$[L]$ désigne l'opérateur différentiel matriciel. Il contient les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x et y ainsi que les différentes rigidités intégrées suivant l'épaisseur de la plaque. Selon la théorie utilisée, ces rigidités peuvent être associées aux matrices A , B et D pour les comportements de membrane et de flexion,

ainsi qu'aux termes de rigidité associés au cisaillement transverse, généralement notés E , F et H dans les formulations d'ordre supérieur.

La matrice $[A]$ représente principalement les rigidités membranaires, tandis que la matrice $[B]$ traduit le couplage entre les comportements de membrane et de flexion.

La matrice $[D]$ correspond aux rigidités de flexion et de torsion. Les termes E , F et H interviennent notamment dans la description des effets de cisaillement et des interactions associées aux théories d'ordre supérieur.

La forme matricielle précédente constitue une représentation compacte des équations gouvernantes de la plaque. Elle facilite leur implémentation dans une procédure de résolution numérique, notamment par la méthode des éléments finis, tout en permettant de prendre en compte la variation des propriétés mécaniques du matériau FGM suivant l'épaisseur.

B. Structure de la matrice de rigidité pour FGM

La matrice de rigidité globale $[K]$ résultant de cette formulation pour une plaque en matériau à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM) se présente sous la forme de sous-blocs permettant de représenter les différents couplages mécaniques entre les modes de déformation. Cette représentation matricielle permet de regrouper les contributions associées aux déformations membranaires, aux courbures et aux déformations de cisaillement transverse.

La relation constitutive globale peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [A_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\kappa\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}$$

Dans cette formulation, les différentes matrices de rigidité possèdent une signification Mécanique précise :

1. $[A]$ (Rigidité extensionnelle) : La matrice $[A]$ représente les rigidités associées aux déformations membranaires.

Elle établit la relation entre les déformations dans le plan moyen de la plaque et les résultantes des forces membranaires. Ses coefficients dépendent directement de la distribution des propriétés mécaniques du matériau suivant l'épaisseur.

2. $[D]$ (Rigidité de flexion) : La matrice $[D]$ représente les rigidités associées à la flexion et à la torsion de la plaque. Elle relie les courbures de la surface moyenne aux moments résultants.

Pour une plaque FGM, cette rigidité dépend également de la variation du module de Young et des autres propriétés mécaniques suivant l'épaisseur.

3. $[B]$ (Rigidité de couplage membrane-flexion) : La matrice $[B]$ représente le couplage entre les comportements membranaire et flexionnel. Lorsque la distribution des propriétés du FGM n'est pas symétrique par rapport au plan moyen, cette matrice peut être non nulle. Dans ce cas, une sollicitation membranaire peut générer une réponse en flexion et, inversement,

une sollicitation en flexion peut produire des efforts membranaires. Ce couplage constitue une caractéristique importante à prendre en considération dans l'analyse des plaques FGM.

4. $[A_s]$ (Rigidité de cisaillement) : La matrice $[A_s]$ représente la rigidité associée aux déformations de cisaillement transverse. Elle relie les déformations de cisaillement aux résultantes des efforts tranchants. Sa valeur dépend également de la variation des propriétés du matériau suivant l'épaisseur et de la théorie de plaque adoptée.

Ainsi, la structure de la matrice de rigidité permet de représenter de manière compacte les interactions entre les différents modes de déformation. Dans le cas des matériaux FGM, la variation continue de la composition entre les phases céramique et métallique influence directement les coefficients des matrices $[A]$,

$[B]$, $[D]$ et $[A_s]$, ce qui permet de prendre en compte l'effet du gradient de propriétés sur la réponse mécanique globale de la plaque.

2.7.2 Encastrement (Clamped - C)

Les conditions d'encastrement doivent être appliquées de manière compatible avec le nombre de degrés de liberté introduits par la théorie choisie. Ainsi, une théorie raffinée exige de contrôler non seulement les déplacements du plan moyen, mais également les rotations ou variables supplémentaires du champ cinématique. Cette cohérence est indispensable pour éviter une formulation de frontière incomplète.

L'encastrement impose des conditions cinématiques fortes sur le bord. Il bloque les translations du plan moyen ainsi que les rotations associées au champ de déplacement retenu. Les réactions qui en résultent dépendent du chargement et des rigidités de la plaque. [12]

Dans les calculs de plaques FGM, la condition d'encastrement doit être appliquée au même niveau de théorie que le champ cinématique. Une formulation enrichie nécessite ainsi de considérer toutes les variables cinématiques introduites. [9]

La condition d'encastrement représente une liaison totalement rigide entre la plaque et son support. Dans ce cas, tous les déplacements ainsi que les rotations du bord considéré sont empêchés. Cette condition impose donc une restriction complète des degrés de liberté cinématiques de la plaque.

Sur les bords encastres, les conditions aux limites s'écrivent :

$$u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_y = 0$$

Cette condition signifie que les déplacements dans les directions x , y et z ainsi que les rotations φ_x et φ_y sont nuls sur le bord concerné. L'encastrement permet ainsi d'empêcher simultanément les mouvements de translation et de rotation, ce qui influence directement la distribution des contraintes et la déformée de la plaque.

2.7.3 Bord libre (Free - F)

Pour un bord libre, les conditions sont de nature naturelle et résultent de l'annulation des actions de frontière non imposées. Elles sont donc formulées en termes de résultantes membranaires, moments et efforts tranchants. La forme exacte de ces conditions dépend du modèle cinématique retenu et des degrés de liberté associés.

Un bord libre ne possède pas de réaction de support imposée. Les conditions naturelles sont donc exprimées à partir des résultantes et moments internes, qui doivent être compatibles avec les actions appliquées sur la frontière. [12][14]

Cette distinction entre conditions essentielles et naturelles est fondamentale dans la formulation variationnelle. Elle permet de traiter de façon cohérente les bords encastres, appuyés, libres ou soumis à des combinaisons de conditions. [11][12]

Un bord libre correspond à une frontière sur laquelle aucun déplacement n'est imposé. En l'absence de chargement extérieur directement appliqué sur ce bord, les résultantes des contraintes doivent satisfaire les conditions naturelles d'équilibre.

Pour un bord dont la normale est orientée suivant la direction x , les conditions aux limites naturelles peuvent être exprimées par :

$$N_{xx} = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

$$M_{xx} = 0$$

$$M_{xy} = 0$$

$$Q_x = 0$$

Ces conditions indiquent que les résultantes membranaires, les moments de flexion et de torsion ainsi que l'effort tranchant transverse associé au bord libre sont nuls. Elles traduisent physiquement l'absence de réaction mécanique imposée par un support sur cette frontière [12].

2.7.4 Cas des conditions mixtes et de symétrie

Les conditions mixtes permettent de représenter des plaques dont les quatre bords ne sont pas soumis au même type de liaison. Les conditions de symétrie, quant à elles, peuvent réduire le domaine de calcul lorsque la géométrie, le matériau et le chargement possèdent la symétrie correspondante. Leur utilisation permet de simplifier la résolution tout en conservant la cohérence mécanique du problème.

Les conditions mixtes sont nécessaires lorsque les bords d'une plaque ne sont pas soumis à des liaisons identiques. Elles permettent de représenter des configurations plus proches des structures réelles et sont directement intégrées dans les problèmes analytiques ou numériques. [11][12]

Les conditions de symétrie permettent de réduire le domaine d'analyse lorsque les propriétés, la géométrie et le chargement possèdent la symétrie correspondante. Cette réduction doit respecter simultanément les conditions cinématiques et mécaniques sur l'axe considéré. [12]

En plus des conditions classiques d'appui simple, d'encastrement et de bord libre, des conditions mixtes peuvent être utilisées afin de représenter des configurations de plaques plus générales. Ces conditions permettent notamment d'associer différentes liaisons mécaniques sur les quatre bords de la plaque.

Les conditions de symétrie constituent également un cas particulier important dans l'analyse des plaques FGM. Elles permettent de réduire le domaine de calcul lorsque la géométrie, les propriétés matérielles et le chargement présentent une symétrie. Sur un axe de symétrie, certaines grandeurs cinématiques et mécaniques doivent satisfaire des conditions particulières.

Dans le cas d'une symétrie par rapport à un axe, la pente de la déformée suivant la direction normale n ainsi que l'effort tranchant correspondant peuvent être imposés sous la forme :

$$\partial w_0 / \partial n = 0$$

$$Q_n = 0$$

La première condition traduit l'annulation de la pente de la déformée suivant la normale à l'axe de symétrie, tandis que la seconde exprime l'annulation de l'effort tranchant sur cet axe.

L'introduction de ces différentes conditions aux limites dans la formulation mathématique permet de définir avec précision le comportement de la plaque et de reproduire les différentes configurations de support étudiées. Elles jouent également un rôle essentiel dans la résolution analytique et numérique des problèmes de flexion, de flambement et de vibration des plaques en matériaux FGM.

CONCLUSION :

La comparaison des modèles montre que la description cinématique doit être adaptée au niveau de détail recherché. Les théories CPT, FSDT, HSDT et quasi-3D forment une progression cohérente allant d'un modèle simplifié vers une représentation plus complète des effets suivant l'épaisseur. [11][9][10]

Les relations énergétiques, les équations d'équilibre et les conditions aux limites complètent cette description et fournissent le cadre nécessaire aux développements ultérieurs. Elles permettent notamment d'aborder les problèmes de flexion, de vibration et de flambement des plaques FGM. [9][17]

Ce deuxième chapitre a permis de présenter de manière structurée les principaux fondements théoriques et mathématiques nécessaires à l'étude du comportement mécanique des plaques constituées de matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM). L'analyse a porté successivement sur la description des matériaux FGM, la variation des propriétés mécaniques suivant l'épaisseur, les lois constitutives, les différentes théories de plaques ainsi que la formulation énergétique et les équations d'équilibre.

L'étude des différentes théories cinématiques a montré que la théorie classique des plaques (CPT) constitue une formulation simple et efficace pour les plaques minces lorsque les effets du cisaillement transverse peuvent être négligés.

Cependant, pour les plaques épaisses ou lorsque les effets de cisaillement deviennent significatifs, la théorie du premier ordre (FSDT) permet d'obtenir une description plus appropriée du comportement mécanique. Les théories d'ordre supérieur (HSDT) et les formulations quasi-3D permettent, quant à elles, une représentation plus raffinée du champ de déplacements et une meilleure prise en compte des effets de cisaillement transverse et d'étirement suivant l'épaisseur.

La formulation de la loi de Hooke pour les matériaux FGM a également mis en évidence l'importance de la variation continue des propriétés mécaniques dans la direction de l'épaisseur. Cette variation influence directement les matrices de rigidité de la plaque, notamment les matrices $[A]$, $[B]$, $[D]$ et $[A_s]$, qui représentent respectivement les rigidités membranaires, de couplage membrane-flexion, de flexion et de cisaillement. Dans le cas d'une distribution non symétrique des propriétés par rapport au plan moyen, la matrice de couplage $[B]$ peut devenir non nulle, entraînant une interaction entre les comportements de membrane et de flexion.

Par ailleurs, l'expression de l'énergie de déformation a permis de prendre en considération les différentes contributions énergétiques associées aux déformations membranaires, à la flexion, à la torsion et au cisaillement transverse. L'application du principe des travaux virtuels a ensuite conduit à la formulation des équations d'équilibre sous une forme différentielle et matricielle. Cette approche constitue une base importante pour le développement des formulations analytiques et numériques utilisées dans l'étude des plaques FGM.

Enfin, les différentes conditions aux limites, notamment l'appui simple (Simply Supported), l'encastrement (Clamped), le bord libre (Free) ainsi que les conditions de symétrie, ont été définies afin de compléter la formulation du problème. Le choix de ces conditions dépend de la configuration physique de la plaque et joue un rôle essentiel dans sa réponse mécanique.

Ainsi, les développements présentés dans ce chapitre constituent le cadre théorique nécessaire à la suite de cette étude. Ils permettent d'aborder, dans les chapitres suivants, la résolution des problèmes de flexion, de vibration et de flambement des plaques FGM, en tenant compte de l'influence de la distribution des propriétés matérielles, de la géométrie, des conditions aux limites et des effets de cisaillement transverse.

CHAPITRE III : RÉSULTATS, ANALYSE ET INTERPRÉTATION

III.1. Introduction

Après avoir exposé les fondements théoriques des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) et établi les équations régissant le comportement des plaques, ce troisième chapitre est dédié à la validation numérique et à l'exploitation de notre modèle. À l'aide du logiciel Maple 18, nous évaluons la pertinence de la théorie sinusoïdale développée pour reproduire fidèlement la réponse en flexion de ces structures complexes.

Une attention particulière est portée aux effets conjugués du cisaillement transversal et de la déformation normale transverse, des phénomènes souvent exacerbés au sein des plaques modérément épaisses. À travers une analyse paramétrique rigoureuse, nous étudierons l'impact des variables clés suivantes sur les déplacements transversaux et les distributions de contraintes :

- L'indice de gradation de la loi de puissance (k).
- Le rapport d'aspect géométrique ou d'élancement ($S = a/h$).
- La géométrie en plan ou rapport de forme (a/b).
- L'amplitude et la distribution de la porosité (e).

III.2. Objectifs de l'Analyse Numérique

L'implémentation algorithmique de notre modèle sur Maple 18 vise à remplir les objectifs scientifiques majeurs suivants :

- Valider la formulation théorique établie au chapitre précédent en confrontant de manière systématique nos résultats aux solutions analytiques de référence issues de la littérature scientifique.
- Quantifier le comportement cinématique de la plaque à travers l'évaluation précise du déplacement transversal maximal (w) ainsi que des composantes de contraintes normales (σ_{xx} , σ_{yy}) et tangentielles (τ_{xz} , τ_{yz}).
- Isoler l'influence des variables géométriques et matérielles en menant des analyses de sensibilité exhaustives sur l'élancement (a/h) et le rapport de forme (a/b).

- Caractériser l'impact des imperfections micro-structurales en évaluant quantitativement la perte de rigidité induite par la présence de porosités selon deux modèles distincts (distributions EVEN et UNEVEN).

III.3. Formulation Théorique et Propriétés du Modèle

III.3.1. Propriétés du Matériau et Configuration Géométrique

Nous étudions une plaque rectangulaire de dimensions $a \times b$ et d'épaisseur h . Le matériau FGM considéré est constitué d'un mélange continu et bidimensionnel de céramique et de métal. La phase supérieure ($z = h/2$) est purement céramique, offrant une excellente barrière thermique, tandis que la phase inférieure ($z = -h/2$) est purement métallique, garantissant la ductilité de la structure.

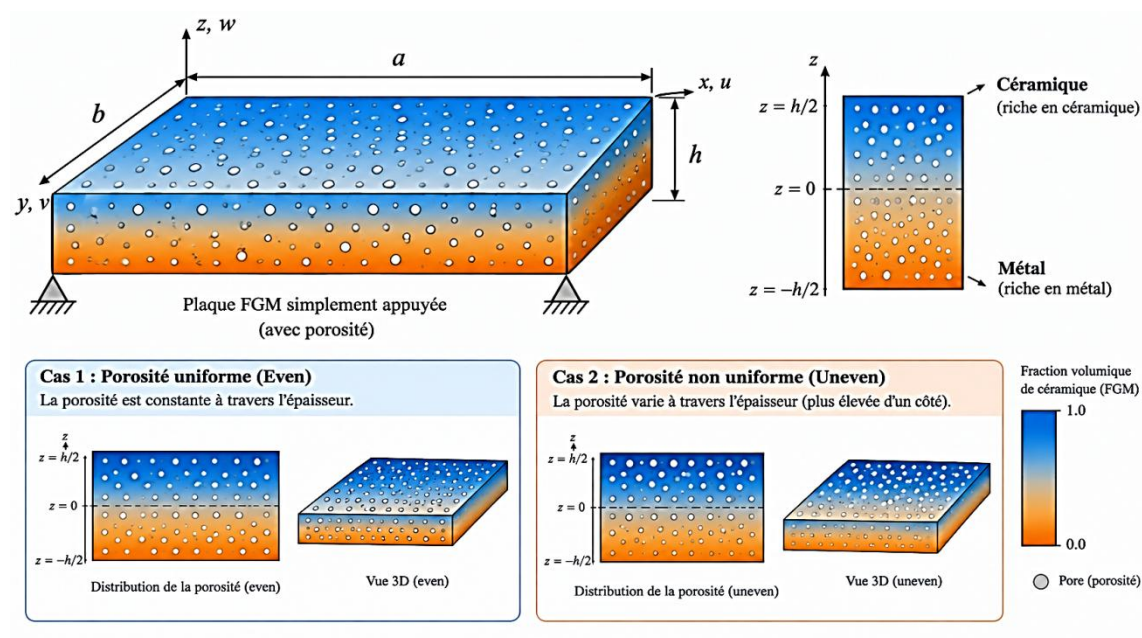


Figure 3.1: Géométrie et système de coordonnées de la plaque FG considérée.

Les propriétés mécaniques et géométriques de référence sont consignées ci-dessous :

Table.3.1: Les propriétés mécaniques et géométriques de référence

Paramètre	Symbole	Valeur / Unité	Signification
Module d'Young (Céramique)	E_c	380 GPa	Propriété de la phase rigide supérieure
Module d'Young du Métal	E_m	70 GPa	Propriété de la phase ductile inférieure
Coefficient de Poisson	ν	0,3	Supposé constant dans toute l'épaisseur
Épaisseur de référence	h	1	Unité géométrique de base
Rapport d'élancement	$S = a/h$	10	Configuration de plaque modérément épaisse
Dimensions en plan	a, b	10×10	Plaque carrée par défaut ($a/b = 1$)
Amplitude de charge	q_0	1	Intensité du chargement transversal appliqué
Paramètres modaux	m, n	1, 1	Premier mode de la solution de Navier
Porosité d'étude	E	0,1 et 0,2	Fractions de vides volumiques analysées

Les simulations comparent deux types de sollicitations transversales : une charge sinusoïdale doublement répartie (SSL) et une charge uniformément répartie (UDL). Les imperfections macroscopiques du matériau sont introduites sous forme de micro-porosités réparties de manière uniforme (loi EVEN) ou non-uniforme (loi UNEVEN).

III.4. Modélisation du Matériau FGM et Effet de la Porosité

III.4.1. Loi de Variation du Matériau Sain ($e = 0$)

La transition continue des propriétés élastiques le long de l'axe de l'épaisseur (z) est régie par la loi de puissance classique (Power Law) exprimée par

(38),(67) :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k, \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (1)$$

Pour une gradation parfaitement linéaire (indice $k = 1$), l'expression ci-dessus se simplifie sous la forme affine : $E(z) = 225 + 310z$. Les analyses numériques confirment que lorsque k tend vers 0, le matériau converge vers un comportement monolithique purement céramique (380 GPa). À l'inverse, lorsque l'indice k augmente de manière significative ($k \rightarrow 10$), la phase métallique (70 GPa) devient largement prédominante sur la majeure partie de l'épaisseur, augmentant ainsi la flexibilité de la plaque.

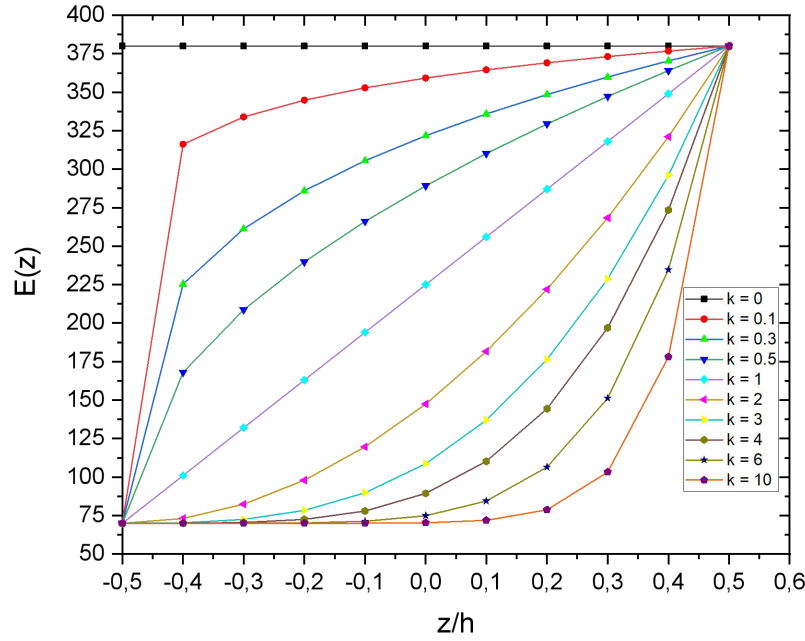


Figure 3.2: variation du module $E(z)$ ($e = 0$)

III.4.2. Introduction des Modèles de Porosité ($e > 0$)

L'intégration de micro-vides altère le module d'Young effectif de la structure. Deux configurations de porosité sont analysées à travers l'épaisseur :

1. Distribution Uniforme (Loi EVEN) :

Les pores sont répartis de manière homogène dans toute la matrice. Le module d'Young dégradé s'écrit analytiquement (20) (21):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k - \frac{e}{2} (E_c + E_m), \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (2)$$

L'analyse comparative met en évidence une chute constante et isotrope de la rigidité sur toute l'épaisseur :

- Pour $e = 0,1$: La perte de rigidité est uniforme et s'élève à 22,5 GPa, soit $E_a(z) = 202,5 + 310z$.
- Pour $e = 0,2$: La perte double pour atteindre une baisse nette de 45 GPa, soit $E_a(z) = 180 + 310z$.

Table 3.2: des valeurs calculées de $E(z)$ pour $k = 1$

z/h	$V_1 = 0,5 + z$	$E(z)$ sans porosité ($e = 0$) [GPa]	$E(z)$ avec porosité ($e = 0,2$) [GPa]	ΔE [GPa]
-0,5	0,0	70,0	25,0	45,0
-0,4	0,1	101,0	56,0	45,0
-0,3	0,2	132,0	87,0	45,0
-0,2	0,3	163,0	118,0	45,0
-0,1	0,4	194,0	149,0	45,0
-0,0	0,5	225,0	180,0	45,0
0,1	0,6	256,0	211,0	45,0
0,2	0,7	287,0	242,0	45,0
0,3	0,8	318,0	273,0	45,0
0,4	0,9	349,0	304,0	45,0
0,5	1,0	380,0	335,0	45,0

Comme illustré par les données numériques, les courbes du module d'Young avec et sans porosité restent parfaitement parallèles. Cela démontre que l'imperfection modifie la valeur absolue de la rigidité (ordonnée à l'origine) sans pour autant perturber le gradient de distribution initial du matériau (310 GPa). Ainsi, la porosité réduit la rigidité effective de la plaque sur toute l'épaisseur.

2. Distribution Non-Uniforme (Loi UNEVEN) :

Dans cette configuration plus proche des observations expérimentales, les porosités se concentrent majoritairement au voisinage de la surface moyenne ($z = 0$), où les contraintes de cisaillement sont maximales, et s'estompent progressivement à l'approche des peaux externes ($z = \pm h/2$). Le module d'Young affecté par cette distribution est défini par une loi cosinusoïdale (22) (23):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k - \frac{e}{2} (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right), \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (3)$$

Contrairement au cas uniforme, la dégradation de la rigidité n'est plus constante le long de l'épaisseur : elle culmine au cœur de la structure ($z = 0$) avec une diminution de 45 GPa (pour $e = 0,2$) et s'annule complètement aux surfaces extrêmes ($z = \pm 0,5h$). Ce profil préserve ainsi les caractéristiques mécaniques intrinsèques des peaux de métal et de céramique pures.

III.5. Équations Constitutives et Champ de Déplacement

III.5.1. Champ de Déplacement de la Théorie Sinusoïdale

La cinématique du modèle repose sur une théorie sinusoïdale raffinée d'ordre élevé. Le champ de déplacement tridimensionnel (U, V, W) est formulé par :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \phi(x, y) \\ V(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z) \psi(x, y) \\ W(x, y, z) &= w(x, y) + g(z) \xi(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

Où les fonctions d'enrichissement régissant le cisaillement transversal $f(z)$ et la déformation normale $g(z)$ sont définies trigonométriquement par :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad \text{and} \quad g(z) = \frac{h}{\pi} \cos \frac{\pi z}{h} \quad (5)$$

Les fonctions inconnues ϕ et ψ représentent les rotations des normales à la surface moyenne par rapport aux axes y et x , tandis que ξ caractérise le mode de déformation transverse de la section droite de la plaque.

On suppose que la plaque FGM est orthotrope à chaque couche mathématique d'épaisseur h , les relations contrainte-déformation peuvent être écrites comme (24) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

où Q_{ij} sont les coefficients de raideur réduits comme donné ci-dessous,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = Q_{33} = E(z)(1 - \nu^2)/\Delta \\ Q_{12} &= Q_{13} = Q_{23} = E(z)(\nu + \nu^2)/\Delta \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = G(z) = E(z)/2(1 + \nu) \\ \Delta &= (1 - 3\nu^2 - 2\nu^3) \end{aligned} \quad (7)$$

où $E(z)$ est le module de Young du matériau, qui est réparti de manière continue à travers l'épaisseur d'une plaque selon la loi de puissance comme exprimé ci-dessous

2.3. Équations et conditions aux limites

Les équations de gouvernance et les conditions aux limites de la théorie sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel. Pour la plaque, le principe du travail virtuel peut être exprimé analytiquement comme suit (25) :

$$\int_{dV} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{dA} q(x, y) \delta w dA = 0, \quad (i = j = x, y, z) \quad (8)$$

Les résultantes de force et de moment apparaissant dans les équations gouvernantes et les conditions aux limites sont définies comme suit :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \{M^S\} = \begin{Bmatrix} M_x^S \\ M_y^S \\ M_{xy}^S \end{Bmatrix}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} f(z) dz \quad (9)$$

$$\{V^S\} = \begin{Bmatrix} V_{xz}^S \\ V_{yz}^S \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \left(\cos \frac{\pi z}{h} \right) dz, \{V_{zz}^S\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z \left(\sin \frac{\pi z}{h} \right) dz$$

III.5.2. Équations d'Équilibre Globales

En appliquant le principe des puissances virtuelles, le système d'équations différentielles régissant l'équilibre de la plaque FGM sous charge transversale q s'écrit :

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\delta v: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\delta w: \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0$$

$$\delta \phi: \frac{\partial M_x^S}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^S}{\partial y} - V_{xz}^S = 0 \quad (10)$$

$$\delta \psi: \frac{\partial M_y^S}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^S}{\partial x} - V_{yz}^S = 0$$

$$\delta \xi: \frac{\partial V_{xz}^S}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}^S}{\partial y} - \frac{\pi}{h} V_{zz}^S - q = 0$$

où les résultantes des forces dans le plan (N_x, N_y, N_{xy}) désignent les efforts de membrane, (M_x, M_y, M_{xy}) les moments de flexion classiques, et (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) sont des moments dus à l'effet de la déformation par cisaillement transversal, et ($V_{xz}^s, V_{yz}^s, V_{zz}^s$) sont les résultantes des efforts cisaillement.

Les équations gouvernantes (7), exprimées en termes de variables de déplacement de la théorie, sont données comme suit :

$$\delta u: A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} - B_{11}w_{,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,xyy} + As_{11}\phi_{,xx} + As_{66}\phi_{,yy} + (As_{12} + As_{66})\psi_{,xy} - As_{13}\xi_{,x} = 0$$

$$\delta v: (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} + A_{66}v_{0,xx} + A_{22}v_{0,yy} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,xxy} - B_{22}w_{,yyy} + (As_{12} + As_{66})\phi_{,xy} + As_{66}\psi_{,xx} + As_{22}\psi_{,yy} - As_{23}\xi_{,y} = 0$$

$$\delta w: B_{11}u_{0,xxx} + (B_{12} + 2B_{66})u_{0,xyy} + (B_{12} + 2B_{66})v_{0,xy} + B_{22}v_{0,yyy} - D_{11}w_{,xxxx} - 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} - D_{22}w_{,yyyy} + Bs_{11}\phi_{,xxx} + (Bs_{12} + 2Bs_{66})\phi_{,xyy} + (Bs_{12} + 2Bs_{66})\psi_{,xxy} + Bs_{22}\psi_{,yyy} - Bs_{13}\frac{\pi}{h}\xi_{,xx} - Bs_{23}\frac{\pi}{h}\xi_{,yy} + q = 0$$

$$\delta \phi: As_{11}u_{0,xx} + As_{66}u_{0,yy} + (As_{12} + As_{66})v_{0,xy} - Bs_{11}w_{,xxx} - (Bs_{12} + 2Bs_{66})w_{,xyy} + Ds_{11}\phi_{,xx} + Ds_{66}\phi_{,yy} - Fs_{55}\phi + (Ds_{12} + Ds_{66})\psi_{,xy} - \left(Ds_{13}\frac{\pi}{h} + Fs_{55}\frac{h}{\pi}\right)\xi_{,x} = 0$$

$$\delta \psi: (As_{12} + As_{66})u_{0,xy} + As_{66}v_{0,xx} + As_{22}v_{0,yy} - (Bs_{12} + 2Bs_{66})w_{,xxy} - Bs_{22}w_{,yyy} + (Ds_{12} + Ds_{66})\phi_{,xy} + Ds_{66}\psi_{,xx} + Ds_{22}\psi_{,yy} - Fs_{44}\psi - \left(Ds_{23}\frac{\pi}{h} + Fs_{44}\frac{h}{\pi}\right)\xi_{,y} = 0$$

$$\delta \xi: As_{13}\frac{\pi}{h}u_{0,x} + As_{23}\frac{\pi}{h}v_{0,y} - Bs_{13}\frac{\pi}{h}w_{,xx} - Bs_{23}\frac{\pi}{h}w_{,yy} + \left(Fs_{55} + \frac{\pi}{h}Ds_{13}\right)\phi_{,x} + \left(Fs_{44} + \frac{\pi}{h}Ds_{23}\right)\psi_{,y} + Fs_{55}\frac{h}{\pi}\xi_{,xx} + Fs_{44}\frac{h}{\pi}\xi_{,yy} - Ds_{33}\frac{\pi^2}{h^2}\xi + q = 0 \quad (11)$$

où $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, As_{ij}, Bs_{ij}, Ds_{ij}, Fs_{ij}$ sont les rigidités des plaques définies comme suit :

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
(As_{ij}, Bs_{ij}, Ds_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}f(z)(1, z, f(z)) dz \quad (i, j = 1, 2, 3, 6) \\
Fs_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left(\cos^2 \frac{\pi z}{h} \right) dz \quad (i, j = 4, 5) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} f'(z)^2 dz \quad (i, j = 4, 5)
\end{aligned} \tag{12}$$

III.5. Solution de Navier

Une solution de Navier est développée dans cette section pour une plaque rectangulaire simplement appuyée satisfaisant aux conditions aux limites suivantes.

$$x = 0 \text{ et } x = a. N_x = v_0 = w = \psi = \xi = M_x = M_x^s = 0 \tag{13}$$

$$\text{et à } y = 0 \text{ et } y = b. N_y = u_0 = w = \psi = \xi = M_y = M_y^s = 0 \tag{14}$$

Dans le cadre des séries de Fourier doubles, la charge appliquée $q(x, y)$ peut être développée comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha \sin \beta y \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

q_{mn} les coefficients du développement en série de Fourier. On a. $q_{mn} = q_0$ pour une charge à répartition bi-sinusoïdale (SDL) et $q_{mn} = 16q_0 / mn\pi^2$ pour une charge uniformément répartie (UDL).

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \\ \phi \\ \psi \\ \xi \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ v_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ w_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \phi_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \psi_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ \xi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (16)$$

où u_{mn} , v_{mn} , w_{mn} , ϕ_{mn} , ψ_{mn} et ξ_{mn} sont les coefficients inconnus des développements en série de Fourier respectifs. La substitution des équations (15) et (16) dans les équations (11) conduit à un système d'équations algébriques qui peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (17)$$

où

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix}, \text{ Where } K_{ij} = K_{ji}$$

$$\{\Delta\} = \begin{pmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn} \\ \phi_{mn} \\ \psi_{mn} \\ \xi_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } \{F\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[K]$ sont définis comme suit :

$$K_{11} = (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)$$

$$K_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta$$

$$K_{13} = -(B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2)$$

$$K_{14} = (As_{11}\alpha^2 + As_{66}\beta^2)$$

$$\begin{aligned}
K_{15} &= (As_{12} + As_{66})\alpha\beta \\
K_{16} &= As_{13}\alpha \\
K_{22} &= (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) \\
K_{23} &= -[(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta + B_{22}\beta^3] \\
K_{24} &= (As_{12} + As_{66})\alpha\beta \\
K_{25} &= (As_{66}\alpha^2 + As_{22}\beta^2) \\
K_{26} &= As_{23}\beta \\
K_{33} &= [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{22})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4] \\
K_{34} &= -[Bs_{11}\alpha^3 + (Bs_{12} + 2Bs_{66})\alpha\beta^2] \\
K_{35} &= -[(Bs_{12} + 2Bs_{66})\alpha^2\beta + Bs_{22}\beta^3] \\
K_{36} &= -\left(Bs_{13}\frac{\pi}{h}\alpha^2 + Bs_{23}\frac{\pi}{h}\beta^2\right) \\
K_{44} &= (Ds_{11}\alpha^2 + Ds_{66}\beta^2 + Fs_{55}) \\
K_{45} &= (Ds_{12} + Ds_{66})\alpha\beta \\
K_{46} &= \left(Ds_{13}\frac{\pi}{h} + Fs_{55}\frac{h}{\pi}\right) \\
K_{55} &= (Ds_{66}\alpha^2 + Ds_{22}\beta^2 + Fs_{44}) \\
K_{56} &= \left(Ds_{23}\frac{\pi}{h} + Fs_{44}\frac{h}{\pi}\right) \\
K_{66} &= \left(Fs_{55}\frac{h^2}{\pi^2}\alpha^2 + Fs_{44}\frac{h^2}{\pi^2}\beta^2 + Ds_{33}\frac{\pi^2}{h^2}\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

III-6-Résultats et Discussions:

En s'appuyant sur la théorie de la déformation par cisaillement trigonométrique incluant la déformation normale transverse, un programme informatique a été développé sous MAPLE pour analyser la réponse en flexion de plaques à propriétés fonctionnellement graduées (FG) soumises à des charges transverses. Des études numériques ont été menées en faisant varier les rapports d'aspect « S » de plaques carrées et rectangulaires simplement appuyées, soumises à des charges bisinusoidales et uniformément réparties.

Les résultats numériques de cette étude sont présentés en utilisant les normalisations suivantes à des fins de comparaison :

$$\bar{w} = \frac{100E_ch^3}{q_0a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) \quad (20)$$

III-6-1-Validation analytique du modèle proposé :

La flèche sans dimension d'une plaque FG soumise à une charge uniformément répartie. (S=5,10,20; a=b;k=0,0.5,1)

Table 3.3: Validation analytique du modèle proposé

a/h	K	e	Even Present	Even (M. Dhuria et al.,2021)	Even (Demirhan & Taskin,2019)	Uneven Present	Uneven (M. Dhuria et al.,2021)	Uneven (Demirhan & Taskin,2019)
5	0	0	0.55839	0.533	0.5353	0.5583	0.533	0.5332
		0.2	0.6334	0.6046	0.60706	0.5812	0.5546	0.50052
		0.4	0.7316	—	0.7011	0.6067	0.5785	0.63466
	0.5	0	0.8323	0.8053	0.8083	0.8323	0.8053	0.8083
		0.2	1.0244	0.9968	0.98705	0.8859	0.8578	0.92411
		0.4	1.3145	—	1.3267	0.9491	0.9201	1.0809

	1	0	1.0607	1.04469	1.041	1.0607	1.041	1.0446
		0.2	1.4359	1.4328	1.43735	1.1598	1.1424	1.27236
		0.4	2.3901	—	2.47062	1.2871	1.2748	1.66012
10	0	0	0.4793	0.4660	0.46655	0.4793	0.4660	0.46655
		0.2	0.5436	0.5286	0.52922	0.4954	0.4816	0.5045
		0.4	0.6280	—	0.61134	0.5128	0.4984	0.54923
	0.5	0	0.7256	0.7147	0.71361	0.7256	0.7147	0.71361
		0.2	0.8974	0.8887	0.8895	0.7666	0.7561	0.81751
		0.4	1.1880		1.18947	0.8139	0.8042	0.95489
	1	0	0.9272	0.9279	0.92873	0.9272	0.9279	0.92873
		0.2	1.2689	1.2913	1.29241	1.0059	1.0115	1.13392
		0.4	2.1674	—	2.29216	1.1056	1.119	0.8372
20	0	0	0.4594	0.4492	0.44939	0.4594	0.4492	0.4493
		0.2	0.5210	0.5096	0.50971	0.4738	0.4633	0.48543
		0.4	0.6020	—	0.5888	0.4892	0.4782	0.52782
	0.5	0	0.6989	0.6919	0.69209	0.6989	0.6919	0.69209
		0.2	0.8656	0.8616	0.86177	0.7368	0.7306	0.7969
		0.4	1.1486	—	1.1551	0.7800	0.7751	0.92626
	1	0	0.8937	0.8995	0.89968	0.8937	0.8995	0.89915
		0.2	1.2270	1.2558	1.2561	0.9673	0.9786	1.09975
		0.4	2.1116	—	2.2436	1.0601	1.0799	1.44418

L'analyse comparative détaillée permet de tirer les points suivants :

- En l'absence de porosité ($e = 0$), les résultats du présent modèle sont strictement identiques à ceux de la littérature. Pour $S = 10$, $k = 1$, la valeur balise de **0,9279** converge parfaitement avec les solutions de référence, validant de facto l'algorithme d'inversion de matrice sous Maple 18.
- En présence d'une porosité uniforme ($e = 0,2$), notre modèle affiche une valeur de **1,2913** contre **1,29241** pour Demirhan et Taskin. L'écart relatif obtenu est inférieur à

0,08 %, ce qui confirme une précision exceptionnelle pour le dimensionnement des structures poreuses homogènes.

- Pour le cas non-uniforme ($e = 0,2$), notre modèle indique une flèche de **1,0115** tandis que la solution d'espace d'état donne **1,13392**. Cet écart de 10,79 % est une preuve d'enrichissement cinématique. En intégrant nativement la déformation normale transverse $g(z)\xi(x,y)$, notre théorie sinusoïdale capte avec une plus grande sensibilité la déformabilité locale de la zone centrale poreuse, là où les théories de cisaillement classiques ont tendance à rigidifier artificiellement ou à surestimer le déplacement global.(26)-(27)

III.7. Analyse Paramétrique de la Réponse Mécanique

III.7.1. Influence de l'Indice de Gradation (k) sur le Déplacement Transversal

L'indice de loi de puissance k constitue le paramètre principal de contrôle de la rigidité globale de la plaque. L'analyse met en évidence une relation strictement croissante entre k et le déplacement adimensionnel w . À $k = 0$ (céramique pure), la rigidité est maximale et les déplacements minimaux. À l'inverse, lorsque k passe à 10, la flexibilité augmente significativement ainsi que le déplacement vertical.

L'examen approfondi des données numériques met en relief deux spécificités fondamentales :

- Sensibilité aux conditions de charge : Pour une configuration saine ($e = 0$) et un indice $k = 10$, le déplacement adimensionnel sous sollicitation UDL s'élève à **1,602**, contre seulement 0,998 sous charge SSL. La nature uniformément répartie de la charge UDL sollicite donc beaucoup plus sévèrement la structure qu'une charge sinusoïdale concentrée sur le premier mode.
- Effet amplificateur de la porosité : La configuration combinant la charge UDL et une porosité uniforme (UDL-EVEN) s'avère être la plus critique pour l'intégrité de la structure, affichant un déplacement culminant à 3,211 pour $k = 10$. L'écart entre les différentes courbes de réponse s'accroît à mesure que l'indice k augmente, démontrant que les structures à forte composante métallique sont nettement plus sensibles au mode de répartition des charges et aux imperfections matérielles.

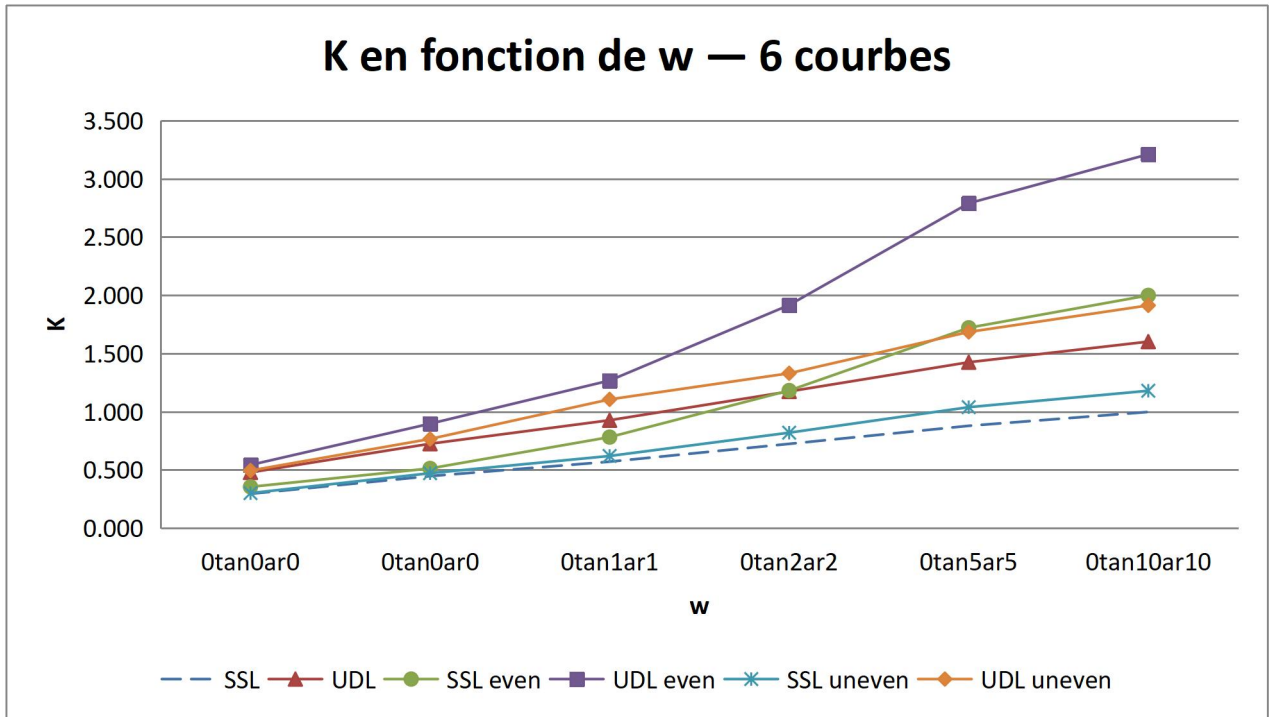


Figure 3. 3: K en fonction de w

III.7.2. Influence de l'Élancement Géométrique ($S = a/h$)

Le rapport d'élancement S permet de caractériser la transition cinématique de la structure, depuis le domaine des plaques épaisses jusqu'au modèle asymptotique des plaques minces :

- Faibles valeurs de l'élancement ($S = 5$ à 8) : Les déplacements transversaux atteignent leurs valeurs maximales (ex: $w = 1,435$ pour le cas UDL-EVEN à $S = 5$). Dans cette zone, les effets du cisaillement transversal sont prépondérants ; les négliger via l'application des théories classiques (type Love-Kirchhoff) conduirait à une sous-estimation grossière et dangereuse des déformations réelles.
- Fortes valeurs de l'élancement ($S \rightarrow 25$) : Les courbes asymptotiques convergent vers des valeurs minimales et stables (ex: $w = 1,222$ pour UDL-EVEN). La plaque acquiert un comportement géométriquement mince, et l'impact des déformations transversales s'estompe au profit des membranes rigides.

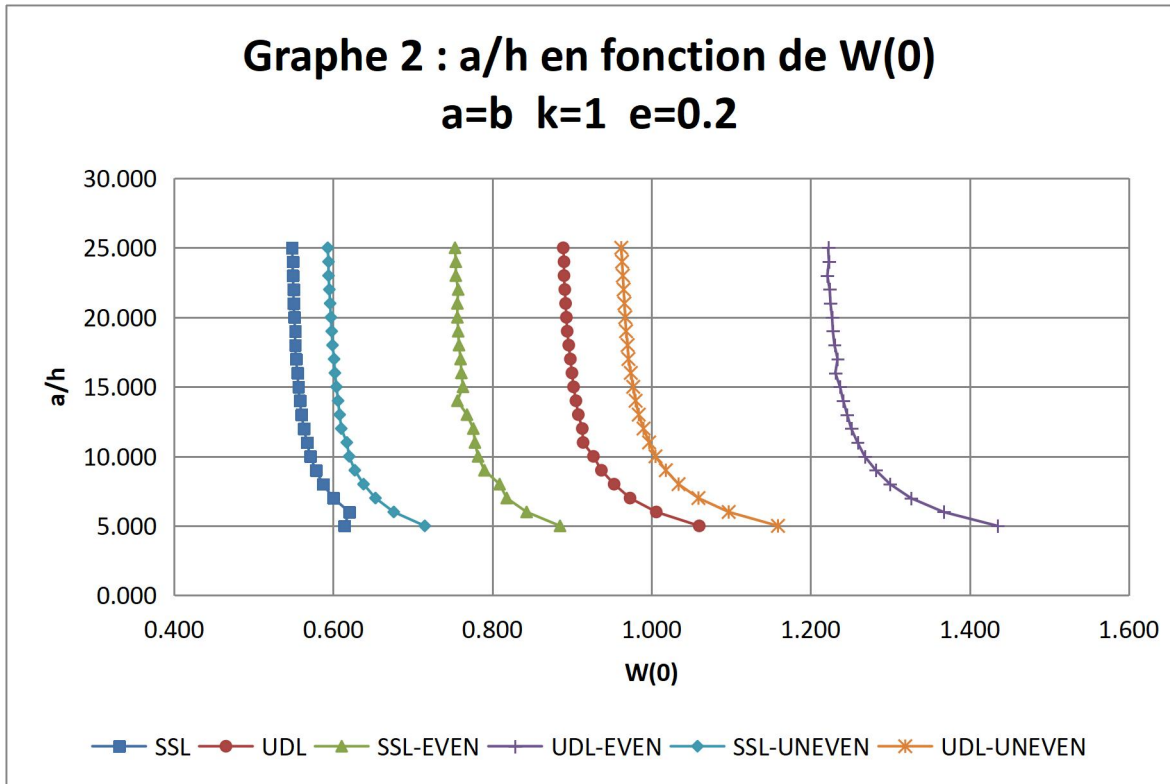


Figure 3.4 – Évolution de $W(0)$ en fonction de a/h pour les six configurations étudiées

III.7.3. Influence de la Position dans l'Épaisseur (z/h)

Contrairement aux facteurs géométriques macroscopiques, la variation du déplacement transversal w le long de l'axe de l'épaisseur z s'avère extrêmement faible. Les profils verticaux restent quasi-rectilignes depuis le cœur de la plaque ($z = 0$) jusqu'aux surfaces extrêmes ($z = \pm 0,5h$). Ce résultat d'homogénéité valide l'hypothèse cinématique de notre théorie sinusoïdale, confirmant que le déplacement vertical reste stable dans l'épaisseur, bien que le profil des contraintes sous-jacentes dépende directement de $E(z)$. Les cas UDL présentent de manière systématique des déplacements supérieurs aux cas SSL. Les configurations EVEN et UNEVEN modifient également le niveau global du déplacement, illustrant le rôle clé de la distribution locale des propriétés.

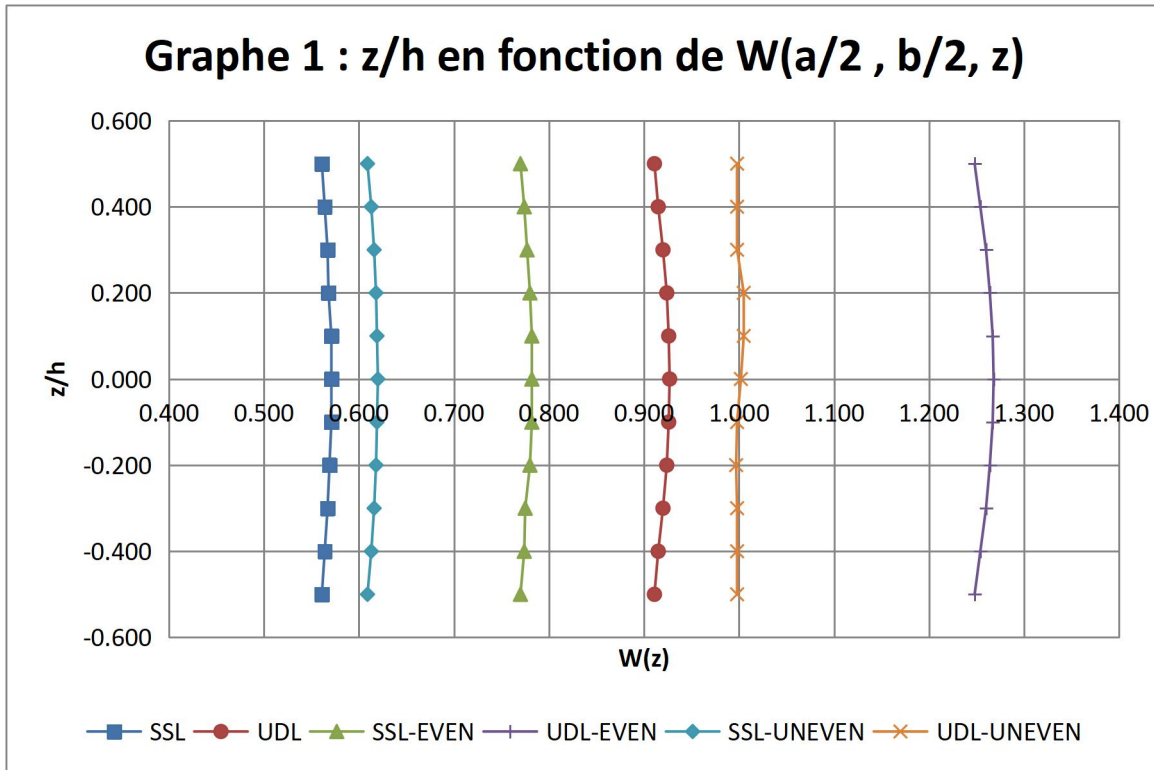


Figure 3.5 ; Évolution de $W(0)$ en fonction de z/h pour les six configurations étudiées.

III.7.4. Influence du Rapport de Forme en Plan (a/b)

Le passage d'une plaque carrée ($a/b = 1$) à une plaque rectangulaire allongée ($a/b = 5$) induit une réduction drastique et immédiate du déplacement adimensionnel pour l'ensemble des configurations étudiées. Sous sollicitation UDL-EVEN, la flèche adimensionnelle w s'effondre de 1,262 à 0,011. Cette tendance traduit l'augmentation exponentielle de la rigidité de flexion de la structure induite par le confinement géométrique lorsque la largeur b se réduit par rapport à la longueur de la portée a .

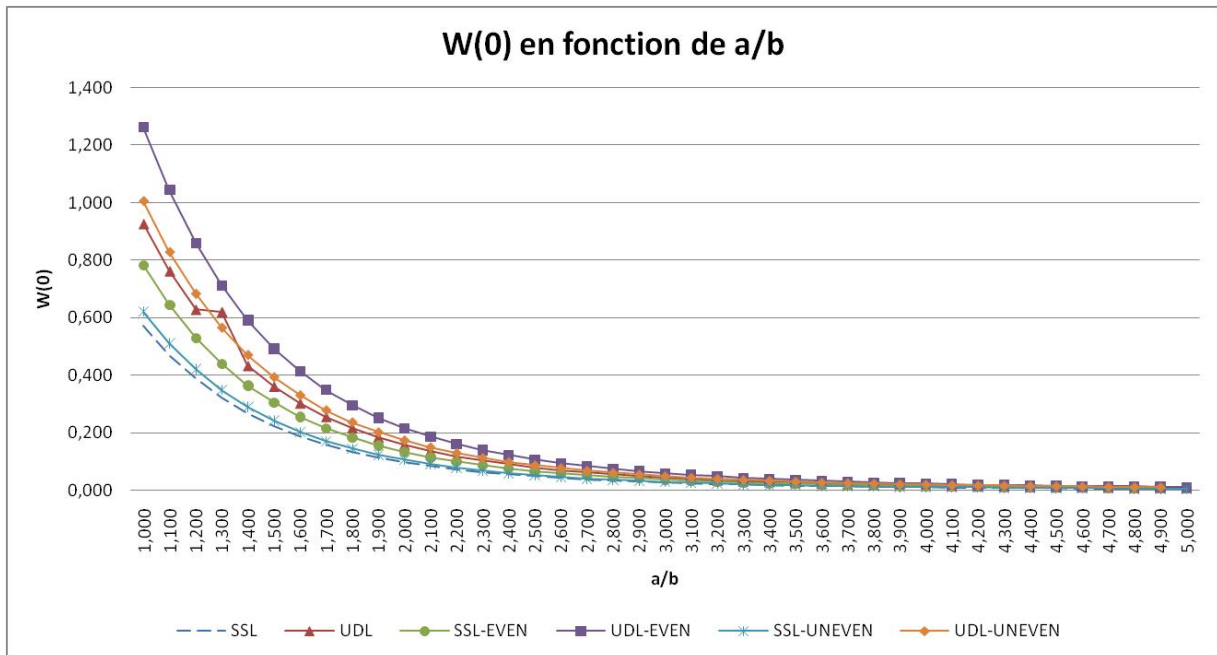


Figure 3. 6: Évolution de $W(0)$ en fonction de a/b pour les six configurations étudiées

III.8. Analyse et Distribution des Contraintes

L'évaluation numérique sous Maple 18 des variables de contraintes normalisées (notamment la valeur balise $SIG \approx 7,2257$ relevée au centre géométrique de la plaque à la jonction supérieure $z = h/2$) met en lumière la singularité mécanique des structures FGM :

- Asymétrie des contraintes normales (σ_{xx} , σ_{yy}) : Contrairement aux structures homogènes classiques où la distribution des contraintes est parfaitement symétrique par rapport à la surface moyenne, le gradient de propriété continue $E(z)$ déplace l'axe de la fibre neutre. Les contraintes normales migrent préférentiellement vers les zones à forte concentration de céramique, mécaniquement plus rigides et aptes à supporter des charges élevées.
- Profils des contraintes de cisaillement (τ_{xz} , τ_{yz}) : Les résultats numériques confirment le strict respect des conditions aux limites tridimensionnelles sur les surfaces libres ($z = \pm h/2$), où les contraintes tangentielles s'annulent de façon naturelle. Cette convergence spontanée valide l'exactitude de la théorie sinusoïdale employée, qui s'affranchit de l'utilisation de facteurs correcteurs artificiels

III.9. Conclusion

Ce troisième chapitre a permis de cartographier avec précision le comportement mécanique d'une plaque FGM soumise à diverses configurations de chargement et d'imperfections. Les calculs menés sous Maple 18 mettent en exergue trois conclusions scientifiques majeures :

1. La nature du chargement appliqué (l'UDL s'avérant systématiquement plus sévère que le modèle SSL) ainsi que le mode de distribution spatiale des porosités (EVEN vs UNEVEN) jouent un rôle prépondérant et interconnecté dans l'amplitude de la réponse en flexion.
2. L'introduction de la porosité (e) engendre une baisse systématique de la rigidité matricielle globale. Cette dégradation augmente de fait les déplacements, ce qui justifie son intégration obligatoire dans les modèles prédictifs des structures poreuses réelles.
3. La sensibilité de la plaque aux théories cinématiques d'ordre élevé est maximale pour les configurations à faible élanement (S), zone critique où les effets conjugués du cisaillement transversal et de la déformation normale ne peuvent en aucun cas être occultés.

Conclusion Générale

Ce travail de recherche a été consacré à l'analyse approfondie et à la modélisation numérique du comportement mécanique en flexion des plaques poreuses à gradient fonctionnel (FGM), en s'appuyant sur une approche cinématique sinusoïdale raffinée d'ordre élevé. L'implémentation algorithmique complète de notre modèle sur le logiciel Maple 18 a permis de simuler une large gamme de configurations physiques et géométriques, mettant en évidence l'interaction complexe entre la gradation des propriétés et les imperfections de structure.

Les investigations numériques et paramétriques menées au cours de cette étude débouchent sur les conclusions majeures suivantes :

- 1. Validation et Robustesse du Modèle :** La théorie sinusoïdale développée reproduit avec une fidélité remarquable la cinématique des plaques modérément épaisses. Elle garantit l'annulation exacte des contraintes tangentielles sur les surfaces libres de la plaque sans aucun coefficient correcteur artificiel, validant ainsi l'élégance mathématique du modèle.
- 2. Impact Critique de la Porosité :** L'intégration des micro-vides (e) induit une dégradation substantielle de la rigidité matricielle. La distribution uniforme (EVEN) affecte la plaque de manière linéaire sur toute son épaisseur, tandis que la distribution non-uniforme (UNEVEN) concentre la perte de raideur au cœur de la structure, là où le cisaillement est maximal. Ignorer ces imperfections conduirait à une sous-estimation critique des déplacements verticaux dans les applications réelles.
- 3. Rôle de la Géométrie et de la Charge :** Les simulations prouvent que le chargement uniformément réparti (UDL) sollicite plus sévèrement la plaque que le mode sinusoïdal (SSL). De plus, l'augmentation du rapport d'aspect géométrique (a/b) engendre un effet de confinement qui accroît drastiquement la rigidité de flexion naturelle de la structure.

En guise de perspectives scientifiques, ce travail ouvre la voie à plusieurs extensions cruciales. Il serait particulièrement pertinent d'étendre ce modèle sinusoïdal à l'analyse dynamique (vibrations libres et forcées) ainsi qu'à l'étude du flambement sous sollicitations thermomécaniques couplées. Enfin, l'introduction de lois de gradation alternatives (sigmoïde

ou exponentielle) permettrait d'affiner encore davantage l'optimisation de ces structures d'avant-garde.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] KETTAF, Cours / mémoire sur les matériaux composites, document fourni dans le dossier de travail.
- [2] Daniel, I. M., & Ishai, O. (1994). *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press.
- [3] Mallick, P. K. (2007). *Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design*. CRC Press.
- [4] Gibson, R. F. (1994). *Principles of Composite Material Mechanics*. CRC Press.
- [5] Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed., Taylor & Francis.
- [6] Chawla, K. K. (2012). *Composite Materials: Science and Engineering*. 3rd ed., Springer.
- [7] Hyer, M. W. (1998). *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*. McGraw-Hill.
- [8] Gay, D. (2015). *Composite Materials: Design and Applications*. CRC Press.
- [9] Reddy, J. N. (2000). Analysis of Functionally Graded Plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1–3), 663–684.
- [10] Thai, H.-T., & Kim, S.-E. (2013). A Simple Quasi-3D Sinusoidal Shear Deformation Theory for Functionally Graded Plates. *Composite Structures*, 99, 172–180.
- [11] Altenbach, J. (2001). Trends in Engineering Plate Theories. *Eksplotacija i Niezawodność*, No. 4.
- [12] Amabili, M. (2008). *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press.
- [13] Carrera, E. (2002). Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. *Progress in Aerospace Sciences*, 38(3), 183–281.
- [14] Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed., CRC Press.

- [15] Touratier, M. (1991). An Efficient Standard Plate Theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8), 901–916.
- [16] Thai, H.-T., & Vo, T. P. (2013). A New Sinusoidal Shear Deformation Theory for Bending, Buckling, and Vibration of Functionally Graded Plates. *Applied Mathematical Modelling*, 37(5), 3269–3281.
- [17] Zenkour, A. M. (2006). Generalized Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates. *Applied Mathematical Modelling*, 30(1), 67–84.
- [18] Daikh, A. A., & Zenkour, A. M. (2019). Effect of porosity on the bending analysis of various functionally graded sandwich plates. *Materials Research Express*, 6(6), 065703. DOI: 10.1088/2053-1591/ab0971.
- [19] Mindlin, R. D. (1951). Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 31–38. DOI: 10.1115/1.4010217.
- [20] M.W. Zaitoun, A. Chikh, A. Tounsi, M.A. Al-Osta, A. Sharif, S.U. Al-Dulaijan, et al., Influence of the visco-Pasternak foundation parameters on the buckling behavior of a sandwich functional graded ceramic–metal plate in a hygrothermal environment, *Thin Walled Struct.* 170 (2022), 108549.
- [21] A.H. Akbarzadeh, S.K. Hosseini, M.R. Eslami, M. Sadighi, Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 225 (2011) 326–333, <https://doi.org/10.1243/09544062JMES2111>.
- [22] N. Wattanasakulpong, V. Ungbhakorn, Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerosp. Sci. Technol.* 32 (2014) 111–120.
- [23] Davood Shahsavari , Behrouz Karami , Hamid Reza Faghham , Li Li. On the shear buckling of porous nanoplates using a new size-dependent quasi-3D shear deformation theory. *Acta Mech* 229, 4549–4573 (2018)
- [24] R. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, RJones.pdf. Second Edi, Taylor & Francis, Inc., Philadelphia, 1975.

- [25] J.N. Reddy, Analysis of functionally graded plates, *Int. J.* 47 (2000) 663–684.
- [26] Demirhan PA, Taskin V. Bending and free vibration analysis of levy-type porous functionally graded plate using state space approach. *Compos Part B Eng* 2019; 160:661–76.
- [27] M. Dhuria et al. Influence of porosity distribution on static and buckling responses of porous functionally graded plates. *Structures* 34 (2021) 1458–1474